見取図が備えるべき要件の考察
—— 空間認識能力の育成を主眼として ——

山　本　亮　介・澤　田　麻衣子

On the Requirements for the Sketches of Spatial Figures to Develop Spatial Cognition

Ryosuke YAMAMOTO and Maiko SAWADA

群馬大学共同教育学部紀要　自然科学編
第 73 巻　1—9 頁 2025 年 2 月 別刷

見取図が備えるべき要件の考察
—— 空間認識能力の育成を主眼として ——

山　本　亮　介・澤　田　麻衣子
群馬大学共同教育学部数学教育講座
（2024 年 10 月 16 日受理）

On the Requirements for the Sketches of Spatial Figures to Develop Spatial Cognition

Ryosuke YAMAMOTO and Maiko SAWADA
Department of Mathematics Education, Cooperative Faculty of Education, Gunma University
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan
（Accepted on October 16th, 2024）

1　はじめに

立体図形を提示する方法として、平面上の見取図や透視投象図 (写真も含む) による表示が最も一般的であろう。そもそも人が立体物の形状を認識する上で、視覚によるところが最も大きく、かつ、視覚の仕組みの根本にある「網膜への投象」と、見取図・透視投象図による立体把握とが密接に関連することは明らかである。(例えば [1]。) したがって、人の空間認識能力とは何であるかと考えるとき、その主要部分に「見取図 (投象図) から立体物の空間的な在り方を “正しく” 感知できること」を置くのは自然なことと考える。

用語「見取図」は、小学校第 4 学年の算数においては「全体の形がわかるようにかいた図」「形全体のようすがひと目でわかるようにかいた図」「見ただけで全体のおよその形がわかる図」として学習する (平成 31 年度検定済みの教科書 6 社を参照)。また、後述のように、いかなる投象を使うのか、または、使うべきかについて「小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 算数編」[2] においても明示されていない。本稿では、「見取図」は立体図形の正・斜いずれかの軸測投象による投象図を指すものと設定し、見取図に適した投象とは何かという問いへの一つのアプローチを与える。(用語「投象図」は、より広く、あらゆる投象による立体図形の表示に対して使う。)

投象図の役割には「図学」上の要請に応えるものがある。すなわち、立体図形の各要素の位置関係と実測値とを同時に整理して提示することである。図学においては、投象図から実測値を容易に得られることの優先度は大きい。一方で、投象図を立体図形の空間的な在り方の認識のため、さらに、その能力の育成を目的として利用する場合には、立体図形の形状を正しく知覚できることが最重要事項となり、実測値復元の容易さの優先順位は低くなると言ってよいであろう。

算数の図形領域における、空間認識能力の育成に関わる事項として、「小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 算数編」[2] では、[各領域の内容の概観/ B 図形/ (3)「B 図形」で育成を目指す資質・能力/ ② 図形の構成の仕方について考察すること/ 図形間の関係に着目して、図形の構成の仕方について考察すること] において、

> 図形を構成する要素である面と面、辺と辺等の位置関係に着目しながら、立体図形を見取図や展開図で表したり、逆に、見取図や展開図から立体図形を構成したりすることになる。

と述べ、見取図の有効性を指摘している。(展開図については本稿では考察しない。) この観点に立脚し、平成 31 年度検定済の教科書 (6 社) すべてにおいて、小学校第 4 学年で立方体・直方体の見取図の作図方法が指導され、小学校第 5 学年では柱体 (三角柱と円柱) の見取図が扱われる。また、これら見取図は、立方体・直方体では斜投象図が採用され、柱体の場合には (正) 軸測投象図となる*1。(次章で確認するように、本稿では「正軸測投象」を単に軸測投象と呼び、「斜軸測投象」を斜投象と呼ぶこととする。)

ただし、この投象の使い分けに何か規範・視座といったものが介在するか否かについて、学習指導要

領において言及はない*2。また、透視投象と軸測投象の使い分けについても同様のことが言える。つまり、立体図形学習の導入部で、多くの教科書では身の回りの立体物が実物の写真により例示され、これらはもちろん立体物の透視投象図である。一方で、それらが見取図として描画されると、即座に軸測投象図・斜投象図にとって変わる。この投象の変化の意義についても、学習指導要領においては明らかにされてはいない。

空間認識能力の育成に関わっては、見取図の読み方，描き方を重要とする立場からの数多くの直接的指導法による研究にはじまり、実態調査に基づいた指導法の研究 [3]、空間的思考の水準に関する研究 [4]、図形概念の表現様式と表象様式の関連を表した表象モデルの提示 [5] など多岐にわたって行われている。また、下記のような用語が定義され、空間や空間図形を認識する力について議論されている。

- 「空間思考」[3]: 実在的空間および抽象的空間に関わる課題遂行場面で、いろいろな直感的支えをもとに，意識的に空間的心象をつくり心的操作をする知的活動。
- 「空間観念」[6]: 目に見える具体的な物あるいは感覚的にとらえられる物を通して，その背後にある空間としての抽象的・理想的なものを感知することができる力。
- 「空間観念」[7]: 空間における事物をイメージでき，広がりを意識し，空間を自由に操作できるもの。
- 「空間直観力」[8]: 実践からの概念規定を参考にした能力をサーストンによって下位分類された空間能力に対応させて分類し，その能力の総体として捉えている。
- 「空間（図形）認識の力」[9]:「3 次元空間内に在る図形（モノ）」の 2 次元と 3 次元の間の変換の力。

本稿では、空間認識能力の育成として、「見取図 (投象図) から立体図形を復元・感知する能力の育成」に焦点を絞り、この目的に照らして見取図 (投象図) が備えるべき要件を整理する。その上で、各要件を透視投象・軸測投象・斜投象のそれぞれがどう充足するか、または、しないかを検討する。その結果として、斜投象の特性であるところの「立体図形に “正面” を定め、その面を “歪めず” 投象すること」に注目し、その意義について考察したい。

まずは、次章で各種投象の定義とその特性を簡単に振り返り、さらに、本稿で考察する投象にはベクトル表示を与えることで、投象間の関係性を俯瞰する。加えて、空間内の平面から投象面への、各投象が導く変換を整理する。

2 準備

2.1 各種投象の定義と特性

本稿を通して、立体図形の要素 (辺や面など) が投象により「退化する」とは、要素の投象像の次元が本来の次元から 1 つ下がることを意味する。

■正投象 水平面に置かれた立体図形に対し、直立面を設定し、立体図形を水平面と直立面に正射影するもの。複面投象である。それぞれの投象面に平行な平面から投象面への変換は合同変換であるため、退化しない線分の実測値が容易に復元される。すなわち、立体図形の多くの要素の実測値情報の提示に重きを置く一方、特に透視投象に比して、「自然な見え方」からの乖離がある。これは、透視投象図が立体図形の「自然な見え方」であると規定する本稿の立場 (第 3.1 節で述べる) に立っての言明である。

以降の投象は全て単面投象である。

■標高投象 立体図形を鉛直方向に上から正射影し、退化する高さの情報を等高線により表示するもの。2 点の水平方向の位置関係の把握に適する一方、(退化する) 高さ方向も含めた把握は直感的ではない。よって、一つの立体図形の表示に採用するメリットは少ない。

■透視投象 空間内の立体図形から離れた 1 点 (視点と呼ぶ) を定め、立体図形と視点との間に投象面を置き、立体図形の各点を、その点と視点とを結ぶ直線が投象面と交差する点に移すもの。立体図形と視点の位置関係により、立体図形を構成する面が退化しないようにできる。後述第 3.1 節において、立

体図形の「自然な見え方」を「透視投象図に等しいもの」と設定する。

以下の 2 つは本稿の考察の中心にある投象である。ただし、次に述べる「軸測投象」という呼称は、「正軸測投象」と「斜軸測投象」とを含む広い概念に与えることもあるが、本稿では、上述の分類で正軸測投象に当たるものを「軸測投象」と呼び、斜軸測投象を「斜投象」と呼ぶ。

■軸測投象　空間内の互いに直交する 3 軸を立体図形に対し設定し、さらに、3 軸がいずれも斜交する投象面をとり正射影するもの。通常、3 軸の 1 つに鉛直方向をとり、投象図は、鉛直方向軸の像が上下方向となるよう表示される。典型例の直方体に対しては、3 軸を縦横奥行きに設定すれば、全ての辺が退化しない。したがって、(表面にある) どの面も退化しない。

■斜投象　軸測投象では投象面に対し正射影するところを、投象面に斜交する方向に射影するように変更したもの。典型例の直方体の場合に、3 軸を縦横奥行きに設定すれば、全ての辺が退化しないことも軸測投象と同様であるが、斜投象ではある面を投象面と平行に置いても (このような面を「正面」と呼ぶこととする)、つまり、そのように 3 軸を設定しても、正面と垂直な面が退化しない。

2.2　各種投象の特性、投象間の関係性

ここでは、軸測投象、透視投象、斜投象の順にベクトル表示を与え、これにより、3 種の投象間の繋がりを確認する。また、各投象が空間内の様々な平面をどう投象面へと移すのかを整理する。

まず、ベクトル表示の方針として、次を共通に設定する。

- 立体図形を特定せず、3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ 上の任意の点を (同じ $\mathbb{R}^3$ 内に置かれた) 投象面上の点へと移す写像として、各投象を記述する。
- 3 次元空間上の点 (投象面上の点を含む) は、その位置ベクトルにより表示する。「点 $\mathrm{P}(\vec{p})$」のように、点の名称につづけて、カッコ内でその位置ベクトルを表記する。
- 各投象で設定される直交 3 軸を $\mathbb{R}^3$ に自由にとる代わりに、直交 3 軸は $\mathbb{R}^3$ に備わる x, y, z-軸に固定し、対して投象面を、原点を通り、ある単位ベクトル $\vec{n}$ を法線ベクトルに持つ平面として与える。この投象面を $P_{\vec{n}}$ と表記する。
- 投象面の法線ベクトル $\vec{n}$ に関する $\mathbb{R}^3$ の直和分解、すなわち、$\vec{n}$ が生成する 1 次元線形部分空間 $\langle\vec{n}\rangle$ とその直交補空間 $\langle\vec{n}\rangle^\perp$ の直和への分解
$$\mathbb{R}^3 = \langle\vec{n}\rangle \oplus \langle\vec{n}\rangle^\perp$$
に関し、$\mathbb{R}^3$ から $\langle\vec{n}\rangle^\perp$ への射影を $\pi_{\vec{n}}$ と表記する。つまり、
$$\forall\vec{p} \in \mathbb{R}^3, \quad \pi_{\vec{n}}(\vec{p}) = \vec{p} - (\vec{p}, \vec{n})\vec{n}.$$
ここで、$(\vec{p}, \vec{n})$ は 2 つのベクトル $\vec{p}, \vec{n}$ の内積を表す (以下でも同様)。写像 $\pi_{\vec{n}}$ は線形写像であることに注意しておく。
- 単位ベクトル $\vec{m} \in \mathbb{R}^3$ を法線ベクトルにもち、空間内の点 A を通る平面を $P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ と表記する。さらに、$P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ をこの平面上の点の位置ベクトルの集合とみなす。つまり、点 A の位置ベクトルを $\vec{a}$ として、
$$P_{\vec{m},\mathrm{A}} = \left\{ \vec{p} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; (\vec{p} - \vec{a}, \vec{m}) = 0 \right\}.$$

■軸測投象のベクトル表示　上で定義した射影 $\pi_{\vec{n}}$ が、軸測投象の上記設定におけるベクトル表示となる。これを利用して、$\mathbb{R}^3$ 内の直線を軸測投象して得られる直線のベクトル表示を与える。

> $\mathbb{R}^3$ 内の直線 ℓ は、方向ベクトルに $\vec{d}$ をとり、点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通るとする。ℓ 上の任意の点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は $\vec{p} = t\vec{d} + \vec{a}$ $(t \in \mathbb{R})$ と表され、$\pi_{\vec{n}}$ の線形性より、
> $$\pi_{\vec{n}}(\vec{p}) = t\pi_{\vec{n}}(\vec{d}) + \pi_{\vec{n}}(\vec{a}).$$
> よって、$\pi_{\vec{n}}(\vec{p})$ は、方向ベクトル $\pi_{\vec{n}}(\vec{d})$ をもつ直線上の点 (の位置ベクトル) である。ただし、$\vec{d} \in \langle\vec{n}\rangle$ の場合には、$\pi_{\vec{n}}(\vec{d}) = \vec{d} - (\vec{d}, \vec{n})\vec{n} = \vec{0}$ であり、直線 ℓ は 1 点へと退化する。

この表示から、投象面上に投象された直線の方向ベクトルが元の方向ベクトルにのみ依存することも分

かる。よって、平行な 2 直線、すなわち、同じ方向ベクトルをもつ 2 直線は、退化しないならば、投象面上の像においても同じ方向ベクトルをもつ、つまり、平行であることが即座に従う。

次に、空間内の平面 $P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ から投象面 $P_{\vec{n}}$ への $\pi_{\vec{n}}$ による対応について整理する。下の囲みに示すように、$\pi_{\vec{n}}$ がアフィン空間 $P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ から $\langle\vec{n}\rangle^{\perp}$ へのアフィン変換を与えることが確かめられる。

> アフィン空間 $P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ の随伴ベクトル空間 (アフィン空間上の 2 点の差の全体が構成するベクトル空間) は $\langle\vec{m}\rangle^{\perp}$ である。つまり、$\forall\vec{p},\vec{q}\in P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ に対し、
>
> $$(\vec{p}-\vec{q},\vec{m})=(\vec{p}-\vec{a},\vec{m})-(\vec{q}-\vec{a},\vec{m})=0$$
>
> より $\vec{p}-\vec{q}\in\langle\vec{m}\rangle^{\perp}$ であり、逆に、$\forall\vec{v}\in\langle\vec{m}\rangle^{\perp}$ が $\vec{p},\vec{q}\in P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ により $\vec{v}=\vec{p}-\vec{q}$ と表される。また、$\langle\vec{n}\rangle^{\perp}$ は自身を随伴ベクトル空間とするアフィン空間である。写像 $g:\langle\vec{m}\rangle^{\perp}\to\langle\vec{n}\rangle^{\perp}$ を
>
> $$g(\vec{p}-\vec{q})=\pi_{\vec{n}}(\vec{p})-\pi_{\vec{n}}(\vec{q})$$
>
> で定めると、$\pi_{\vec{n}}$ の線形性より $g=\pi_{\vec{n}}|_{\langle\vec{m}\rangle^{\perp}}$ であり、g は線形写像であると分かる。よって、$\pi_{\vec{n}}:P_{\vec{m},\mathrm{A}}\to\langle\vec{n}\rangle^{\perp}$ はアフィン変換である。

ただし、

i) $\vec{m}\in\langle\vec{n}\rangle^{\perp}$ の場合、つまり、$P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ が投象面に垂直である場合は、(全体が 3 次元であることから) $\vec{n}\in\langle\vec{m}\rangle^{\perp}$ となる。よって、$\vec{n}$ を方向ベクトルにもち、点 A を通る直線を考えると、この直線は $P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ に含まれ、上で確かめた通り、$\pi_{\vec{n}}$ により退化する。よって、平面 $P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ も退化する。

ii) $\vec{m}\in\langle\vec{n}\rangle$ の場合、つまり、$P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ が正面の場合にのみ、線形写像 $\pi_{\vec{n}}|_{\langle\vec{m}\rangle^{\perp}}$ が恒等写像となり、よって、平面 $P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ から投象面 $P_{\vec{n}}$ への対応は平行移動、すなわち、合同変換となる。したがって、紙面に表示された投象図との間では、相似変換である。

■透視投象のベクトル表示　投象面 $P_{\vec{n}}$ に対し、視点を点 $\mathrm{Q}(t\vec{n})$ $(t>0)$ に置く透視投象を $\pi_{\vec{n},t}$ と表記すると、

$$\forall\vec{p}\in\mathbb{R}^3,\quad \pi_{\vec{n},t}(\vec{p})=\frac{t}{t-(\vec{p},\vec{n})}\pi_{\vec{n}}(\vec{p}).$$

が成立*3。これより、次が従う。

$$\lim_{t\to\infty}\pi_{\vec{n},t}=\pi_{\vec{n}}.$$

空間内の平面 $P_{\vec{m},A}$ から投象面 $P_{\vec{n}}$ への変換 $\pi_{\vec{n},t}|_{P_{\vec{m},A}}$ は、$\vec{m}\notin\langle\vec{n}\rangle^{\perp}$ であれば射影変換である (2 次元射影変換の定義そのもの)。ただし、

i) $\vec{m}\in\langle\vec{n}\rangle^{\perp}$ の場合に、$P_{\vec{m},A}$ は $\pi_{\vec{n},t}$ により退化する。($\pi_{\vec{n}}$ により退化することからも従う。)

ii) $\vec{m}\in\langle\vec{n}\rangle$ の場合、つまり $P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ が正面である場合にのみ、$\pi_{\vec{n},t}|_{P_{\vec{m},A}}$ は相似変換となる。

■斜投象のベクトル表示　投象面 $P_{\vec{n}}$ に対し、ベクトル $\vec{d}\notin\langle\vec{n}\rangle^{\perp}$ を投象方向とする斜投象を $\pi_{\vec{n},\vec{d}}$ とすると、

$$\forall\vec{p}\in\mathbb{R}^3,\quad \pi_{\vec{n},\vec{d}}(\vec{p})=\vec{p}-\frac{(\vec{p},\vec{n})}{(\vec{d},\vec{n})}\vec{d}$$

であり、次が従う。

$$\pi_{\vec{n},\vec{n}}=\pi_{\vec{n}}.$$

$\pi_{\vec{n},\vec{d}}$ も線形写像であることと、軸測投象 $\pi_{\vec{n}}$ の項で行った、空間内の直線・平面の投象に関する考察の結果が全て、$\pi_{\vec{n}}$ の線形性のみを根拠とすることから、$\pi_{\vec{n},\vec{d}}$ について同様の結果が得られることが分かる。すなわち、$\pi_{\vec{n},\vec{d}}$ によって、退化しない面は投象面へとアフィン変換される。(よって、退化しない面上の 2 直線の平行関係は保存される。) また、平面 $P_{\vec{m},\mathrm{A}}$ は、$\vec{m}\in\langle\vec{d}\rangle^{\perp}$ のとき退化し、$\vec{m}=\vec{n}$ のときにのみ、投象面へと合同変換され、投象図との間では相似変換となる。

3　空間認識能力の育成に適した投象

3.1　立体図形の「自然な見え方」と透視投象

立体図形の投象図が空間認識能力の育成の目的にどう適合するかを考察するにあたり、本研究では、

第 1 章で述べた通り、立体図形の空間的形状を投象図から感知し易いか否かに重きを置く。換言すると、辺や面といった立体図形の各要素の空間的位置取りを直感的に認識できる投象図が空間認識能力の育成に資すると考えるのである。本稿では、立体図形の直感的認識のためには、投象図が立体図形の「自然な見え方」に近くあることが必要と考え、さらに、透視投象図が立体図形の「自然な見え方」である、と規定した上で考察を進めることとする。

ただし、この立場には次のデメリットが伴うと考えられる。すなわち、我々が両眼視していること、さらには、視点を移動させながら立体物を観察し、得られた視覚情報を脳内で総合すること、これらも「見る」動作の基本的要素と言える。この意味において、静止画であるところの透視投象図だけを「自然な見た目」と定めることで、我々の「空間認識」を構成する諸要素のうちのいくらかを削ぎ落とすかもしれない。しかし、この点の追求は本研究の範囲を超えるものであり、一方で、本稿の目的である「空間認識能力の育成に資する投象とは何か」を整理する上で、我々の単純化が浮き彫りにする様相にも一定の価値があると考えるのである。

3.2 立体図形の空間的把握のための要件

ここで、投象図が立体図形の空間的把握のために備えるべき要件を

(1) どの投象にも本来的に備わるもの
(2) 投象によって要件の充足度に差異のあるもの

に分けて整理する。もちろん、本研究の興味の中心は (2) にある。また、この要件列挙において、我々は (図学上は重要な) 要件

「線分の長さの実測値の取得しやすさ」

をはじめから考察対象としない。透視投象 (=「自然な見え方」) は空間内の線分の長さを空間内の位置に依存して様々に変化させて投象する。したがって、立体図形の空間的把握を目的とする場合には、上記要件の必要性は無視できるほど小さいと判断するものである。

■ **(1) 本来的に備わる要件**:

(1-1) 立体図形の構成要素 (辺、面など) の接続関係の感知しやすさ。
(1-2) 鉛直方向の感知しやすさ。
(1-3) 立体図形を構成する面の退化が少ないこと。

(1-1) は、どの辺と辺が端点を、どの面と面が境界の辺を共有しているか、という情報の受け取りやすさについての要件である。どの投象も連続写像であるので、この情報が壊されることはない。ただし、退化していない要素に限る。

(1-2) については、前章の軸測投象の定義において補足的に述べた通りである。すわなち、鉛直方向軸の投象が上下方向となるように、投象図を (適度に回転させて) 提示することが暗黙の了解となっていることから、どの投象においても充足される。

(1-3) は、直交 3 軸の適切な選択により充足される。前章のベクトル表示における設定で言い換えると、投象面 $P_{\vec{n}}$ の選び方 (よって、単位ベクトル $\vec{n}$ のとりかた) により面の退化を防ぐことができる。(ただし、立体図形を構成する面が多数ある場合には、その全てに対し満足できる投象面を選ぶことは困難となりうる。)

■ **(2) 充足度に差異の生じる要件**:

(2-1) 辺と辺の平行関係の感知しやすさ。
(2-2) 線分の長さの大小関係、比率の感知しやすさ。
(2-3) 角の大きさ、特に直角の感知しやすさ。
(2-4) 角の大きさの大小関係の感知しやすさ。
(2-5)「自然な見え方」に近いこと。

(2-1)、(2-3) について補足を加える。

(2-1) は、より一般的に「辺と辺の位置関係の感知しやすさ」との要請とせず、平行関係のみに絞ったのは、平行関係以外のより詳細な位置関係を的確に表現できる投象が (少なくとも以下の考察対象には) ない、との考えによる[*4]。

(2-3) の必要性について。「線分の長さの取得しや

すさ」を考察から除外する反面、角の大きさについての本要件を除外しないのは、次の理由による。透視投象において、線分の長さ同様、角の大きさもやはり一般には保存されないが、投象面に平行な平面に限っては投象面へと相似変換されることから、この平面上の角の大きさは保存される。軸測投象・斜投象においても、前章でベクトル表示により確かめたように、空間内の平面 $P_{\vec{n},A}$ は、投象面 $P_{\vec{n}}$ へと合同変換され、よって、紙面に表示された投象図との間では相似変換となり、したがって、角の大きさが保存される。

3.3 各投象における検討

軸測投象・斜投象が、前節で「(2) 充足度に差異の生じる要件」に掲げた各項目をそれぞれどの程度、およびどのような形で満足するか検討する。この検討の比較対象として、まずば透視投象において要件の充足度合いを確認する。

前章と同様に、投象面に平行な平面を全て「正面」と呼称することとする。また、立体の側面のうち「正面」に含まれるものを立体の「正面」と呼んでもよいこととする。(「正面」の通常の用法と小さな差異がある。すなわち、例えば直方体の場合、ある側面を「正面」に設定するとき、奥に位置する平行な側面も「正面」であると考える。)

■透視投象 写像 $\pi_{\vec{n},t}|_{P_{\vec{m},A}}$ は射影変換である。(ただし、退化しない場合において。以下でも同様である。)

(2-1) 射影変換が (正面上にはない)2 直線の平行関係を保存しないことが、平行関係の感知に及ぼす影響については次のように考えられる。すなわち、正面でない平面上の平行線の投象は投象面上の消失点で交わることから、平行関係の感知のためには消失点が知覚されればよいが、一般には容易とは言えない。

(2-2) 線分の長さ、線分比ともに射影変換の不変量ではなく、さらに、比較する 2 線分は、それぞれ空間における位置に依存して、投象面での長さの縮小率が異なることから、本要件は基本的には満たされないと言える。例外として、立体のある面を正面に設定できる場合がある。正面は投象面へと相似変換されるので、その面上の線分の大小関係、比率はそのまま保存される。しかし、例えば直方体が典型的であるが、ある側面を正面と設定してしまうと、他の多くの側面がその裏側に隠れてしまい、直感性を欠く投象図となることがしばしば起こる。

(2-3) 角の大きさは、やはり射影変換の不変量でないので、直角を含め、一般には感知しにくい。ただし、次に述べるような特定の角については、その限りではない。

i. 鉛直方向が投象面の上下方向として示されることから、水平面が感知しやすい場合には、この 2 方向がなす直角 (多くの場合、主要な直角である) は感知しやすいと言える。多くの投象図では、立体の「底面」が感知され、よって、底面と鉛直方向の直立面がなす直角は認識しやすい。

ii. 正面は投象面へと相似変換され、よって、角の大きさは保存される。ただし、立体の側面を正面に設定するうえでの障害は、(2-2) の検討で述べた通り。

(2-4) 2 線分の大小関係の項と同様、角の大きさが射影変換の不変量でないことと、特に異なる平面に属する 2 つの角は、異なる射影変換による変形を受けることから、その大小比較は困難となる。正面上の角は例外となること、しかし、正面の設定にしばしば困難が伴うことは、(2-2) で述べたことに等しい。

(2-5) 第 3.1 節での規定の通り、本稿では透視投象はこの要件を完全に満たすとする。

■軸測投象 写像 $\pi_{\vec{n}}|_{P_{\vec{m},A}}$ はアフィン変換 である。

(2-1) アフィン変換は 2 直線の平行関係を保存する。すなわち、立体図形の平行な 2 辺は投象面上でも平行となるので、平行関係の把握が容易となる。

(2-2) 線分の長さの投象図における縮小率が投象面に対する角度 (線分の方向ベクトルと $\vec{n}$ との

なす角) に従って変化する。したがって、例えば直方体を全ての面が退化しないように置く ($\vec{n}$ を定める) と、全ての面が正面ではなくなり、異なる面に属する辺どうしの大小比較は直感的でない。

一方、2 線分が同一平面上にある場合、特に同一直線上にある場合には、それらは同じアフィン変換で投象され、線分比がアフィン変換の不変量であることから、その長さの比率は投象図において直感的に感知されうる。典型例としては、線分の中点は、真に中点として表示される。

(2-3) 角の大きさがアフィン変換の不変量でないことから、透視投象での検討内容と全く同様となる。ただし、立体に正面を設定するうえでの困難の在り方に小さな違いがある。すなわち、直方体の 1 つの面を正面とするとき、軸測投象では、その面に直交する他の側面が退化することとなる。

(2-4) 前項と同様に、この要件も透視投象での検討内容に同じ。

(2-5) 軸測投象は透視投象の極限である。つまり、視点を立体図形からある程度遠くとった透視投象図は、同じ投象面への軸測投象図に十分近い。この意味で、本要件は満たされる。

■斜投象　写像 $\pi_{\vec{n},\vec{d}}|_{P_{\vec{m},A}}$ はアフィン変換 である。

(2-1) 軸測投象での検討内容と変わるところはない。

(2-2) 軸測投象での検討内容と変わるところはない。

(2-3) 軸測投象での検討内容とほぼ同様だが、斜投象は、(他の投象と比較して) 立体に正面を設定しやすい。すなわち、典型例としての直方体において、1 つの面を正面とするとき、斜投象では、投象方向が投象面の法線方向と異なることから、他の面も退化させない。

(2-4) 前項と同様。つまり、正面の設定し易さを除き、軸測投象での検討内容に同じ。

(2-5) 斜投象は、もはや透視投象の極限でなく、投象方向が投象面の法線方向と大きく異なる場合 (つまり、ベクトル $\vec{n}$ と $\vec{d}$ のなす角が大きい場合)、斜投象図は透視投象図との違いを感じさせる。つまり、「自然な見え方」からの乖離が生じる。

4　まとめ

4.1　軸測投象・斜投象の優位性

ここに述べる投象の「優位性」とは、要件 (2-1)–(2-5) をより多く充足することを意味する。透視投象との比較において、軸測投象・斜投象のもつ優位性は、要件 (2-1)–(2-4) に現れ、これらは全て、アフィン変換が射影変換に対して持つ特性、つまり、アフィン変換が「2 直線の平行関係」と「同一直線上の 2 線分の線分比」を不変量に持つこと (そして、射影変換がこれらを不変としないこと) から生じるものであった。ただし、この優位性が発揮されるのは、空間内の同一平面に属する線分や角に限ってである。また、正面の投象についても例外的であり、これは次節で詳述する。

4.2　「正面」を設定する意義

透視投象・軸測投象・斜投象のいずれにおいても、立体図形のある側面が正面であるように投象することは、その側面だけに注目するならば、立体図形の空間的把握の容易さにおいて大きなメリットを持つ。すなわち、正面は投象面へと相似変換され、相似変換が「任意の 2 線分の線分比」、「角の大きさ」を不変量に持つこと (と、アフィン変換でもあること) から、正面では前章の要件 (2-1)–(2-5) が全て充足される。したがって、正方形は正方形、正三角形は正三角形として表示され、最も直接的に形状把握がなされる。この形状把握が立体図形の弁別につながる。

ただし、どの投象においても、立体図形の一側面を正面に置くことには、多くの場合に代償が伴う。透視投象・軸測投象では、直方体の投象で正面と垂直な側面が正面の奥に隠れる、もしくは退化してしまう。斜投象では、この点が克服される。軸測投象に比べると、他の面を退化させずに正面を設定で

き、要件 (2-3)、(2-4) の充足度を高めることができる。また逆に、要件 (2-3)、(2-4) における斜投象の優位性が、「正面」の設定から生じるもののみであることから、「正面」を設定しない斜投象は、軸測投象に対する何のメリットも持たないとも言える。ただし、斜投象においても「正面」設定によるトレードオフがあること、つまり、軸測投象から離れること、よって、透視投象 (=自然な見た目) からも離れる特性を持つことに注意が必要である。

4.3 課題

次を今後の研究に委ねる。

- 斜投象が不自然さをもたないために、軸測投象からの離れ度合いをどの程度に抑えるべきか。これを定量的に提示したい。投象面の法線方向 $\vec{n}$ と斜投象の投象方向 $\vec{d}$ とのなす角が指標となると考えるが、一方で、どこからが「不自然さをもつ」か、という人間の認識に関わる問いに定量的に答えるための展望は持てていない。
- 3.2 節に整理した、投象図に求める要件群は、その十分性を詳細に検討するには至っていない。
- 本稿では、透視投象図が「自然な見た目」と同等であるとの立場をとったが、3.1 節でも触れた通り、両眼視や視点の移動を伴って物を見ることを勘案するとき、斜投象であっても視覚認識との自然な連関をもつことが説明されるかもしれない。また、その観点から、本研究では見い出せていない斜投象の特性・意義が明示されるかもしれない。
- 空間認識能力の育成と投象図との関わりとして、本稿は「投象図から立体図形を復元する能力」に焦点を絞り、逆方向の「立体図形から投象図を描画する能力」には触れなかった。本稿で与えた各投象の特性の検討内容は、この方向においても、各種投象の適合性を論じる材料となるかもしれない。

引用・参考文献

[1] 宮本 敏夫, 脳のはたらき 知覚と錯覚, 株式会社ナツメ社, p.16, p.166, 2002.

[2] 文部科学省, 小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説 算数編, 日本文教出版, 2018.

[3] 狭間節子代表, 数学教育における空間思考の育成についての研究, 平成 9 年度〜平成 11 年度科学研究費補助金 (基盤研究 (C)(2) 研究報告書), 2000.

[4] 影山和也, 数学教育における空間的思考の水準に関する研究―空間的思考の様相を特定する観点と変容について, 第 33 回数学教育論文発表会論文集, pp.301-306, 2000.

[5] 川嵜道弘, 図形指導における図形概念の理念性と客観性の認識について, 全国数学教育学会誌 数学教育学研究, 8, pp.69-81, 2002.

[6] 新算数教育研究会, 豊かな空間観念を育てる, 東洋館, p.8, 1991.

---

*1 6 社すべてで、円柱の見取図は正軸測投象図だが、三角柱の見取図については、底面の三角形の形状が明示されないため、正軸測投象図と断定はできない。また、6 社のうち 1 社だけは、確実に斜投象の三角柱の見取図をかく指導が行われている。

*2 中学校では、見取図を描くこと、見取図から性質を読み取ることを通して、空間図形の持つ性質を考察することが求められているが、学習指導要領においては、「見取図、展開図、投影図を目的に応じて相互に関連づけて扱うことが大切である」と述べるに留め、見取図の仕組みに関わる学習への言及はない。高等学校の学習指導要領では、投象図に関わる記述はない。

*3 数式中の分母が 0 になるのは、$t = (\vec{p}, \vec{n})$ のときであるが、このとき点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は、投象面に平行で視点 $\mathrm{Q}(t\vec{n})$ を含む平面上にある。この平面上の点は透視投象によって投象されない。

*4 「面と面の平行関係」も、空間図形の形状把握において重要となるが、投象図への要請からは外した。

そもそも、「面」および「面の形」を我々が投象面上でどう感知するのか、を起点に考えると、我々は面を「面として捉えることのできる図形」から見て取っている (典型的には、立体の側面を形作る多角形。)、と本稿では捉える。したがって、2 平面の平行関係の把捉についても、図上で面として感知される図形を 2 つ捉え、改めてこれらの図形の対応する各辺の関係を確認し、それを複合的に処理してしている、と捉えるのである。

以上より、「面と面の平行関係」は「辺と辺の平行関係」に帰着されると考えるのである。

[7] 赤井利行, 空間観念の育成に向けて, 学校教育研究会, p.7, 1997.
[8] 國本景亀, 空間直観力と論理的思考力を育成するための教材開発と指導法の改善, 平成 6〜7 年度科学研究費補助金 (一般研究 (C) 研究報告書), 1996.
[9] 澤田麻衣子・岡部恭幸,「投象」による空間（図形）認識の力の変容, 数学教育学会誌 2003, Vol.44, No.3.4, pp.85-92, 2004.