

学位論文の要旨

Computer-assisted Analysis of the Sparsest Packing and the Topswops Problem (計算機援用による最疎充填と Topswops 問題の解析)

氏名 木村 健斗 印

数理パズルを題材とするような、数学的な問題は、問題を記述するルールが原始的でかつシンプルな問題であることが多い。それにもかかわらず、このような問題の解の数学的な構造はしばしばきわめて難解なものとなる。本論文では、計算機援用と理論的解析を用いて、最疎充填や Topswops 問題を調査した。

一つ目は、「Topswops」と呼ばれるカードゲームである。1 から n の値が書かれた n 枚のカードのデッキが与えられたとき、デッキの一番上のカードが 1 になるまで次の操作を続ける：もしデッキの一番上のカードが k であるならば、デッキの一番上のカードから k 枚のカードのブロックを反転させる。 n 枚のカードに対する Topswops の最長ステップ数を $f(n)$ とする。50 年来の研究にもかかわらず、 $f(n)$ の正確な値は未だに解明されていない。本論文では、Knuth が開発したアルゴリズムを並列に適用することで、 $f(18) = 191$ と $f(19) = 221$ であることを結論付けた。

二つ目は、「アンチスライド」と呼ばれるパズルである。アンチスライドな詰め方とは、三次元の箱に対して、ある特定の形状の同一のピースを、箱の中に詰められたどのピースもスライドしないように詰められた詰め方である。ある指定された大きさの箱とある指定された形状の同一のピースが与えられたとき、最疎でアンチスライドな詰め方を求める。本論文では、T-テトロミノ、L-トリキューブ、 $2 \times 2 \times 1$ のピースの三つの場合についての最疎でアンチスライドな詰め方を解析した。T-テトロミノピースを用いた二次元正方形の箱の場合についての問題を考える。箱の一边の長さが n の正方形の箱に対して、 $n \not\equiv 0 \pmod{3}$ のとき、最疎な詰め方のピース数はちょうど $\lfloor 2n/3 \rfloor$ であることを、加えて、 $n \equiv 0 \pmod{3}$ のとき、最疎な詰め方のピース数は $2n/3 - 1$ と $n - 1$ の間であることを示した。次に、L-トリキューブを用いたとき、箱の一边の長さ n の三次元空間の立方体の箱の場合についての問題を考える。 $n^2/2$ 個の L-トリキューブのアンチスライドな詰め方の新しい構成を発見した。最後に、箱の体積に対し 48% の充填率となる $2 \times 2 \times 1$ のピースのアンチスライドな詰め方の構成法を与えた。

学 位 論 文 の 要 旨

Computer-assisted Analysis of the Sparsest Packing and the Topswops Problem
(計算機援用による最疎充填と Topswops 問題の解析)

氏 名 木村 健斗 印

Many mathematical problems, such as those on the subject of mathematical puzzles, often are problems whose rule describing the problem is primitive and simple. Nevertheless, mathematical structures of solutions for such a problem can often be extremely challenging to solve. In this thesis, we investigated the sparsest packing and the Topswops problem by using computer-assisted and theoretical analysis.

The first is a card game called “Topswops.” Given a deck of n cards numbered 1 to n , continue the following operation until the top card is 1: If the top card of the deck is k , then turn over a block of k cards at the top of the deck. Let $f(n)$ be the maximum number of steps of Topswops on n cards. Despite 50 years of research, the exact value of $f(n)$ has yet to be determined. In this thesis, by applying an algorithm developed by Knuth in a parallel fashion, we concluded that $f(18) = 191$ and $f(19) = 221$.

The second is a puzzle called “anti-slide.” The anti-slide packing is a packing of identical pieces of some specified shape for a three-dimensional box in such a way that none of the pieces in the box can slide. Given a box of some specified size and identical pieces of some specified shape, we find a sparsest anti-slide packing. In this thesis, we analyzed the sparsest anti-slide packings for the three cases of T-tetrominoes, L-tricubes, and $2 \times 2 \times 1$ pieces. We consider the problem for the case of a two-dimensional square box using T-tetromino pieces. We showed that, for a square box of side length n , the number of pieces in a sparsest packing is exactly $\lfloor 2n/3 \rfloor$ when $n \not\equiv 0 \pmod{3}$, and is between $2n/3 - 1$ and $n - 1$ when $n \equiv 0 \pmod{3}$. Next, we consider the problem for the case of a three-dimensional cubic box of side length n using L-tricubes. We find a new construction of an anti-slide packing of $n^2/2$ L-tricubes. Finally, we give the construction of an anti-slide packing of $2 \times 2 \times 1$ pieces with volume density 0.48.