

日本機械学会論文集(A編)
51巻465号(昭60-5)

表面の四半無限領域に衝撃荷重を受ける半無限弾性体の衝撃応力*

神宮利夫**, 松本浩之***, 根津紀久雄**
Toshio JINGU, Hiroyuki MATSUMOTO, Kikuo NEZU

Key Words: Shock, Elastic Half-Space, Impulsive Load, Quarter Region, Cagniard Method, Stress Wave Propagation, Transient Stress

1. 緒言

半無限弾性体の表面に集中衝撃荷重が作用する衝撃問題の研究は数多く行われているが表面領域に分布⁽¹⁾⁻⁽³⁾して衝撃荷重が作用する問題は比較的少ない。特に非軸対称三次元問題を具体的に解析した例はほとんどないようである。分布荷重に対しては集中荷重の解析結果を重畳することで対応できるとすることについては概念的には認められても標題のような四半無限領域などの場合には領域に対して二重無限積分を評価する必要があり、数値計算は必ずしも容易ではない。このような場合には領域に分布して衝撃荷重が作用する問題を直接解析し数値計算に適した解の表示式を得ることが重要である。三次元カグニャード法⁽⁴⁾を適用し半無限弾性体の四半無限領域に衝撃荷重が分布して作用する時の応力の時間的変動を理論的に解析した。

荷重として等分布の垂直荷重およびせん断荷重がインパルス状に作用する場合を対象とした。

2. 基礎式

図1に示す直角座標系の半無限弾性体の表面の四半無限領域に等分布垂直衝撃荷重がインパルス状に作用する時の境界条件は

$$(\sigma_z)_{z=0} = -p_0 \delta(t) \lim_{x \rightarrow 0} H(x) e^{-\gamma x} \lim_{y \rightarrow 0} H(y) e^{-\epsilon y} \dots \dots \dots (1)$$

ここで $\delta(\)$ はディラックのデルタ関数であり $H(\)$ はヘビサイドのステップ関数である。応力 τ_{yz} , τ_{zx} は表面で

$$(\tau_{yz})_{z=0} = (\tau_{zx})_{z=0} = 0 \dots \dots \dots (2)$$

である。式(1), 式(2)をラプラス・フーリエ変換すると

$$(\bar{\sigma}_z)_{z=0}^{**} = -p_0 \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{1}{(\gamma + i p \alpha)} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{(\epsilon + i p \beta)}$$

$$= \frac{p_0}{p^2 \alpha \beta} \dots \dots \dots (3)$$

$$(\bar{\tau}_{yz})_{z=0}^{**} = (\bar{\tau}_{zx})_{z=0}^{**} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

ただし

$$\sigma^{**} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma e^{-i p(\alpha x + \beta y)} dx dy$$

$$\bar{\sigma} = \int_0^{\infty} \sigma e^{-p t} dt$$

式(3), 式(4)の境界条件を満足する応力成分の解を求めフーリエ逆変換積分形で表すと

$$\bar{\sigma}_x = \frac{p_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{n_3 \left(a^2 - \frac{\nu}{2(1-\nu)} s_2^2 \right)}{\alpha \beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_1} + \frac{\alpha n_1 n_2}{\beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_2} \right\} da db$$

$$\bar{\sigma}_y = \frac{p_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{n_3 \left(\beta^2 - \frac{\nu}{2(1-\nu)} s_2^2 \right)}{\alpha \beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_1} \right\}$$

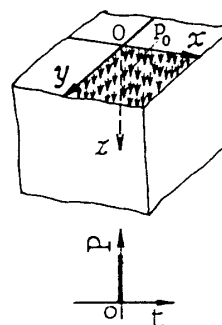


図1 四半無限領域にインパルス状垂直衝撃荷重を受ける半無限弾性体

* 昭和58年9月30日 日立地方講演会において講演, 原稿受付 昭和58年12月12日。
** 正員, 群馬大学工学部 (☎376 群馬県桐生市天神町1-5-1)。
*** 正員, 東京工業大学工学部 (☎152 東京都目黒区大岡山2-12-1)。

$$\begin{aligned}
 & + \frac{\beta n_1 n_2}{\alpha F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_2} \} dad\beta \\
 \bar{\sigma}_z = & \frac{p_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{n_3^2}{\alpha\beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_1} \right. \\
 & \left. - \frac{(\alpha^2 + \beta^2) n_1 n_2}{\alpha\beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_2} \right\} dad\beta \\
 \bar{\tau}_{xy} = & \frac{p_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -\frac{n_3}{F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_1} \right. \\
 & \left. + \frac{n_1 n_2}{F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_2} \right\} dad\beta \\
 \bar{\tau}_{yz} = & \frac{p_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i \frac{n_1 n_3}{\alpha F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_1} \right. \\
 & \left. + i \frac{n_1 n_3}{\alpha F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_2} \right\} dad\beta \\
 \bar{\tau}_{zx} = & \frac{p_0}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -i \frac{n_1 n_3}{\beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_1} \right. \\
 & \left. + i \frac{n_1 n_3}{\beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_2} \right\} dad\beta
 \end{aligned}$$

..... (5)

ここで $N_1 = n_1 z - iax - i\beta y$, $N_2 = n_2 z - iax - i\beta y$, $n_1 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + s_1^2}$, $n_2 = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + s_2^2}$, $n_3 = (\alpha^2 + \beta^2 + s_1^2/2)$, $F(\alpha, \beta) = n_3^2 - (\alpha^2 + \beta^2) n_1 n_2$, $s_1 = 1/c_1$, $s_2 = 1/c_2$, c_1 は縦波の伝ば速度, c_2 はせん断波の伝ば速度である。式(5)の応力成分を表す式の一般形は

$$\bar{\sigma} = \frac{p_0}{(2\pi)^2} \{ (\bar{\sigma})_p + (\bar{\sigma})_s \} \dots\dots\dots (6)$$

式(6)の右辺第1項めは縦波, 第2項めはせん断波に関係する成分である。

$$(\bar{\sigma})_p = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_p(\alpha, \beta)}{\alpha\beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_1} dad\beta \dots\dots\dots (7)$$

$$(\bar{\sigma})_s = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_s(\alpha, \beta)}{\alpha\beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho N_2} dad\beta \dots\dots\dots (8)$$

式(7), 式(8)は図2に示す $x-y$ 座標系の第1象限すなわち領域[I]に対する応力成分を示すものであ

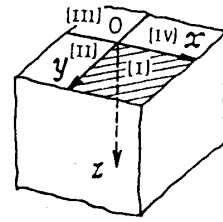


図2 荷重の作用領域と解析領域

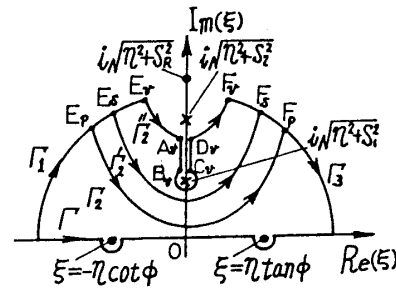


図3 カグニアードの反転積分路〔式(10)〕

り他の領域の[II], [III], [IV]および座標軸を含む鉛直平面内を解析点とする時は式(7)および式(8)の被積分関数の指数に注目する必要がある。

3. フーリエ逆変換積分路の変更

3・1 領域[I] ($x > 0, y > 0, z > 0$) 領域[I]の時は式(7), 式(8)をそのまま使用することができ変数 α, β を変数 ξ と η に次のように変換する。

$$\alpha = \xi \cos \phi - \eta \sin \phi, \beta = \xi \sin \phi + \eta \cos \phi \dots\dots\dots (9)$$

ここで $\cos \phi = x/r$, $\sin \phi = y/r$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。

式(9)を式(7), 式(8)に代入すると次のようになる。

$$(\bar{\sigma})_{[j]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[j]}(\xi, \eta) e^{-\rho(n_j z - i\xi r)}}{(\xi \cos \phi - \eta \sin \phi)(\xi \sin \phi + \eta \cos \phi) F(\xi, \eta)} d\xi d\eta \dots\dots\dots (10)$$

$j=1, 2$ をとり $n_1 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + s_1^2}$, $n_2 = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + s_2^2}$, $n_3 = (\xi^2 + \eta^2 + s_1^2/2)$, $F(\xi, \eta) = n_3^2 - (\xi^2 + \eta^2) n_1 n_2$ である。

式(10)の被積分関数は変数 ξ を $\xi \rightarrow \infty$ とすると

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{f_{[j]}(\xi, \eta)}{(\xi \cos \phi - \eta \sin \phi)(\xi \sin \phi + \eta \cos \phi) F(\xi, \eta)} \rightarrow 0$$

となりまた

$$n_j z - i\xi r = t \dots\dots\dots (11)$$

とおいて変数 ξ を時間 t で表すと次のようになる。

$$\xi = \frac{1}{R} \{ it \cos \phi \pm \sin \phi \sqrt{t^2 - h_j^2(\eta)} \} \dots\dots\dots (12)$$

ただし

$$h_j^2(\eta) = R^2(\eta^2 + s_j^2) \dots\dots\dots (13)$$

$\cos \phi = r/R$, $\sin \phi = z/R$, $R^2 = x^2 + y^2 + z^2$ である。式(12)に基づいて時間 t に対する ξ の軌跡を考察すると図3に示す積分路が得られる。そこでフーリエ逆変換積分は積分路 Γ と $\Gamma_1 \rightarrow [\Gamma_2, \Gamma_2', \Gamma_2''] \rightarrow \Gamma_3$ からなる積分路になる。

この場合極 $\xi = -\eta \cot \phi$, $\xi = \eta \tan \phi$ を積分路の内側に含み極に対する留数計算が必要である。 $i = \sqrt{\eta^2 + s_1^2}$, $i\sqrt{\eta^2 + s_2^2}$ は分岐点であり $i\sqrt{\eta^2 + s_2^2}$ は極ではあるが積分路の外側にあるため留数計算の対象にはならない。

Γ_2 を通る積分路は縦波, Γ_2' を通る積分路はせん断波, Γ_2'' は von-Schmidt 波による応答を与える。なお $s_R = 1/c_R$ で c_R はレーリー波の伝ば速度である。留数計算と積分路の変更を考慮すると式(10)は次のようになる。

$$(\bar{\sigma})_{[g]} = 2\pi i \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[g]}(\eta \tan \phi, \eta) e^{-\rho(n_j z - i r \eta \tan \phi)}}{\eta / \cos \phi F(\eta \tan \phi, \eta)} d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[g]}(-\eta \cot \phi, \eta) e^{-(n_j z + i r \eta \cot \phi)}}{-\eta / \sin \phi F(-\eta \cot \phi, \eta)} d\eta \right] + \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_E^0 G(\xi, \eta) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^F G(\xi, \eta) d\xi \dots (14)$$

ここで $G(\xi, \eta)$ は被積分関数を示す。後で式(14)にラプラス逆変換を適用して実空間解を求める必要がある。この場合には三次元カグニード法に基づいてラプラス逆変換を行う。

3.2 領域[II] ($x < 0, y > 0, z > 0$) 領域[II]は $x-y$ 座標系の第4象限であるので応力の一般形は

$$(\bar{\sigma})_{[g]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[g]}(\alpha, \beta)}{\alpha \beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho(n_j z + i \alpha |x| - i \beta y)} d\alpha d\beta \dots (15)$$

ここで $\alpha = \xi \cos \phi - \eta \sin \phi$, $\beta = -(\xi \sin \phi + \eta \cos \phi)$ を式(15)に代入すると

$$(\bar{\sigma})_{[g]} = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[g]}(\xi, \eta) e^{-\rho(n_j z + i \epsilon r)}}{(\xi \cos \phi - \eta \sin \phi)(\xi \sin \phi + \eta \cos \phi) F(\xi, \eta)} d\xi d\eta \dots (16)$$

ただし $\cos \phi = |x|/r$, $\sin \phi = y/r$ である。式(16)の指数を $t = n_j z + i \epsilon r$ とおいて変数 ξ を時間 t で表すと

$$\xi = -\frac{i t \cos \phi}{R} \pm \frac{\sin \phi \sqrt{t^2 - h_j^2(\eta)}}{R} \dots (17)$$

式(16)の変数 ξ に関するフーリエ逆変換積分は図4に示す積分路に変更することができる。この場合極 $\xi = \eta \tan \phi$, $\xi = -\eta \cot \phi$ を積分路の内側に含まないので留数計算の対象とはならず式(16)は次のようになる。

$$(\bar{\sigma})_{[g]} = - \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_E^0 G(\xi, \eta) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^F G(\xi, \eta) d\xi \right\} \dots (18)$$

3.3 領域[III] ($x < 0, y < 0, z > 0$) 領域[III]は $x-y$ 座標系の第3象限であるので応力成分を表す式の一般形は次のようになる。

$$(\bar{\sigma})_{[g]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[g]}(\alpha, \beta)}{\alpha \beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho(n_j z + i \alpha |x| + i \beta |y|)} d\alpha d\beta \dots (19)$$

ここで $\alpha = \xi \cos \phi - \eta \sin \phi$, $\beta = \xi \sin \phi + \eta \cos \phi$ を式(19)に代入する。

$$(\bar{\sigma})_{[g]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[g]}(\xi, \eta) e^{-\rho(n_j z + i \epsilon r)}}{(\xi \cos \phi - \eta \sin \phi)(\xi \sin \phi + \eta \cos \phi) F(\xi, \eta)} d\xi d\eta \dots (20)$$

ただし $\cos \phi = |x|/r$, $\sin \phi = |y|/r$ である。変数 ξ と時間 t の関係は式(17)のようになり式(20)の変数 ξ に関するフーリエ逆変換積分は図4に示す線積分となる。したがって応力成分は次のようである。

$$(\bar{\sigma})_{[g]} = \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_E^0 G(\xi, \eta) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^F G(\xi, \eta) d\xi \dots (21)$$

3.4 領域[IV] ($x > 0, y < 0, z > 0$) 領域[IV]は $x-y$ 座標系の第2象限であるので応力成分の表示式の一般形は

$$(\bar{\sigma})_{[g]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[g]}(\alpha, \beta)}{\alpha \beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho(n_j z - i \alpha x + i \beta |y|)} d\alpha d\beta \dots (22)$$

であり $\alpha = \xi \cos \phi - \eta \sin \phi$, $\beta = -(\xi \sin \phi + \eta \cos \phi)$ の関係を式(22)に代入すると

$$(\bar{\sigma})_{[g]} = - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[g]}(\xi, \eta) e^{-\rho(n_j z - i \epsilon r)}}{(\xi \cos \phi - \eta \sin \phi)(\xi \sin \phi + \eta \cos \phi) F(\xi, \eta)} d\xi d\eta \dots (23)$$

ただし $\cos \phi = x/r$, $\sin \phi = |y|/r$ である。式(23)は式(10)と同形であり図3に示す線積分となる。したがって応力成分は次のようになる。

$$(\bar{\sigma})_{[g]} = -2\pi i \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[g]}(\eta \tan \phi, \eta) e^{-\rho(n_j z - i r \eta \tan \phi)}}{\eta / \cos \phi F(\eta \tan \phi, \eta)} d\eta + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[g]}(-\eta \cot \phi, \eta) e^{-\rho(n_j z - i r \eta \cot \phi)}}{-\eta / \sin \phi F(-\eta \cot \phi, \eta)} d\eta \right]$$

$$-\left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_E^0 G(\xi, \eta) d\xi + \int_{-\infty}^{\infty} d\eta \int_0^F G(\xi, \eta) d\xi \right\} \dots \dots \dots (24)$$

3.5 x 軸を含む鉛直平面内 解析点を x 軸を含む鉛直平面内に選ぶ時は $y=0$ でありこれを式(7), 式(8)に代入すると応力 $(\bar{\sigma})_{[y]}$ は

$$(\bar{\sigma})_{[y]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[y]}(\alpha, \beta)}{\alpha\beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho(\eta_j z - i\alpha x)} d\alpha d\beta \dots \dots \dots (25)$$

この場合には式(25)に示すように変数 α に関するフーリエ逆変換積分の積分路の変更を検討することになる。

式(25)の被積分関数の指数を $t = \eta_j z - i\alpha x$ と置くと

$$\alpha = i \frac{x}{x^2 + z^2} t \pm \frac{z\sqrt{t^2 - (x^2 + z^2)(\beta^2 + s_j^2)}}{x^2 + z^2} \dots \dots \dots (26)$$

時間 t による変数 α の軌跡を考察すると式(25)の変数 α に関する線積分は図5に示す積分路 Γ と $\Gamma_1 \rightarrow [\Gamma_2, \Gamma_2', \Gamma_2''] \rightarrow \Gamma_3$ で囲まれた積分路に変更することができ, $\alpha=0$ が極でありしたがって式(25)は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma})_{[y]} = & 4\pi i \int_0^{\infty} \frac{f_{[y]}(0, \beta)}{\beta F(0, \beta)} e^{-\rho\sqrt{\beta^2 + s_j^2} z} d\beta \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_E^0 \frac{f_{[y]}(\alpha, \beta)}{\alpha\beta F(\alpha, \beta)} d\alpha \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_0^F \frac{f_{[y]}(\alpha, \beta)}{\alpha\beta F(\alpha, \beta)} d\alpha \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

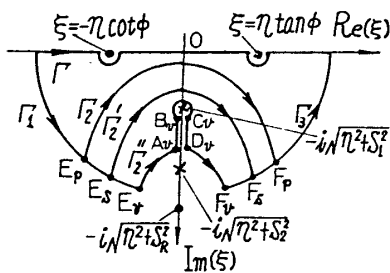


図4 カグニアードの反転積分路 [式(16)]

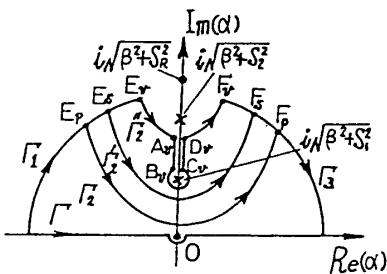


図5 カグニアードの反転積分路 [式(25), $x > 0$]

$x < 0$ の時は式(26)は

$$\alpha = -i \frac{x}{x^2 + z^2} t \pm \frac{z\sqrt{t^2 - (z^2 + x^2)(\beta^2 + s_j^2)}}{x^2 + z^2} \dots \dots \dots (28)$$

の関係となるのでフーリエ逆変換積分路は図6に示すような積分路に変更することができる。この場合 $\alpha=0$ の極は積分路の内側に含まないので留数計算の対象にはならない。したがって応力成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} (\bar{\sigma})_{[y]} = & \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_E^0 \frac{f_{[y]}(\alpha, \beta)}{\alpha\beta F(\alpha, \beta)} d\alpha \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} d\beta \int_0^F \frac{f_{[y]}(\alpha, \beta)}{\alpha\beta F(\alpha, \beta)} d\alpha \dots \dots \dots (29) \end{aligned}$$

3.6 y 軸を含む鉛直平面内 解析点を y 軸を含む鉛直平面内に選ぶ時は式(26)および(28)において x の代わりに y を用い, 式(27)および式(29)における変数 α に関する積分と変数 β に関する積分の順序を入れ換えればよい。

3.7 z 軸上 z 軸上を解析点とする場合は式(7), 式(8)より応力成分は次のようになる。

$$(\bar{\sigma})_{[z]} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[z]}(\alpha, \beta)}{\alpha\beta F(\alpha, \beta)} e^{-\rho\eta_j z} d\alpha d\beta \dots \dots (30)$$

変数 α に関するフーリエ逆変換積分に注目すると被積分関数は奇関数となり積分値は零となるが $\alpha=0$ において特異点を持つので $\alpha=0$ に対する留数計算を行う必要がある。

$$(\bar{\sigma})_{[z]} = 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_{[z]}(0, \beta)}{\beta F(0, \beta)} e^{-\rho\sqrt{\beta^2 + s_j^2} z} d\beta \dots (31)$$

式(31)の被積分関数は変数 β に関して奇関数となるので積分値は零になるが $\beta=0$ に特異点を持つので $\beta=0$ の極に対する留数計算を行う必要がある。

$$(\bar{\sigma})_{[z]} = -4\pi \frac{f_{[z]}(0, 0)}{F(0, 0)} e^{-\rho s_j z} \dots \dots \dots (32)$$

式(32)をラプラス逆変換することによって実空間解が求められる。

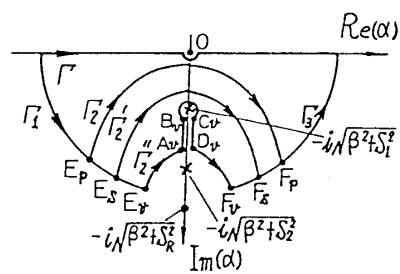


図6 カグニアードの反転積分路 [式(25), $x < 0$]

$$(\bar{\sigma})_{|z|} = \frac{-4\pi}{2\pi i} \int_{Br} \frac{f_{|z|}(0,0)}{F(0,0)} e^{-p(t-s|z|)} dp \dots (33)$$

この場合には三次元カグニード法を適用することができず Bromwich の線積分によってラプラス逆変換を行う必要がある。同一の解析式で全領域に対する応力成分を表すことができず、各領域および座標軸を

含む鉛直平面内それぞれを解析する必要がある。

4. 解析結果

領域 [I] について式(14)を三次元カグニード法によって実空間解を求めると次のようになる。せん断波通過後だけについて示すと

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2p_0}{(2\pi)^2} \left[-\pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{n_3 \frac{\nu}{2(1-\nu)}}{\eta_{RP1} / \cos \phi F(\eta_{RP1} \tan \phi, \eta_{RP1})} \left(\frac{d\eta_{RP1}}{dt} \right) \right\} \right. \\ &\quad - \pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{n_3 \left(\eta_{RP2}^2 / \sin^2 \phi - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right)}{\eta_{RP2} / \sin \phi F(-\eta_{RP2} \cot \phi, \eta_{RP2})} \left(\frac{d\eta_{RP2}}{dt} \right) \right\} \\ &\quad - \int_0^{\eta_p} \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_3 \sin \phi \cos \phi \{ (\xi_p^2 \cos^2 \phi + \eta^2 \sin^2 \phi) (\xi_p^2 - \eta^2) + 2\xi_p^2 \eta^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) - \frac{\nu}{2(1-\nu)} (\xi_p^2 - \eta^2) \}}{(\xi_p^2 - \eta^2)^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi - \xi_p^2 \eta^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)^2} F(\xi_p, \eta) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta - \pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{\eta_{RS2} / \sin \phi n_1 n_2}{F(-\eta_{RS2} \cot \phi, \eta_{RS2})} \left(\frac{d\eta_{RS2}}{dt} \right) \right\} \\ &\quad \left. + \int_0^{\eta_s} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\xi_s^2 + \eta^2) \sin \phi \cos \phi n_1 n_2}{(\xi_s^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right] \\ \sigma_y &= \frac{2p_0}{(2\pi)^2} \left[\operatorname{Im} \left\{ \pi \frac{n_3 \left(\eta_{RP1}^2 / \cos^2 \phi - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right)}{\eta_{RP1} / \cos \phi F(\eta_{RP1} \tan \phi, \eta_{RP1})} \left(\frac{d\eta_{RP1}}{dt} \right) \right\} \right. \\ &\quad + \operatorname{Im} \left\{ \pi \frac{n_3 \frac{\nu}{2(1-\nu)}}{\eta_{RP2} / \sin \phi F(-\eta_{RP2} \cot \phi, \eta_{RP2})} \left(\frac{d\eta_{RP2}}{dt} \right) \right\} \\ &\quad - \int_0^{\eta_p} \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_3 \sin \phi \cos \phi \{ (\xi_p^2 \cos^2 \phi + \eta^2 \sin^2 \phi) (\xi_p^2 - \eta^2) - 2\xi_p^2 \eta^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) - \frac{\nu}{2(1-\nu)} (\xi_p^2 - \eta^2) \}}{(\xi_p^2 - \eta^2)^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi - \xi_p^2 \eta^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)^2} F(\xi_p, \eta) \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta - \pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{\eta_{RS1} / \cos \phi n_1 n_2}{F(\eta_{RS1} \tan \phi, \eta_{RS1})} \left(\frac{d\eta_{RS1}}{dt} \right) \right\} \\ &\quad \left. + \int_0^{\eta_s} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\xi_s^2 + \eta^2) \sin \phi \cos \phi n_1 n_2}{(\xi_s^2 \cos^2 \phi - \eta^2 \sin^2 \phi)^2 F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right] \\ \sigma_z &= \frac{2p_0}{(2\pi)^2} \left[-\pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{n_3^2}{\eta_{RP1} / \cos \phi F(\eta_{RP1} \tan \phi, \eta_{RP1})} \left(\frac{d\eta_{RP1}}{dt} \right) \right\} + \pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{n_3^2}{\eta_{RP2} / \sin \phi F(-\eta_{RP2} \cot \phi, \eta_{RP2})} \right. \right. \\ &\quad \times \left. \left(\frac{d\eta_{RP2}}{dt} \right) \right\} + \int_0^{\eta_p} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\xi_p^2 - \eta^2) \sin \phi \cos \phi n_3^2}{\{ (\xi_p^2 - \eta^2)^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi - \xi_p^2 \eta^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)^2 \} F(\xi_p, \eta)} \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta \\ &\quad + \pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{\eta_{RS1}^2 (1 + \tan^2 \phi) n_1 n_2}{\eta_{RS1} / \cos \phi F(\eta_{RS1} \tan \phi, \eta_{RS1})} \left(\frac{d\eta_{RS1}}{dt} \right) \right\} - \pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{\eta_{RS2}^2 (1 + \cot^2 \phi) n_1 n_2}{\eta_{RS2} / \sin \phi F(-\eta_{RS2} \cot \phi, \eta_{RS2})} \left(\frac{d\eta_{RS2}}{dt} \right) \right\} \\ &\quad \left. - \int_0^{\eta_s} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\xi_s^4 - \eta^4) \sin \phi \cos \phi n_1 n_2}{\{ (\xi_s^2 - \eta^2)^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi - \xi_s^2 \eta^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)^2 \} F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{2p_0}{(2\pi)^2} \left[-\int_0^{\eta_p} \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_3}{F(\xi_p, \eta)} \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta + \int_0^{\eta_s} \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1 n_2}{F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right] \\ \tau_{yz} &= \frac{2p_0}{(2\pi)^2} \left[\pi \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1 n_3}{F(\eta_{RP1} \tan \phi, \eta_{RP1})} \left(\frac{d\eta_{RP1}}{dt} \right) \right\} + \int_0^{\eta_p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_p \cos \phi n_1 n_3}{(\xi_p^2 \cos^2 \phi - \eta^2 \sin^2 \phi) F(\xi_p, \eta)} \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta \right. \\ &\quad \left. - \pi \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1 n_3}{F(\eta_{RS1} \tan \phi, \eta_{RS1})} \left(\frac{d\eta_{RS1}}{dt} \right) \right\} - \int_0^{\eta_s} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_s \cos \phi n_1 n_3}{(\xi_p^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right] \\ \tau_{zx} &= \frac{2p_0}{(2\pi)^2} \left[\pi \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1 n_3}{F(-\eta_{RP2} \cot \phi, \eta_{RP2})} \left(\frac{d\eta_{RP2}}{dt} \right) \right\} + \int_0^{\eta_p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_p \sin \phi n_1 n_2}{(\xi_p^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) F(\xi_p, \eta)} \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta \right. \\ &\quad \left. + \pi \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1 n_3}{F(-\eta_{RS2} \cot \phi, \eta_{RS2})} \left(\frac{d\eta_{RS2}}{dt} \right) \right\} - \int_0^{\eta_s} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_s \sin \phi n_1 n_2}{(\xi_s^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right] \end{aligned} \dots (34)$$

ただし

$$\eta_{R1} = i \frac{r \tan \phi}{z^2 + R^2 \tan^2 \phi} t + \frac{z \sqrt{l^2(1 + \tan^2 \phi) - l^2(z^2 + R^2 \tan^2 \phi)}}{z^2 + R^2 \tan^2 \phi}$$

$$\frac{d\eta_{R1}}{dt} = i \frac{r \tan \phi}{z^2 + R^2 \tan^2 \phi} + \frac{z(1 + \tan^2 \phi)t}{(z^2 + R^2 \tan^2 \phi) \sqrt{l^2(1 + \tan^2 \phi) - l^2(z^2 + R^2 \tan^2 \phi)}} \quad \dots \dots \dots (35)$$

$$\eta_{R2} = -i \frac{r \cot \phi}{z^2 + R^2 \cot^2 \phi} t + \frac{z \sqrt{l^2(1 + \cot^2 \phi) - l^2(z^2 + R^2 \cot^2 \phi)}}{z^2 + R^2 \cot^2 \phi}$$

$$\frac{d\eta_{R2}}{dt} = -i \frac{r \cot \phi}{z^2 + R^2 \cot^2 \phi} + \frac{z(1 + \cot^2 \phi)t}{(z^2 + R^2 \cot^2 \phi) \sqrt{l^2(1 + \cot^2 \phi) - l^2(z^2 + R^2 \cot^2 \phi)}} \quad \dots \dots \dots (36)$$

$$\xi_{[2]} = \frac{1}{R} \{it \cos \phi + \sin \phi \sqrt{t^2 - h_3^2(\eta)}\}, \quad \frac{d\xi_{[2]}}{dt} = \frac{1}{R} \left\{ i \cos \phi + \frac{t \sin \phi}{\sqrt{t^2 - h_3^2(\eta)}} \right\} \quad \dots \dots \dots (37)$$

Re は実数部を Im は虚数部を表す。縦波の時は $l^2 = \kappa^2$, せん断波の時は $l^2 = 1$, $\kappa^2 = (1 - 2\nu)/2(1 - \nu)$ である。等分布せん断衝撃荷重が作用する場合の境界条件は

$$(\tau_{zx})_{z=0} = -q_1 \delta(t) \lim_{x \rightarrow 0} H(x) e^{-\gamma x} \lim_{y \rightarrow 0} H(y) e^{-\epsilon y} \quad \dots \dots \dots (38)$$

$$(\sigma_z)_{z=0} = (\tau_{yz})_{z=0} = 0 \quad \dots \dots \dots (39)$$

垂直衝撃荷重が作用する場合と同様に解析し領域[I]についてせん断波通過後の応力の時間に対する変動は次のようである。

$$\sigma_x = \frac{2q_1}{(2\pi)^2} \left[-\pi \operatorname{Re} \frac{n_2 \left\{ \eta_{RP2}^2 / \sin^2 \phi - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right\}}{F(-\eta_{RP2} \cot \phi, \eta_{RP2})} \left(\frac{d\eta_{RP2}}{dt} \right) \right. \\ \left. - \int_0^{\eta_p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_p \sin \phi n_2 \left\{ \xi_p^2 \cos^2 \phi + \eta^2(1 + \cos^2 \phi) - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right\}}{(\xi_p^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) F(\xi_p, \eta)} \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta \right. \\ \left. + \pi \operatorname{Re} \frac{n_2 n_3}{F(-\eta_{RS1} \cot \phi, \eta_{RS1})} \left(\frac{d\eta_{RS1}}{dt} \right) \right. \\ \left. + \int_0^{\eta_s} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_s \sin \phi (n_2^2 + \xi_s^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) n_3 - 2\xi_s \sin \phi (\xi_s^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) n_1 n_2}{(\xi_s^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) n_2 F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right]$$

$$\sigma_y = \frac{2q_1}{(2\pi)^2} \left[\pi \operatorname{Re} \frac{n_2 \frac{\nu}{2(1-\nu)}}{F(-\eta_{RP2} \cot \phi, \eta_{RP2})} \left(\frac{d\eta_{RP2}}{dt} \right) \right. \\ \left. - \int_0^{\eta_p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_p \sin \phi n_2 \left\{ \xi_p^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi - \frac{\nu}{2(1-\nu)} \right\}}{(\xi_p^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) F(\xi_p, \eta)} \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta \right. \\ \left. - \int_0^{\eta_s} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_s \sin \phi (n_3 - 2n_1 n_2)}{n_2 F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right]$$

$$\sigma_z = \frac{2q_1}{(2\pi)^2} \left[\pi \operatorname{Re} \frac{n_2 n_3}{F(-\eta_{RP2} \cot \phi, \eta_{RP2})} \left(\frac{d\eta_{RP2}}{dt} \right) + \int_0^{\eta_p} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_p \sin \phi n_2 n_3}{(\xi_p^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) F(\xi_p, \eta)} \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta \right. \\ \left. - \pi \operatorname{Re} \frac{n_2 n_3}{F(-\eta_{RS2} \cot \phi, \eta_{RS2})} \left(\frac{d\eta_{RS2}}{dt} \right) - \int_0^{\eta_s} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_s \sin \phi n_2 n_3}{(\xi_s^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{2q_1}{(2\pi)^2} \left[\int_0^{\eta_p} -\operatorname{Im} \left\{ \frac{\xi_p \cos \phi n_2}{F(\xi_p, \eta)} \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta + \pi \operatorname{Re} \frac{\{n_2^2 n_3 + \eta_{RS1}^2 / \cos^2 \phi (n_3 - 2n_1 n_2)\}}{2F(\eta_{RS1} \tan \phi, \eta_{RS1}) n_2} \left(\frac{d\eta_{RS1}}{dt} \right) \right. \\ \left. + \int_0^{\eta_s} \operatorname{Im} \left\{ \frac{n_2^2 n_3 \xi_s \cos \phi + \xi_s \cos \phi \{ \xi_s^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) + \eta^2 (2 \sin^2 \phi + 1) \} (n_3 - 2n_1 n_2)}{2(\xi_s^2 \cos^2 \phi - \eta^2 \sin^2 \phi) n_2 F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right]$$

$$\tau_{yz} = \frac{2q_1}{(2\pi)^2} \left[\int_0^{\eta_p} -\operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1 n_2}{F(\xi_p, \eta)} \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta + \int_0^{\eta_s} \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_1 n_2}{F(\xi_s, \eta)} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) \right\} d\eta \right]$$

$$\tau_{zx} = \frac{2q_1}{(2\pi)^2} \left[\pi \operatorname{Im} \frac{\eta_{RP2} / \sin \phi n_1 n_2}{F(-\eta_{RP2} \cot \phi, \eta_{RP2})} \left(\frac{d\eta_{RP2}}{dt} \right) - \int_0^{\eta_p} \operatorname{Re} \left\{ \frac{(\xi_p^2 + \eta^2) \sin \phi \cos \phi n_1 n_2}{(\xi_p^2 \sin^2 \phi - \eta^2 \cos^2 \phi) F(\xi_p, \eta)} \left(\frac{d\xi_p}{dt} \right) \right\} d\eta \right]$$

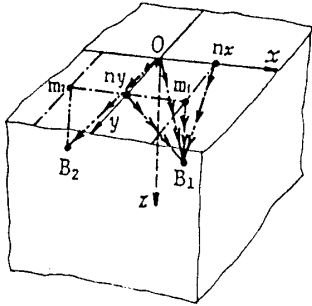


図7 計算の対象とした点B₁, B₂と応力波伝ば径路

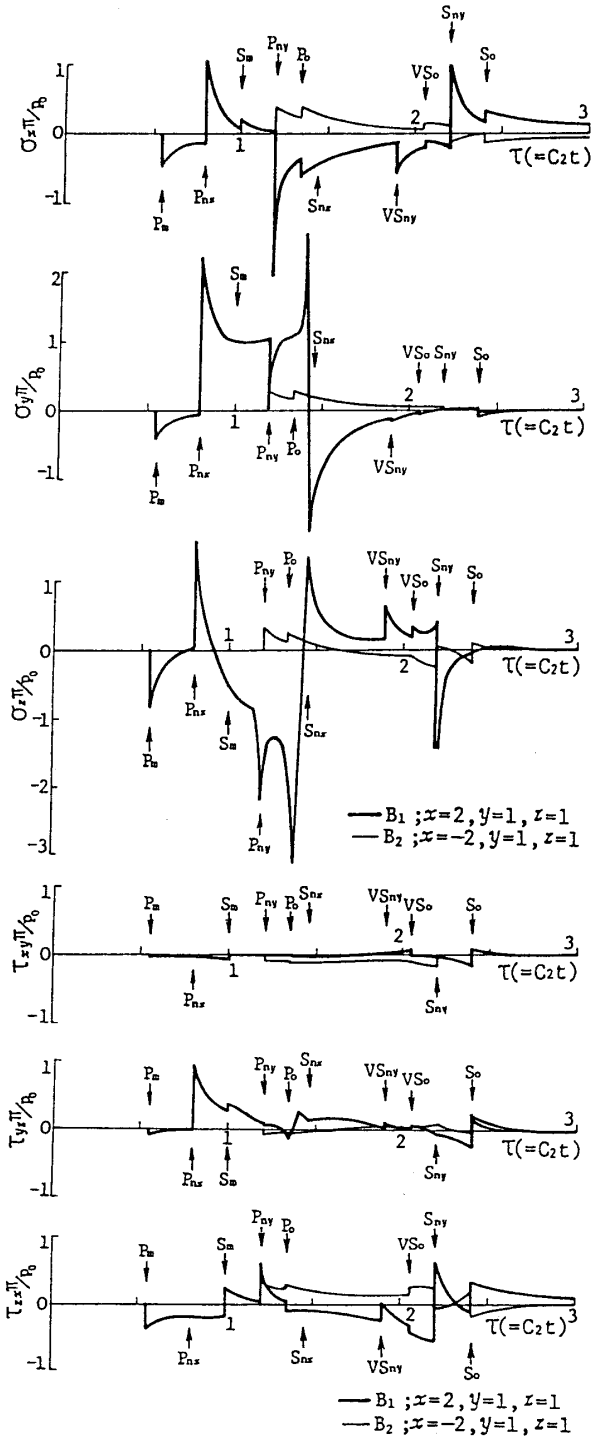


図8 インパルス状垂直衝撃荷重による応力

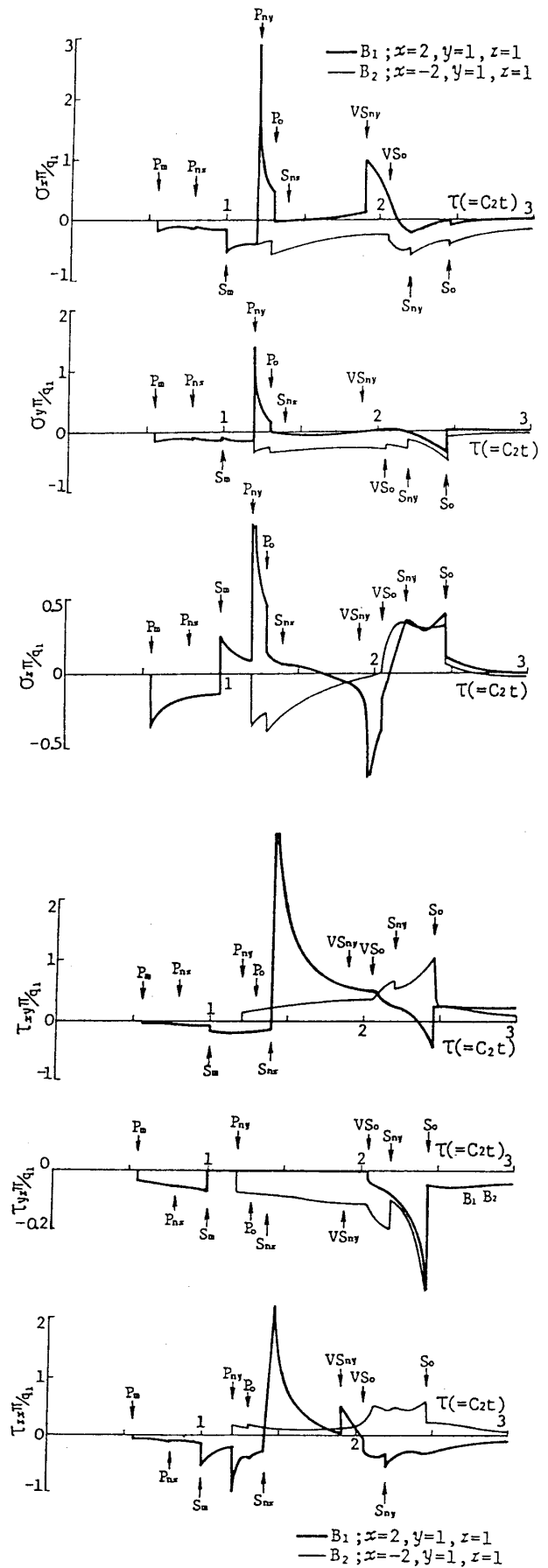


図9 インパルス状せん断衝撃荷重による応力

$$\begin{aligned}
& -\pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{n_3^2 - n_1 n_2 (\eta_{RS1} / \cos \phi)^2}{\eta_{RS1} / \cos \phi F(\eta_{RS1} \tan \phi, \eta_{RS1})} \right\} \left(\frac{d\eta_{RS1}}{dt} \right) + \pi \operatorname{Im} \left\{ \frac{n_3^2}{\eta_{RP2} / \sin \phi F(-\eta_{RS2} \cot \phi, \eta_{RS2})} \right\} \left(\frac{d\eta_{RS2}}{dt} \right) \\
& + \int_0^{\nu^*} \operatorname{Re} \left\{ \frac{n_3^2 (\xi_s^2 - \eta^2) \sin \phi \cos \phi - n_1 n_2 \sin \phi \cos \phi \{ (\xi_s^2 - \eta^2) \right. \\
& \quad \left. \times (\xi_s^2 \sin^2 \phi + \eta^2 \cos^2 \phi) + 2 \xi_s^2 \eta^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \}}{((\xi_s^2 - \eta^2)^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi - \xi_s^2 \eta^2 (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)^2) F(\xi_s, \eta)} \right\} \left(\frac{d\xi_s}{dt} \right) d\eta \Bigg] \\
& \dots\dots\dots (40)
\end{aligned}$$

5. 数値計算結果

図8にインパルス状垂直衝撃荷重が作用する領域 [I] の荷重作用直下領域の点 B_1 ($x=2.0, y=1.0, z=1.0$) と領域 [II] の自由表面直下領域の点 B_2 ($x=-2.0, y=1.0, z=1.0$) における各応力成分の時間的変動を示した。荷重作用直下領域点 B_1 については図7の点 m_1 から伝ばする縦波 P_m が最も速く到達し応力変動を励起するが、その後到達する x 軸上の荷重作用縁の点 n_x からの縦波 P_{nx} 、 y 軸上の荷重作用縁点 n_y からの縦波 P_{ny} 、 x 軸と y 軸が交叉する点 O から伝ばする縦波 P_o が到達することに応力は不連続的に変動する。せん断波についても S_m, S_{nx}, S_{ny}, S_o の順序で点 B_1 に到達しそのつど応力は不連続的な変動を示す。表面にそって伝ばする縦波は到達点から絶えずせん断波を発生させる。この種の応力波は von-Schmidt 波とよばれ点 n_y の縦波が原因となる VS_{ny} は点 n_y より伝ばするせん断波 S_{ny} より速く到達するので S_{ny} が到達するまでは von-Schmidt 波 VS_{ny} が応力変動に対しては支配的である。点 O から表面にそって伝ばする縦波が原因となる von-Schmidt 波 VS_o も点 O から直接解析点 B_1 に伝ばするせん断波 S_o より速く到達するのでせん断波 S_o が到達するまでは VS_o による応力の変動が支配的である。なお点 n_x からのせん断波 S_{nx} は von-Schmidt 波 VS_{nx} より速く到達するので VS_{nx} による応力の変動は表れない。せん断波 S_o が最後に点 B_1 に到達し S_o の通過後は応力は零に近づく。図8の細実線は解析点 B_2 における応力の時間に対する変動を示している。図7に示す y 軸にそった荷重作用縁の点 n_y からの縦波 P_{ny} が最も速く到達する。この点からのせん断波 S_{ny} や座標原点 O からの縦波 P_o 、せん断波 S_o 、von-Schmidt 波 VS_o の到達によって応力はそのつど不連続的な変動を示す。しかし解析点 B_1 に比較すると変動振幅は非常に小さい。図9はインパルス状せん断衝撃荷重に対する応力の時間に対する変動を示す。解析点の位置は垂直衝撃

荷重の場合と同じである。したがって解析点 B_1, B_2 に到達する応力波の種類は垂直衝撃荷重の場合と同じである。各応力波の到達によって応力はそのつど不連続的に変動する。解析点 B_1 においては急峻な応力の変動が見られるが解析点 B_2 においては不連続的な変動を示すが変動振幅はそれほど大きくはない。

6. 結 言

半無限弾性体の表面の四半無限領域にインパルス状衝撃荷重が等分布に作用する時の応力波の伝ばによる応力の変動の問題を三次元動的弾性理論に基づいて解析した。解析結果について全領域を検討する時座標系の符号だけに着目すれば解決するものではなく三次元カグニード法の過程に入る当初の変数変換について十分な注意が必要である。本研究では特にその点に注目して全領域について解析が可能であることを示した。応力の時間に対する変動を応力波の伝ばに基づいて解析すると次のことが明らかになった。

(1) 解析点の直上の荷重作用点、荷重作用直線縁で解析点までの最短距離の位置にある点、荷重作用縁が交叉する角点から伝ばする応力波が応力変動に影響を与えそれぞれの応力波の到達によって応力は不連続的に変動する。

(2) 自由表面下領域においては応力の変動振幅は小さく減衰が速い。

終わりに臨み本研究を遂行するにあたり懇切なるご指導をいただいた東京工業大学中原一郎教授に厚く感謝の意を表す。

文 献

- (1) 松本・ほか2名, 機論, 43-372 (昭52), 2872.
- (2) Norwood, F. R., *Trans. ASME., Ser. E.*, 36-3 (1969), 516.
- (3) 川建, 九大応用力学研究所報, No. 45 (昭51), 407.
- (4) 神宮・ほか2名, 山梨地方講演会講演論文集, (昭58-10), 40.

討 論

〔質問〕 渡辺 一実 (山形大学工学部)

(1) 四半領域に垂直荷重が作用する式(1)の問題はすでに Norwood⁽²⁾によって解かれているのではないか。

(2) 式(3)の段階で極限を取るならば、式(5)の応力表示は $\alpha=0, \beta=0$ で被積分関数が発散し、式(5)は発散積分となり、逆変換することが無意味となる。もし、式(3)を用いるならば、式(5)の積分は Cauchy の主値積分を取らなくてはならないのではないか。

(3) Norwood⁽²⁾は全領域にわたる Cagniard 法によって全時空間解 ($z \neq 0$) を求めているのに対し、貴論では各領域毎 (I ~ IV) に分割して Cagniard 法を適用しているのはなぜか。

(4) 実軸上の極 ($\alpha=0, \beta=0$) から生じる応答成分はいかなる物理的 (現象的) 意味を持っているのか。

〔回答〕 (1) 衝撃荷重に対する動的応答問題は集中衝撃荷重に対する衝撃応力の解析が多く行われている。本研究では四半無限領域に衝撃荷重が作用する

問題を動弾性理論に基づいて解析し、荷重分布の直線縁および角部から伝ばする応力波が衝撃応力に及ぼす影響を明らかにした。

(2) 変数 α, β を変数変換すればカグニアードの反転積分路は図3および図4に示すようになりそのような問題は生じない。

(3) 変数 α, β を変数 ξ, η に変換する式(9)は領域 [I] ($x > 0, y > 0, z > 0$) にあてはまり、その他の領域に対しては適当ではない。変数変換 ($\alpha, \beta \rightarrow \xi, \eta$) を行う時には解析領域の座標値 x, y の符号に注目して α, β と ξ, η の関係を求めることが必要である。

(4) 変数 α, β を変数変換するとカグニアードの反転積分路は図3および図4のようになる。 ξ 平面における極は $\xi = \eta \tan \phi$ と $\xi = -\eta \cot \phi$ である。図3はカグニアードの反転積分路の内側に極を含み、図4は反転積分路の内側には極を含まない。図3に示す場合は解析点が荷重分布領域の下側であり、図4に示す場合は解析点が自由表面の下側である。