「数と式」領域におけるナンバーセンス

野 尻 和 宏

群馬大学教育実践研究　別刷
第28号　11～20頁　2011

群馬大学教育学部　附属学校教育臨床総合センター

群馬大学教育実践研究　第28号　11～20頁　2011

「数と式」領域におけるナンバーセンス

野　尻　和　宏

群馬大学大学院教育学研究科

Number sense in domain of “Numbers and Expressions”

Kazuhiro NOJIRI

Graduate School of Education, Gunma University

キーワード：ナンバーセンス、「数と式」
Keywords：number sense, “Numbers and Expressions”

(2010年10月29日受理)

要　約

本研究の目的は、教師が「数と式」領域のナンバーセンスを意識して指導できるように、中学校第１学年の「数と式」領域におけるナンバーセンスを抽出して、指導場面を例示することである。本研究の目的を達成するために、McIntosh（1992）が提案した、「ナンバーセンスを考えるための枠組み（p.4）」の表を基にして分析を行い、ナンバーセンスの構成要素を抽出する。指導場面例は、主に新中学校学習指導要領解説（2008）にある指導場面を基にする。

本研究の結果として、数概念の拡張、分数の四則計算の習熟と計算法則の理解、仮平均、柔軟な式変形を必要とする学習、新しいものを導入する際の思考の経験、文字と数の大小関係、文字が変数や未知数を表していることの学習、数を見積もって代入する活動、０の概念、方程式の導き方、答えの予想と検算、分数係数の一元一次方程式の変形の指導場面を例示することができた。

１．はじめに

中学校数学科新学習指導要領は、「数と式」・「図形」・「関数」・「資料の活用」という４領域で構成され、「数学的活動」が４領域を横断する形の構造になっている。新学習指導要領（2008）における「数と式」領域の指導の意義は、「中学校数学科の全領域の内容と深いかかわりを持つとともに、それらの基礎をなすものとして重要な位置を占めている（p.34）」と記述されている。筆者は、「数と式」領域の指導の際にはナンバーセンス（number sense）を意識することが重要であると考えている。ナンバーセンスとは、McIntosh（1992）が、「個人の数や演算に対する全般的な理解に関係して、数や演算に対して理解していることを柔軟な方法で使って数学的な判断をすることや、数や演算を扱うために役立つストラテジーを発達させるための能力や意向を伴っている（p.3）」と捉えているように、筆者は数と式のセンスであると考えている。「数と式」領域が、全領域の内容と深い関係があり、「数と式」領域にとってナンバーセンスが重要であるとするならば、ナンバーセンスは中学校数学科の全領域にとって重要であるということになる。

ナンバーセンスに関する国内外の先行研究には、ナンバーセンスを記述して評価するための枠組みの提案（cf.McIntosh,1992）、見積もりとナンバーセンスの研究（cf.Sowder,1992）、数感覚の記述枠組みによる事例の分析（cf.銀島,1995）、ナンバーセンスの本質的な構成要素の列挙（cf.Yang,Hsu & Huang,2004）、就業前の教師がナンバーセンスを理解することの必要性の研究（cf.Yang,Reys,Reys,2009）などがある。Yang et al.（2009）が、「もし教師が数学を理解していないことや、ナンバーセンスのしっかりした知識を持っていないならば、彼らの生徒はナンバーセンスを促進できそうもないだろう（p.386）」と述べていることは、筆者も考えている。そして、Yang et al.（2009）は、就業前の教師に着目して教師育成のカリキュラムを改善することを強調している。筆者は、既に生徒の前で授業を行っている教師に着目する。なぜならば、教師育成のカリキュラムを改善することは根本的で重要なことであるが、既に現場で働いている教師への方策も大事であると考えているからである。現場の教師が持つナンバーセンスをよくすることが一番よいと思うが、研修の時間の問題など様々な障害がある。そのため、どのようにナンバーセンスを扱うべきかという指導場面の例示をすることが、現場の教師への方策の１つになると考える。指導場面の例示について、ナンバーセンスと「数と式」領域の関係が深いことから、「数と式」領域が取り組みやすいと考えている。ナンバーセンスを抽出する方法は、子どもの解答や発言を分析してナンバーセンスを抽出することができている、先行研究の記述枠組みを利用する。また、ナンバーセンスを意識する指導場面とは、ナンバーセンスの構成要素が抽出できる指導場面のことである。したがって本研究の目的は、教師が「数と式」領域のナンバーセンスを意識して指導できるように、中学校第１学年の「数と式」領域におけるナンバーセンスを抽出して、指導場面を例示することである。

２．研究の方法

本研究の目的を達成するために、「数と式」領域のナンバーセンスを抽出する指導場面は、新中学校学習指導要領解説（2008）に基づいて考える。ナンバーセンスの抽出の方法については、表１の McIntosh（1992）が提案した、「ナンバーセンスを考えるための枠組み（p.4）」を基にして指導場面の分析を行い、ナンバーセンスの構成要素を抽出していく。McIntosh（1992）が表１について、「ナンバーセンスの主要な役割、すなわち数概念、数と演算、数や演算の効果という三つの領域に分化している（p.5）」と述べているように、表１はナンバーセンスの３つの領域と各々の領域に属するナンバーセンスの構成要素を示していると筆者は捉えている。表１の「Ａ：数に関する知識と、数をうまく扱うこと」はナンバーセンスにおける数概念の領域のことである。「Ｂ：演算に関する知識と、演算をうまく扱うこと」はナンバーセンスにおける演算の領域のことである。「Ｃ：計算を伴う状況に、数や演算をうまく扱うことを適用すること」はナンバーセンスにおける数や演算の効果の領域のことである。表１の「Ａ－１：数の規則性に対するセンス」などがナンバーセンスの各々の領域の構成要素を示していると捉え、指導場面を分析して抽出する対象である。しかし、例えば、「Ａ－１：数の規則性に対するセンス」というナンバーセンスの構成要素にMcIntosh（1992）が位取りなどの下位の構成要素を示しているように、「Ａ－１：数の規則性に対するセンス」ではナンバーセンスの具体的な構成要素が分かりにくい。McIntosh（1992）が提案しているナンバーセンスの下位の構成要素を抽出してもよいのだが、McIntosh（1992）が提案している構成要素がナンバーセンスの構成要素の全てを表しているわけではないので、他のナンバーセンスの構成要素を記述する際に不都合である。そこで、例えば、正の数と負の数の学習には「Ａ－１：数の規則性に対するセンス」が抽出できると示していくことよりも、「Ａ：正の数と負の数の必要性」のように「領域：構成要素の具体的な内容」と示すことにして、柔軟にナンバーセンスの構成要素を記述していく。ここで、ナンバーセンスの構成要素とは、数や演算に関する知識や経験、技術などである。知識と経験を分けて捉えている理由は、知識は思い出せればすぐに使えるように構成されているものだが、経験は思い出しても問題解決にすぐに使えるように構成されていないと捉えているからである。また、数学の問題を解く際には経験の段階からストラテジーの生成に繋がる場合があると考えているので、知識と経験は分けて捉える必要があると考える。

表１　McIntosh（1992）のナンバーセンスを考えるための枠組み（p.4）

A：数に関する知識と、数をうまく扱うこと	A－１： 数の規則性に対するセンス
	A－２： 数の多様な表象
	A－３： 数の相対的な大きさと絶対的な大きさに対するセンス
	A－４： ベンチマークシステム
B：演算に関する知識と、演算をうまく扱うこと	B－１： 演算の効果についての理解
	B－２： 数学的な性質についての理解
	B－３： 演算間の関係についての理解
C：計算を伴う状況に、数や演算をうまく扱うことを適用すること	C－１： 問題の文脈と必要な計算との関係を理解すること
	C－２： 多様なストラテジーが存在することの認識
	C－３： 効率のよい表象や方法を利用する傾向
	C－４： 感覚的にデータや結果の吟味する徴候

指導場面を例示することについては、解説に基づいて考えたナンバーセンスを意識した指導場面の例示をする。江森（2010）が、「Skemp（1983：62-67）は、概念伝達には『説明』と『例示』という２つの方法があると言う（p.84）」と概念伝達の方法について、Skemp（1983）の述べていることを参照している。そして、江森（2010）は、「説明という方法が形式的理解に達している内容の伝達に適した方法であり、説明という伝達形式では、送り手と受け手との解釈の差異は受け手の理解不足という点に帰着されることになると考えられる（p.84）」と説明と例示の適した使用場面を指摘している。ナンバーセンスの指導場面を例示することにした意図は、ナンバーセンスについて形式的理解に達することができなくても、ナンバーセンスを意識した指導の外観を捉えられるようにするためと、本研究の指導場面の例示から、各々の実態に合わせた指導を考えられるようにするためである。

３．第１学年における「数と式」の領域

3.1　正の数と負の数

3.1.1　正の数と負の数で抽出できるナンバーセンス

「正の数と負の数」では、『正の数と負の数の必要性と意味』・『正の数と負の数の四則計算とその意味』・『正の数と負の数を用いて表したり処理したりすること』の３つを学習する。

『正の数と負の数の必要性と意味』の学習は、日常でも負の数が使われていることから負の数の必要性を生徒に実感させ、負の数を正の数と対にして捉えて、正の数と負の数の必要性を教えることになる。『正の数と負の数の必要性と意味』の学習を分析すると、「A：数概念の拡張」というナンバーセンスの構成要素を抽出することができる。数概念の拡張は、学年が上がるにつれて段々と実感の伴わない数を扱うことになっていくので、デリケートに扱わなければならない。したがって、数概念の拡張の際には、新しい数体系を導入する必要性を納得することによって、数概念の拡張を丁寧に行わなければならないと考えている。また、数概念の拡張の必要性を納得して行うことは、数概念に限らない拡張のセンスをよくすることに繋がることも期待している。ここで必要性とは、必要になる理由であり、よさがあることは必要になる１つの理由であって、よさの意味を含意していると捉えている。例えば、負の数を使うことによって、反対の性質を持つ数を簡単に表せるので負の数は必要と述べたときには、負の数は反対の性質を持つ数を簡単に表せるよさがあるということも意味している。

『正の数と負の数の四則計算とその意味』の学習は、小学校算数科までの数概念と比較して、負の数まで拡張した数概念での四則計算を学習して計算の可能性が広がっていることを理解することである。『正の数と負の数の四則計算とその意味』の学習を分析すると、「B：負の数まで拡張した四則計算」というナンバーセンスの構成要素を抽出することができる。

『正の数と負の数を用いて表したり処理したりすること』の学習は、主に具体的な場面で正の数と負の数を用いて表したりすることを通して、事象の考察を深めることや正の数と負の数の必要性を理解することや、仮平均の考え方の学習がある。『正の数と負の数を用いて表したり処理したりすること』の学習を分析

すると、「A：数の見積もり」、「A：ベンチマーク」というナンバーセンスの構成要素を抽出することができる。

3.1.2 『正の数と負の数の必要性と意味』の指導場面の例示

『正の数と負の数の必要性と意味』では、最高気温の前日との差を表す際に、負の数の必要性と意味を教える指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「A：数概念の拡張」である。

生徒に、ある日の各地の予想最高気温と最低気温を示している図を提示する。「最高気温の前日との差が－２℃」の意味を発問すれば、おそらく日常生活の経験から、「前日より２℃低い」ことを意味していると答えることが予想できるから、すでに数の範囲を負の数まである程度拡張することができていることが前提となる実態を意味する。ナンバーセンスを養うために重要なことは、「なぜ数を負の数まで拡張させるのか」という必要性を生徒が考えて、日常生活で曖昧に養われた生徒の数概念を教師によって整然と再構成させることである。ここで「前日より２℃低い」ことを「－２」という数を用いないで表すことができるのか生徒に発問をする。生徒は様々に考えるだろうが、ここで「－２」という数を用いることによって「－２℃」と簡単に「前日より２℃低い」ことを表せるという負の数のよさを実感する。なぜならば、必要性はよさを感じて積極的に取り入れたい場合と、今のままでは解決できない状態を打開したい場合に生じると考えられるからである。したがって、「前日より２℃低い」などの基準より下の状態を表すことに、負の数を用いると便利というよさを実感することから、負の数の必要性を納得できる。この負の数の必要性を納得できることが、「A：数概念の拡張」のナンバーセンスによい。また、負の数は基準より下の状態を表していること、絶対値が大きいほど小さい数になることなどの負の数の意味を、生徒が十分に理解する必要がある。なぜならば、数概念はナンバーセンスにおいて土台となるので、道具的に理解しているのではなく、生徒が十分に理解できるようにすることが必要になると考えているからである。

3.1.3 『正の数と負の数の四則計算とその意味』の指導場面の例示

『正の数と負の数の四則計算とその意味』では、四則計算も拡張されていることを教える指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「B：負の数まで拡張した四則計算」である。

指導場面では、解説に載っているように加法と減法を統一的に表わすことができることを生徒が理解すると、「B：負の数まで拡張した四則計算」のナンバーセンスによい。さらに、小学校算数科で数の概念を分数まで拡張した際に除法が可能になったことを比べることによって、分数の四則計算と計算の法則（交換法則、結合法則、分配法則）のスパイラルをすることもできる。分数の四則計算の習熟と計算法則を理解していることは、ナンバーセンスの演算の能力の土台となることで、柔軟な式変形を行うことに影響を与える。したがって、分数の四則計算と計算の法則のスパイラルを行い、「B：分数の四則計算」、「B：計算の法則の理解」のナンバーセンスを養っておくこともよい。

3.1.4 『正の数と負の数を用いて表したり処理したりすること』の指導場面の例示

『正の数と負の数を用いて表したり処理したりすること』では、「Aさんの期末テスト１週間前の勉強時間表」という図１の表を提示して、仮平均の考え方の指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「A：数の見積もり」、「A：ベンチマーク」である。

図１の表を提示したときには、様々な問題を設定することができる。例えば、図１の表をそのまま見せたときには、「Aさんの１日の勉強の目標時間は何時間ですか」という問いなどができる。少し工夫をして、実際の勉強時間だけを見せて、「Aさんの１日の勉強の目標時間は何時間ですか」と発問をしても予想の活動が入るのでナンバーセンスを養うことによい。そして、「Aさんのこの１週間の勉強時間の平均は何時間ですか」という発問をすることによって、実際の勉強時間と目標時間との差に注目でき、仮平均の考え方の学習に入れる。ここで、生徒に仮平均の意味とよさを教えなければならない。仮平均とは、分かりやすく捉えるならば、「任意の基準値（ベンチマーク）」として考えている。例えば、図１の表の仮平均は目標時間と

いうことで、２時間になる。仮平均のよさは、資料を処理する際に、平均値などを扱うときの計算を効率よく行えることである。そして、仮平均というベンチマークは資料の平均や傾向を求める際の効率がよくなるよさがある。

仮平均は、資料を眺めたときに設定する数を決めるのだが、見積もりや予想をして見当をつける思考活動が含まれやすい。そのときの見積もりや予想をすることに、「A：数の見積もり」のナンバーセンスが関係して、結果的に「A：ベンチマーク」のナンバーセンスに結びつく。また、見積もりや予想の精度に関するナンバーセンスは、知識と推論だけでなく、見積もりや予想をする経験の量に大きく影響を受けると考えられるので、予想や見積もりの活動を入れたいのである。

3.2 文字を用いた式

3.2.1 文字を用いた式で抽出できるナンバーセンス

「文字を用いた式」では、『文字を用いることの必要性や意味』・『文字を用いた式における乗法と除法の表し方を知ること』・『一次式の加法と減法』・『式を用いて表したり読み取ったりすること』の４つを学習する。

『文字を用いることの必要性や意味』の学習は、主に生徒が文字を用いた式のよさを実感することによって必要性や意味を理解することになる。『文字を用いることの必要性や意味』の学習を分析すると、「A：文字の意味」というナンバーセンスの構成要素を抽出することができる。ナンバーセンスに「A：文字の意味」という構成要素を含めた理由は、文字は数の代わりに使われていて、文字が表す意味の数を見抜く力もナンバーセンスとして捉えているからである。文字を用いた式のよさとは、解説に記述されているように、以下の３点である。

- ・数量の関係や法則などを簡潔、明瞭にしかも一般的に表現することができる。
- ・数量の関係を具体的なものの意味に束縛されることなく、抽象的な数の関係に還元して考察できる。
- ・自分の思考の過程を表現し、他者に的確に伝達できる。

『文字を用いることの必要性や意味』の学習では、表現の際に式変形をする活動がある。『文字を用いることの必要性や意味』の学習を分析すると、「B：柔軟な式変形」のナンバーセンスを抽出することができる。表現をするためには様々なことが関係していると考えられるが、目的に合わせて式変形を行う際には、柔軟な式変形ができることが重要である。

『文字を用いた式における乗法と除法の表し方を知ること』の学習は、演算記号の扱い方の学習をすることになる。『文字を用いた式における乗法と除法の表し方を知ること』の学習を分析すると、「B：文字式の乗法と除法」というナンバーセンスの構成要素を抽出することができる。

『一次式の加法と減法』の学習は、主に一元一次方程式を解くために必要な程度の一次式の加法と減法を学習することになる。『一次式の加法と減法』の学習を分析すると、「A：数と文字の関係」、「B：一次式の加法と減法」というナンバーセンスの構成要素を抽出することができる。

『式を用いて表したり読み取ったりすること』の学習は、主に文章題から式を用いて表したり読み取ったりすることや、不等式の学習をすることになる。『式を用いて表したり読み取ったりすること』の学習を分析すると、「A：数と文字の大小」というナンバーセンスの構成要素を抽出することができる。

3.2.2 『文字を用いることの必要性や意味』の指導場面の例示

『文字を用いることの必要性や意味』では、解説にも載っている図2のマッチ棒の問題の指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「B：柔軟な式変形」である。

図１　Aさんの期末テスト1週間前の勉強時間表　※単位は時間

曜　日	月	火	水	木	金	土	日
実際の勉強時間	2	1.5	2.5	2	0	6	6
前日の勉強時間との差	0	−0.5	+1	−0.5	−2	+6	0
目標時間との差	0	−0.5	+0.5	0	−2	+4	+4

図２のマッチ棒の問題とは、「図２のようにマッチ棒を並べていくとき、正方形を n 個作るのに必要なマッチ棒の本数を求めよ」という問題である。この問題で最低限求められていることは、$(3n+1)$ 本という答えを求めることである。解説では、文字を用いた式が自分の思考の過程を表現し、他者に的確に伝達できることを生徒が理解できるようにすることまでを求めていると筆者は解釈している。そのため、解説では $4n-(n-1)$ や $2n+(n+1)$ などを例にして、式としての表現だけでなく、マッチ棒の本数を求める考え方の違いを表現しているという学習を取り入れるように示唆している。さらに、ナンバーセンスを意識するならば、もう一歩踏み込んだ学習内容が必要である。例えば、$3n+1$ という式に分解や合成を駆使して新たな式を作り、それがマッチ棒の本数を求めるための妥当な考え方を表現している式であるか考える活動が考えられる。具体的には、$3n+1$ を $3n+4-3$ にして（１という数を $4-3$ と考える）、さらに $3(n-1)+4$ と変形すれば、最初の正方形で４本、２個目の正方形からは３本ずつマッチ棒は増え、最初の正方形の分は別に考えて $n-1$ としている考え方を表現する式に再構成することができる。ただし、$3n+1$を $(99-96)n+(100-99)$ のような式に変形することは、マッチ棒の本数を求めるための妥当な考え方を表現しているとはならないので、妥当な考え方になるように目的意識を持って式変形をすることが必要になる。目的意識を持って式変形を行うことによって、ナンバーセンスの「Ｂ：柔軟な式変形」は養われていくと考える。ナンバーセンスではなく表現を意識すれば、例えば、マッチ棒の図に印を付けたものを提示して、その図の考え方を、文字を用いた式で表現する活動がある。また、考え方の文章を提示して、それを基に文字を用いた式にする活動なども考えられる。ナンバーセンスか表現かどちらに重点を置くかによって学習活動に違いは生じる。しかし、どちらに重点を置くにせよ、各々の学習活動の中に柔軟な式変形が必要になる場面と表現の力が必要になる場面が共にある。したがって、ここでのナンバーセンスと表現は、どちらを主体とした学習活動を設定したとしても、ナンバーセンスを意識した指導をすることが重要である。

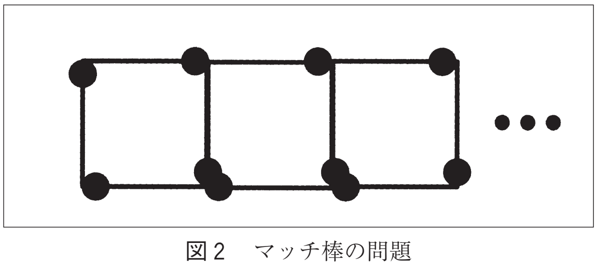

図２　マッチ棒の問題

3.2.3 『文字を用いた式における乗法と除法の表し方を知ること』の指導場面の例示

『文字を用いた式における乗法と除法の表し方を知ること』では、乗法の記号×は文字と文字の間で省略する指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「Ｂ：文字式の乗法と除法」である。

「Ｂ：文字式の乗法と除法」というナンバーセンスを意識した際には、演算記号の扱いを道具的に理解させるのではなく、数概念の拡張でもしたように必要性を考えさせ、新しいものを導入する際の思考を学ばせる必要がある。×という記号を省略するよさは、×という記号を書かないだけでも式の扱いが能率的になり、Ｘ（エックス）との見間違いなどを防げることがある。「どうして×の記号を省略すると思いますか」と発問をして生徒に考えさせるだけでも、演算記号を省略するよさを考え、新しいものを導入する際の思考を学ぶきっかけになり、「Ｂ：文字式の乗法と除法」というナンバーセンスによいと考えている。

3.2.4 『一次式の加法と減法』の指導場面の例示

『一次式の加法と減法』の学習では、解説にあるように、$a-(b+c)=a-b-c$ という計算の指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「Ａ：数と文字の関係」である。

ナンバーセンスを意識した際、解説にもあるように、文字を用いた式の計算の方法は、数の世界と関連づけて理解できるようにする必要がある。具体的な数を代入して $5-(3+2)=5-3-2$ とすることや、日常生活の場面を想定して b 円と c 円の品物に a 円を出して買ったときのおつりを表していると見るという学習活動を設定することが、「Ａ：数と文字の関係」のナンバーセンスに繋がる。

3.2.5 『式を用いて表したり読み取ったりすること』の指導場面の例示

『式を用いて表したり読み取ったりすること』では、図３の動物園の入園料の問題の指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「A：数と文字の大小」である。

図３の問題は、動物園の入園料の売り上げはいくらになるのかということが問題になり、答えである（$100a+300b$）円を求めることが最初の学習活動になる。この後、不等式の学習と大小関係の見積もりを関連付けた学習活動をするために、「b は100より大きいですか」などの発問をする。生徒は、問題文を見直し、$b \leqq 100$という答えを求めることになるだろう。文字と数の大小関係を考える活動を取り入れることによって、定義域や値域などの素地を学習する際に役に立ち、数などの見積もりの際に見積もりの幅を限定するナンバーセンスがよくなることにも繋がることを期待する。また、b という文字がどのような範囲にある数を表現しているのかと読み取る力を身につけることや、a は料金で b は人数を表現しているという文字が表現しているものの違いの理解にも繋がる。その後、「入園料の売り上げは80000円であった」と提示をして、$100a+300b=80000$ という等式を求める活動をする。ここで､等号を計算の過程を表す記号としてではなく、相等関係を表す記号としても用いることを生徒が理解できるようにする。そして、「入園者数は同じ100人として、パンダの特別ショーを全員が見に行ったとしたら、入園料の売り上げはいくらになるか」と発問をする。答えは（$100a+30000$）円や｛100（$a+300$)｝円などになる。さらに、「80000と$100a+30000$の大小関係はどうなっているか」と発問をすれば、$100a+30000>80000$ や $100a+30000>100a+300b$ などの式を表現する活動をすることもでき、「A：数と文字の大小」のナンバーセンスを養える。視点を変えて、「パンダの特別ショーを見に行くと割引券がもらえ、c 円の値引きになる」と問題を設定し直せば、売り上げは ($100a+bc$) 円となり、負の数を代入する機会も学習することができる。図３のような『式を用いて表したり読み取ったりすること』の学習で扱う問題は、表現を学習するだけでなく、表現と結びつけて文字や数の大小関係を見積もるナンバーセンスを養うように指導することが重要である。

問題
ある動物園の入園料は a 円で、パンダの特別ショーに見に行くならば、さらに300円を支払わなければならない。ある日のこの動物園の入園者数が100人でパンダの特別ショーに見に行った人が b 人のとき、ある日のこの動物園の入園料の売り上げはいくらになるか。

図３　動物園の入園料の問題

3.3 一元一次方程式

3.3.1 一元一次方程式で抽出できるナンバーセンス

「一元一次方程式」では、『方程式の必要性と意味及びその解の意味』・『等式の性質』・『一元一次方程式を解くこと』・『一元一次方程式の活用』の４つを学習する。

『方程式の必要性と意味及びその解の意味』の学習は、方程式が変数（未知数）を含んだ相等関係についての条件を表した等式であることや、等式の性質を学習して能率的に解を求める必要性を生徒が理解することになる。具体的には、等式や左辺、右辺、両辺などの用語と共に、方程式の意味を学習することから始まる。『方程式の必要性と意味及びその解の意味』の学習を分析すると、「B：方程式の両辺の関係」、「C：答えの吟味」というナンバーセンスの構成要素が抽出できる。

『等式の性質』の学習では、方程式を形式的に操作して解を求めることができるように、図４にある４つの等式の性質を学習する。『等式の性質』の学習を分析すると、「B：等式の性質」のナンバーセンスの構成要素を抽出できる。図４の等式の性質の①と②の性質は移項に関係して、③と④の性質は両辺を等倍や等分する際に関係する。

『一元一次方程式を解くこと』の学習では、一元一次方程式 $ax+b=cx+d$ を等式の性質を用いることによって、$x=\alpha$ の形に変形して解を求めることを学習する。『一元一次方程式を解くこと』の学習を分析すると、「B：計算の法則」、「B：等式の性質」、「B：柔軟な式変形」というナンバーセンスの構成要素を抽出することができる。

『一元一次方程式の活用』の学習では、生徒は日常生活や社会の問題を定式化して一元一次方程式を利用

①$a = b$ ならば，$a + c = b + c$
②$a = b$ ならば，$a - c = b - c$
③$a = b$ ならば，$ac = bc$
④$a = b$ かつ $c \neq 0$ ならば，$\dfrac{a}{c} = \dfrac{d}{c}$

図４　４つの等式の性質

して解く活動や、比例式を学習する。『一元一次方程式の活用』の学習を分析すると、「Ｂ：分数係数の一元一次方程式の変形」、「Ｃ：答えの見積もり」、「Ｃ：答えの吟味」というナンバーセンスの構成要素を抽出できる。

3.3.2 『方程式の必要性と意味及びその解の意味』の指導場面の例示

『方程式の必要性と意味及びその解の意味』では、図５の班分けの問題の指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「Ｂ：方程式の両辺の関係」である。

まずは、求めたい数量は何かを生徒に発問すれば、６人の班の数という答えがくるだろう。そこで、６人の班の数を x として考え、$6x + 2 = 32$ という等式を立式する。このとき、等号の意味を考え、$6x + 2$ と32が同じ数を表現していることを押さえる。x は未知数であることも押さえ、生徒に問題の解法を考えさせるようにする。x に順番に１、２、３…、と代入していく方法が自然な発想として考えられ、ナンバーセンスを意識した際には見当をつけて５前後の数をいきなり代入する方法も取り扱いたい。両方の方法とも答えの５は求められるが、順番に代入する方法は大変で、見当をつける方法は問題によっては適当な数が見つかりにくいので、どんな場合でも機械的に能率的な方法が必要になるところまで扱う。

3.3.3 『等式の性質』の指導場面の例示

『等式の性質』では、図４の④の性質を扱う指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「Ｂ：等式の性質」である。

④の性質だけ他の３つの性質より $c \neq 0$ という条件が１つ多いので、違和感があるからである。小学校第５学年で除法の結果と分数の関係について学習するが、ここでもう一度理解を深める必要がある。生徒に

問題
学級委員長のＢさんは、学活の話し合いの準備として６人ずつの班を作ったところ、32人いるこの学級の生徒は２人余ってしまいました。６人ずつの班はいくつできましたか。

図５　班分けの問題

０で割ってはいけないことを納得させるための説明の仕方は様々にあると思うが、逆数の観点から生徒が納得できる方法を例にする。解説の算数編では、除法を「乗法の逆として割合を求める場合と、基準にする大きさを求める場合とがある（p.166）」と説明している。つまり、生徒は乗法と除法が互いに逆の関係として捉えることができることを小学生のときに納得している。ここで、０の逆数を考えてみる。０に何かを掛けて１になればよいのだが、０を掛けると全て０になることから、０の逆数は定義できない。０の逆数がないということは、０で割ることができないことに同値であると考えられるので、０で割ってはいけないのではなく、０で割ることを考えることができないと納得できる。数学的には体論で学習しなければ厳密な理解は得られないかもしれないが、中学生の発達段階を考慮すれば、あまり深入りしすぎてもよくないと考えている。他には不定や不能を扱うことや、速さや時間、道のりを例に挙げても生徒が納得する説明をできると考えている。ここでナンバーセンスにとって大事なことは、０で割ることを考えない厳密な理由を生徒が理解することではなく、生徒の０の概念を豊かにすることである。$y = ax^2$ の x の定義域から y の値域を求める学習で x の定義域が０をまたぐときなど、０を特別扱いする場面は数学に必要なことである。そこで、等式の④の性質の理解も深めるのと同時に、０の概念を豊かにするとよいと考える。

3.3.4 『一元一次方程式を解くこと』の指導場面の例示

『一元一次方程式を解くこと』では、解説にもある上皿天秤を用いる操作的な活動を取り入れて、等式の性質を基にして同値な方程式を段階的に導いていく指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「Ｂ：等式の性質」である。

上皿天秤が釣り合っている状態で片方の皿に重りを足せば、重りを足した方が下に動く。この状態から、「再び釣り合う状態に戻すためには、もう片方の皿に何をすればいいですか」と発問をする。同じ重りを足せばよいという答えが返ってくると思うが、この活動を通して生徒に理解させたいことは、片方だけに数を足すことや引くこと、掛けること、割ることをすれば、両辺の最初の関係が崩れることである。ここでの方程式の最初の関係は、両辺が等しいことであり、つまり等式である。ここで等式の性質のときの学習が結びつき、「B：等式の性質」のナンバーセンスのスパイラルができる。

等式の性質を十分に理解すると、例えば0.42+0.58+0.2という式を計算するときに、小数のままだと見にくいと感じ、全体に100を掛けて42+58+20として、120と計算した後に等式ではないから、100を掛けた分を戻すために120を100で割って1.2と正答を計算する方法などをひらめくことに繋がる。

3.3.5 『一元一次方程式の活用』の指導場面の例示

『一元一次方程式の活用』では、図6のチョコの問題の指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「C：答えの見積もり」、「C：答えの吟味」である。

解説にもあるように、まずは求めたい数量に着目して、それを文字で表す活動をしたいところだが、ナンバーセンスを意識した際には、まず答えの予想をさせることが、「C：答えの見積もり」のナンバーセンスに繋がる。図6の問題では、10人だと代金が余り、20人だと代金が足りないことにすぐ気づくので、答えが10～20の間になるのではないかと予想をすることができる。予想の活動を取り入れることは、ナンバーセンスの直観的な部分を養う意図がある。また、求めたい数量を明確にしておくことや、立式の間違いや計算の間違いに早く気づくこともできるようになる。予想の後は解説にあるように、求めたい数量に着目して、それを文字で表す。図6の問題では、Cさんがチョコを渡す人数が x 人となる。次に、問題の中の数量やその関係から、2通りに表される数量を見出して、文字を用いた式や数で表す。図6の問題では、$1200+50x$ と2000が代金として同じ数量を表していると見出すことになる。そして、見出した2つの式を等号で結んで方

問題
Cさんは、チョコの材料を1200円、チョコを入れるために1つ当たり50円の袋を渡す人数分買ったところ、代金は2000円になりました。Cさんがチョコを渡す人数は何人でしょうか。

図6　チョコの問題

程式を作り、その方程式を解く。図6の問題では、$1200+50x=2000$ と方程式を作り、$x=16$ と解く。最後に、求めた解を問題に即して解釈して、問題の答えを求める。ここで、最初の予想の活動が特に役に立ち、検算の活動もここに含まれ「C：答えの吟味」のナンバーセンスによい。図6の問題では、答えの数の幅は10～20で検算をすると $1200+50\times16=1200+800=2000$ と $x=16$ で正しいとなり、問題に合わせて答えを16人とすることになる。予想と検算の活動を重要視することによって、ナンバーセンスの見積もりや答えの妥当性を判断する能力を養うことに繋がり、求めたい数量を即座に見つけることや、立式の間違いや計算の間違いをすることが少なくなることや、間違いをしても早く気づくことに繋がる。チョコを問題として取り上げたことについては、日常にある事象を扱って生徒の問題に対する興味を喚起することも目的としているが、次に比例式の問題として再び利用できるメリットがあるからである。

図7のチョコ作りの比例式の問題の指導場面を例示する。この指導場面で抽出できるナンバーセンスは、「B：分数係数の一元一次方程式の変形」である。

まずは、生クリームは市販のチョコの半分より少し多い量が必要であるから、400 g前後が答えになると予想をする。次に、生クリームを x gとして比例式 $3:5=x:750$ を作る。この後は比の値を用いて、$\frac{3}{5}=\frac{x}{750}$ と表して、等式の性質③を用いて両辺を750倍すれば、$x=450$ と解を求める。予想通りの数値を求めることができ、検算で確認をして答えの450 gを求めることになる。比例式でナンバーセンスを意識するところは、両辺をどのように式変形するとよいかという点がある。図7の問題に限らず、基本はxの係数が1になるようにするので、図7の問題は両辺を750倍して解を求めた。しかし、両辺を250倍して、$150=\frac{x}{3}$ にしてから両辺に3倍する方法であれ

問題
Ｃさんは、生クリームと市販のチョコを３：５の重さの比で混ぜて特製のチョコを作ることにしました。市販のチョコを750ｇ用意したとき、生クリームは何ｇ必要になるでしょうか。

図７ チョコ作りの比例式の問題

ば、最初から暗算でも簡単にできる。このように、ｘの分母の払い方を工夫することによって、「Ｂ：分数係数の一元一次方程式の変形」のナンバーセンスを養うことができる。

４．終わりに

本研究の目的は、教師が「数と式」領域のナンバーセンスを意識して指導できるように、中学校第１学年の「数と式」領域におけるナンバーセンスを抽出して、指導場面を例示することであった。「正の数と負の数」では、数概念の拡張、分数の四則計算の習熟と計算法則の理解、仮平均の考え方の学習で、ナンバーセンスを意識して指導する必要がある。「文字を用いた式」では、柔軟な式変形を必要とする学習、新しいものを導入する際の思考の経験、文字と数の大小関係を考える学習で、ナンバーセンスを意識して指導する必要がある。「一元一次方程式」では、文字が変数や未知数を表していることの理解、数を見積もって代入する活動、０の概念を豊かにすること、等式の性質を基にして同値な方程式を段階的に導いていること、答えの予想と検算、分数係数の一元一次方程式の変形について、ナンバーセンスを意識して指導する必要がある。

本研究で「数と式」領域のナンバーセンスを抽出して、指導場面を例示したことによる教育学的な示唆は、ナンバーセンスを意識することにより、予想などの活動が加わり、授業を豊かにすることができるということである。基本的には新学習指導要領にそった授業を行い、生徒に身につけさせたい知識や技術を教える中で、ナンバーセンスを意識して教えることが大事である。今後の課題は、「数と式」領域以外の領域でナンバーセンスを抽出して、ナンバーセンスが「数と式」領域以外にも重要であることを示すことである。

引用・参考文献

伊藤説朗編（1995），数感覚を育てることの意義：小学校算数実践指導全集２豊かな数感覚を育てる数の指導,日本教育図書センター．

銀島 文（1995），数感覚の記述枠組みによる事例の分析，教育学研究集録，19，筑波大学大学院教育学研究科，pp.65-74.

江森英世（2006），数学学習におけるコミュニケーション連鎖の研究，風間書房．

江森英世（2010），数学的コミュニケーションの創発連鎖における反省的思考と反照的思考，科学教育研究，34，No.2,pp.71-85.

金本良通，赤井利行，滝井章編（2008），小学校新学習指導要領ポイントと授業づくり，東洋館出版社．

清水静海編（2009），平成20年改訂中学校教育課程講座数学，ぎょうせい．

野尻和宏（2010），暗算のストラテジーとナンバーセンス，群馬大学教育実践研究，第27号，pp.31-40.

文部科学省（2008），小学校学習指導要領解説算数編，東洋館出版．

文部科学省（2008），中学校学習指導要領解説数学編，教育出版．

McIntosh, A., Reys, B. J. ,Reys, R.E. (1992), A proposed framework for examining basic number sense, For the Learning of Mathematics, 12,pp. 2-8.

Reys, R., Reys, B., Nohda, N., Emori, H. (1995), Mental computation performance and strategy use of Japanese students in grades 2, 4, 6, and 8, Jo- urnal for research in mathematics education, National Council of Teachers of Mathematic- s,pp.304-326.

Skemp, R. R. (1983), Mathematics in the primary scho- ol,Routledge.

Sowder, J. (1992),Estimation and number sense, Ha-ndbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, pp. 371-389.

Verschaffel, L., Greer, B., DeCorte, E. (2007), Whole number concepts and operations, In F. Leste-r (Ed.), Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (second edition), pp.580 -581.

Yang,D.C.,Hsu,C.J. & Huang,M.C. (2004), A study of teaching and learning number sense for sixth grade students in Taiwan.International Journal of Science and Mathematics Education, 2(3), pp. 407-430.

Yang, D. C., Reys, R., Reys, B. (2009), Number sense str- ategies used by pre-service teachers in Taiwa- n, International Journal of Science and Math- ematics Education, 7(2), pp. 383-403.

（のじり かずひろ）