高校数学における数学的概念の関係性

金井孝太

群馬大学教育実践研究　別刷
第 26 号　9～15 頁　2009

群馬大学教育学部　附属教育臨床総合センター

高校数学における数学的概念の関係性

金　井　孝　太

群馬大学大学院教育学研究科数学教育専修

(2008年10月31日受理)

1. はじめに

教師が高校数学で学習する数学的概念の関係性を捉えておくことは，学習者に対して，学習者の持つ概念から新しく学習する概念に関する情報を与えることを可能にする。また，数学的概念の関係性を捉えることにより，学習者にとって学習した概念は記憶に定着しやすく，概念に関する情報を記憶から検索しやすくなる。筆者は，学習者が数学的概念の相互関係性を捉える視点として，合成，拡張，類比という視点を考えている。本稿では，この3つの視点を基にして，学習者が数学的概念をどのように関係づけることができるのかを考察する。ここで，数学的概念とは，数学に関する概念だけでなく，定理や式変形といった操作を含むものとする。

本稿の目的は，高校数学における数学的概念の関係性を考察することである。数学的概念の関係性に基づき，本稿では，数学学習における「学習内容それぞれが独立している学習」という連続性のない学習認識の解消への示唆を与える基礎を築くことを目的とする。

2. 数学的概念の関係性

学習者は，高校数学学習を通して新しい数学的概念を獲得したとき，新しい概念を学習者自身の経験や思考によって，既に持つ概念に関係づけることになる。うまく関係づけられた概念は，さまざまな場面において適応可能性が高くなり，学習者にとって，有用な心的道具となる。このような学習を，Skemp(1989/1992)は知的学習とした。また，Skemp(1989/1992)は知的学習とは異なり，数式や定理を暗記するような学習を習慣学習とした。習慣学習の短所は，習慣学習によって得られた知識は次の学習に何の助けにもならないことと，これらの規則はある限られた範囲の問題に対してしか働かないことである。さらにSkemp(1989/1992)は,「ほとんどの教科の学習には，知的学習と習慣学習の組み合わせが必要である(p.59)」と述べ，知的学習と習慣学習のどちらか一方だけでの学習は難しいことを指摘した。第2項では，習慣学習と知的学習それぞれの長所や短所を踏まえたうえで，学習者にとって，さまざまな場面で適応可能性が高くなるように数学的概念を獲得できる知的学習を行うために，学習者が数学的概念にどのような関係をつけることができるのかを考察する。筆者は，合成，拡張，類比の3つの視点を考え，これら3つの視点を用いることで，学習者が新たに獲得する数学的概念に関係をつけることができることを示す。

本稿では，合成，拡張，類比という3つの視点ごとに高校数学で学習する数学的概念を考察する。高校数学における数学的概念は，単純に3つの視点で関係性を捉えられるものではないと筆者は考えている。また，高校数学における数学的概念は，多くの概念が組み合わされて構成されているため，合成という視点はどの数学的概念にも当てはまると考えられる。本稿では，これらに考慮しつつ，合成以外の2つの視点は，数学的概念に合成より多くの情報を与える関係性として捉え，分類した。

2−1　合成

合成とは，学習者の持つ概念を組み合わせることによって，新しい概念を構成することである。合成という視点を用いることによって，学習者が新しい概念を獲得する際の必要な概念を明らかにする。また，合成という視点には，概念から抽象した性質から構成され

た概念を含む。

●三角比

三角比は，直角三角形における，辺と角の間に成り立つ関係を抽象した概念である。相似な三角形は，それぞれの辺の比が等しいという性質を持つ。この性質により，直角三角形において，それぞれの辺の比は直角以外の１つの角度によって定まることになる。このことを利用して，１つの鋭角に対して，その鋭角をもつ直角三角形における辺の比を，辺の組みあわせにより sin，cos，tan という３つの三角比を構成することになる。

●三角関数，指数関数，対数関数

三角比における角度を変数と捉えることによって，三角比を関数として扱うことができる，すなわち，角度の１つきまると辺の比がきまる。同様に，a^x (a は正の実数)といった数は，x の値と対応する値が１対１対応となるため，指数関数として扱うことができる。また，指数関数に逆関数の概念を用いることによって，対数関数が構成される。

●集合，確率，命題

数学Ａの「場合の数と確率」，「論理と集合」の単元で，集合，確率，命題について学習する。確率と命題という数学的概念は，集合の概念を基にして構成されている。集合の概念は，人が考察する対象全体を明らかにする。確率は，「同様に確からしい」という仮定の下では，対象の集合における起こりうるすべての場合の数と，求めたい条件を満たす場合の数の割合で定義される。つまり，集合の概念と割合の概念を組み合わせたものが確率である。命題に関する概念も，集合の概念を基にしている。条件を考える場合には，考察の対象とする全体集合を考える必要がある。命題「p ならば q」の真偽について考察することは，p の仮定を満たす集合をＰ，q の結論を満たす集合をＱとしたとき，P⊂Q であることを基にして真偽を判断することになる。たとえば，命題「$-1<x<1 \Rightarrow x<2$」を考えたとき，２つの集合

$$P=\{x \mid -1<x<1,\ x \text{は実数}\}$$
$$Q=\{x \mid x<2,\ x \text{は実数}\}$$

を考えると，P⊂Q でありこの命題は真となる。つまり，命題の真偽は集合の包含関係によって決定される。

●数列，極限，微分法，積分法

数学Ｂで学習する数列は，数学Ⅲで学習する極限の概念，そして極限の考えを基にした微分法と積分法の基礎を構成する。関数の極限は，関数 f(x)の定義域の中に数列$\{a_n\}$があるとすることによって，関数の値からできる数列$\{f(a_n)\}$の極限と考えることができる(cf. 中島，2001，pp.62-63)。つまり，関数の極限を数列の極限とみることができることになる。微分法では，関数 f(x)の平均変化率

$$(f(b)-f(a))/(b-a) \quad (1.1)$$

において，a の値を定め，b を a に限りなく近づけるとき，(1.1)がある一定の値αに限りなく近づく場合，この値αを，関数 f(x)の x=a における微分係数または変化率といい，f'(a)で表す。曲線 y=f(x)上の点 A(a, f(a))における曲線の接線の傾きは，関数 f(x)の x=a における微分係数 f'(a)で表されることになる。つまり，一般の関数における平均変化率という関数の持つ性質を抽象し，極限の概念を採り入れることによって，瞬間変化率(接線の傾き)を求める方法が微分法であると捉えることができる。さらに，関数 f(x)の x=a における微分係数 f'(a)は，a の値を変数とみることによって関数とみることができ，これより，関数 f(x)の導関数 f'(x)を得る。a を定数から変数とみなすことで，導関数という概念が構成される。数学Ⅲの積分法で区分求積法を学習するが，区分求積法は極限と級数の概念によって構成されている。曲がった図形の面積を区分求積法によって求めるときは，長方形に分割するアイデアと極限を利用するというアイデアを組み合わせ，長方形を寄せ集めてできる図形の面積の極限として図形の面積を求めることになる(cf. 中島，2001，pp.150-151)。

2−2　拡張

拡張とは，新しく獲得した概念を学習者の持つ概念と比べたとき，新しい概念が学習者の持つ概念の発展，または包含する関係を指す。筆者は，拡張には，数概念の拡張といった，学習を進めることで新しい概念がそれまでの概念を包含する拡張と，対象をさまざまな方法で表現するといった，捉え方の拡張が存在すると考える。また，方程式の学習における２次方程式，３次方程式といった段階を踏んだ学習は，拡張に含むことにする。

●数概念と演算の拡張

高校数学における数概念に関する学習では，数学Ⅰで有理数，実数，無理数，数学Ⅱで複素数を学習する。

高校数学学習以前における数概念の拡張は，自然数と0，小数，分数，整数の順に行われている。数概念が拡張されると同時に，演算についても拡張される。自然数から複素数まで数概念を拡張する際，拡張する以前の計算法則に従わなければ，数概念の拡張はうまくいかないことになる。計算法則とは，

交換法則　$a+b=b+a$，$ab=ba$

結合法則　$(a+b)+c=a+(b+c)$．$(ab)c=a(bc)$

分配法則　$a(b+c)=ab+ac$，$(a+b)c=ac+bc$

の3つである。この計算法則が実数において成立するため，自然数から実数への拡張がうまくいく。実数までの計算法則と同様に，複素数の計算法則は虚数単位 i を用いて複素数の相等を

$a+ib=c+id \Leftrightarrow a=c,\ b=d$（$a$，$b$，$c$，$d$ は実数）

と定義することによって，複素数の四則演算の結果は複素数になり，実数の演算が複素数の演算に拡張されたことになる。また，複素平面を考えたとき，虚数 i を掛けることは90°回転する変換になっている(cf. 村上，2002，pp.20-21)。一般の複素数を掛けることは，回転と拡大・縮小を表すことになる。実数では，負数を掛けることは方向を180度変えることであった。つまり，1次元から2次元への拡張を考えることになり，積の意味が拡張されたことになる。実数から複素数への数概念の拡張においてほかの拡張と異なる点は，実数における数概念には存在した大小を複素数にはつけることができない点である。複素数は，実数の性質であった大小関係をもたないため，完全な拡張ということはできない。

数概念が拡張されるということは，数概念の境界が生まれることになる。たとえば，小数という数概念を学習しなければ，整数という数概念の境界がはっきりしない。学習者にとって，数概念を拡張することは，数に名前をつけ分類することを可能にする。高校数学の学習過程において，数概念の包含関係を捉えていなければ問題が生じる場合がある。2次方程式の解について考えたとき，実数という概念を学習していなければ，実数解が存在しない場合，単に「解なし」と答えることになる。しかし，数学Ⅱで複素数を学習することによって，2次方程式には複素数解が存在することになる。実数という概念を学習していない状況では，実数の範囲では解がないため単に「解なし」と答えるしかなかったが，実際には複素数解は存在することになる。複素数解が存在することにより，単なる「解なし」では誤りになってしまう。学習者にとってみれば，2次方程式の解については「解をもつ」か「解なし」のいずれかであったが，複素数の概念の登場により，「複素数解を持つ」というように知識を変更することになる。実数という概念を学習していなければ，解を「実数解をもつ」と「実数解なし」に区別することができないため，学習者は複素数解の登場により知識の変更を余儀なくされてしまう。学習者の中で正しいと捉えられていた知識の変更は，学習者にとって負担となる。数概念の拡張の必要性と，段階を踏みながら拡張していく際に考えられる知識の変更に注意を払う必要性がある。

●指数の拡張

数学Ⅰの「方程式と不等式」の単元において，m と n を正の整数として指数法則を学習する。指数法則とは，$a^m a^n=a^{m+n}$，$(a^m)^n=a^{mn}$，$(ab)^n=a^n b^n$ の3つである。「方程式と不等式」の単元では指数は正の整数であったが，数学Ⅱの「指数関数・対数関数」の単元では，指数は整数，有理数，そして実数に拡張される。この拡張には，自然数の演算から実数の演算に拡張されたときと同様に，「指数が自然数の場合に成立していた累乗の性質が自然に拡張されること(宮腰，2004，p.166)」が求められる。つまり，指数が正の整数から実数まで拡張されたときに，指数法則が保たれるように拡張しなければならない。負の整数の指数は，$a^{-n}=1/a^n (a \neq 0)$ と，有理数の指数は $a^{1/2}=\sqrt{a} (a>0)$ と定義することになる。上記の2つの定義が，拡張された指数法則を完全に満たすことを正当化するためには，$p=\pm m/n$，$q=\pm m'/n'$（m'，n' は自然数）として，指数法則に代入し等号成立を示す必要がある。たとえば，$a^p a^q=a^{p+q}$ を証明するためにはこの両辺を nn' 乗して，$a^{(pn)n'} a^{n(qn')}=a^{(pn)n'+n(qn')}$ が成り立つことを示せばよいことになる(cf. 宮腰，2004，pp.165-168)。無理数への指数の拡張は，数列の極限の概念を用いることになるため，数学Ⅱの「指数関数・対数関数」の単元では，直感的に無理数の指数を持つ数は一定の値に近づくとして表される。以上の過程によって，高校数学における指数は，正の整数から実数まで拡張されることになる。

数学Ⅲで学習する x^n の導関数についての指数も，自然数から整数，有理数，そして実数へと拡張され，α が実数のとき $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ が成り立つことになる。

●方程式・不等式と関数

方程式について，高校入学時までに，学習者は１次方程式，２元１次方程式，連立方程式，２次方程式について学習している。高校数学では，数学Ⅰで１次不等式，２次不等式を，数学Ⅱでは３次以上の方程式，直線や円の方程式を，数学Ⅲでは放物線，楕円，双曲線の方程式について学習することになる。関数に関しては，数学Ⅰで２次関数，数学Ⅱ，数学Ⅲで３次以上の関数や三角関数，指数関数，対数関数といったさまざまな関数を扱うことになる。方程式と関数はそれぞれ，１次から２次，そして３次以上へと次数を上げ，段階を踏みながら学習を進めることになる。最終的には，一般化されたｎ次多項式やｎ次関数を扱う。

方程式とは，未知数を文字で表すことで，対象の関係を表した式である。関数とは，１つの変数の変化に伴い，もう１つの変数が変化する規則を表した式である。つまり，等式中の未知数とみなすか，変数とみなすかが，式を方程式と捉えるか関数と捉えるかを分けることになる。たとえば、中学３年で２次関数は座標平面上では放物線を表すことを学習し，数学Ｃで２元２次方程式の表す２次曲線の１つとして放物線を学習する。２次関数では，ｘの変化に伴いｙの変化を表す式と捉えることに対し，２次曲線では，等式を満たすｘとｙの組の集合であると捉えることになる。学習者にとって方程式と関数を学習することは，式に対する捉え方の拡張であるということができる。

不等式は，等号の代わりに不等号を用いることになる。不等号は，中学１年で数の大小を表現する方法として学習する。中学２年では一次関数，中学３年では２次関数の学習において，変域を表現するために用いられる。数学Ⅰの一次不等式の学習において，不等号は大小関係を式に表したものであると学習する。大小関係を表す不等号から，条件を満たす変数の値の集合が不等式の解であるとして，不等号の意味が拡張されることになる。不等式は，２元２次方程式になると座標平面上における領域を表すことになり，不等式の表す集合が，直線上の集合から平面上の集合へと拡張される。

●判別式　$D=b^2-4ac$

数学Ⅰの「方程式と不等式」の単元で学習する判別式Ｄは，その式の値によって２次方程式の実数解の個数が判別できる式である。判別式Ｄを用いることで２次方程式の実数解の個数がわかるということは，２次関数のグラフとｘ軸との交点の個数がわかることと同値である。２次方程式における判別式Ｄは，数学Ⅱの「図形と方程式」の単元で，円や直線といった二次以下の方程式のグラフの交点の個数を判別する式として拡張される。直線や円を方程式によって表すことで，図形を数式として扱うことが可能となり，代入法や加減法を用いて変数を減らすことによって，交点となる座標を求める式を作ることができるようになるからである。判別式Ｄは，座標平面上にある円，直線，放物線などの２次以下の方程式で表現できる２つの図形の交点の個数を求めることができるように拡張されることになる。

●関数・方程式におけるグラフの平行移動

数学Ⅰで２次関数を学習するまでに，中学３年で頂点が原点にある２次関数は学習している。数学Ⅰの「２次関数」の単元では，一般的な $y=ax^2+bx+c$ といった２次関数や，そのグラフの平行移動について学習する。２次関数のグラフの平行移動は，中学２年で学習する１次関数の平行移動の拡張である。「２次関数」の単元では，$y=ax^2$ の式からｙ軸方向への平行移動 $y=ax^2+q$，次にｘ軸への平行移動 $y=a(x-p)^2$，そしてこれらの平行移動の合成である $y=a(x-p)^2+q$ を学習する。この学習を通して，学習者は２次関数におけるｘをｘ－ｐに，ｙをｙ－ｑに置き換えることが，２次関数をｘ軸方向にｐ, ｙ軸方向にｑだけ移動させたことになることを学習し，中学２年での１次関数における平行移動という知識が統合される。２次関数に限らず，数学Ⅱの「図形と方程式」の単元における円の方程式，「三角関数」の単元における三角関数，数学Ｃの「式と曲線」の単元における楕円や双曲線の方程式が座標平面上に表すグラフの平行移動について学習することになる。「式と曲線」の単元において，「曲線 $F(x, y)=0$ をｘ軸方向にｐ，ｙ軸方向にｑだけ平行移動して得られる曲線の方程式は $F(x-p,\ y-q)=0$（数学Ｃ，p.63）」であることを学習することで，曲線すべての平行移動が同様の操作でおこなうことができるように拡張される。グラフをｘ軸方向にｐ，ｙ軸方向にｑ平行移動する際に用いられる，ｘをｘ－ｐに，ｙをｙ－ｑに置き換えるといった操作は，高校数学で学習する２元２次以下の方程式で表現されるすべての図形を平行移動する操作として統合される。

●グラフの移動と１次変換

関数・方程式におけるグラフの平行移動とは，グラフ上のすべての点を同じ方向に同じ距離だけ動かしたものである。数学Ｃの「行列」の単元で学習する１次変換を用いることによって，座標平面上の点の，x 軸，y 軸，原点，直線に関する移動や原点Ｏを中心とした回転移動を行列によって表現することができる。つまり，１次変換は，平行移動に限らない点の移動であり，移動表現の拡張であると捉えることができる。行列によって点の移動が表現することができるということは，演算によって点の移動を表すことが可能となり，グラフの移動も可能となる。たとえば，x 軸に関して関数 f(x)を対象移動する場合，それまでは y=f(x)における y を－y に置き換えることでおこなっていた。1 次変換では f(x)上の点(x，y)を x 軸に関して対象移動した点を(x’，y’)とすると，

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

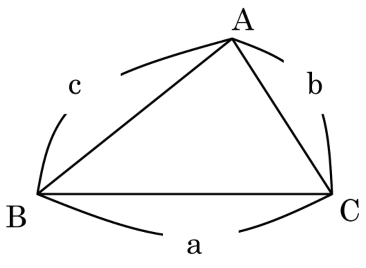
と表すことができる。また，原点Ｏを中心として，回転角がθの回転移動を１次変換で表すと次のようになる。f(x)上の点(x，y)を，原点を中心にθ回転移動した点を(a，b)とすると，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表すことができるようになる。

●三平方の定理と余弦定理

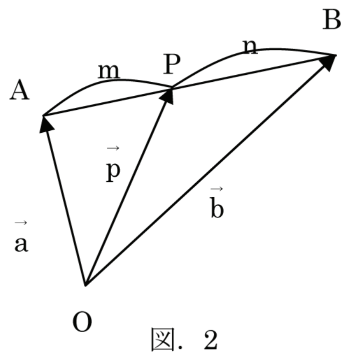
数学Ⅰの「三角比」の単元で学習する余弦定理は，中学３年で学習する三平方の定理の拡張であるということができる。余弦定理は，図．１のような任意の三角形において，$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ が成立するという定理である。余弦定理における角Ｃが直角である場合が三平方の定理となる。余弦定理を学習することによって，三平方の定理が余弦定理における角が 90° である１つの限定された場合の定理となり，学習者の知識として三平方の定理が余弦定理に統合されたことになる。



図．１

●線分の内分点・外分点

線分の内分点・外分点は，数学Ａの「平面図形」，数学Ⅱの「図形と方程式」，数学Ｂの「平面ベクトル」，「空間ベクトル」の単元で学習する。



図．2

線分の内分点・外分点は，線分上の点の位置を線分の両端からの距離の比で表した点であるが，それぞれの単元において表現が異なる。数学Ａの「平面図形」の単元では，三角形の角の二等分線における辺の比や，三角形の中線による重心の位置を表す際に用いられる。数学Ⅱの「図形と方程式」では，数直線，座標平面，座標空間における 2 点を結ぶ線分の内分点・外分点の学習となり，座標を用いて表される。数学Ｂの「平面上のベクトル」の単元では， 図．2 のように，線分の内分点・外分点を位置ベクトルによって表す。つまり，「2 点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を m : n に内分する点Ｐと外分する点Ｑの位置ベクトルを，それぞれ$\vec{p}$，$\vec{q}$とすると，

$\vec{p}=(n\vec{a}+m\vec{b})/(m+n)$,

$\vec{q}=(-n\vec{a}+m\vec{b})/(m-n)$　　(数学Ｂ，p.31)」

となる。位置ベクトルを用いて，線分 AB をベクトル方程式で表すと，

$$\vec{p}=\vec{a}+t\overrightarrow{AB}(0\leqq t\leqq 1)$$

となる。t の条件をはずすと直線 AB を表すベクトル方程式となる。$\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$であるから，

$$\vec{p}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

となる。位置ベクトルを用いて点を表すことにより，線分の内分点と外分点を区別することなく１つの式に表すことができる。

線分の内分点・外分点という概念に対して，位置関係，座標，ベクトルという概念による表示の仕方により，その捉え方が拡張されたということができる。

●媒介変数表示，極座標と極方程式

数学Ｃの「式と曲線」の単元で，方程式は x，y とは別の第３の変数を媒介として表すことができることを学習する。媒介変数表示によって，方程式に対する捉え方が拡張されるということができる。たとえば，

直線 $x-2y+3=0$ を，変数 t を媒介として表すと，$x=1+2t$，$y=2+t$ となる。この直線の媒介変数表示は，直線上の点の位置を表す位置ベクトルと同一視することができる。たとえば，$x-2y+3=0$ 上の点(x, y)の位置ベクトル表示は$(x, y)=(1, 2)+t(2, 1)$となる。数学 C の「式と曲線」の単元において，さまざまな方程式を媒介変数表示で表すことを学習するが，円の方程式の媒介変数表示に関しては，数学 I の「三角比」の単元でおこなわれている。三角比を単位円によって定義する際に，単位円上の任意の点が変数 θ を媒介にして，$(x, y)=(\cos\theta, \sin\theta)$と表わせることを学習している。

数学 C の「式と曲線」の単元で，平面上に点 O と半直線 OX を定めることによって，平面上の任意の点 P の位置を OP の長さ r と半直線 OP が OX となす角 θ で決める極座標表示を学習する。それまでの学習では直交座標が用いられており，座標平面上の点は x 座標と y 座標の 2 つの数によって表されていた。「式と曲線」の単元では，OP の長さ r と半直線 OP が OX となす角 θ の 2 つの数によっても表されることを学習する。つまり，座標平面上の点を表す方法として，2 つ目の表示方法を学習者は獲得することになる。

直交座標上の任意の点が極座標表示によって表されることから，直交座標に関する方程式を極方程式で表すことが可能になる。直交座標と極座標の関係式，

$$x=r\cos\theta,\ y=\sin\theta$$

$r=\sqrt{(x^2+y^2)}$，$r\neq0$ のとき，$\cos\theta=x/r$，$\sin\theta=y/r$

によって，直交座標に関する方程式と極座標に関する極方程式を行き来することが可能となり，方程式に対する捉え方が拡張されたことになる。

2－3　類比

類比とは,「本来は異なる二つのものごとの間に何らかの類似性を見いだし，その類似性に基づいて，一方での情報を他方へ適応させる認知過程である（國岡，2007，p.67)」。類比という視点を用いることによる数学的概念の関係性は，新しく学習する概念のもつ性質と学習者のもつ数学的概念の性質を類似点や性質の違いを比較することによって，学習者が新しい概念に対して情報を加えながら獲得することを可能にする。

●次元における類比

新しい虚数単位 i の導入により実数から複素数に数概念が拡張され，数は実部と虚部という 2 つの要素を持つようになった。実数は数直線と 1 対 1 対応をつけることができた。複素数は座標平面上の点と 1 対 1 対応をつけることになり，数概念と座標の対応が 1 次元から 2 次元に拡張されたといえる。数概念と座標の対応が 1 次元から 2 次元に拡張されることと同様に，図形の学習においては次元の拡張がなされている。点から直線，平面，空間へと 3 次元への拡張は既に中学数学で学習されている。平面から空間への座標を用いた拡張は，平面ベクトルから空間ベクトルへの学習の過程で行われる。平面座標が x 軸と y 軸によって表されることと同様に，新たに z 軸の導入によって，空間の点の座標は 3 つの数によって表さられることになる。つまり，数直線と平面，空間座標への拡張と幾何学における次元の拡張に類比の関係があるということができる。

●演算における類比

実数から複素数への数概念の拡張の際は，複素数を平方根などの場合と同じように同類項でまとめることで，計算法則が成立するように定義した。ベクトルや行列の加法，減法，乗法は実数のときと同じ記号が用いられる。しかし，表している意味はベクトルや行列の演算であり，数の演算の記号とは異なる。たとえば，$\vec{a}=(3, 4)$，$\vec{b}=(1, 3)$だとすると，$\vec{a}+\vec{b}$はベクトルの加法を表している。ベクトルの加法は，各成分についてそれぞれ計算し，$\vec{a}+\vec{b}=(4, 7)$と計算することになる。ベクトルと行列の加減法は，成分同士を計算するという点や，ベクトルと行列における実数倍は，それぞれの成分に実数をかけることにより定義される点から類比の関係にあるといえる。

実数の演算と多項式の演算は類比の関係にあるといえる。実数の演算における加法，減法，乗法は，多項式の演算でも計算法則は成り立ち，同類項をまとめ

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 13 \\ \cline{2-2}
11 \big) & 153 \\
 & 11 \\ \cline{2-2}
 & 43 \\
 & 33 \\ \cline{2-2}
 & 10
\end{array}$$

式 2－1

$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & x\ \ +3 \\ \cline{2-2}
x+1 \big) & x^2+5x+3 \\
 & x^2+\ \ x \\ \cline{2-2}
 & \quad 4x+3 \\
 & \quad 4x+12 \\ \cline{2-2}
 & \qquad -9
\end{array}$$

式 2－2

ることにより計算される。また，除法について考えると，10 進法で書かれている数を割るときに，筆算を用いて計算される。多項式の除法では，多項式を 10 進法ではなく，x 進法とみることによって，実数と同様に除法をおこなうことができる。たとえば，実数における除法，153÷11 あれば，式 2−1 のように計算される。同様に，方程式における除法，$(x^2+5x+3)\div(x+1)$であれば，式 2−2 のように計算される。10 進法を x 進法と捉えることによって，同じ計算方法によっておこなうことができる。

3. おわりに

本稿では，合成，拡張，類比という 3 つの視点を基にして，学習者が高校で学習する数学的概念を相互にどのように関係づけることができるのかを考察した。本稿で考察してきたことにより，本稿で設定した 3 つの視点によって，高校で学習する数学的概念には明らかな関係性が存在することが明らかになった。数学的概念に関係性をもたせることによって，学習者は関係性を基にした学習が可能となり，多くの情報を用いて新しい概念獲得をすることができることが明らかになった。このことにより，高校数学の学習内容が独立した学習ではなく，関係性を基にする連続した知的学習であると学習者が捉えられるための基礎が明らかになったことになる。また，数学的概念における拡張に証明を用いることが，学習者にとって数学的概念の関係性を確かなものにする 1 つの要因であることが明らかになった。本稿では 3 つの視点によって数学的概念に関係性をもたせることができることを明らかにしたが，今後の課題として，例示した数学的概念の関係性を踏まえ，学習者が新たな数学的概念をどのように関係づけるのか，その過程について考察する必要がある。また，数学的概念の関係性には，本稿で用いた 3 つの視点以外にも考えられる。よって本稿で取り上げた 3 つの視点による関係性だけにとどまらず異なる関係性について考察しながら，新しく獲得した数学的概念を学習者の持つ概念と関係性を持たせるための方法について，今後考察する必要がある。

＜引用文献・参考文献＞

加藤順二　ほか 14 名（2002）．数学Ⅰ．東京：数研出版
加藤順二　ほか 14 名（2004）．数学Ⅲ．東京：数研出版
川中宣明　ほか 14 名（2002）．数学 A．東京：数研出版
川中宣明　ほか 14 名（2003）．数学Ⅱ．東京：数研出版
國岡高宏（2007）．数学教育におけるアナロジーの研究(1) −数学の理解に果たすアナロジーの機能−．数学教育学研究．13．pp.67-73.
宮腰忠（2004）．高校数学＋α　基礎と論理の物語．東京：共立出版
宮腰忠 (2007)．高校数学＋α　なっとくの線形代数．東京：共立出版
村上正人（2002）．なるほど複素関数．東京：海鳴社
中島匠一（2001）．なっとくする微積分．東京：講談社
大島利雄　ほか 14 名（2003）．数学 B．東京：数研出版
Skemp, R.R. (1989/1992)．平林一榮監訳．新しい学習理論にもとづく算数教育　――小学校の数学――．東京：東洋館．
渡辺信三　ほか 14 名（2003）．数学 C．東京：数研出版

（かない　こうた）