類比による数学的な思考

田 村　　司

群馬大学教育実践研究　別刷
第28号　21～30頁　2011

群馬大学教育学部　附属学校教育臨床総合センター

群馬大学教育実践研究　第28号　21～30頁　2011

類比による数学的な思考

田　村　　　司

群馬大学大学院教育学研究科

A mathematical thought by the analogy

Tsukasa TAMURA

Graduate School of Education, Gunma University,

キーワード：類比、数学教育
Keywords：analogy，mathematics education

(2010年10月29日受理)

要　約

新学習指導要領において重要視されているものの１つとして、思考力の育成が挙げられる。その思考力の根底にあるものは、数学に関する知識や技能、数学的な見方や考え方であるといえる。それらを豊かにするためには、生徒自らが何かしらの意図をもって数学の対象に働きかけることを通して、身に付けていく必要がある。本研究では思考力を育てるための１つの切り口として類比を用いることを提案している。類比の定義については Polya, G. の定義を用いた。その定義をもとに類比である例を提示し、そこに表れる数学的な見方や考え方、学校での数学教育との関連を考察した。その結果として、類比を用いることで理解を促進させたり、思考の経済化が期待できたりすることが分かった。また、類比を用いた思考は、学習者が既存のことをより深く見つめなおすことや、自分の知らない新しいことを見出す際に役立つことが示唆された。

１．はじめに

類比についての研究は Polya をはじめとして、いくつか見ることができる。類比の有用性について Polya (1959a) は「おそらくは初等数学においても高等数学においても、またその点では他の任意の方面においても、これらの操作なしに、特に類比を用いることなしに、うまく運ぶことができるようなどんな発見もないだろう（ｐ.18)」と述べている。また、中川 (2006) が命題に対して類比の考えを用いた研究では、「類比の見方、考え方に基づいて命題を整理したところ、いくつかの類比な命題を集めることで、それらの裏にある一般的な性質を帰納的に明らかにすることができた」という記述を見ることができる。

今回改訂された学習指導要領では、子どもの思考力・判断力・表現力等を育てることを重視している。高等学校学習指導要領解説数学編において、「数学的な思考力や表現力を支えているのは、数学に関する知識や技能、数学的な見方や考え方である（ｐ.17)」という記述がみられる。筆者は類比を用いることにより、数学的な見方や考え方が豊かになり、数学的な思考力を育てることにつながると考えている。また、思考と表現は不可分ということを考慮すれば、類比について学ぶことで表現力の育成にも寄与できることが予想で

きる。

類比と類推について岡田（2000）によると、「類比的推論のことを簡単に類比、類推とよぶことがある（p.276）」とあるように、類比は類推の言い換えとして用いられることがある。しかし、類比的推論（類推）とは、『算数教育指導用語辞典』（日本数学教育学会，1984）によると「考察の対象としている２つの事柄の類似性に着目して、既知である一方の対象が成り立つ事柄から、未知なる他方の対象についても成り立つであろうと推論する（p.31）」ということになっている。これでは、類比について Polya（1959a）が言っている「２つの系は、もしそれらがそれぞれの部分の明白に定義できる諸関係において一致するならば、類比である（p.14）」という記述とずれが生じてしまう。よって、本研究では Polya（1959a）の述べていることを類比の定義として扱い、類比と類推を区別して扱うこととする。

本研究では、類比である例を収集し、それぞれについて類比の根拠となる関係を挙げる。そして、類比を用いた思考とはどのようなものであるのかを見出していくことを目的とする。

２．数多くの類比

前述した Polya の言う類比によると「明白に定義できる諸関係において一致する」となっており、この諸関係の捉え方によって数多くのものの中に、類比とみなす根拠となる関係ができることが分かる。この関係を見出すためには、２つの対象についてその構成に着目する必要がある。「関係が一致する」とは、２つの対象の構成において、共通な概念や共通な法則、共通な骨組みが存在することであると解釈できる。どのような構成を見出すかは、その対象を見る人が、どのような観点で見るかによっても変わる。また、類比の根拠となる関係にも、ある対象が提示されたときに類比が瞬時に分かるものもあれば、類比が分かりにくいものもある。類比が分かりにくい理由としては、ただ単に対象を見る人の知識や学習がその類比に気づくまでに達していないということや、その対象が複雑であり、どのような構成に着目して類比の根拠となる関係を捉えればよいのかが難しいということが考えられる。

類比が分かりやすい例として、次の３つの式を考えてみる。

$$3+3=6$$
$$7+3=10$$
$$5+7=12$$

この式において、最も基本的と思われる類比の根拠となる関係は“式の構成（形）が同じ（つまり $A+B=C$）である”ということだと思う。他にも“奇数＋奇数＝偶数”や“素数＋素数＝偶数”という関係に気づくと思う。この関係を見出すことにより、他の数においても“奇数＋奇数＝偶数”“素数＋素数＝偶数”成り立つのではないかと、類推的な考えをしていくことができる。例えば、“奇数＋奇数＝偶数”ということを証明するためには、２つの奇数を $2m+1$、$2n+1$ とおき、２つの数の和を考え、式を $2(m+n+1)$ と変形して偶数となることを示さなければならない。これは一般化の考え方が要求される。命題が成り立たないことを示すには、一つの反例を示せばよいので、“素数＋素数＝偶数”については、反例として２＋５＝７という式を挙げることで成り立たないことが示せる。ここで見られたことは、中学校の文字式の利用の単元や証明の単元においてよく用いられることである。これは、対象を類比と見なすことによって、新たな見方が生まれ、数学の問題として扱えるようになるということを示している。先ほどの類比の例のように、類比の根拠となる関係を見つけることが易しい類比がある一方で、類比な関係に気づきにくいものもある。この例としては本研究における「3.5．グラフ理論的な類比」が挙げられると思う。この気づきにくい類比を知った際には、そこには驚きや感動に似たような感情が生まれる。それはまた、数学に対して興味関心を引き起こし、他の対象についても類比な関係はないだろうかと発展的な考えをすることにもつながると筆者は考える。

先ほどの３つの式における類比の例でもそうであるが、ある対象間にはその構成の見方によって、いくつかの類比の根拠となる関係が存在することがわかる。Polya（1959a）は「平面幾何と立体幾何の間にはいろいろな類比があるので、ただ１つの特権的な類比というものはない」と述べている。また、類比が多くの場面で扱われていることについては、数学において「数」

と「図形」は一方の事実をもう一方の性質によって示すことがあり、この間にも類比があるとしている。つまり、「数」と「図形」は数学の対象に数多くなりうることから、「数」と「図形」の間の類比も数多くあるということである。この例としては「三角形の内角の和は180°である」ということを文字と数で「∠A＋∠B＋∠C＝180°」と表すことなどが挙げられる。この間にも類比があるとみなすようである。これが許されるのであれば、数学には本当に数多くの類比が存在することが分かる。

3．類比の例

3.1. 平面・空間図形の類比

ここでは平面図形と空間図形において、見ることができる類比の例を挙げる。その一つとして長方形と直方体との関係である。２つの図形は視覚的にも似ているが、類比の根拠となる関係を示さなければ、類比と呼ぶことはできない。２つの図形の構成要素に着目するとその関係性が見えてくる。長方形の１つの辺は向かい合う辺に平行であり、残りの辺に垂直となっている。直方体の一つの面は向かい合う面に平行であり、残りの面に垂直となっている。つまり、長方形における辺どうしの構成と、直方体の面どうしの構成が共通しているということである。このことにより、図形の性質を１つの図形の中だけで捉えているだけではなく、２つの図形に共通性があると捉えられるようになる。これはさらに、空間図形を考察する際に、空間図形の一部として平面図形を捉えたり、空間図形を平面図形に帰着させたりするときなどに有効となってくることである。別々の図形であると見ていたものを、類比として結び付けることで知識を豊かにし、図形に対する見方を一層豊かにすることができる。

次に、この２つの図形には別の点において類比であることをみていく。教科書でもよく取り上げられることではあるが、長方形は１つの線分を垂直に平行移動したものであり、直方体は１つの長方形を垂直に平行移動したものであるとみることができる。このことは、『中学校学習指導要領解説数学編』(2008）にもあるように、空間図形を直線や平面図形の運動によって構成されたものとみる視点を与えることで、空間的な想像力や直観力を伸ばすことにつながると考えられる。

上記の例では長方形と直方体には少なくとも２通りの類比の解釈があることがわかった。この例からも、同じ２つの対象であっても、類比の根拠となる関係は１つとは限らないということが分かる。

平面図形と空間図形における別の類比の例としては、三角形と角錐の関係が挙げられる。２つの構成に着目してみる。三角形は１つの線分をとり、線分上のすべての点をその線分が定める直線外の一点に結びつけることで得られる。角錐は多角形のすべての点を、その多角形が定める平面外の一点に結びつけることで得られる（図１）。この関係において２つの図形は類比であるといえる。

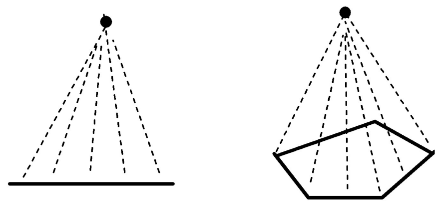

図１

さらに、角錐を四面体にした特殊な場合について考えてみる。先ほどの類比の関係に加えて、別の類比が見えてくる。長方形と直方体のときのように２つの図形の構成要素に着目してみる。平面上において２直線では三角形はできないが、３直線により三角形はつくられる。空間内では３平面では四面体はできないが、４平面により四面体はつくられる。このことから、２つの図形は最小個数の境界要素によって囲まれるという点において類比であることがわかる。境界要素とは、空間内では平面により空間は二分され、平面内では直線により平面は二分されるということからその名前がついている。上記の例は、空間観念を深めたり、図形を分解、構成する見方を育成したりする学習に用いることができると考える。また、平面が直線で分割できる、空間が平面で分割できるというような、直線（一次元）と平面（二次元）の関連性や、平面（二次元）と空間（三次元）の関連性を理解するのにも役に立つことである。

3.2. ２次元と３次元の間に見られる類比

ここでは、２次元空間で成り立つ性質と類比なことが、３次元空間でもいえるという例を考えてみる。中学校第３学年の教科書に次のような問題が載っている。

＜問題＞
　半径 rm の円形の花だんの周りに、幅 hm の道があります。道の面積をSm²、道の中央を一周した長さを lm とすると、$S=lh$ となります。このことを調べましょう。

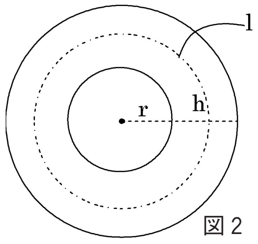

図２

　この問題の要点は面積が　$S=lh$ で与えられるということである。図２において、l はどのようにして決まるかというと、道の幅 h の中点が円の中心を中心として一回転したときの軌跡である。面積はどのようにして決まるかというと、「S=（h の中点の移動距離）×（道の幅 h）・・・式①」ということができる。これと類比であると考えられるものが、次のパップスーギュルダンの定理である。この定理を図で表したのが図３である。

＜パップスーギュルダンの定理＞
平面上の曲線や直線で囲まれた図形 A が、この平面上にあって A と交わらない一つの直線を軸として一回転してできる立体の体積は、A の重心 G が描く円周の長さと A の面積との積に等しい。

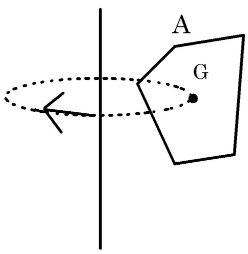

図３

　この定理において、体積を V、図形 A の面積を S、直線と重心 G との距離を r とする。重心 G が描く円周の長さは $2\pi r$となる。よって図形 A が直線を軸として一回転してできる立体の体積は　V ＝ $2\pi rS$ となる。言葉の式にして書き直すと「V＝(Aの重心の移動距離)×(図形の面積S)　・・・式②」ということができる。
式①と式②は式の構成が同じであり、対応関係も明確であることが分かる。２つの式は類比とみなしてよいだろう。

3.3.　一般化、特殊化による類比

　Polya（1959a）は三平方の定理に出てくる類比について、一般化や特殊化の考えを用いて、定理が成り立つことを示しながら例を挙げている。三平方の定理とは「直角三角形の直角をはさむ２辺の長さを a、b、斜辺の長さを c とすると、$a^2+b^2=c^2$ の関係が成り立つ」というものである。
　この定理の説明の図として教科書などでも、次のような図（図４）がよく用いられる。

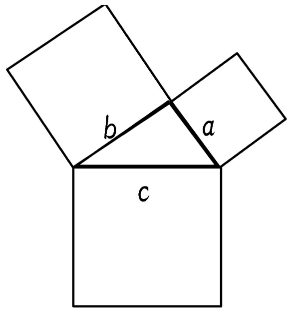

図４

　これは a^2、b^2、c^2、の値を直角三角形の３辺上の正方形の面積としてみているものである。三平方の定理では２つの正方形の面積の和が、斜辺上にある正方形の面積に等しくなるということを表している。この図４において、直角三角形の３辺上にある正方形を、一般化した互いに相似な図形に変えてみる（図５）。

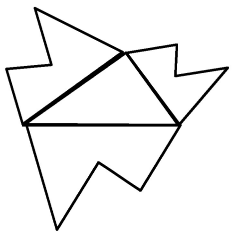

図５

　直角三角形上の３つの相似な図形の面積はそれぞれ、λa^2、λb^2、λc^2となる。ここで λ とは図４の正方形との面積の比で決まるものである。よって、三平方の定理を一般化した式 $\lambda a^2+\lambda b^2=\lambda c^2$ が図５によって表されていることになる。この式は言いかえると、直角三角形の３辺の上に３つの相似多角形が描かれれば、

斜辺の上に描かれたものは面積において他の２つのものの和に等しい、ということを表している。さらに、このことを表す特別な図は次の図（図６）である。これは図５を特殊化した図ともいえる。

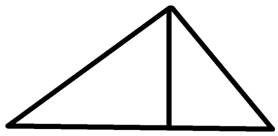

図６

斜辺上にある直角三角形と、他の２つの辺上にある２つの直角三角形は相似であり、その面積の和は、斜辺上の直角三角形の面積に等しくなっている。Polya（1959a）は、この三平方の定理に関する２つの図、（図４と図６）は類比であるとしている。この過程の中には、一般化の考え、特殊化の考えが行われている。類比を扱う際に、どの部分に一般化や特殊化の考えが使われているのかを子どもたちに考えさせることで、子どもは次第にそのような視点を持って学習する態度を身についていくと思う。このように、類比である対象を扱う際には、類比であるという結果だけでなく、その成り立ちがどのようになっているのかを理解することが大切であると筆者は考える。

これまでみてきたような、一般化し特殊化する過程をたどる類比の別の例を挙げることにする。そのために、小学校で学習する円に関する次の問題について考える。

＜問題＞

右の図のように、30cmの直径 AB をもとにした半円アがある。

AP、PB が、それぞれ 10cm 20cmになるようにPで分割して、半円イ、ウをかく。

このとき、アを通ってAからBに至る長さと、イとウを通っていく長さの大小はどのようになるか。

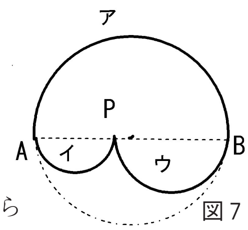

図７

解）アの長さ・・・

30(cm) × 3.14 ÷ 2 ＝ 47.1（cm）

イとウの長さ・・・

10(cm) × 3.14 ÷ 2 ＋ 20(cm) × 3.14 ÷ 2 ＝ 47.1(cm)

よって、どちらも同じ長さになる。

この問題を指導する際に注意することとして中島（1981）は、この問題が一般的な関係としての証明の意味をもっていることを挙げている。つまり、分配法則に目をつけることによりイとウの直径は、その和がアに等しければよいということである。

イとウの長さ・・・

10(cm) × 3.14 ÷ 2 ＋ 20(cm) × 3.14 ÷ 2

＝(10(cm) ＋ 20(cm)) × 3.14 ÷ 2

＝30(cm) × 3.14 ÷ 2　・・・アの長さ

中島は、分配法則が成り立つという点をこの問題の本質的な点としており、これをこの問題場面の「構造」としてとらえ次のことを述べている。

「この問題の場合の構造は、結局、次のような形のものとして一般的に表される。

$p\ (x_1+x_2+\cdots+x_n)=px_1+px_2+\cdots+px_n$」

この問題では半円が使われているが、相似な図形であればよいことが分かる。先ほどの、三平方の定理のときのように、問題に出てきた半円の図を一般化してみた図を考えると。次のようになる（図８）。

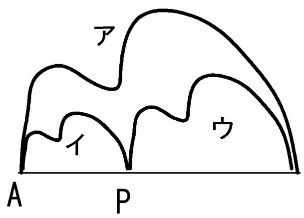

図８

それぞれ相似な図形で分割されている限り、ＡからＢに至るアの長さと、イとウの長さの和は等しいものとなる。

さらに、この相似な図形を正三角形としたときの特別な場合の図（図９）を考えてみる。

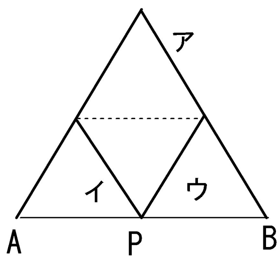

図９

これは正三角形の一部分がＡからＢの経路となって

いるものである。大きな正三角形の中にひし形ができているので、ＡからＢに至る、アの長さと、ＡからＰを通りＢに至るイとウの長さは一目で等しいことが分かる。２つの図（図７と図９）は、周の長さが等しい経路を持っている図であり、この点で類比であるといえる。

3.4. 明白に定義されている類比

Polya（1959a）は「類比の概念が論理的もしくは数学的概念の明快さに達している場合は、特別に考える価値がある（ｐ.29)」として数学的な３つの類比な場合を挙げている。

（１）数学的な対象の集合ＳおよびＳ’において、Ｓの対象相互の関係と、Ｓ’の対象相互の関係とが同じ法則に従う場合。

例として数の加法と数の乗法の関係が挙げられる。加法と乗法は次のように交換法則と結合法則が成り立つ。

$$a+b=b+a \qquad ab=ba$$
$$(a+b)+c=a+(b+c) \qquad (ab)\,c=a\,(bc)$$

このことから、似たような式、同じ構成があることがわかる。この関係において加法と乗法は類比であるといえる。これは大学において学ぶ代数学の群、環、体などにつながっていくものである。このような話を子どもに対して行うだけでも、子どもが大学数学に対する興味・関心を引き起こすきっかけになると思う。

（２）２つの集合ＳおよびＳ’の間にある関係において、ある種の関係の諸法則を保存する１対１の対応がある場合。同型写像などの関係にあるものがこれにあたる。

例として任意の実数ｒは、ある正の数 p の対数に等しいことがあげられる。

$$r=\log p$$

この関係によって、各々の正の数 p に定まった一つの実数 r が対応し、各々の実数 r に定まった一つの正の数 p が対応する。関数 $r=\log p$ のグラフは次のようになる。(図10)

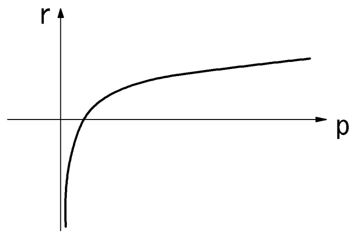

図10

よって、関係の諸法則を保存する１対１の対応があり、類比であるといえる。

（３）二つの集合ＳおよびＳ’の対象の間にある関係が１対多に対応する場合。準同型写像などの関係にあるものがこれにあたる。

例として自然数 n（１を除く）を法とする剰余類があげられる。これは簡単に言うと、ある自然数に対して、その数を n で割った余りを考えることで数を分類することができるというものである。もう少し分かりやすくするために、n を５として、自然数を５で割った余りを考えていく。次の図（図11）は自然数を順に５ずつ横に並べたものである。

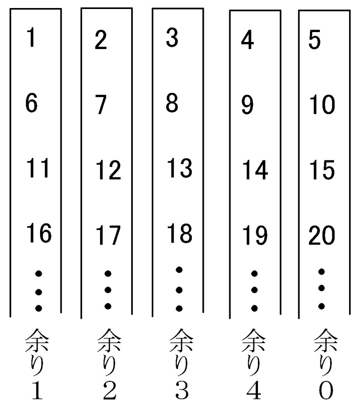

図11

５で割ったときの余りという観点で数をみると、１、６、11、16・・・という数は余りが１という関係でまとめられ（これを $\bar{1}$ とかく)、２、７、12、17・・・という数は余りが２という関係でまとめられる（これを $\bar{2}$ とかく)。以下も同様である。つまり、自然数を５で割った余りを考えた際に、自然数の集合は集合 $\{\bar{0}、\bar{1}、\bar{2}、\bar{3}、\bar{4}\}$ に１対多に対応しているということになる。この関係において類比であるといえる。

このことは、学習指導要領改訂により、中学校第１学年に新しく移行されてきた「数の集合と四則計算の可能性」の内容にも関連してくることである。この内容の一部において集合について学ぶ場面がある。ここでは自然数、整数、分数などの集合における包含関係

を学ぶことが中心となるが、子どもたちの混乱をきたさない程度に実態にあわせて、剰余類の考え方を紹介することも可能であると思う。剰余類という観点から数に対する新しい見方を知ることで､数に対する興味、関心をもつようになると考える。

3.5. グラフ理論的な類比

グラフ理論におけるグラフとは『新数学事典』（一松信，1980）によると、「有限個の頂点と、それらを結ぶ弧からなる図形をグラフ（または回路）という。さらにすべての弧が向きづけられているとき有向グラフという。ただし、１つの頂点を通る弧が２つ以上あってもよいが、弧と弧は交わってはいけない。（p.426)」となっている。

グラフ理論的な類比の例として、次の二つの図（図12、13）を考えてみる。

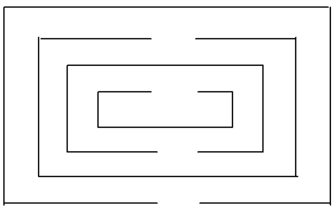

図12

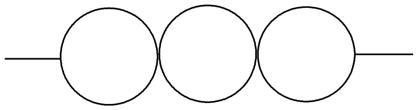

図13

一見この２つの図には、どこにも類比が見られないように感じる。しかし、２つの図を幾何学的に見るのではなく、グラフ理論的に見ると類比の根拠となる関係が見えてくる。２つの図を類比と見るためには、図12を迷路の平面図として、外側から出発して内側へと向かう経路を考える必要がある。また、図13では左から右にたどる経路を考える必要がある。説明をしやすくするために、記号をつけた図（図12'、13'）を用意する。

どちらの図もOからKに向かう経路を考えてみると、「O→A→BorC→D→EorF→G→HorI→J→K」という経路をたどることとなる。グラフ理論的に考えると同じ経路になるという関係において類比であると

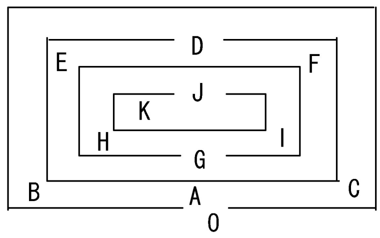

図12'

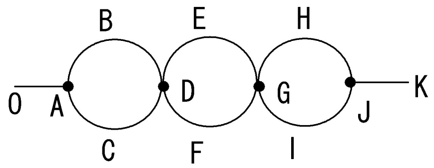

図13'

いえる。

平成21年に改訂された高等学校の学習指導要領数学編では、新しい科目として「数学活用」が設けられた。数学活用は（１）数学と人間の活動（２）社会生活における数理的な考察、という２つの内容で構成されている。特に（２）の内容では数学的な表現の工夫として、「数学化した事象を、図、表、行列及び離散グラフなどを用いて表現し、考察する（p.63)」という記述がある。ここで言っている離散グラフとは「頂点と、頂点と頂点を結ぶ辺で構成された図（p.63)」である。このことからも、離散グラフを用いるために類比による思考に慣れている必要があることがわかる。

3.6. 作図における類比

中学校第１学年において、角の二等分線や、線分の垂直二等分線、垂線をひく作図の学習を行う。作図では定規は２点を通る直線をひく道具として、コンパスは円をかいたり長さを写し取ったりする道具として使う。まず初めに、それぞれの作図をする際の手順を確認していくことにする。

（１）角の二等分線の作図

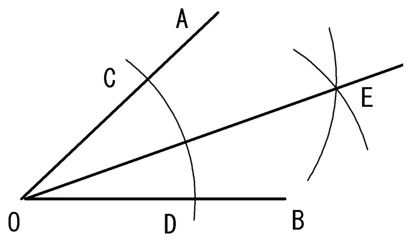

図14

①　∠ＡＯＢの頂点Ｏを中心として、円弧をかき２辺ＯＡ、ＯＢとの交点をＣ、Ｄとする。
②　交点Ｃを中心として円弧をかく。同じ半径をもつ円弧を交点Ｄを中心としてかく。
③　②での円弧の交点をＥとして、ＯＥを結ぶ。

（２）線分の垂直二等分線

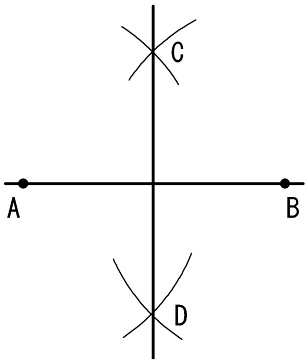

図15

①　点Ａを中心として、円弧をかく。
②　①と同じ半径を持つ円弧を、点Ｂを中心としてかく。
③　①、②でかいた円弧の２つの交点を直線で結ぶ。

（３）直線外の１点から直線に垂線を引く

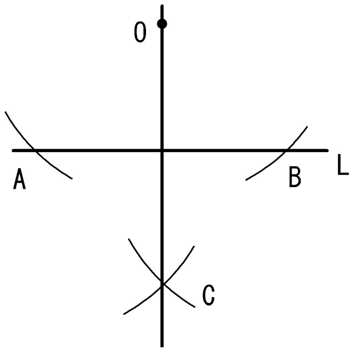

図16

①　点Ｏを中心として、直線Ｌと交点ができるように、円弧をかく。それぞれの交点をＡ、Ｂとする。
②　交点Ａを中心として、円弧をかく。同じ半径をもつ円弧を交点Ｂを中心としてかく。
③　②でかいた円弧の交わりをＣとする。Ｏ、Ｃを直線で結ぶ。

（１）から（３）は異なったものを作図しているが、コンパスの動きは、たこ形を決める頂点を作っていると見ることができる。たこ形とは、２組の隣りあう辺がそれぞれ等しい四角形のことである。つまり、（１）では点ＯＣＥＤによってでき、（２）では点ＡＣＢＤによってでき、（３）では点ＯＡＣＢによってできているということである。これらの作図で求められているものは、たこ形における対称の軸になっていることがわかる。また、次のように考えることもできる。（１）ではＯＣ＝ＯＤ、ＥＣ＝ＥＤであるので、点Ｏと点Ｅを中心にもつ２つの円の交点がＣ、Ｄである。（２）では点Ａ、Ｂを中心にもつ同じ半径の２つの円の交点がＣ、Ｄであり、（３）では点Ａ、Ｂを中心にもつ２つの円の交点がＯ、Ｃである。つまり、いずれの作図も２つの円が中心を結ぶ直線に対して線対称であることを用いている。ここで見てきたように、角の二等分線、線分の垂直二等分線、垂線の作図は図形の対称性をもとにしているという点において類比であるといえる。

これら３つの作図において、類比を見出し、線対称な図形を作ることで解決されると見ることには利点がある。例えば、作図の手順を忘れてしまっても、たこ形をつくるということを目標にして試行錯誤することで、作図の手順を自分の力で思い出すことができると思う。与えられている線分や角に対してたこ形を思い描くことで、頂点となる４つの点が決まる（図17）。その後、長さを写し取る、円をかく、というコンパスの役割を使うことで、その頂点が決まるように印をつけていけばよいという見通しを立てることができる。これができる前提として当然のことながら、たこ形は２組の隣りあう辺がそれぞれ等しい四角形ということを知っている必要がある。

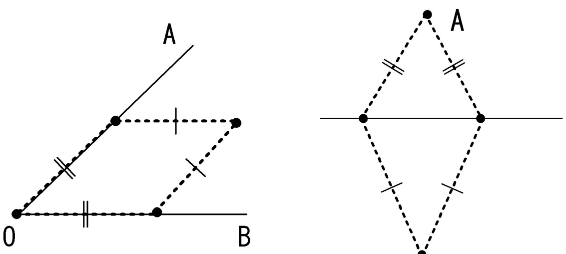

図17

４．類比の役割

4.1.　類比と構造

これまでにいくつかの類比である例をみてきた。例からも分かるように、類比と見なす根拠となっていることは、２つの対象の構成において、共通な概念や共通な法則、共通な骨組みが存在することであることが分かる。これに似ていることとして、公理的方法があ

る。杉山（2010）は公理的方法の役割の１つは、同じものと思われる理論に共通する性質を吟味し、共通な概念、共通な法則を明らかにすることであるとしている。それにより、得られたものは、２つ以上の理論に共通する骨組みのようなものであり、構造と呼んでいる。さらに、杉山は「構造を公理系の意味に近く、言い換えれば、いくつかの場面に共通に見られる原理・法則と考える（p.173）」と述べている。

公理的方法の一例として、小数の掛け算での例が挙げられる。「１ｍの値段が80円のリボン3.4ｍの代金」を求める問題である。この問題が、もし「１ｍの値段が80円のリボン３ｍの代金」を求めるものであれば、同数累加の考えを用いて80×３という式で問題はない。しかし今回は乗数が3.4なので同数累加の考えは使えない。そこで子どもは「（１ｍの値段）×（リボンの長さ）＝（代金）」という言葉の式を頼りにして80×3.4という式をつくる。これで問題はなさそうであるが、ここには論理の飛躍が起こっている。それは、整数の場合に乗法でできたことを、小数の場合にも乗法で行ってよいかということである。しかし、乗法の式の妥当性が確認できなくても、他の方法で代金を求めることができる。１ｍの値段が80円のリボン３ｍの代金は80×３＝240で、240円とわかるので、あとは0.4ｍ分の代金を求めて加えればよい。これを求める考えとしては、１ｍが80円より、１cm分を0.8円、あるいは10cm分を８円として考えて、0.8×40＝32、８×４＝32として32円を240円に加える考えである。これは、単位をｍからcmに小さくすることによって、整数の乗法が使えるようにしているのであるが、なぜ80×3.4という乗法で表してよいのかには言及していない。

もう一度、２つの考えを振り返ると、どちらも、１cm分は１ｍの100分の１だから、80円の100分の１の0.8円になり、10cm分は１ｍの10分の１だから、80円の10分の１の８円になるというものである。これらに共通として認められていることは、長さが10分の１、100分の１、・・・になれば、それに対応する代金も10分の１、100分の１、・・・になるということである。つまり、長さと代金が比例しているということである。杉山（2010）はこの問題の構造として長さと代金に比例関係があることを挙げている。

これは別の言葉で言うと、「単位量あたり a（整数）円のリボン b（整数）ｍの代金」を求める問題と「単位量あたり c（整数）円のリボン d（小数）ｍの代金」を求める問題の間には、長さと代金に比例関係が成り立つということで、類比であるといえる。さらには、「リボン」「代金」「円」「ｍ」などの言葉を変えることで、比例関係という骨格を崩さずに、より多くの類比な問題が出てくることが容易に分かる。一度この関係が了解されれば、これと類比なタイプの問題に対しては、乗法を用いることができるという思考の経済化にもつながる。この例にみてきたように、類比の根拠となる関係は、常にではないがあるときには、杉山（2010）の言う構造にかなり近い意味合いを含んでいると筆者は考える。それは、Polya（1959a）の言う類比の定義と杉山（2010）の考える構造の定義を比べてみても分かるように両者は、「対象間に見られる明確にできる共通性」という言葉でまとめることができるからである。ここで注意しなければならないことは、類比の定義における「明白に定義できる諸関係」がここでいう「構造」を意味するものであるということである。

4.2. 類比の持つ可能性

ブルーナーは構造を強調することについて、理解しやすくなる、忘れにくくなる、転移を約束する、進んだ知識と初歩の知識の間のギャップを狭めるという４つの構造の役割を主張している。杉山（2010）はこのことに対し、「問題は、その価値の種類を問うことにあるのではなく、その価値追求に対する生産性にある。それを学習したことによって、価値実現のためにどれだけ貢献し得るかということが問題である。ブルーナーの四つの主張も、それを求めているものと考えることができる（p.185）」と述べている。つまり、構造を学習したことにより、将来どのようにしてそれが役立ち得るのかということが重要になってくるということである。

4.1.において、あるときには類比の根拠となる関係を構造として見ることができることを述べてきた。そのことを考慮してみると、ブルーナーが述べていることが類比の役割としても挙げられるのではいかと考える。例えば、3.6.の作図における類比のところでも見てきたように、角の二等分線と垂線の作図は異なったものを作っているが、そこにはたこ形を作っているという共通性があった。たこ形の性質により、生徒は何を根拠として二等分線、垂線としているのかが、直観的に理解しやすくなる。これらの作図の手順はそれほ

ど複雑ではないが、たとえ忘れてしまったとしても、たこ形を作ることを目標にすることで、次の手順を予想することも可能となる。

リボンの掛け算の例では、小数の場合でも、整数のときと類比であると見ることで、同じ乗法でできるという予想が立ち、進んだ知識と初歩の知識のギャップを狭めることができていると言える。さらに、乗法をそのまま当てはめることができるという見通しにより、加法や、除法といった他の演算が入り込まないという、思考の経済化にもつながっている。このことからも分かるように類比と見ることによって、簡潔な思考ができるようになる。類比と見ることによって、対象間の関係が意味を持つようになることが、これらの例からも読み取れる。

5．おわりに

数学的な思考を行うためには、その１つの支えとなっている数学的な見方や考え方を豊かにする必要がある。この見方や考え方は、自分自身で数学の対象に対して考えをめぐらせ、働きかけていかないと身についていかないものであると考える。その働きかけの１つの切り口として類比があげられる。類比という視点をもつことにより、今まで異なるものとしてみてきたものに対して、関連性が生まれ統合的な見方ができるようになる。また、１つの対象だけでは見えていなかったことも、それと類比な対象と合わせて再び考え直すことで、もとの対象に対して新たな見方ができるようになる。これは、学習者がすでに知っていることを、より深く見つめ直すことに役立っている。

しかし、これとは逆に、類比と見ることによって余計な思考を排除して、思考の経済化をもたらすということもある。このことは学習者が自分の知らない新しいことを見出そうとしているときに有効に働くものである。類比をもとにした類推的な考えは必ずしも正しい結論を導くわけではないが、その考え方によって数学的な思考を進めることを可能にしていると言えるはずである。

今回の研究では、類比の関係にある例を提示し、類比とはどのようなものなのかを考察してきたが、類比を用いた思考には、上記で見たように少なくとも２通りの用法があると考えることができた。ここでは、類比の例はいくつか挙げてあるものの、多くの例を挙げることはできなかった。多くの類比の関係にある例を挙げることで、類比と見ることでもたらされる効果を具体的に見出すことができると考える。また、今回は類比を取り入れた授業に関しては触れていない。今後の課題としては、類比を取り入れた授業を行い、その考察、分析を行いたいと考えている。

＜引用・参考文献＞

一松　信（1980），新数学事典,大阪書籍.
岡田禕雄（2000），算数・数学科重要用語300の基礎知識,
中原忠男編，明治図書.
澤田利夫他（2009），中学数学２，教育出版.
澤田利夫他（2009），中学数学３，教育出版.
杉山吉茂（2010），復刻　公理的方法に基づく算数・数学の学習指導，東洋館出版社.
杉山吉茂（2009），中等科数学科教育学序説，東洋館出版社.
高澤茂樹，数学的な見方や考え方を育てる授業とその評価，数学教育2010年２月号，pp.4-7.
チャート研究所（2003），新課程チャート式基礎からの数学Ⅰ＋A，数研出版.
中川裕之（2006），類比に基づく発展的な数学の学習指導について，日本数学教育学会誌，数学教育学論究，vol. 87, pp. 15-19.
中島健三（1981），算数・数学教育と数学的な考え方～その進展のための考察～，金子書房.
日本数学教育学会（1984），算数教育指導用語辞典,教育出版.
長谷川雅枝（2006），数学的な考え方と問題解決能力，日本数学教育学会誌第88巻第４号，pp.13-21.
前田隆一（1995），小・中学校を一貫する初等図形教育への提言，東洋館出版社.
文部科学省（2008），小学校学習指導要領解説算数編,
東洋館出版社.
文部科学省（2008），中学校学習指導要領解説数学編，教育出版.
文部科学省（2009），高等学校習指導要領解説数学編理数編，実教出版.
吉田稔他（2005），新版中学校数学２，大日本図書.
Davis, P. J. and Hersh, R.（1986/2003），柴垣和三雄，清水邦夫，田中裕訳，数学的経験，森北出版.
Polya, G.（1953a/1959），柴垣和三雄訳，帰納と類比，数学における発見はいかになされるか１，丸善.
Polya, G.（1953b/1959），柴垣和三雄訳,発見的推論,数学的発見はいかになされるか２，丸善.
Polya,G.（1944/2010），柿内賢信訳，いかにして問題をとくか，丸善.

（たむら　つかさ）