

539. 4. 019 : 539. 384. 6

# 周期せん断荷重をうける長方形板の動的安定\*

永 井 健 一\*\*  
Ken-ichi NAGAI

## 1. 緒 言

薄板に周期的な面内荷重が作用する場合には、一般に定常的な面内振動のみが生ずるが、特定の振動数範囲においては、激しい曲げ振動が誘起される。いわゆる係数励振形の動的不安定現象が存在することは良く知られている。

最近薄板が軽構造の基本要素として航空機、船舶ならびに車両などの分野において広く用いられ、なおその場合には周期荷重が作用することが多いことを考慮に入れると、上記薄板の動的安定問題を解明することは工学上きわめて重要と言えよう。

周期的な面内荷重をうける薄板の動的安定問題においては係数励振により曲げ振動が誘起される際の加振振幅と振動数との組合せ、すなわち安定境界を求めることが基本的な課題であり、すでにいくつかの研究<sup>(1)~(6)</sup>が行われている。しかしながら解析の比較的容易な境界条件のもとに主および副不安定領域を求めた研究が大部分であり、結合形不安定現象については考慮されていない。最近 Jagadish<sup>(7)</sup> は周期的な圧縮およびせん断荷重をうける全周辺単純支持の正方形板において、また Tani<sup>(8)</sup> は周期圧縮荷重をうける全周辺固定の円環板において、それぞれ主および結合形不安定領域を定めている。

一方 Yamaki-Nagai<sup>(9)</sup> は先に長方形板の相対する二辺上に、一様な静的ならびに周期的な圧縮荷重が作用する場合の動的安定問題を代表的な 4 種の境界条件のもとに結合形不安定現象を含め理論的に解析した。

本報においては長方形板の周辺上に一様分布の静的ならびに周期的なせん断荷重が作用する場合の動的安定問題を、安定を失う前の面内振動の影響を考慮に入れて、代表的な 3 種の境界条件のもとに、結合形不安定現象も含めて理論的に解析した結果について報告する。解法としては、まず基礎式にガレルキン法を適用することにより、有限自由度系の係数励振問題に変

換し、その安定境界を Hsu<sup>(10)</sup> の方法を用いて定めた。なお正方形板に対し数値計算を行い、広い振動数範囲にわたって各場合の主、副および結合形不安定領域を決定した。さらに不安定領域におよぼす静的せん断荷重、境界条件ならびに面内振動の影響をも明らかにした。

## 2. 基礎式および境界条件

二辺  $a, b$ 、厚さ  $h$  の長方形板の周辺上に一様分布の静的ならびに周期的なせん断荷重  $q_0 + q_1 \cos \Omega t$  が作用する場合の動的安定問題を考える。ただし、 $q_0, q_1$  はそれぞれ単位長さあたりの静的および動的荷重振幅、 $\Omega$  は加振角振動数、 $t$  は時間である。板の中央面上に図 1 のごとく  $x, y$  軸を、それらに垂直に  $z$  軸を定める。

問題を薄板の低次の曲げ振動の振動数範囲に限定すると、せん断変形、回転慣性力の影響は無視できる。いま安定を失う直前の板断面力を  $N_{x0}, N_{y0}, N_{xy0}$  とし、安定性を失った直後の板中央面の微小垂直変位を  $W$  とすると、これを支配する運動方程式は次式で与えられる。

$$\rho h W_{,tt} + D \nabla^4 W - (N_{x0} W_{,x} + N_{xy0} W_{,y})_{,x} - (N_{xy0} W_{,x} + N_{y0} W_{,y})_{,y} = 0 \quad (1)$$

$$\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \quad (2)$$

上式において、 $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$  は板の曲げ剛性、 $E, \nu, \rho$  はそれぞれ縦弾性係数、ポアソン比、密度、

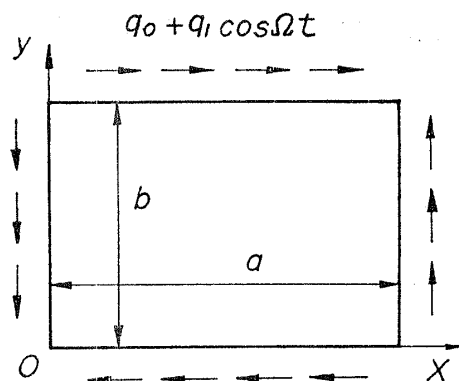


図 1 長方形板の諸元および座標系

\* 昭和 52 年 7 月 19 日 第 19 回構造強度に関する講演会において講演，原稿受付 昭和 54 年 7 月 16 日。

\*\* 正員，群馬大学工業短期大学部 (〒376 桐生市天神町 1-5-1)。

$\nabla^2$  はラプラスの演算子で、コンマの後の添字はそれに関する偏微分を示す。ここで安定を失う前の面内慣性力の影響を考慮に入れ、板内断面力が次式で与えられる場合を考える\*1。

$$\left. \begin{aligned} N_{xy0} &= q_0 + q_1 \cos \Omega t \{ f \bar{\zeta} (\tan \bar{\zeta} \sin \pi \zeta y / b + \cos \pi \zeta y / b) + g \bar{\lambda} (\tan \bar{\lambda} \sin \pi \lambda x / a + \cos \pi \lambda x / a) \} \\ N_{x0} &= N_{y0} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots (3)$$

ただし

$$[\bar{\lambda}, \bar{\zeta}] = [a/2, b/2] \sqrt{2(1+\nu)\rho/E} \Omega \dots\dots\dots (4)$$

$$[\lambda, \zeta] = [\bar{\lambda}, \bar{\zeta}] (2/\pi), \quad [f, g] = \frac{[\tan \bar{\lambda} - \bar{\lambda}, \tan \bar{\zeta} - \bar{\zeta}]}{\tan \bar{\lambda} \tan \bar{\zeta} - \bar{\lambda} \bar{\zeta}} \dots\dots\dots (5)$$

ここで便宜上つぎの記号を導入する。

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \pi x / a, \quad \eta = \pi y / b, \quad \alpha = h / a, \quad \beta = a / b, \quad w = W / h \\ [n_{x0}, n_{xy0}, n_{y0}] &= [N_{x0}, N_{xy0}, N_{y0}] (a^2 / \pi^2 E h^3), \quad q_{cr} = k_s \pi^2 D / a^2 \\ [\bar{q}_0, \bar{q}_1] &= [q_0, q_1] / q_{cr}, \quad \Omega_0 = (\pi^2 / a^2) \sqrt{D / \rho h}, \quad \omega = \Omega / \Omega_0, \quad \tau = \Omega_0 t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

上式において  $q_{cr}$ ,  $k_s$  はそれぞれせん断座屈荷重およびそれに対応する係数、 $\Omega_0$  は固有曲げ振動数に関する量で、 $\alpha$ ,  $\beta$  はそれぞれ板の形状に関する無次元量、 $\bar{q}_0$ ,  $\bar{q}_1$ ,  $\omega$  および  $\tau$  はそれぞれ無次元の静荷重、周期荷重振幅、振動数および時間に対応する。これらを用いて上の諸式を書き改めると次式を得る。

$$\begin{aligned} L(w) \equiv & w_{,\tau\tau} + \bar{F}^4 w - \bar{q}_0 2\beta k_s w_{,\xi\eta} - \bar{q}_1 \cos \omega \tau \beta k_s \{ f \bar{\zeta} [2(\tan \bar{\zeta} \sin \zeta \eta + \cos \zeta \eta) w_{,\xi\eta} \\ & + \zeta (\tan \bar{\zeta} \cos \zeta \eta - \sin \zeta \eta) w_{,\xi}] + g \bar{\lambda} [2(\tan \bar{\lambda} \sin \lambda \xi + \cos \lambda \xi) w_{,\xi\eta} \\ & + \lambda (\tan \bar{\lambda} \cos \lambda \xi - \sin \lambda \xi) w_{,\eta}] \} = 0 \end{aligned} \dots\dots\dots (1)'$$

$$\bar{F}^2 = \partial^2 / \partial \xi^2 + \beta^2 (\partial^2 / \partial \eta^2) \dots\dots\dots (2)'$$

$$[\bar{\lambda}, \bar{\zeta}] = [1, \beta^{-1}] [\pi^2 / \sqrt{24(1-\nu)}] \alpha \omega \dots\dots\dots (4)'$$

上式から  $w$  はすべて  $\nu$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\bar{q}_0$ ,  $\bar{q}_1$ ,  $\omega$  の関数として与えられることがわかる。

本問題の境界条件は対向する二辺がそれぞれ単純支持および固定を組合わせた、つぎの3種を考える。

$$\begin{aligned} \xi &= 0, \pi & \eta &= 0, \pi \\ \text{[S-S]} \quad w &= w_{,\xi\xi} = 0, & w &= w_{,\eta\eta} = 0 \dots\dots\dots (7.a) \\ \text{[S-C]} \quad w &= w_{,\xi\xi} = 0, & w &= w_{,\eta} = 0 \dots\dots\dots (7.b) \\ \text{[C-C]} \quad w &= w_{,\xi} = 0, & w &= w_{,\eta} = 0 \dots\dots\dots (7.c) \end{aligned}$$

なお上式において S および C は単純支持および固定の条件をそれぞれ示す。

与えられた境界条件のもとに、板は一般に定常的な面内振動のみが励振される。その際式(1)'の解  $w$  は0以外の定常解をもたず安定であるが、荷重振幅  $\bar{q}_0$ ,  $\bar{q}_1$  ならびに加振振動数  $\omega$  の特定な組合せのもとでは、時間とともに増大する解  $w$  が存在し不安定となる。問題は板の形状係数  $\alpha$ ,  $\beta$ , ポアソン比  $\nu$  ならびに境界条件が指定された場合、解  $w$  が不安定となる  $\bar{q}_0$ ,  $\bar{q}_1$  ならびに  $\omega$  の組合せ、すなわち安定境界を求めることにある。

### 3. 解 法

解法としては、まず基礎式にガレルキン法を適用することにより、有限自由度系の係数励振問題へ変換すること、ついでその安定性を吟味することの2段階よりなる。

**3.1 有限自由度系係数励振問題への変換** まず変位  $w$  を境界条件式(7)を考慮して、つぎのごとく仮定する。

$$w = \sum_m \sum_n a_{mn}(\tau) w_{mn}(\xi, \eta) \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (8)$$

なお  $a_{mn}(\tau)$  は未知時間関数、 $w_{mn}(\xi, \eta)$  は座標関数で、各場合に対応して、それぞれ次式のごとく表せる。

$$\text{[S-S]} \quad w_{mn}(\xi, \eta) = \sin m \xi \sin n \eta \dots\dots\dots (9.a)$$

$$\text{[S-C]} \quad w_{mn}(\xi, \eta) = \sin m \xi [\cos (n-1) \eta - \cos (n+1) \eta] \dots\dots\dots (9.b)$$

$$\text{[C-C]} \quad w_{mn}(\xi, \eta) = [\cos (m-1) \xi - \cos (m+1) \xi] [\cos (n-1) \eta - \cos (n+1) \eta] \dots\dots\dots (9.c)$$

上式を用いて基礎式(1)'にガレルキン法を適用すると、各座標関数  $w_{rs}(\xi, \eta)$  に関して、つぎの条件式が得られる。

\*1 式(3)の板内断面力の導出の概要を〔付録1〕に示す。

$$\int_0^\pi \int_0^\pi L(w) w_{rs}(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0 \quad (r, s=1, 2, 3, \dots) \quad (10)$$

上式に式 (8) を代入し積分を実行すると  $a_{rs}$  に関するつぎの連立常微分方程式を得る.

$$\begin{aligned} [\text{S} \cdot \text{S}] & \{ a_{rs, \tau\tau} + \beta_{rs} a_{rs} - \bar{q}_0 k_s \sum_m \sum_n a_{mn} (8\beta/\pi^2) m n r_m s_n [1 - (-1)^{r+m}] [1 - (-1)^{s+n}] \\ & + \bar{q}_1 \cos \omega \tau k_s \sum_m \sum_n a_{mn} (4\beta/\pi^2) m n \{ f \zeta r_m (\zeta_{n, s-n} + \zeta_{-n, s+n}) + g \bar{\lambda} s_n (\lambda_{m, r-m} \\ & + \lambda_{-m, r+m}) \} [1 - (-1)^{r+m}] [1 - (-1)^{s+n}] = 0 \\ & (r+s=2, 4, 6, \dots, m+n=2, 4, 6, \dots), (r+s=3, 5, 7, \dots, m+n=3, 5, 7, \dots) \dots \dots (11 \cdot a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{S} \cdot \text{C}] & (2a_{rs} - \bar{a}_{r, s-2} - a_{r, s+2})_{, \tau\tau} + (\beta_{r, s-1} + \beta_{r, s+1}) a_{rs} - \beta_{r, s-1} \bar{a}_{r, s-2} - \beta_{r, s+1} a_{r, s+2} \\ & - \bar{q}_0 k_s \sum_m \sum_n a_{mn} (8\beta/\pi^2) m r_m [2ns_n - (n-1)s_{n-2} - (n+1)s_{n+2}] [1 - (-1)^{r+m}] [1 - (-1)^{s+n}] \\ & + \bar{q}_1 \cos \omega \tau k_s \sum_m \sum_n a_{mn} (4\beta/\pi^2) m \{ f \zeta r_m [2n(\zeta_{n, s-n} + \zeta_{-n, s+n}) \\ & - (n-1)(\zeta_{n-1, s-n+2} + \zeta_{1-n, s-n-2}) - (n+1)(\zeta_{n+1, s-n-2} + \zeta_{-n-1, s+n+2})] \\ & + g \bar{\lambda} [2ns_n - (n-1)s_{n-2} - (n+1)s_{n+2}] [\lambda_{m, r-m} + \lambda_{-m, r+m}] \} [1 - (-1)^{r+m}] [1 - (-1)^{s+n}] = 0 \\ & (r+s=2, 4, 6, \dots, m+n=2, 4, 6, \dots), (r+s=3, 5, 7, \dots, m+n=3, 5, 7, \dots) \dots \dots (11 \cdot b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\text{C} \cdot \text{C}] & (4a_{rs} - 2\bar{a}_{r-2, s} - 2\bar{a}_{r, s-2} - 2a_{r, s+2} - 2a_{r+2, s} + \bar{a}_{r-2, s-2} + \bar{a}_{r+2, s+2} + a_{r-2, s+2})_{, \tau\tau} \\ & + (\beta_{r-1, s-1} + \beta_{r-1, s+1} + \beta_{r+1, s-1} + \beta_{r+1, s+1}) a_{rs} - (\beta_{r-1, s-1} + \beta_{r-1, s+1}) \bar{a}_{r-2, s} \\ & - (\beta_{r-1, s-1} + \beta_{r+1, s-1}) \bar{a}_{r, s-2} - (\beta_{r-1, s+1} + \beta_{r+1, s+1}) a_{r, s+2} - (\beta_{r+1, s-1} + \beta_{r+1, s+1}) a_{r+2, s} \\ & + \beta_{r-1, s-1} \bar{a}_{r-2, s-2} + \beta_{r-1, s+1} \bar{a}_{r-2, s+2} + \beta_{r+1, s-1} \bar{a}_{r+2, s-2} + \beta_{r+1, s+1} a_{r+2, s+2} \\ & - \bar{q}_0 k_s \sum_m \sum_n a_{mn} (8\beta/\pi^2) [2mr_m - (m-1)r_{m-2} - (m+1)r_{m+2}] [2ns_n - (n-1)s_{n-2} \\ & - (n+1)s_{n+2}] [1 - (-1)^{r+m}] [1 - (-1)^{s+n}] + \bar{q}_1 \cos \omega \tau k_s \sum_m \sum_n a_{mn} (4\beta/\pi^2) \{ f \zeta [2mr_m \\ & - (m-1)r_{m-2} - (m+1)r_{m+2}] [2n(\zeta_{n, s-n} + \zeta_{-n, s+n}) - (n-1)(\zeta_{n-1, s-n+2} \\ & + \zeta_{1-n, s+n-2}) - (n+1)(\zeta_{n+1, s-n-2} + \zeta_{-n-1, s+n+2})] + g \bar{\lambda} [2ns_n - (n-1)s_{n-2} \\ & - (n+1)s_{n+2}] [2m(\lambda_{m, r-m} + \lambda_{-m, r+m}) - (m-1)(\lambda_{m-1, r-m+2} + \lambda_{1-m, r+m-2}) \\ & - (m+1)(\lambda_{m+1, r-m-2} + \lambda_{-m-1, r+m+2})] \} [1 - (-1)^{r+m}] [1 - (-1)^{s+n}] = 0 \\ & (r+s=2, 4, 6, \dots, m+n=2, 4, 6, \dots), (r+s=3, 5, 7, \dots, m+n=3, 5, 7, \dots) \dots \dots (11 \cdot c) \end{aligned}$$

ただし, つぎの記号を用いてある.

$$\begin{aligned} \beta_{rs} &= (r^2 + \beta^2 s^2)^2, \quad r_m = r/(r^2 - m^2), \quad s_n = s/(s^2 - n^2) \\ \lambda_{mr} &= (r + \lambda^2/2m)/(\lambda^2 - r^2), \quad \zeta_{ns} = (s + \zeta^2/2n)/(\zeta^2 - s^2) \\ \bar{a}_{rs} &= \begin{cases} a_{|r|, |s|} & (rs > 0) \\ 0 & (rs = 0) \\ -a_{|r|, |s|} & (rs < 0) \end{cases} \dots \dots \dots (12) \end{aligned}$$

なお  $\lambda, \zeta$  はそれぞれ式 (5) で定義してある. 式 (11) において第 1 項は慣性項, 第 2 項ないし  $\bar{q}_0$  を含む項は復元力項, 残りの項は周期係数項に対応し, 結局連立のマシュエの式に相当する. なお  $r+s, m+n$  がともに偶数および奇数の場合に対応して, 各式はそれぞれ独立した二つの方程式群に分離できる.

**3.2 安定境界の決定** 3.1 節で求めた運動方程式 (11) は  $a_{rs}$  を  $b_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots$ ) に対応させることにより一般に次式のごとく表せる.

$$\sum_j [A_{ij} b_{j, \tau\tau} + (B_{ij} - \bar{q}_0 k_s C_{ij}) b_j + \bar{q}_1 \cos \omega \tau D_{ij} b_j] = 0 \quad (i, j=1, 2, 3, \dots) \quad (13)$$

上式において, 式の番号を  $a_{rs}$  の番号と一致させることにより  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$  は添字  $i, j$  に関して対称にすることができる. なお  $\bar{Q}$  は零に近づけることにより  $D_{ij}$  は  $C_{ij}$  に一致することが確かめられる.

式 (13) において慣性項を省略し, さらに  $\bar{q}_0=1, \bar{q}_1=0$  および  $b_j \equiv b_{j0}$  とおくと次式が得られる.

$$\sum_j [B_{ij} - k_s C_{ij}] b_{j0} = 0 \quad (i, j=1, 2, 3, \dots) \quad (14)$$

上式の係数行列式を零とおくことにより限界荷重係数  $k_s$  の値が求まる. その際  $k_s$  の最小値が座屈せん断荷重  $q_{or}$  に対応する.

つぎに式 (13) で  $\bar{q}_1=0, b_j \equiv b_{j1} \cos \bar{\omega} \tau$  とおくと

$$\sum_j [B_{ij} - \bar{q}_0 k_s C_{ij} - \bar{\omega}^2 A_{ij}] b_{j1} = 0 \quad (i, j=1, 2, 3, \dots) \quad (15)$$

上式の  $b_{j1}$  に関する係数行列式を零とおいた式より静的せん断荷重  $\bar{q}_0 = q_0/q_{or}$  が作用している場合の無次元固

有振動数  $\bar{\omega}$  ならびに固有振動形が求まる。なお  $\bar{\omega}$  を小さい順に  $\bar{\omega}_i$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ) とし、それに対応する固有ベクトルを  $\phi_{ij}$  ( $i, j=1, 2, 3, \dots$ ) とする。

不安定領域としては、いわゆる主、副ならびに結合形不安定領域が工学上もっとも重要である。これらを定めるため、つぎに示す方法により式 (13) を基準形に変換する。

まず上記固有振動数に対応する固有ベクトル  $\phi_{ij}$  を用い次式により、一般座標  $b_j$  を基準座標  $\bar{b}_i$  に変換する。

$$b_j = \sum_i \phi_{ji} \bar{b}_i, \quad \phi_{ji} = \phi_{ij} [\sum_k \sum_l \phi_{ik} A_{kl} \phi_{lj}]^{-1/2} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3, \dots) \quad (16)$$

上式を式 (13) に代入すると結局  $\bar{b}_i(\tau)$  に関するつぎの標準形連立マシユーの式が得られる。

$$\bar{b}_{i,\tau\tau} + \bar{\omega}_i^2 \bar{b}_i - \bar{q}_i \cos \omega\tau \sum_j \bar{D}_{ij} \bar{b}_j = 0, \quad \bar{D}_{ij} = -k_s \sum_k \sum_l \phi_{ki} D_{kl} \phi_{lj} \quad (i, j, k, l=1, 2, 3, \dots) \quad (17)$$

ただし、 $\bar{D}_{ij}$  は  $\omega$  の関数である。上式の安定性に関しては Hsu<sup>(10)</sup> による詳細な研究があり、それによると  $\bar{D}_{ij}$  と  $\bar{D}_{ji}$  が同符号の場合、式 (17) は  $\omega \cong (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)/p$  ( $p$ : 整数) の近傍に、いわゆる和形の結合形不安定領域をもち、 $\omega \cong \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j$  近傍の安定境界は第一近似解により次式で与えられる。

$$\omega/(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j) = 1 \pm \theta_{ij} \bar{q}_i, \quad \theta_{ij} = (\bar{D}_{ij} \bar{D}_{ji} / \bar{\omega}_i \bar{\omega}_j)^{1/2} / 2(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j) \quad (i, j=1, 2, 3, \dots) \quad (18)$$

上式において  $\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j$ ,  $\theta_{ij}$  はそれぞれ不安定領域の中心振動数および広がり係数に対応する。ただし上式で  $\bar{D}_{ij}$  などは  $\omega = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j$  における値とする\*2。さらに式 (17) は  $\omega \cong 2\bar{\omega}_i$  の近傍に、いわゆる主不安定領域をもち、その安定境界の第一近似式は次式で与えられる。

$$\omega/2\bar{\omega}_i = 1 \pm \theta_{ii} \bar{q}_i, \quad \theta_{ii} = |\bar{D}_{ii}|/4\bar{\omega}_i^2 \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (19)$$

ただし、 $\bar{D}_{ii}$  は  $\omega = 2\bar{\omega}_i$  における値をとるものとする。上記のほか、 $\omega \cong (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)/2$  近傍にも結合形不安定領域が存在し、その安定境界を Hsu の一般的方法によって第二近似解まで求めると次式のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} \omega/[(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)/2] &= 1 + \theta_{ij}' \bar{q}_i^2, \quad \theta_{ij}' = -\{E_{ij} + E_{ji} \pm [(E_{ij} - E_{ji})^2 + 4F_{ij}F_{ji}]^{1/2}\} / 8(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j) \\ E_{ij} &= \bar{\omega}_i^{-1} \sum_k \bar{D}_{ik} \bar{D}_{kj} [\bar{\omega}_k^2 - (\bar{\omega}_i - \bar{\omega}_j)^2/4]^{-1} + [\bar{\omega}_k^2 - (3\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)^2/4]^{-1} \\ F_{ij} &= \bar{\omega}_i^{-1} \sum_k \bar{D}_{ik} \bar{D}_{kj} [\bar{\omega}_k^2 - (\bar{\omega}_j - \bar{\omega}_i)^2/4]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (i, j, k=1, 2, 3, \dots) \quad (20)$$

ただし、 $\bar{\omega}_i \cong q\bar{\omega}_j$  ( $q$ : 整数) とし、 $\bar{D}_{ik}$  などはいずれも  $\omega = (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)/2$  における値とする。さらに上式で  $i=j$  とおくことにより  $\omega \cong \bar{\omega}_i$  近傍のいわゆる副不安定領域が求まる\*3。

#### 4. 正方形板に対する計算結果

上記の解析結果にもとづき、各種境界条件のもとで正方形板に対してそれぞれ最低固有振動数の約 10 倍の振動数範囲にわたって、数値計算を行った。ただしポアソン比  $\nu$  を 0.3、板の厚さ-辺比  $\alpha = h/a$  を 1/100 とし未定係数  $a_{rs}$  を  $r+s$  が偶数の場合 16 項、すなわち  $(a_{11}, a_{22}, a_{31}, a_{13}, \dots, a_{71}, a_{17})$ ,  $r+s$  が奇数の場合 12 項  $(a_{21}, a_{12}, a_{32}, a_{23}, \dots, a_{61}, a_{16})$  とって実際の計算を行った。

**4.1 座屈荷重および固有振動数** 各場合のせん断座屈荷重係数  $k_s$  の値を表 1 に示す。表においてモードの列に示した二つの整数は座屈波形の  $\xi, \eta$  方向の半波数を示す。なお比較のため従来の理論解<sup>(11), (12)</sup> をあわせ示す。

つぎに便宜上、板の固有振動数に関する記号を導入する。

\*2 実際には  $\bar{D}_{ij}$  を  $\omega$  の関数として式 (18) から  $\omega$  を定めるべきであるが、 $q_1 \ll 1$  である場合、上記操作でほぼ十分である。

\*3 式 (20) の導出の概要を【付録 2】に示す。

$$\omega_{ij} = (a^2/\pi^2) \sqrt{\rho h / D} \Omega_{ij} \quad (21)$$

$\omega_{ij}$ ,  $\Omega_{ij}$  はそれぞれ板の無次元固有振動数ならびに固有角振動数で、添字  $i, j$  は固有振動形の  $\xi, \eta$  方向の半波数に対応するものとする。各場合の固有振動数を表 2 に示す。

表中モード  $(i, j)$  の列に示した  $(i, j)$  ならびに  $(j, i)$  はそれぞれモード  $(i, j)$  および  $(j, i)$  が逆位相または同位相で重ね合わされた節線を持つ振動形であることを意味する。これらの結果は従来の理論値<sup>(12)-(14)</sup> とよく一致していることがわかる。これらから本報の計算結果は実用上十分な精度をもつことが認められる。

#### 4.2 固有振動数におよぼす静的せん断荷重の影響

静荷重を逐次増加して各場合の固有振動数を算出した。静荷重  $\bar{q}_0 = q_0/q_{cr}$  と固有振動数  $\omega_{ij}$  の関係を図 2 に示す。なお各場合の  $\bar{q}_0 = 0.5$  における振動形の

表 1 各場合の正方形板の座屈荷重  
 $k_s = (a^2/\pi^2 D) q_{cr}$

ケース	モード	$k_s$	
		本研究	文献
[S-S]	1, 1	9.34	9.34 <sup>(11)</sup>
[S-C]	1, 1	12.66	12.28 <sup>(12)</sup>
[C-C]	1, 1	14.81	14.58 <sup>(12)</sup>

概要を節線を用いてあわせ示した。この図からつぎのことが認められる。

・ 静荷重の増大にともない、各固有振動数の値は増加しないし減少する。ただし振動形の節線が静的せん断荷重により生ずる引張力方向（すなわち  $\xi=\eta$  を満足する主軸方向）と同方向である場合に、その固有振動数

は減少する。なお、引張力方向と節線方向が交差する場合には振動数は増加する。

**4.3 各場合の不安定領域** 4.2 節の結果にもとづき、各場合の不安定領域を静荷重  $\bar{q}_0=0, 0.25, 0.5$  のもとに計算した。なお式 (18) ないし (20) の各不安定境界は、式 (21) を用いて次式のごとく書き改められる。

$$\frac{\omega}{\omega_c} = 1 \pm \theta_1 \bar{q}_1$$

$$\begin{cases} P : \omega_c = 2\omega_{ij} \\ C_1 : \omega_c = \omega_{ij} + \omega_{kl} \end{cases} \dots (22)$$

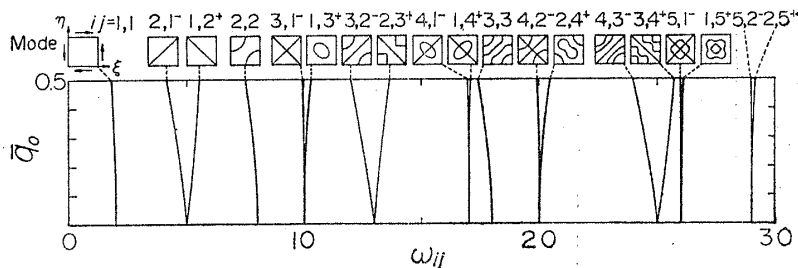
$$\frac{\omega}{\omega_c} = 1 + \theta_2 \bar{q}_1^2$$

$$\begin{cases} S : \omega_c = \omega_{ij} \\ C_2 : \omega_c = (\omega_{ij} + \omega_{kl})/2 \end{cases} \dots (23)$$

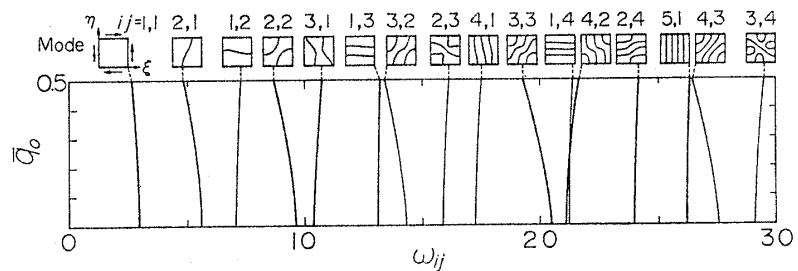
上式で  $\omega_c, \theta$  はそれぞれ不安定領域の中心振動数および広がり係数を示し、記号  $P, S$  ならびに  $C_1, C_2$  はそれぞれ主、副ならびに結合形不安定領域を意味する。なお  $C_1, C_2$  をそれぞれ第一次、第二次の結合形不安定領域とよぶこととする。図 3 に全周辺固定 [C-C]、静荷重  $\bar{q}_0=0.25$  の場合の結果を示す。斜線を施した部分が不安定領域に対応する。さらに図面の下に不安定領域の詳細を示す。表中  $(i, j), (k, l)$  列の数字は係数励振により誘起される振動形を示す。図より主不安定領域ならびに第一次の結合形不安定領域がもっとも重要な不安定領域であることが認められる。図 3 をさらに明確に表示するため  $\omega_c$  と  $\theta_1$  の値を図 4 のごとく図示することとする。なお  $\bar{q}_0=0, 0.5$  の場合をあわせ示す。図中、記号ならびにかっこ内の数字は、前述のごとく不安定領域ならびに振動形を示す。さらに  $\theta_1$  がきわめて小さい場合、微小な減衰により実際には不安定現象が生じなくなることが予想されるので  $\theta_1 < 10^{-2}$  は省略した。図から容易に不安定領域の中心振動数  $\omega_c$  ならびに広がり係数  $\theta_1$ 、さらに不安定領域の種類と誘起される振動形が定められる。同様な表示にて、境界条件

表 2 各場合の正方形板の固有振動数  
 $\omega_{ij} = (a^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D} \Omega_{ij}, \bar{q}_0 = q_0/q_{cr} = 0$

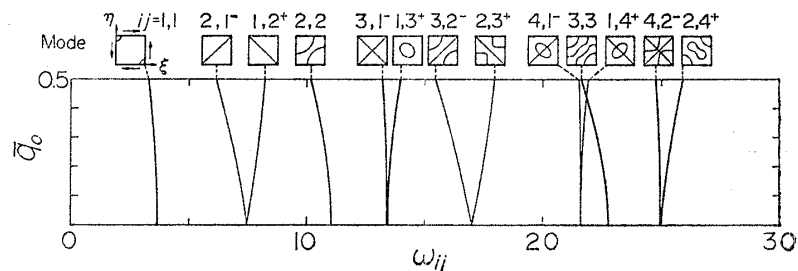
モ ー ド (i, j)	ケ ー ス [S-S]	ケ ー ス [C-C]		モ ー ド (i, j)	ケ ー ス [S-C]	
	本研究, 文献 (13)	本研究, 文献 (14)			本研究, 文献 (12)	
	$\omega_{ij}$	$\omega_{ij}$			$\omega_{ij}$	
1, 1	2	3.652	3.647	1, 1	2.936	2.933
2, 1 <sup>-</sup> ; 1, 2 <sup>+</sup>	5	7.472	7.437	2, 1	5.559	5.547
2, 2	8	11.04	10.97	1, 2	7.050	7.024
3, 1 <sup>-</sup>	10	13.41	13.34	2, 2	9.623	9.584
1, 3 <sup>+</sup>	10	13.48	13.40	3, 1	10.38	10.36
3, 2 <sup>-</sup> ; 2, 3 <sup>+</sup>	13	17.01	16.72	1, 3	13.14	13.08
4, 1 <sup>-</sup> ; 1, 4 <sup>+</sup>	17	21.62	—	3, 2	14.33	—
3, 3	18	22.75	—	2, 3	15.85	—
4, 2 <sup>-</sup>	20	24.94	—	4, 1	17.32	—
2, 4 <sup>+</sup>	20	25.12	—	3, 3	20.47	—



(a) ケース [S-S]



(b) ケース [S-C]



(c) ケース [C-C]

図 2 正方形板の固有振動数におよぼす静的せん断荷重の影響

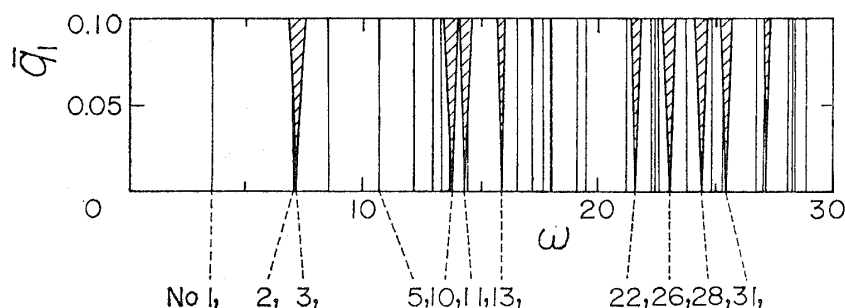
[S-S], [S-C] の  $\omega_c$ ,  $\theta_1$  を図 5, 6 に示す. これらの図からつぎのことがわかる.

(1) 静荷重が作用しない場合, 主要な不安定領域は第一次の結合形不安定領域である. その際誘起される振動形  $(i, j)$  ならびに  $(k, l)$  の間には  $i+j$ =奇数,  $k+l$ =奇数または  $i+j$ =偶数,  $k+l$ =偶数の関係をもつとともに  $i+k$ =奇数,  $j+l$ =奇数の関係を満たす. ただし, 境界条件 [C-C] および [S-S] の場合には, 上記不安定領域のほか, 特に  $i+j$ =奇数,  $k+l$ =奇数の関係において振動形  $(i, j)$  ないし  $(j, i^+)$  が誘起される主不安定領域ならびに  $i+k$ =偶数,  $j+l$ =偶数の関係を満たす  $(i, j)$  と  $(k, l^-)$  ないし  $(j, i^+)$

と  $(l, k^+)$  の振動形が誘起される結合形不安定領域が存在する\*4.

(2) 静荷重が作用する場合, 上記不安定領域のほかに, 振動形  $(i, i)$  ないし  $(i, j)$  (ただし  $i \neq j$ ) を持つ主不安定領域ならびに, 振動形  $(i, j)$  と  $(k, l)$  (ただし  $i+k$ =偶数,  $j+l$ =偶数) の結合形不安定領域が存在する.

(3) 静荷重の増大とともに, 各不安定領域の中心振動数  $\omega_c$  および広がり係数  $\theta_1$  の値は逐次変化する. 特に主不安定領域の広がり係数は急激に増大し主要なものとなる. 結合形不安定領域においては  $\theta_1$  に大きな変化はない. なお, 境界条件 [C-C] および



No	$\omega_c$	$\theta_1$ ( $\theta_2$ )	Kind of Instability region	
			P, S, C	$(i, j)$ ( $k, l$ )
1	3.57	(-0.391, -0.160)	S	1, 1
2	7.13	0.100	P	1, 1
3	7.18	(-5.015, 5.180)	C <sub>2</sub>	1, 1 2, 2 <sup>+</sup>
4	8.60	(-0.081, 0.111)	C <sub>2</sub>	1, 1 1, 5 <sup>+</sup>
5	10.79	(-0.524, -0.223)	S	2, 2
10	13.80	0.196	P	2, 1 <sup>-</sup> ...
11	14.36	0.191	C <sub>1</sub>	1, 1 2, 2 <sup>+</sup>
12	14.47	(-0.025, 1.182)	C <sub>2</sub>	1, 1 <sup>+</sup> 2, 4 <sup>+</sup>
13	15.81	0.098	P	1, 2 <sup>+</sup>
14	16.60	(-0.054, 0.037)	C <sub>2</sub>	2, 2 3, 5 <sup>+</sup>
15	17.20	0.017	C <sub>1</sub>	1, 1 1, 5 <sup>+</sup>
19	19.13	(-0.015, 0.022)	C <sub>2</sub>	5, 1 <sup>-</sup> 4, 2 <sup>-</sup>
22	21.59	0.094	P	2, 2 ...
26	23.20	0.120	C <sub>1</sub>	2, 1 <sup>-</sup> 5, 2 <sup>-</sup>
28	24.43	0.110	C <sub>1</sub>	2, 2 1, 5 <sup>+</sup>
31	25.47	0.097	C <sub>1</sub>	1, 2 <sup>+</sup> 2, 5 <sup>+</sup>
32	26.74	0.014	P	3, 1 <sup>-</sup> ...
34	27.27	0.047	P	1, 5 <sup>+</sup> ...
36	28.49	0.016	C <sub>1</sub>	2, 1 <sup>-</sup> 4, 1 <sup>-</sup>
38	28.95	0.024	C <sub>1</sub>	1, 1 2, 4 <sup>+</sup>

ケース [C-C],  $\bar{q}_0=0.25$ ,  $\alpha=(h/a)=1/100$

図 3 正方形板の不安定領域

[S-S] の両場合において, 静荷重の増大と共に振動形  $(i, j)$  ( $i+j$ =奇数) が誘起される不安定領域の  $\omega_c$  の値は減少し,  $\theta_1$  の値は増大する. なお  $(j, i^+)$  形を有する不安定領域では, その逆となる.

(4) 境界条件が相違する場合, 上述したごとく [C-C] と [S-S] の場合に定性的にはほぼ同様な結果を得た. これは板中心に対して対称な境界条件をもつことによるものと考えられる.

上記においては主および第一次の結合形不安定領域のみを考慮したが, つぎに副不安定領域および第二次の結合形不安定領域について検討する. [C-C],  $\bar{q}_0=0.25$  の場合の結果を図 7 に示す. なお図中, 広がり係数  $\theta_2$  の正ならびに負の値をそれぞれ実ないし破線にて示す. 式 (23) を考慮すると, この場合の不安定領域は動荷重振幅  $\bar{q}_1$  の二乗に比例するため,  $\bar{q}_1 \ll 1$  の場合, 一般に省略しうる. なお C<sub>2</sub>(1, 1; 2, 2) における広がり係数の値が他の場合と

\*4 本報のせん断荷重条件のもとで, 実際の計算を行った結果,  $\bar{q}_0=0$  および  $\bar{q}_0 \neq 0$  において, 振動形  $(i, j^-)$  と  $(j, i^+)$  とは係数励振により連成を持たないこと, すなわち結合形不安定領域が存在しないことが確かめられた.

比べ大きな値をとる。これはこの場合、振動形 (1, 1) の主不安定領域と近接し、中心振動数との関係が  $(\omega_{11} + \omega_{22})/2 \approx \omega_{11}$  すなわち  $3\omega_{11} \approx \omega_{22}$  となるためである (図 3, No. 2, 3 参照)。本報の解析ではこの場合、誤差がともなうが、他の場合と比べ著しい不安定現象となることが予想される。

さらに不安定領域におよぼす面内振動の影響を吟味するため、[C-C],  $\bar{q}_0 = 0.25$  の場合の主ならびに第一次の結合形不安定領域を例にとり、式 (13) において  $D_{ij}$  の代わりに  $C_{ij}$  を用いて計算した (すなわち  $\Omega \rightarrow 0$  の場合に対応する)。結果を図 8 に示す。なお比較のため図 4 (b) の結果をもあわせ示した。図

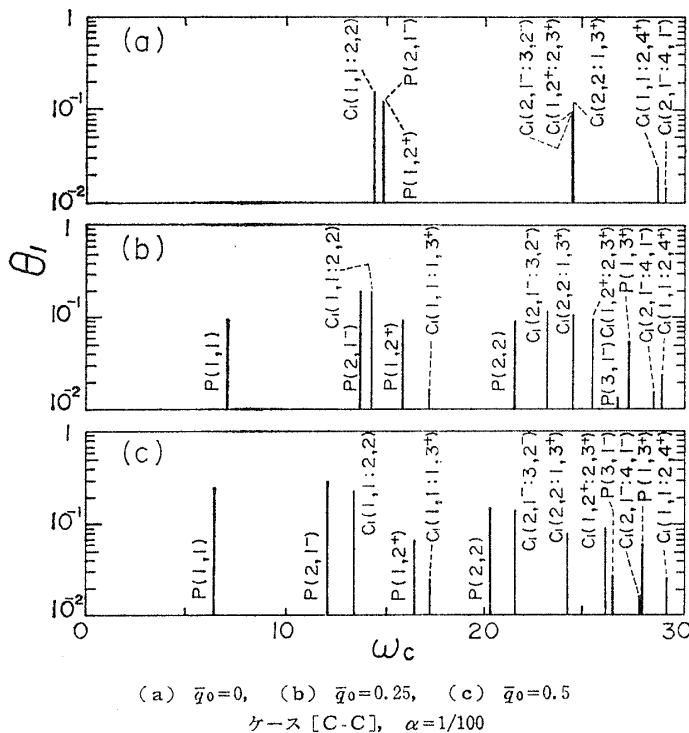


図 4 不安定領域の中心振動数ならびに広がり係数

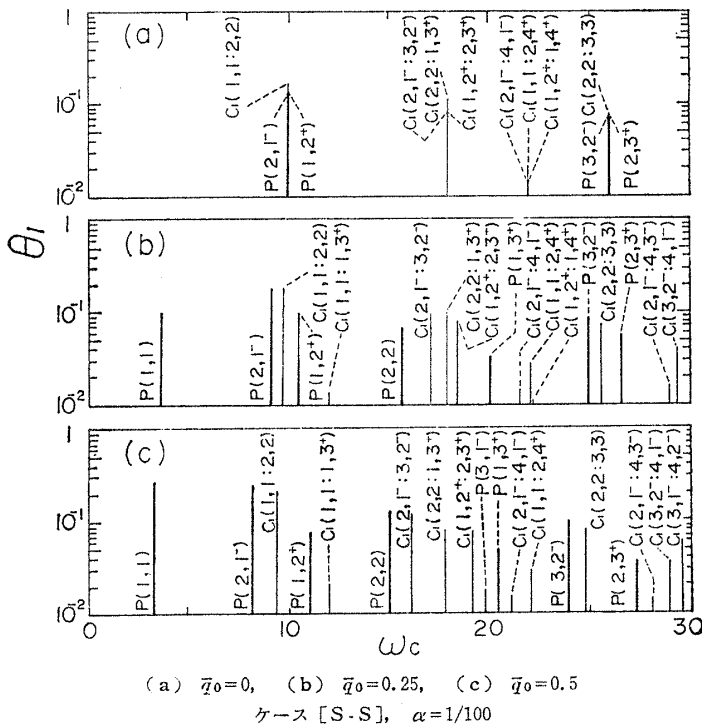


図 5 不安定領域の中心振動数ならびに広がり係数

(b) の縦軸は面内慣性力を省略した場合の結果を基準として、 $\alpha = 1/100$  の場合の広がり係数の増加の割合を示したものである。また横軸に加振振動数と面内固有振動数 ( $\equiv \Omega_L$ ) との比をあわせ示した。図より面内固有振動数の約 1/3 近傍における不安定領域の広がり係数は約 15% 増加することがわかる。なお十分低い振動数範囲において、面内振動の不安定領域におよぼす影響は少ないことが認められる。

## 5. 結 言

長方形板の周辺に静的ならびに周期的なせん断荷重が作用する場合の動的安定問題を、安定を失う前の面内振動の影響を考慮に入れて 3 種の境界条件のもとに理論的に解いた。また正方形板に対し、広い振動数範囲にわたって数値計算を行い、その主要な不安定領域を明らかにした。得られた結果を要約するとつぎのごとくなる。

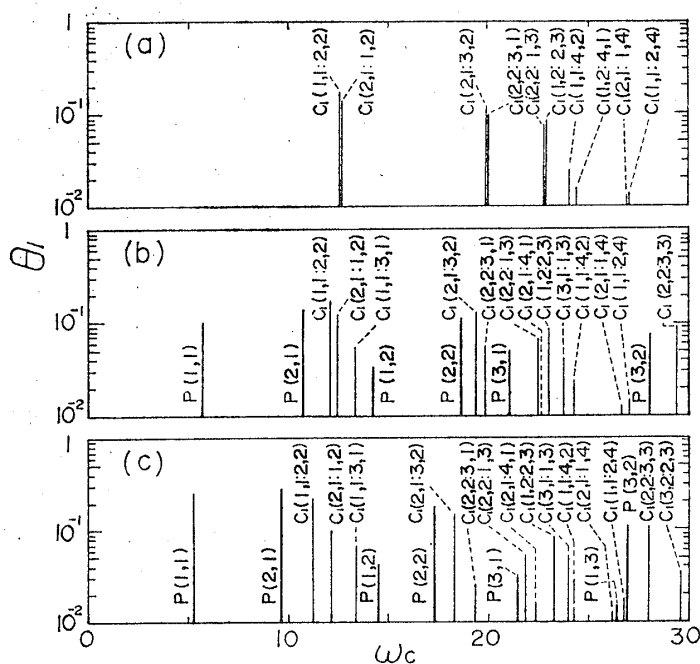
(1) 静荷重が作用しない場合、一般に主要な不安定領域は第一次の結合形不安定領域である。なおその際同時に誘起される振動形  $(i, j)$  ならびに  $(k, l)$  の間には、 $i+j$  = 奇数、 $k+l$  = 奇数または  $i+j$  = 偶数、 $k+l$  = 偶数の関係ならびに  $i+k$  = 奇数、 $j+l$  = 奇数の関係をもつ。

(2) 静荷重が作用する場合、一般に主、副ならびに結合形不安定領域が存在し、主要な不安定領域は主ならびに第一次の結合形不安定領域である。

(3) 静荷重の増大にともない、主不安定領域の広がり係数が急激に増大し、重要な不安定領域となる。また結合形不安定領域においては大きな変化はない。

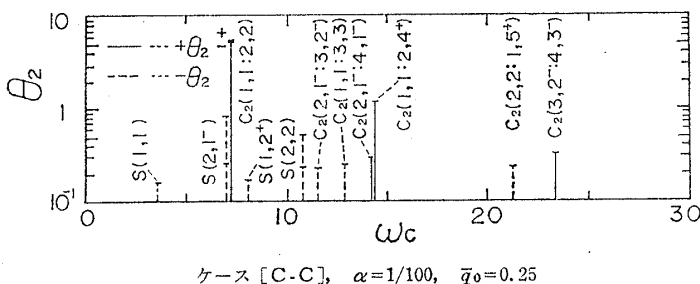
(4) 動的安定におよぼす境界条件の影響は、板中心に対して対称な支持条件である全周辺固定ならびに単純支持において、ほぼ定性的に一致した結果をもつ。

(5) 安定を失う前の面内振動の不安定領



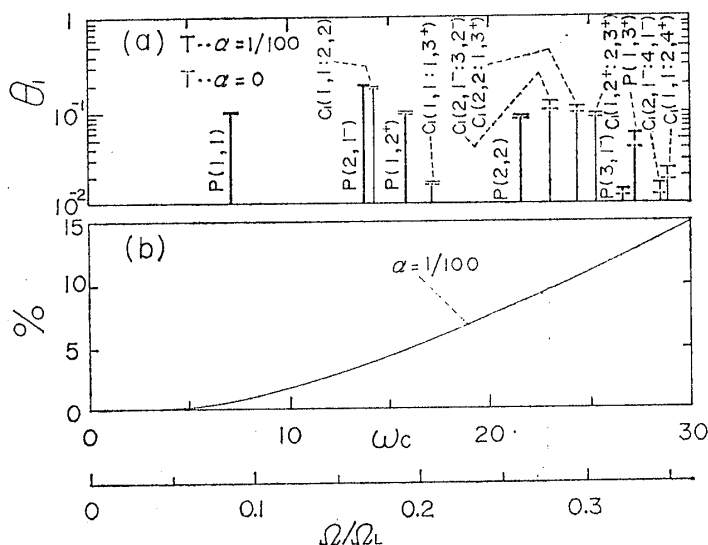
(a)  $\bar{q}_0=0$ , (b)  $\bar{q}_0=0.25$ , (c)  $\bar{q}_0=0.5$   
ケース [S-C],  $\alpha=1/100$

図 6 不安定領域の中心振動数ならびに広がり係数



ケース [C-C],  $\alpha=1/100$ ,  $\bar{q}_0=0.25$

図 7 副および第二次の結合形不安定領域の中心振動数ならびに広がり係数



ケース [C-C],  $\bar{q}_0=0.25$

図 8 不安定領域におよぼす面内振動の影響

域におよぼす影響は、十分に薄い板の場合もしくは低次の振動形に対応する不安定領域に限定する場合において、少ない。

終わりに本研究にあたり、懇切なご助言を賜った、東北大学、八巻昇教授に深じんの謝意を表します。また図面作製に尽力された本学部学生、今井康幸、小沢清隆両君に謝意を表します。なお本研究は文部省科学研究費補助金により行われたものであることを付記する。

〔付録 1〕 式 (3) の導き方を以下に示す。まず安定を失う直前の  $x, y$  方向変位成分を  $U_0, V_0$  とすると面内運動方程式は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{E}{1-\nu^2} \left( U_{0,xx} + \frac{1-\nu}{2} U_{0,yy} + \frac{1+\nu}{2} V_{0,xy} \right) &= \rho U_{0,tt} \\ \frac{E}{1-\nu^2} \left( V_{0,yy} + \frac{1-\nu}{2} V_{0,xx} + \frac{1+\nu}{2} U_{0,xy} \right) &= \rho V_{0,tt} \end{aligned} \right\} \dots\dots (24)$$

断面力と変位との関係は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} N_{x0} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (U_{0,x} + \nu V_{0,y}) \\ N_{xy0} &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (V_{0,y} + \nu U_{0,x}) \\ N_{xy0} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} (U_{0,y} + V_{0,x}) \end{aligned} \right\} \dots\dots (25)$$

ついで境界条件として次の場合を考える。

$$\left. \begin{aligned} x=0, a; \\ \frac{1}{b} \int_0^b N_{xy0} dy &= q_0 + q_1 \cos \Omega t \\ y=0, b; \\ \frac{1}{a} \int_0^a N_{xy0} dx &= q_0 + q_1 \cos \Omega t \end{aligned} \right\} \dots\dots (26)$$

いま  $\omega_z \equiv (V_{0,x} - U_{0,y})/2$  が  $\sqrt{E/2(1+\nu)\rho}$  の伝ば速度をもつせん断波であることが良く知られているので、次に示すベクトルポテンシャルを  $\Psi$  導入する。

$$U_0 = \Psi_{,y}, \quad V_0 = -\Psi_{,x} \dots\dots (27)$$

上式と式 (24) より次式を得る。

$$\nabla^2 \left( \nabla^2 \Psi - \frac{2(1+\nu)\rho}{E} \Psi_{,tt} \right) = 0 \dots\dots (28)$$

上式の解を次のごとく仮定する。

$$\Psi = [X(x) + Y(y)] \cos \Omega t \dots\dots (29)$$

なお  $X(x), Y(y)$  は  $x, y$  の未知関数であ



る。上式を式 (28) に代入することにより次式を得る。

$$X(x) = \frac{\sin\left(\frac{\lambda\pi x}{a}\right)}{\cos\left(\frac{\lambda\pi}{a}\right)}, \quad Y(y) = \frac{\sin\left(\frac{\zeta\pi y}{b}\right)}{\cos\left(\frac{\zeta\pi}{b}\right)} \quad (30)$$

なお  $\lambda, \zeta$  は式 (4), (5) にて定義してある。上式を式 (25) に代入し、式 (26) を用いることにより、 $N_{x0} = N_{y0} = 0$  ならびに  $N_{xy0}$  に関して式 (3) のごとく表示を得る。

【付録 2】  $\omega = (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)/2$  近傍の結合形不安定領域の導き方を以下に示す。 $\bar{q}_1^2 \ll 1$  とし式 (17) の解を  $\bar{q}_1^2$  までの摂動解を含め次式のごとく仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \bar{b}_i &= G_i(\tau) \cos \bar{\omega}_i \tau + H_i(\tau) \sin \bar{\omega}_i \tau + \bar{q}_1 d_i(\tau) + \bar{q}_1^2 e_i(\tau) \\ \bar{b}_{i,\tau} &= -\bar{\omega}_i G_i(\tau) \sin \bar{\omega}_i \tau + \bar{\omega}_i H_i(\tau) \cos \bar{\omega}_i \tau + \bar{q}_1 d_{i,\tau}(\tau) + \bar{q}_1^2 e_{i,\tau}(\tau), \tau \end{aligned} \right\} \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (31)$$

上式が満足するためには次式が成立する必要がある。

$$G_{i,\tau} \cos \bar{\omega}_i \tau + H_{i,\tau} \sin \bar{\omega}_i \tau = 0 \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (32)$$

式 (31) を式 (17) に代入し  $\bar{q}_1^2$  までの項を考慮すると次のごとくなる。

$$\begin{aligned} & -\bar{\omega}_i G_{i,\tau} \sin \bar{\omega}_i \tau + \bar{\omega}_i H_{i,\tau} \cos \bar{\omega}_i \tau + \bar{q}_1 (d_{i,\tau\tau} + \bar{\omega}_i^2 d_i) + \bar{q}_1^2 (e_{i,\tau\tau} + \bar{\omega}_i^2 e_i) \\ & = (\bar{q}_1/2) \sum_j \bar{D}_{ij} \{ G_j [\cos(\bar{\omega}_j - \omega)\tau + \cos(\bar{\omega}_j + \omega)\tau] \\ & \quad + H_j [\sin(\bar{\omega}_j - \omega)\tau + \sin(\bar{\omega}_j + \omega)\tau] \} + \bar{q}_1^2 \sum_j \bar{D}_{ij} \cos \omega \tau d_j \quad (i, j=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (33)$$

上式で  $\bar{q}_1$  の同べきの項をとり出すことにより逐次  $d_i(\tau), e_i(\tau)$  が  $G_i, H_i$  の関数として定まる。

つぎに  $\omega = (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)/2$  近傍での結合形不安定現象を扱うため、式 (32), (33) で  $i$  番めと  $j$  番めの式をとり出し、さらに式 (33) において  $\omega = (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)/2$  近傍で共振を起こす項を残して摂動部分をさし引くと  $G_i, H_i, G_j, H_j$  に関する次の 4 式を得る。

$$\left. \begin{aligned} G_{i,\tau} \cos \bar{\omega}_i \tau + H_{i,\tau} \sin \bar{\omega}_i \tau &= 0 \\ -G_{i,\tau} \sin \bar{\omega}_i \tau + H_{i,\tau} \cos \bar{\omega}_i \tau &= (\bar{q}_1^2/4) \{ E_i' (G_i \cos \bar{\omega}_i \tau + H_i \sin \bar{\omega}_i \tau) \\ & \quad + F_{ij}' [G_j \cos(\bar{\omega}_j - 2\omega)\tau + H_j \sin(\bar{\omega}_j - 2\omega)\tau] \} \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ただし } E_i' &= \bar{\omega}_i^{-1} \sum_{k=1,2,3,\dots} \bar{D}_{ik} \bar{D}_{ki} [(\bar{\omega}_k^2 - (\bar{\omega}_i - \omega)^2)^{-1} + (\bar{\omega}_k^2 - (\bar{\omega}_i + \omega)^2)^{-1}] \\ F_{ij}' &= \bar{\omega}_i^{-1} \sum_{k=1,2,3,\dots} \bar{D}_{ik} \bar{D}_{kj} [\bar{\omega}_k^2 - (\bar{\omega}_j - \omega)^2]^{-1} \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

なお  $G_j, H_j$  に関する式は式 (34) で添字  $i$  と  $j$  を交換した式に対応する。いま離調を  $\varepsilon (\ll 1)$  とし、 $\omega = (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)/2 + \varepsilon$  において上式に代入し、ついで  $G_{i,\tau}, H_{i,\tau}$  について解く。さらに Kryloff-Bogoliuboff の平均法<sup>(15)</sup>を適用し次式の変数変換を行うことにより式 (37) を得る。

$$I_i = G_i \cos \varepsilon \tau - H_i \sin \varepsilon \tau, \quad J_i = G_i \sin \varepsilon \tau + H_i \cos \varepsilon \tau \quad (36)$$

$$I_{i,\tau} = (\bar{q}_1^2/8) F_{ij}' J_j - [(\bar{q}_1^2/8) E_i' + \varepsilon] I_i, \quad J_{i,\tau} = (\bar{q}_1^2/8) F_{ij}' I_j + [(\bar{q}_1^2/8) E_i' + \varepsilon] I_i \quad (37)$$

ただし  $I_j, J_j$  に関する式は上式で添字  $i$  と  $j$  を交換した式に対応する。

上式の解は次式のごとく表せる。

$$(I_i, J_i, I_j, J_j) = e^{\mu \tau} (I_{i0}, J_{i0}, I_{j0}, J_{j0}) \quad (38)$$

なお  $I_{i0}$  などは初期条件により定まる定数である。上式を式 (37) に代入することにより  $\mu^2$  に関する特性方程式を得る。これより  $I_i$  ないし  $J_j$  が時間とともに増大しないためには  $\mu^2 < 0$  を要する。すなわち安定境界として  $\mu^2 \rightarrow 0$  を得る。上記により式 (20) の表示を得る。なお式 (35) の  $E_i', F_{ij}'$  に  $\omega = (\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j)/2$  の値を代入した式を式 (20) の  $E_{ij}, F_{ij}$  とおいた。

## 文 献

- (1) Reckling, K. A., *Ing. Arch.*, 21-2 (1953-3), 141.
- (2) Bolotin, V. V., *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, (1964), Holden-Day.
- (3) Popescu, N. O., *Forsch. Ing.-wes.*, 36-5 (1970), 148.
- (4) Hutt, J. M. and Salam, A. E., *Proc. Amer. Soc. Civil Engrs.*, 97-EM3 (1971-6), 879.
- (5) Duffield, R. C. and Willems, N., *Trans. ASME, Ser. E*, 39-1 (1972-3), 217.
- (6) Merritt, R. G. and Willems, N., *Trans. ASME, Ser. E*, 40-2 (1973-6), 439.
- (7) Jagadish, K. S., *Ing.-Arch.*, 43-4 (1974-6), 240.
- (8) Tani, J. and Nakamura, T., *J. Acoust. Soc. Amer.*, 64-3 (1978-9), 827.

- (9) Yamaki, N. and Nagai, K., *Rep. Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ.*, 32 (1975-12), 103.
- (10) Hsu, C. S., *Trans. ASME, Ser. E*, 30-3 (1963-9), 367.
- (11) Timoshenko, S. and Gere, J. M., *Theory of Elastic Stability*, (1961), McGraw-Hill.
- (12) Iguchi, S., *Memoirs of the Faculty of Engineering, Hokkaido Univ.*, 4 (1938), 305.
- (13) Timoshenko, S. and Young, D. H., *Vibration Problems in Engineering*, (1955), D. Van Nostrand Co.
- (14) Young, D., *J. Appl. Mech.*, 17-4 (1950-12), 448.
- (15) Kryloff, N. and Bogoliuboff, N., *Introduction to Non-linear Mechanics*, (1947), Princeton Univ. Press.

討

論

〔質問〕 長 屋 幸 助 (山形大学工学部)

(1) 図2の全周単純支持および全周固定の場合、図に示されるモードのほかに横あるいは縦方向に節線のある振動形が存在すると思われる。この振動形と対角線一本の振動形は  $\bar{q}_0=0$  の場合は縮退して、固有値は一致するものと思われるが、 $\bar{q}_0$ が増加すると対称性がくずれるように思われる。したがってこの場合は対角線一本の固有値と、横あるいは縦方向に節線のあるモードの固有値とは一致しないように思われるが、この点いかがか。

(2) 本報では、固定境界の場合の試験関数に余弦関数を巧みに組合わせたものを用い境界条件を処理されておられるが、この関数の方が一般に使用されている代数関数に比べ収束は良くなるのか。もしこのことに対する検討資料があればご教示願いたい。

〔回答〕 (1) 長方形板で対向する二辺が同一の境界条件ならびに板中央に対して対称な面内荷重条件である場合、板中央を通る中心軸に対して対称もしくは反対称である振動形が誘起されることは容易に予想しうる。いま正方形板で全周辺単純支持または固定であり、かつ面内荷重が作用しない場合、板中央を通る面内の対称軸は中心線ならびに対角線の4線が考えられる。その際、横、縦ならびに対角線の節線を有する振動形が存在する。一方せん断荷重が作用する場合、対称軸は対角線のみとなり、対応する振動形は対角線に対称性を持つもののみとなる。なお上記場合につき、実際に計算を行った結果、固有振動数  $\omega_{ij}$  ( $i+j$ =奇数)に対応する固有ベクトル  $a_{ij}$ の間には  $a_{ij}=-a_{ji}$  または  $a_{ij}=a_{ji}$  の関係を持つこと、すなわち対角線を対称とする振動形を持つことが確かめられる。

なお境界条件 [S-C] の場合には、対角線は対称軸とならない。その場合縦もしくは横に節線を持つ振動形の節線は静荷重の増大に伴い逐次対角線上に移行する。

付表 1 固有振動数の項数による収束状況  
ケース [C-C],  $\bar{q}_0=0$ ,  $\omega_{ij}=(a^2/\pi^2)\sqrt{\rho h/D}\Omega_{ij}$

座標関数	モード (i, j)	項 数				
		1	3	6	10	15
式 (9-c)	1, 1	3.771	3.677	3.658	3.652	3.650
	3, 1 <sup>-</sup>	—	13.74	13.50	13.41	13.38
	1, 3 <sup>+</sup>	—	13.97	13.60	13.48	13.44
式 (i)	1, 1	3.648	3.648	3.646	3.646	3.646
	3, 1 <sup>-</sup>	—	13.91	13.36	13.33	13.33
	1, 3 <sup>+</sup>	—	14.05	13.42	13.40	13.40

上記と同じ問題が Bassily ら(付1)によりなされており参考されたい。

(2) 固定境界条件を満足する座標関数としていくつかの関数が考えられる。本報においては余弦関数を組合わせた式 (9-b), (9-c) を用いた。この関数を用いた場合、一般に次のことが言える。

(i) 解析を行うにあたり、計算ならびに計算機プログラムの作製が容易である。

(ii) 座標関数の添字の値が波形の半波数に対応することにより物理的などう察が容易にできる。

一方、代数関数による座標関数の一例として全周辺固定の場合、次の式 (i) が考えられる。

$$w_{mn}(\xi, \eta) = (\xi - \pi/2)^{m-1} (\xi - \xi^2/\pi)^2 \times (\eta - \pi/2)^{n-1} (\eta - \eta^2/\pi)^2 \dots \dots \dots (i)$$

上式と式 (9-c) を用いて得られた固有振動数の項数による収束状況を付表1に示す。

なお表中の項数は  $\bar{q}_0=0$  を考慮に入れて  $a_{mn}$  の添字  $m, n$  が共に奇数で、かつ  $m+n=2, 4, 6, \dots$  を満足する数を示す。例えば項数6は ( $a_{11}, a_{13}, a_{31}, a_{15}, a_{33}, a_{51}$ ) を考慮したことを意味する。表より式 (9-c) を用いた場合、解の精度をあげるには項数を若干多くとる必要がある。

上記の長所を鑑みると、工学的には使用しやすい関数であると言える。

(付1) Bassily, S.F. and Dickinson, S.M., *J. Sound & Vibr.*, 24-2 (1972-9), 219.