

# 数学的な見方や考え方を基盤とした論理的な思考

斉藤 成海

群馬大学教育実践研究 別刷

第28号 31～37頁 2011

群馬大学教育学部 附属学校教育臨床総合センター



# 数学的な見方や考え方を基盤とした論理的な思考

斉 藤 成 海

群馬大学大学院教育学研究科

## Logical thinking based on mathematical viewing and thinking

Narumi SAITO

Graduate School of Education, Gunma University

キーワード：論理的思考，数学的な見方や考え方

Keywords: Logical thinking, Mathematical viewing and thinking

(2010年10月29日受理)

### 要 約

本研究の目的は、今まで一つひとつが独立していると考えられてきた数学的な見方や考え方に対し、新たに考え方と考え方をつなぐ論理的思考という思考の存在を明らかにすることである。研究方法としては、片桐（2000）で定義している数学的な考え方、また村上（2000）で定義している論理的な考え方を基にし、実際に算数・数学科教育で行われている事例を取り上げ、考え方と考え方をつなぐ思考の存在を明らかにし、論理的な考え方の定義によってそれらが論理的思考であるかを分析する。

本研究の結果として、考え方と考え方をつなぐ思考が存在し、その思考が論理的思考であることが分析できた。そのため、数学を学ぶことで論理的思考が養われるということがより強固なものとなったといえる。

### 1. はじめに

平成20年3月に学習指導要領は改訂され、新中学校学習指導要領は平成24年度から全面的に実施することを予定されている。今回の改訂では、中学校数学科の目標から「数学的な見方や考え方」という文言がなくなった。しかし、目標からなくなったからといって、無視してよいということではない。実際、新しい学習指導要領解説でも「数学的な見方や考え方」という語は頻繁に明記されており、数学に関わる問題を解くときにはこれが必要不可欠となってくる。数学的な見方や考え方についての研究は40年以上前からなされており、近年の研究では、片桐（2004）や塚原（2000）の

研究が有名である。それらの研究では、数学的な見方や考え方には十数個に分類ができるとしている。代表的なものでは「帰納的な考え方」、「類推的な考え方」、「一般化の考え方」、「記号化の考え方」などがある。上記の研究では、一つひとつの数学的な見方や考え方が独立していると捉えられる。しかし、数学の問題を解く上でこれら十数個の考え方が一つひとつ独立しているとは考えにくい。数学の問題を解くときは、解答者がもっている数学的な見方や考え方のどの考え方を使うかの思考を行い、その考え方を使用したらまた次の考え方を選択する思考、いわばそれぞれの数学的な見方や考え方をつなぐ思考を行う。また、ひとつの数学的な思考の中でも次の作業に移る思考がある。要す

るに、それぞれの考え方が連続的かつ流動的なものであると考えられる。その中でも、本稿は数学的な見方や考え方をつなぐ思考に着目する。また、考え方と考え方をつなぐ思考はそれらをつなぐ根拠が必要であると見え、その思考は論理的思考であることを明らかにする。したがって、本稿の目的は数学的な見方や考え方をつなぐ思考が存在することを分析し、その思考が論理的思考であることを明らかにすることである。

## 2. 研究の方法

本研究の目的を達成するための方法として、まず、片桐(2004)で定義されている数学的な考え方、また『算数・数学科重要用語300の基本知識』において村上(2000)が定義している論理的な考え方を基にして、それぞれ本稿の数学的な見方や考え方、論理的思考の定義とする。次に事例から数学的な見方や考え方をつなぐ思考の存在を証明し、その思考が論理的思考であることを定義から明らかにする。

本稿での数学的な見方や考え方は、生涯にわたり数学を幅広く活用するための能力や態度のことを指し、ある事象において帰納的、演繹的、一般化、特殊化などの考え方をを用いて問題を解決することである。数学的な見方や考え方を活用することで、簡潔、明瞭、的確に問題を解決できるため、数学的な見方や考え方の良さを認識し、より活用しようとする意欲を高めるといった好循環を生むことができると考えている。

片桐(2004)で定義されている数学的な見方や考え方は以下の通りである。

- |    |                              |
|----|------------------------------|
| 1  | 帰納的な考え方                      |
| 2  | 類推的な考え方                      |
| 3  | 演繹的な考え方                      |
| 4  | 統合的な考え方 (拡張的な考え方を含む)         |
| 5  | 発展的な考え方                      |
| 6  | 抽象的な考え方 (抽象化、具体化、条件の明確化の考え方) |
| 7  | 単純化の考え方                      |
| 8  | 一般化の考え方                      |
| 9  | 特殊化の考え方                      |
| 10 | 記号化の考え方                      |
| 11 | 数量化、図形化の考え方                  |

これらの意味を片桐(2000)は以下のように定義している。

### 1. 帰納的な考え方

幾つかのデータを集め、それらのデータ間に見られる性質を見出し、その性質がそのデータを含む集合(変数の変域全体)で成り立つであろうと推測し、その推測した一般性が真であることをより確かにするために、新しいデータで確かめる。

### 2. 類推的な考え方

ある事柄Aの性質、法則または解法がわからないとき、その事柄Aに似ている既知の事柄A'の性質、法則または解法を活用して解決しようとする。

### 3. 演繹的な考え方

いつでも言えるという事を主張するために、既にわかっていることを基にして、その正しいことを説明しようとする考え方。

### 4. 統合的な考え方

多くの事柄を個々ばらばらにしておかないで、より広い観点から、それらの本質的な共通性を抽象し、それによって、同じものとしてまとめていこうとする考え方。

### 5. 発展的な考え方

1つのことが得られても、さらによりよい方法を求めたり、これを基にして、より一般的な、より新しいものを発見していこうとする考え方。

### 6. 抽象化の考え方

幾つかのものに共通な性質を引き出そうとする考え方が抽象化の考え方で、それと表裏の関係にあるものとして捨象しようとする考え方。また具体化の考え方をすることも、結局は事柄を抽象しようとするためであるから、第二のものとして、これを抽象化の考え方に含めておく。いろいろな条件が一定であるような理想的な状態を考える。または条件や性質が数学的な定義や原理・法則の条件を満たしているような理想的な場合を考えることによって、事態が明確になることが多いが、このような理想的な状態を考えようとするのを理想化の考え方と呼ぶ。それを抽象化の考え方の第三のものとする。第四に、条件を明確にしようとする考え方が抽象にとって必要である。

### 7. 単純化の考え方

単純化の考え方①：いくつもの条件があつて、それらが何々であるかは分かっているが、それらのすべて

の条件を考慮しなければならないとき、その全部を考  
えるということは、はじめからはできにくいことがあ  
る。そういう場合には、そのうちのいくつかの条件を  
一時無視して、簡単な基本的な場合に直して考えてみ  
ようとすることがある。このような考え方が単純化の  
考え方である。

単純化の考え方②：条件のいくつかを簡単なものに  
置き直して考えようとする考え方も、この単純化の考  
え方といえる。

## 8. 一般化の考え方

ある概念の外延（意味の適用範囲）を広げていこう  
とする考え方である。

また、問題解決で、一般的な性質を見出し、この問  
題を含む集合全体についての（解法の）一般性を求め  
ていこうという考え方である。

## 9. 特殊化の考え方

ある事象の集合に関する考察をするために、それに  
含まれるそれより小さい集合、またはその中の1つの  
事象について考えようとする考え方である。

## 10. 記号化の考え方

記号に表していこうとする考え方と記号化されたも  
のをよんでいこうとする考え方とがある。そしてさら  
に数学的用語を用いて簡潔、明確に表したり、これを  
よんでいこうとする考え方も含めていくものとする。  
これは、いわば形式的に表現し、それに基づいて思考  
を進めていこうとするものでもある。

## 11. 数量化、図形化の考え方

数量的な考え方：質的な事柄などを、量的な性質と  
して捉えようとする。そして場面やねらいに応じて、  
適切な量を選択するといった考え方が、数量化の考え  
方である。

また、量の大きさを、数を用いて表そうとする考  
え方が、数量化の考え方である。

数量化することによって、量の大きさが簡潔明確に  
示され、扱い易くなるというよさがある。

図形化の考え方：数的な事柄や関係を、図形やその  
関係に置き換えようとする。

場面や、事柄、関係などを図に表して捉えようとす  
る（片桐重男，2004,pp.40—68）。

論理的な思考は学習指導要領解説でも数学科指導で  
育むことを目的とする思考のひとつであるとしている。

今回の改訂で学習指導要領の目標に加えられた「表  
現する能力」という言葉の説明には、学習指導要領解  
説（2008）で、「表現することは、事象を数理的に考  
察する過程で、推測したり見いだしたりした数や図形  
の性質などを的確に表したり、その妥当性などについ  
て根拠を明らかにして道筋を立てて説明したり、既習  
の数学を活用する手順を順序よく的確に説明したりす  
る場面で必要になる。（p.17）」と明記されている。

さらに、「表現することにより、一層合理的、論理  
的に考えを進めることができるようになったり、より  
簡潔で、的確な表現に質的に高めることになったり、  
新たな事柄に気付いたりすることも可能になる。（p.17）」と明記されている。ここで述べられている  
「論理的に考える」ということはどういうことであろ  
うか。広辞苑では以下のように説明されている。  
論理的…比喩的に事物の法則的なつながりについてい  
う語。

広辞苑の説明を考慮すると、学習指導要領解説では、  
論理的な思考とは「妥当性などについて根拠を明らか  
にして筋道を立てて説明」することであると説明して  
いると解釈できる。論理的な思考において重要なこと  
は、この根拠という語であると考えられる。根拠を明  
らかにしようとする思考が論理的思考であると考え  
る。これは、広辞苑でいう法則的なつながりのことである。

また、論理的な思考とは一般的に数学的な見方や考  
え方の中に含まれていると考えられることが多い。な  
ぜなら、広義に「論理的な思考」とは、演繹的推論と  
帰納的推論、類比的推論の3つで構成されている  
（『算数・数学科重要用語300の基礎知識』p.106）。こ  
れは、まさしく上で述べた数学的な見方や考え方の中  
の演繹的な考え方、帰納的な考え方、類推的な考  
え方であるからである。

演繹的推論とは、仮定、前提が真であるならば、導  
き出した結論も必ず真となる推論形式に従う推論であ  
る。そのため、結論の命題の正しさを検証する方法と  
いわれる。有効な推論形式には、肯定式、否定式、合  
接、簡約、付加、仮言的三段論法、選言的三段論法、  
両刀論法（ディレンマ）、全称命題特殊化、特殊の存  
在命題化がある。

例えば、仮言的三段論法という推論形式は、次のよ  
うなものである。

整数ならば有理数である。

有理数ならば実数である。

$\therefore$  整数ならば実数である。

それに対して、帰納的推論、類比的推論とは、結論の命題を発見する方法と言われている。

帰納的推論とはいくつかのことがらに見られる特殊な性質から一般的な性質を導くときに典型的に見られる推論である。

論理的に表すと次のようになる。

$$\frac{P(x1), P(x2), P(x3), \dots}{\therefore \forall x P(x)}$$

よって帰納的推論は上で定義した帰納的な考え方に含まれると考えられる。

類比的推論とは2つのことがらの類似性に注目し、一方で成り立つ性質を他方のことがらについても成り立つとする推論である。

論理的に表すと次のようになる。

$$\frac{P(x), t \text{ は } x \text{ に類似}}{\therefore P(t)}$$

よって類比的推論は上で定義した類推的な考え方と等しいと考えられる。

因みに、推論とは根拠となる命題（仮定または前提ともいう）を基にして、他の命題（結論）を導き出すことである。

しかし、上でも述べたように、論理的な思考は数学的な見方や考え方の中だけではなく、それぞれの数学的な見方や考え方をつなぐ思考、いわば、数学的な見方や考え方の上位に位置する思考であると考えられる。

以上の数学的な見方や考え方、論理的思考の定義をもとに、実際に学校の授業で取り上げられている事例をもとに2つの数学的な見方や考え方をつなぐ思考が存在することを証明し、その思考が論理的思考であることを分析する。

### 3. 具体的な場面での事例

この章では、実際に中学校で扱う分野から数学的な見方や考え方を使った事例を挙げ、2つの数学的な見方や考え方をつなぐ思考の存在を検証し、その思考が論理的思考であるということを明らかにしていく。

<事例1>

$n$  角形の内角の和の公式を導く方法

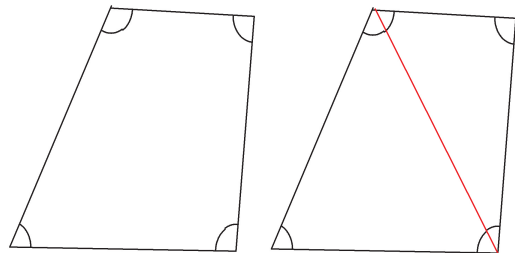
① 帰納的な考え方で最後まで公式を導く方法

まず生徒は、三角形の内角の和が $180^\circ$ であることを知っている。また、四角形の内角の和が $360^\circ$ であり、五角形の内角の和が $540^\circ$ であることを知っている。ここでは、三角形、四角形、五角形の内角の和はそれぞれ帰納的な考え方で導かれたものであることを前提にしている。つまり、1クラス40人のクラスの生徒全員が適当に作図したすべての三角形、四角形、五角形のそれぞれの内角の和が $180^\circ$ 、 $360^\circ$ 、 $540^\circ$ となったことから導き出したとする。これらのことから、三角形の内角の和は $180^\circ \times 1$ と見ることができ、四角形は $180^\circ \times 2$ と見ることができ、さらに五角形は $180^\circ \times 3$ と見ることができ、よって、 $n$  角形の内角の和は $180^\circ \times (n - 2)$  なのではないかという仮説が立つ。そしてこの仮説がより確かであるかを検証するために、 $n$  に具体的な数字を入れ、その仮説をより確かなものにしていく。

② 途中から演繹的な考え方で公式を導く方法

$n$  角形の内角の和が $180^\circ \times (n - 2)$  という仮説を立てるところまでは同じである。しかし、ここからこの仮説を検証するために、以下のような考え方に行き着く場合を考える。

三角形の内角の和が $180^\circ$ であることを前提として、四角形の一つの頂点から対角線を引くと三角形が2つ分となり、四角形の内角の和は $180^\circ \times 2$  となることに気付く。



なぜ三角形2つ分になるか考えてみると、一つの頂点から引ける対角線の本数は、自身の頂点と隣り合う頂点の計3点以外への対角線が引けるため、四角形の場合は $(4 - 3)$ 本の対角線が引ける。一つの平面を一本の線分で分けると2つの平面に分けられるため、三角形は2つとなり $180^\circ \times 2$ と表せる。この考え方は

すべての多角形に応用できるため、 $n$  角形の内角の和の公式は  $180^\circ \times (n - 2)$  と導くことができる。

この推論は最終的には演繹的な考え方で公式を導いているが、途中までは帰納的推論で導こうとしている。この帰納的な考え方と演繹的な考え方の間には「ちょっと待てよ」と一歩下がって客観する思考がはたらき、なぜそうなったかの根拠を明らかにしようとする思考が存在している。

<事例 2>

方程式における問題解決時の考え方

$x + 4 = 6$  という方程式は、両辺から 4 を引くことによって、 $x = 2$  を得ることができる。ほかにもこれとは数字を変えただけの同様な問題をいくつも解くことにより、以下の特徴を導き出すことができる。

$$x + a = b \quad (a > 0)$$

$$\therefore x = b - a$$

これは、帰納的な考え方から一般化の考え方に移っていることがわかる。

次に、 $a > 0$  のときに成り立つのであれば、同様に  $a < 0$  のときにも成り立つであろうと考える。この考え方は類推的な考え方である。

さらに、この一連の思考は、以下のような新しい考え方を生む。

$$ax = b$$

$$\therefore x = b \div a \quad (a \neq 0)$$

これらも同様に「ちょっと待てよ」という思考がはたらき、帰納的な考え方と一般化の考え方との間では、毎回左辺から右辺に数字を移すときに、その数字にマイナスをつけた数字になっていることに気付き、それは右辺の数字を左辺でも引いているからだという根拠を明らかにしようという思考が存在する。

次に、一般化の考え方と類推的な考え方の間でも、正と負の数は同じ計算ができるということが既習事項であるという根拠を考えようとする思考が存在している。

最後に、類推的な考え方と一般化の考え方でも、四則演算まで広げることができるであろうという思考が存在する。

<事例 3>

平方根をふくむ式の計算における考え方

$2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$  の計算において、既習の文字式の計

算と似ていることに気付き、 $2a + 3a = 5a$  と同じ考え方をすればよいと類推的な考え方をを使う。

この思考には記号化の考え方がカギとなる。 $\sqrt{\quad}$  (根号) という記号は有理数で表せない数字を記号化の考え方をを使って、表すことを可能にした。また、文字式の  $a$  や  $x$  など未知の数字を記号化の考え方を表すことを可能にした。この 2 つに共通する考え方が根拠になり、 $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$  にできるということに結びついたのである。そのため、記号化の考え方と類推的な考え方との間にも次の考え方に移るための根拠を明らかにしようとする思考が存在する。

以上のように事例は多くないが、数学的な見方や考え方同士の間には何らかの思考がはたらいていると見てよいと考える。

思考の存在がわかったので、その思考一つひとつが論理的思考であるかを定義から明らかにしていく。

①事例 1 で取り上げた帰納的な考え方から演繹的な考え方に移る過程の思考では、 $180^\circ \times 2$  になるのであれば、四角形の角の半分であり、それを図示すると上で示した対角線になるであろうという演繹的推論が働いたためである。そのため演繹的推論は論理的思考のひとつの推論であるため、この思考は論理的思考といえる。

②事例 2 で取り上げた帰納的な考え方から一般化の考え方に移る過程の思考では、 $x + a = b \quad (a > 0)$  から  $x = b - a$  を導くために、帰納的な考え方で行った操作を構造的に見ることによって、左辺で引いた数にマイナスをつけた数字が右辺にきていることを演繹的推論によって証明した。そのため、この思考も論理的思考といえる。

③事例 2 で取り上げた一般化の考え方から類推的な考え方に移る過程の思考では、実際に負の数を代入し、それが正しい答えであることを確認するという帰納的推論が行われている。帰納的推論は論理的思考のひとつの推論であるため、この思考は論理的思考といえる。

④事例 2 で取り上げた類推的な考え方から一般化の考え方に移る過程の思考では、実際  $ax = b$  に数字を代入し、それが正しい答えであることを確認するとい

う帰納的推論が行われている。そのため、この思考も論理的思考といえる。

- ⑤例題3で取り上げた記号化の考え方から類推的な考え方に移る過程の思考では、同じ記号化の考え方を使い、表すことを可能にしている2つの事柄に対して、何か共通の性質はないかという類比的推論が行われている。類比的推論は論理的思考のひとつの推論であるため、この思考は論理的思考といえる。

以上のように、3つの例題の中に見られた5つの考え方と考え方をつなぐ思考はすべて論理的思考であることが定義から分析することができた。これらのことから、すべての考え方と考え方をつなぐことを証明できたことにはならないが、少なくとも論理的思考が存在することは明らかになった。

論理的思考の存在が明らかになったということは、個人個人が数学の問題を解くときに使う考え方がその個人個人の数学的な見方や考え方となるのであろう。そのため十数個の数学的な見方や考え方の分類はただその個人の数学的な見方や考え方を見るための指標となってくる。そのため、たとえば「帰納的な考え方」と「一般化の考え方」がわかるからといって、帰納的な考え方と一般化の考え方だけで数学の問題は解けないということに気をつけなければならない。

#### 4. 数学的な見方や考え方と論理的思考の関係性

上でも述べたように、十数個の数学的な見方や考え方は独立しているとは考えにくいので、数学的な見方や考え方を使って問題解決を行う際、それらの考え方をつなぐ思考が存在し、それらは論理的思考であると示してきた。本稿では取り上げなかったが、論理的思考は、考え方と考え方との間だけではなく、まずどの考え方を使うかを吟味する際にも根拠を明らかにしようとする論理的思考が必要であると考えられる。さらに、ひとつの考え方の中で次の操作を行う際にも論理的な思考が必要であると考えられる。要するに、数学的な見方や考え方のあらゆるところに論理的思考は存在していると考えられる。そのため、数学を学んだり、数学の問題を解いたりするときには、必ずと言っていい程、論理

的思考が現れるのである。

最近の子どもは、論理的に思考することが弱まったなどという見解が多く見られる。しかし、決して子どもは論理的に考えられていないわけではない。なぜなら子どもに「なぜそうなるのか？」と問うことは、筋道の通った説明を求めているのであり、それに対する子どもの説明は「だってpだからqだ」と述べ、論拠pを示して論理的に説明しているのである。それにもかかわらず弱まったというように捉えられてしまうのは、子どもの論理的な思考は主観的で、曖昧であるからである。ではなぜそのような見解が見られるかというと、子どもが有効な推論形式を使えてなかったり、前提が真でないために結論も真でないものがでてきてしまったりするためである。要するに、有効な推論形式による、前提が真である演繹的推論ができていないのである。しかし、子どもにそれはあまり必要ないと考える。有効な推論形式によって前提が真である演繹的推論からは新しいものは何も得ることができないのである。なぜなら、明らかなことを証明しているだけで、考えに飛躍がなく新しい仮説が生まれないのである。そのため、数学家などと呼ばれている数学の専門家などの人たち以外は、そこまで論理的思考に厳密さは必要ないのではないかと考える。そういった考えの飛躍を含めた広義な論理的思考を育てるには、より数学を学び、より数学の問題を解くことが必要であると考える。

#### 5. おわりに

本稿の目的は、数学的な見方や考え方と数学的な見方や考え方をつなぐ思考の存在、またその思考が論理的思考であるということをもとに分析していくことである。その結果、数学的な見方や考え方は独立しているものではなく、個々が関係しあっているということがわかった。特に、それらをつなぐ思考が論理的思考であることも分析できた。そのため、数学的な見方や考え方と論理的思考にはこれまで以上の関係性があることを導くことができた。その結果数学的な見方や考え方を養うだけでなく、同時に論理的思考を養うことができなければ、数学の問題を解くときに、数学的な見方や考え方を使うことができず、問題も解くことができないのである。そのときの論理的思考は



演繹的推論だけではなく、帰納的推論、類推的推論も含めることが重要である。

近年、数学は数学的論理によって体系化されているが、数学を創造する過程では、感覚的、直感的な考え方が必要であり、形式陶冶説は子どもの認知発達を軽視した説であるとして反省され、具体的な操作・活動や帰納的推論、類推的推論が重視されるようになったのである。

今回の研究では数学的な見方や考え方をつなぐ論理的思考の研究だけにとどまってしまった。数学的な見方や考え方と論理的思考の他の関係性である、「まずどの考え方をを使うかを吟味する際に必要な思考」、さらに、「ひとつの考え方の中で次の操作を行う際に必要な思考」が存在し、それが論理的思考であるかを明らかにすることを今後の課題としたい。

また、演繹的推論を除いた、帰納的推論と類推的推論（後者2つをまとめ蓋然的推論という）が人間の頭の中でどのような構造をもって考えられ、新たなアイデアを生み出すのかという研究も今後の課題としたいと考える。

本稿での研究は、今日数学教育でも重要性が主張されている論理的思考というものがどのようなものであり、実際どのような場面で使われているかを示すこと

ができた。そのため、数学を学ぶことが論理的思考を養うことであるということをもっと強固なものとすることができたと考える。

また、広義な論理的思考で研究を進めたことによって、数学の世界でも、日常生活でも前提から結論を証明する厳密な演繹的推論だけでなく、考えに飛躍を含む帰納的推論や類推的推論が新たな仮説などを立てるときには、とても重要になってくることがわかった。

#### 引用・参考文献

- 一松信他 (1979). 新数学事典. 大阪書籍
- 片桐重男 (2004). 新版数学的な考え方とその指導：第1巻数学的な考え方の具体化と指導—算数・数学科の真の学力向上を目指して—. 明治図書. pp.40-68
- 片桐重男 (2004). 新版数学的な考え方とその指導：第2巻指導内容の体系化と評価—数学的な考え方を育てるために—
- 杉山吉茂他 (1999). 数学科教育：中学・高校
- 塚原成夫 (2000). 数学的思考の構造：発見的問題解決ストラテジー
- 村上一三他 (2000). 算数・数学科：重要用語300の基礎知識. 明治図書. p.106, p.272, p.276
- 文部科学省 (2008). 中学校学習指導要領解説 数学編. p.17
- 吉田稔他 (2010). 新版中学校数学1. 大日本図書
- 吉田稔他 (2010). 新版中学校数学2. 大日本図書
- 吉田稔他 (2010). 新版中学校数学3. 大日本図書

(さいとう なるみ)

