

日本機械学会論文集(A編)
51巻470号(昭60-10)

任意形状断面を有する円筒コイルばねの応力解析*

(第1報, フーリエ展開境界値平均法による解析解)

長 屋 幸 助**

Kosuke NAGAYA

Key Words: Machine Element, Strength of Materials, Elasticity, Coil Spring, Stress, Arbitrary Cross-Section, Principal Stress, Fourier Expansion Collocation

1. 緒 言

コイルばねは機械の基礎的な要素で古くから注目され、その応力問題については多くの解析がなされてきた⁽¹⁾⁻⁽⁹⁾。これらの解析で最も広く使用されているのは Wahl⁽¹⁾の式で、これはコイル中心線に垂直力のみが作用するものとした解であり、さらに弾性学的な取扱いをしたものとして Göhner⁽²⁾, Goodier⁽³⁾, 大久保⁽⁴⁾, Röver⁽⁵⁾らの報告がある。これらの研究はコイル中心線に荷重が作用する場合のいわゆる中心圧縮ばねに対するものである。一方弁ばねなどに対する両座面の平行を保持したいわゆる平行圧縮ばねの研究も高田⁽⁶⁾, 清水⁽⁷⁾, 下関⁽⁸⁾により報告され、さらにねじり率を考慮した厳密な解析も下関・早坂⁽⁹⁾により報告され、貴重な結果が得られている。またばねの振動に関する研究も盛んで、井上⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾, 沢登⁽¹²⁾による研究が報告されている。このように円形断面を有する円筒コイルばねの解析はかなり完全に解析されているが、コイルの断面形状が異形の場合の解析はほとんどなされておらず、Fuchs⁽¹³⁾による卵形断面ばねの簡易計算式が発表されている程度である。しかしこの Fuchs の式も弾性学に基づく理論的な裏付けはなく、十分な精度を有するものではない。近時機械部品の小形軽量化が進み、機能部品としてのばねも小形軽量化が要求されるようになり、従来の円形断面からより合理的な異形断面ばねへと開発が進みつつある。しかし異形断面ばねの応力解析は円形断面ばねのそれとまったく取扱いが異なり、従来の解析法により断面内応力を求めることは不可能であるが、前述のようにこれらに関する解析法はいまだ確立していない。

本報はこれらの現状にかんがみ、任意形状断面を有する円筒コイルばねの応力解析法を提案するものである。解析では基礎的問題として中心圧縮ばねを考え、断面内応力の計算では、まず真直棒のねじり応力、せん断荷重による応力を二次元弾性論により導き、Wahlの方法と同じく曲線棒の理論を導入して曲率の影響を導入する。この場合、応力の計算では棒断面が異形のため、通常の境界値問題の解法ではつりあい方程式と境界条件の両方を同時に満足させることは一般に困難となり、これらの問題に対しては通常等角写像法が用いられる。しかしこの方法では断面形状が複雑となると写像関数の決定が困難となり、さらに断面形状が変わるたびにそれぞれの解析が必要である。一方著者はフーリエ展開境界値平均法を提案し、種々の形状を有する膜、板、棒、固体の静力学、振動、波動、衝撃の問題を解析し⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁹⁾、さらにマイクロ波⁽²⁰⁾など二次元問題全般に本方法が適用できることを示した。本報では、この方法をばねの応力問題に拡張し、任意形状断面ばねの応力を求める一般式を誘導した。本報で得られた結果は解析の過程でばねの断面形状になんらの限定を設けていないので、数値計算の過程でばね断面外周上の座標値を入力するだけであらゆる断面形状のばねの応力値を求めることができる。

2. 解 析

2・1 断面に作用する合力 任意形状断面を有する円筒コイルばねに荷重 Q_0 が作用する場合を考え、断面内の重心に原点 O をとり、断面对称軸に x 軸を、それと垂直に y 軸を定める。円形断面以外のばねでは一般に製作誤差によりわずかな倒れが存在するので、倒れのない座標系を x', y' とすると、倒れのある断面の倒れ角 ε は図1のように表される。ピッチ角を α とすると、断面重心 O に作用する合せん断力は図1の

* 昭和59年10月16日 第62期全国大会講演会において論文講演として講演、原稿受付 昭和59年4月6日。

** 正員、群馬大学工学部(〒370 桐生市天神町1-5-1)。

x, y 軸の2方向に分解され、ばね内側が図のように下方に倒れている場合は

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= Q_0 \cos \alpha \sin \varepsilon \\ Q_y &= -Q_0 \cos \alpha \cos \varepsilon \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1 \cdot a)$$

この場合、ばねの内側が逆に倒れている場合は上式で ε を $-\varepsilon$ におきかえればよい。また断面に作用するねじりモーメント T_z は、コイル重心半径を R とすると

$$T_z = Q_0 R \cos \alpha \dots\dots\dots (1 \cdot b)$$

一方曲げモーメント M は

$$M = Q_0 R \sin \alpha \dots\dots\dots (1 \cdot c)$$

中心圧縮ばねの場合、これら三つの合力がばね素線に作用するが、断面が異形の場合は丸線(円形断面)のように初等材料力学によって断面内応力を正しく求めることはできない。そこで本報では応力値を二次元弾性論に基づき誘導することとする。

2・2 ねじりによるせん断応力 ねじりモーメント T_z を受ける任意形状断面棒を考え、断面重心に極座標 r, θ の原点を定めると(図1参照)、Saint-Venantのねじり問題の基礎方程式は⁽²¹⁾

$$\nabla^2 \phi = -2\omega G \dots\dots\dots (2)$$

ここに ∇^2 は二次元のラプラス演算子、 ϕ はねじり応力関数、 ω はねじり角、および G は横弾性係数である。式(2)の一般解を求め、棒断面に一軸以上の対称軸が存在する場合を考え、角度 θ を対称軸(以下基準軸と称する)からとると、式(2)の一般解は

$$\phi = \omega G b^2 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n (r/b)^n \cos n\theta - (1/2)(r/b)^2 \right] \dots\dots\dots (3)$$

ここに b は式を無次元化するために導入された代表長さであり、 A_n は積分定数である。境界条件はこの場合境界周上 Γ で

$$(\phi)_r = 0$$

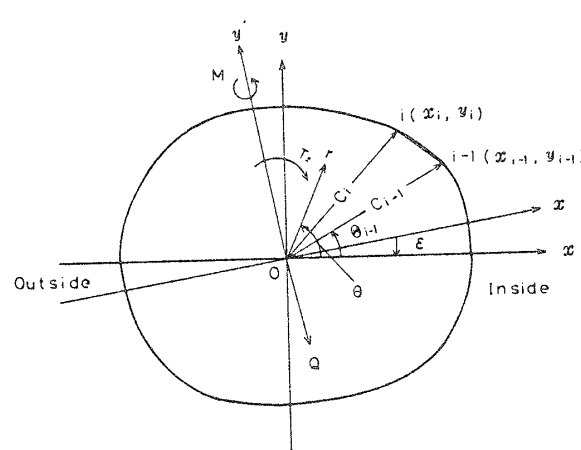


図1 倒れのある任意形状断面ばね素線

本報では任意形状断面境界を考えているので、式(3)を用いてこの境界条件式を直接満足させることは困難である。そこで本報では著者の提案しているフーリエ展開境界値平均法^{(14)~(19)}をこの問題の境界処理に適用する。すなわち任意形状境界に沿って式(3)にフーリエ展開を施すと、境界条件は近似的に次式のような二重フーリエ級数に展開される^{(14)~(19)}。

$$\omega G b^2 \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} S_{mn} A_n - F_m \right) \cos m\theta = 0 \dots\dots (4)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} S_{mn} &= \frac{2\varepsilon_n}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{C_i}{b} \right)^n \cos n\theta \cos m\theta d\theta \\ F_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{C_i}{b} \right)^2 \cos m\theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots (5)$$

上式で C_i は断面境界での極座標 r の値で、本報では任意断面境界を考えているので、 C_i は変数 θ の関数として表される。この場合 $C_i = C_i(\theta)$ の値は断面境界曲線の方程式より厳密に求められるが、これでは数値計算で C_i を定める式を必要とするので、本報では数値計算を簡単にするため断面境界の座標値 x_i, y_i を与えるのみで C_i を計算することとし(図1参照)、断面境界の x_{i-1}, y_{i-1} と x_i, y_i 間は直線で近似することとした(付録1)参照。式(4)で n, m の級数を $0, 1, 2, \dots, N$ すなわち $N+1$ 個とすると、未知係数 $A_0 \sim A_N$ を決定する方程式は

$$\begin{bmatrix} S_{00} & S_{01} & \dots & S_{0N} \\ S_{10} & & \vdots & \\ \vdots & & & \\ S_{N0} & \dots & \dots & S_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ \vdots \\ A_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \dots\dots (6)$$

式(6)より $A_0 \sim A_N$ が求められるので、ねじり応力関数 ϕ が決定され、それよりねじり角 ω を求め、断面内のせん断応力成分を求めると(付録2参照)、

$$\tau_{zx}^* = (T_z/b^3) \tau_{zx}^*, \tau_{zy}^* = (T_z/b^3) \tau_{zy}^* \dots\dots (7)$$

ここに

$$\begin{aligned} \tau_{zx}^* &= - \left[\sum_{n=1}^N n \eta^{n-1} A_n \sin(n-1)\theta \right. \\ &\quad \left. + \eta \sin \theta \right] / (2H) \\ \tau_{zy}^* &= - \left[\sum_{n=1}^N n \eta^{n-1} A_n \cos(n-1)\theta \right. \\ &\quad \left. - \eta \cos \theta \right] / (2H) \\ H &= \sum_{i=1}^I \left(\sum_{n=0}^N A_n M_{in} - f_i \right) \dots\dots (8) \end{aligned}$$

また I は断面境界の $\theta=0 \sim \pi$ 区間における分割数を表し、 M_{in} および f_i は(付録2)に示すとおりである。したがって合せん断応力 τ_n は無次元して次式のように表される。

表1 ねじりモーメント T_z を受けるだ円形断面棒の棒表面に沿う無次元せん断応力 $\tau^*(=a^3\tau_n/T_z)$ の値

θ deg.	a/e=1		a/e=2		a/e=3	
	Author	Exact	Author	Exact	Author	Exact
0	0.6436	0.6366	1.313	1.273	1.967	1.909
10	0.6434	0.6366	1.478	1.469	3.167	3.167
20	0.6402	0.6366	1.811	1.818	4.419	4.418
30	0.6341	0.6366	2.097	2.098	5.062	5.053
40	0.6336	0.6366	2.288	2.283	5.384	5.371
50	0.6376	0.6366	2.407	2.399	5.556	5.542
60	0.6412	0.6366	2.480	2.471	5.652	5.637
70	0.6412	0.6366	2.523	2.516	5.708	5.693
80	0.6386	0.6366	2.546	2.539	5.735	5.721
90	0.6372	0.6366	2.553	2.546	5.745	5.729

$$\tau_n^* = b^3 \tau_n / T_z = [(\tau_{zx}^*)^2 + (\tau_{zy}^*)^2]^{1/2} \dots\dots\dots (9)$$

単純ねじりのせん断応力の数値計算ではまず式(5)のフーリエ係数を計算するため、断面境界上の r 座標 c_i の座標値が必要であり、これを数値計算のデータとして代入し、任意の i 番めのデータと $i-1$ 番めのデータの間を直線とし、式(5)に数値積分を適用すると、フーリエ係数が決定され、ついで式(6)より定数 $A_0 \sim A_N$ が決定される。これらの値を式(8)に代入することにより、せん断応力 τ_{zx} , τ_{zy} および合せん断応力 τ_n が求められる。この場合、フーリエ係数の項数は級数の収束に応じて決定されるが、静力学の問題では収束が速く、6~8項程度で級数は十分に収束する。一例としてねじりモーメント T_z を受ける長軸 $2a$, 短軸 $2e$ のだ円形断面真直棒の単純ねじり問題を考え、だ円形中心に原点を定め、長軸の半分の長さ a を代表長さ(式中の b)にとり、断面境界を51分割し、 n, m を8項までとった場合の棒表面の無次元合せん断応力 $\tau^*(=a^3\tau_n/T_z)$ の値を表1に示す。この問題に対しては厳密解が与えられており⁽²¹⁾、その値も表中に併記した。表中の θ は長軸を基準として反時計方向にとられている。本解の結果と厳密解の結果は非常によく一致している。

2.3 せん断荷重による応力 ばね素線に倒れがある場合を考えると、荷重 Q_0 は x, y の2方向のせん断荷重に分離され、それぞれの成分 Q_x, Q_y は式(1-a)で与えられることになる。2方向にせん断力を受ける弾性棒の基礎方程式は弾性学に基づき次式のように表される⁽²¹⁾。

$$\nabla^2 \varphi = 0, \nabla^2 \varphi_1 = 0, \nabla^2 \varphi_2 = 0 \dots\dots\dots (10)$$

ここに $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ は応力関数である。まず φ を考えると、一般解は式(10)より

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_m (S_{mn}^1 B_{1n} + \bar{S}_{mn}^1 \bar{B}_{1n}) \cos m\theta &= \sum_{m=0}^{\infty} P_m^1 \cos m\theta \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (T_{mn}^1 B_{1n} + \bar{T}_{mn}^1 \bar{B}_{1n}) \sin m\theta &= \sum_{m=1}^{\infty} F_m^1 \sin m\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

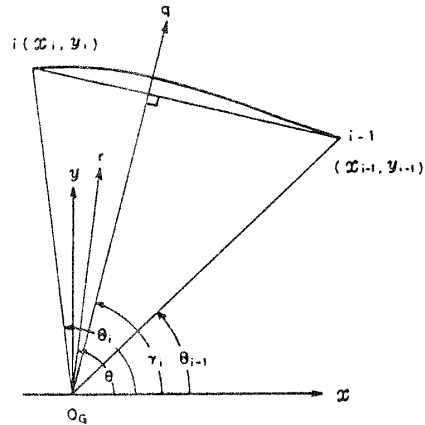


図2 任意形状断面ばね素線の微小境界の座標関係

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (\varepsilon_n \eta^n B_{1n} \cos n\theta + \eta^n \bar{B}_{1n} \sin n\theta) \dots (11)$$

ここに B_{1n}, \bar{B}_{1n} は積分定数、 $\eta = r/b, \varepsilon_n = 1/2 (n=0), \varepsilon_n = 1 (n \neq 0)$ であり、 b は代表長さである。 φ に対する境界条件は境界での法線を q, x, y 方向の方向余弦を n_x, n_y とすると、断面境界上で

$$\partial\varphi/\partial q = yn_x - xn_y \dots\dots\dots (12)$$

となる。本問では任意形状断面を考えているので、この場合も境界条件をただちに満足させることはできない。そこで本報では境界曲線を図2のように微小直線に分割し、 i 番めの境界線分の法線 q と基準軸 (x 軸) とのなす角 γ_i を用いて法線の方を定める。すなわち境界の微小線分内では φ の値は点 $i-1$ および i を結ぶ直線に沿って変化するが、法線と基準軸とのなす角 γ_i を一定と仮定する。このような仮定をおくと、境界の形状に無関係に次の変換式を得ることができる。

$$\frac{\partial\varphi}{\partial q} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} \cos(\theta - \gamma_i) - \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \sin(\theta - \gamma_i) \dots (13)$$

式(11)を式(13)に代入し、 $x = c_i \cos \theta, y = c_i \sin \theta$ として、さらに式(12)を用いると、 i 番めの境界の境界条件式は

$$\sum_{n=1}^{\infty} n \eta^{n-1} [B_{1n} \cos(n\theta - \theta + \gamma_i) + \bar{B}_{1n} \sin(n\theta - \theta + \gamma_i)] = C_i^* \sin(\theta - \gamma_i) \dots\dots\dots (14)$$

ここに $C_i^* = C_i/b$ であり、 C_i は i 番めの境界線分までの r 座標である。式(14)を境界に沿ってフーリエ展開し、全境界に拡張すると⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁸⁾

ここに $\varepsilon_m = 1/2 (m=0)$, $\varepsilon_m = 1 (m \neq 0)$ であり, また

$$\left. \begin{aligned} S_{mn}^1 &= (n/\pi) \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} (C_i^*)^{n-1} \cos[(n-1)\theta + \gamma_i] \cos m\theta d\theta \\ \bar{S}_{mn}^1 &= (n/\pi) \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} (C_i^*)^{n-1} \sin[(n-1)\theta + \gamma_i] \cos m\theta d\theta \\ T_{mn}^1 &= (n/\pi) \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} (C_i^*)^{n-1} \cos[(n-1)\theta + \gamma_i] \sin m\theta d\theta \\ \bar{T}_{mn}^1 &= (n/\pi) \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} (C_i^*)^{n-1} \sin[(n-1)\theta + \gamma_i] \sin m\theta d\theta \\ P_m^1 &= \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} C_i^* \sin(\theta - \gamma_i) \cos m\theta d\theta \\ F_m^1 &= \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} C_i^* \sin(\theta - \gamma_i) \sin m\theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

この場合も I は境界の分割数である。ばね断面には一般に製作の都合上対称軸が存在するので, 対称性を考慮すると, 式(15)の $P_m^1 = 0, \bar{S}_{mn}^1 = 0, \bar{T}_{mn}^1 = 0$ となり, $B_{1n} = 0$ となるのがわかる。したがって式(15)は $n, m = 1, 2, \dots, N$ ととると, 未知定数 $\bar{B}_{11} \sim \bar{B}_{1N}$ を決定する次の連立方程式を得ることができる。

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_{11} & \bar{T}_{12} & \dots & \bar{T}_{1N} \\ \bar{T}_{21} & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ \bar{T}_{N1} & \dots & \dots & \bar{T}_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_{11} \\ \bar{B}_{12} \\ \vdots \\ \bar{B}_{1N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ \vdots \\ F_N^1 \end{bmatrix} \dots (17)$$

式(17)より $\bar{B}_{11} \sim \bar{B}_{1N}$ が決定されるので, これを式(11)に代入すると応力関数 φ が決定される。すなわち

$$\varphi = \sum_{n=1}^N b^2 \eta^n \bar{B}_{1n} \sin n\theta \dots\dots\dots (18)$$

φ_1 についても式(10)の一般解は

$$\varphi_1 = \sum_{n=0}^{\infty} b^3 (B_{2n} \varepsilon_n \eta^n \cos n\theta + \bar{B}_{2n} \eta^n \sin n\theta) \dots (19)$$

で与えられ, 境界条件式は

$$\partial\varphi_1/\partial q = [(1+\nu)x^2 - \nu y^2] n_x \dots\dots\dots (20)$$

ここに ν はポアソン比を表す。式(19)を用いて前と同様にして座標変換を行い, フーリエ展開境界値平均法を適用すると, \bar{B}_{2n} は零となり, B_{2n} は次式より決定される。

$$\begin{bmatrix} T_{01}^2 & T_{02}^2 & \dots & T_{N-1,N}^2 \\ T_{11}^2 & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ T_{N-1,1}^2 & \dots & \dots & T_{N-1,N}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{21} \\ B_{22} \\ \vdots \\ B_{2N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0^2 \\ F_1^2 \\ \vdots \\ F_{N-1}^2 \end{bmatrix} \dots (21)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} T_{mn}^2 &= (2n/\pi) \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} (C_i^*)^{n-1} \cos[(n-1)\theta + \gamma_i] \cos m\theta d\theta \\ F_m^2 &= (2/\pi) \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} (C_i^*)^2 [(1+\nu)\cos^2 \theta - \nu \sin^2 \theta] \cos \gamma_i \cos m\theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (22)$$

したがって φ_1 は

ここに

$$\varphi_1 = \sum_{n=1}^N b^3 B_{2n} \eta^n \cos n\theta + C' \dots\dots\dots (23)$$

ここに C' は積分定数であるが, 応力計算では φ_1 の微分形が使用されるので, $C' = 0$ としてもよい。

一方 φ_2 についても同様にして

$$\varphi_2 = \sum_{n=0}^{\infty} b^3 (B_{3n} \varepsilon_n \eta^n \cos n\theta + \bar{B}_{3n} \eta^n \sin n\theta) \dots\dots\dots (24)$$

と書くことができる。この場合の境界条件は

$$\partial\varphi_2/\partial q = [(1+\nu)y^2 - \nu x^2] n_y \dots\dots\dots (25)$$

前と同様にして $B_{3n} = 0$ が得られ, \bar{B}_{3n} を決定する方程式は

$$\begin{bmatrix} \bar{T}_{11}^3 & \bar{T}_{12}^3 & \dots & \bar{T}_{1N}^3 \\ \bar{T}_{21}^3 & & \vdots & \\ \vdots & & \vdots & \\ \bar{T}_{N1}^3 & \dots & \dots & \bar{T}_{NN}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{B}_{31} \\ \bar{B}_{32} \\ \vdots \\ \bar{B}_{3N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^3 \\ F_2^3 \\ \vdots \\ F_N^3 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (26)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \bar{T}_{mn}^3 &= (2n/\pi) \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} (C_i^*)^{n-1} \sin[(n-1)\theta + \gamma_i] \sin m\theta d\theta \\ F_m^3 &= (2/\pi) \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} (C_i^*)^2 [(1+\nu)\sin^2 \theta - \nu \cos^2 \theta] \sin \gamma_i \sin m\theta d\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (27)$$

したがって

$$\varphi_2 = \sum_{n=1}^N b^3 \bar{B}_{3n} \eta^n \sin n\theta \dots\dots\dots (28)$$

以上により応力ポテンシャル φ, φ_1 および φ_2 が決定したので, これらを用いてせん断中心ならびに断面内のせん断応力を求めることができる。すなわちせん断中心は⁽²¹⁾

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \frac{I_y S_2 - I_{xy} S_1}{2(1+\nu)(I_x I_y - I_{xy}^2)} \\ y_0 &= -\frac{I_x S_1 - I_{xy} S_2}{2(1+\nu)(I_x I_y - I_{xy}^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

$$\left. \begin{aligned} J &= \int_A \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dA \\ S_1 &= \int_A \left[(1+\nu)x^2y - \nu y^3 + x \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right] dA \\ S_2 &= \int_A \left[\nu x^3 - (1+\nu)xy^2 + x \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - y \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \right] dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

また A は断面積, I_x, I_y はそれぞれ x 軸および y 軸に関する断面 2 次モーメントであり, I_{xy} は断面相乗モーメントである. 式(18), (23)および式(28)を式(30)に代入し, ねじりの場合と同様にして積分を実行すると, J, S_1 および S_2 は

$$J = b^4 J^*, S_1 = b^5 S_1^*, S_2 = b^5 S_2^* \dots\dots\dots (31)$$

ここに

$$\begin{aligned} J^* &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^l \bar{B}_{1n} \left[\left(\frac{\bar{a}_i}{b} \right)^{n+2} \frac{2}{n+2} (\sin n\theta_i - \sin n\theta_{i-1}) \right] + (1/2) (\bar{a}_i/b)^4 (\theta_i - \theta_{i-1}) \\ S_1^* &= \sum_{i=1}^l \frac{-2(1+\nu)}{15} \left(\frac{\bar{a}_i}{b} \right)^5 (\cos^3 \theta_i - \cos^3 \theta_{i-1}) - (2\nu/5) \sum_{i=1}^l (\bar{a}_i/b)^5 \left[(1/12) (\cos 3\theta_i - \cos 3\theta_{i-1}) \right. \\ &\quad \left. - (3/4) (\cos \theta_i - \cos \theta_{i-1}) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^l [2\bar{B}_{2n}/(n+2)] (\bar{a}_i/b)^{n+2} (\cos n\theta_i - \cos n\theta_{i-1}) \\ S_2^* &= \sum_{i=1}^l \left[\frac{2\nu}{5} \left(\frac{\bar{a}_i}{b} \right)^5 \left\{ \frac{1}{12} (\sin 3\theta_i - \sin 3\theta_{i-1}) + (3/4) (\sin \theta_i - \sin \theta_{i-1}) \right\} - \{2(1+\nu)/15\} (\bar{a}_i/b)^5 \right. \\ &\quad \left. \times (\sin^3 \theta_i - \sin^3 \theta_{i-1}) \right] + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^l [2\bar{B}_{3n}/(n+2)] (\bar{a}_i/b)^{n+2} (\sin n\theta_i - \sin n\theta_{i-1}) \end{aligned} \dots\dots\dots (32)$$

また \bar{a}_i は $\theta = 0.5(\theta_{i-1} + \theta_i)$ の点における r 座標の値である. 式(31)を式(29)に代入すると

$$x_0 = bx_0^*, y_0 = by_0^* \dots\dots\dots (33)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} x_0^* &= \frac{S_2^*(I_y^*/I_x^*) - S_1^*(I_{xy}^*/I_x^*)}{2(1+\nu)I_x^*[I_y^*/I_x^* - (I_{xy}^*/I_x^*)^2]} \\ y_0^* &= -\frac{S_1^* - (I_{xy}^*/I_x^*)S_2^*}{2(1+\nu)I_x^*[I_y^*/I_x^* - (I_{xy}^*/I_x^*)^2]} \\ I_x^* &= I_x/b^4, I_y^* = I_y/b^4, I_{xy}^* = I_{xy}/b^4 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (34)$$

式(34)の無次元断面 2 次モーメント I_x^*, I_y^* , および断面相乗モーメント I_{xy}^* は棒断面の座標値を与えると数値的に計算することができる ([付録 3] 参照). 本問で x 軸を断面对称軸に選べばもちろん I_{xy} は零となる. 一方ねじり率を ω' とおくと, 次の方程式が満足されなければならない.

$$G(\omega' J + k_x S_1 + k_y S_2) = 0 \dots\dots\dots (35)$$

ここに

$$k_x = \frac{Q_0}{b^4 E I_x^*} k_x^*, k_y = \frac{Q_0}{b^4 E I_x^*} k_y^* \dots\dots\dots (36)$$

$$k_x^* = \frac{Q_x/Q_0 - (I_{xy}^*/I_x^*)(Q_y/Q_0)}{I_y^*/I_x^* - (I_{xy}^*/I_x^*)^2}, k_y^* = \frac{(I_y^*/I_x^*)(Q_y/Q_0) - (I_{xy}^*/I_x^*)(Q_x/Q_0)}{I_y^*/I_x^* - (I_{xy}^*/I_x^*)^2} \dots\dots\dots (37)$$

式中 E は縦弾性係数を表す. 式(36)を式(35)に代入すると, ねじり率 ω' が求められる. すなわち

$$\omega' = [Q_0 / (Gb^3)] \omega^* \dots\dots\dots (38)$$

ここに

$$\omega^* = -[k_x^* S_1^* + k_y^* S_2^*] / [(E/G) I_x^* J^*] \dots\dots\dots (39)$$

断面内のせん断応力 τ_{xx}'' および τ_{yy}'' は

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xx}'' &= G\omega' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) + Gk_y \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + Gk_x \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} - (1+\nu)x^2 + \nu y^2 \right] \\ \tau_{yy}'' &= G\omega' \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) + Gk_x \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + Gk_y \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} - (1+\nu)y^2 + \nu x^2 \right] \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (40)$$

式(40)を極座標変換し, 代表荷重を Q_0 とし, 式(36), (38)を用いて整理すると

$$\begin{aligned} \tau''_{zx} &= \frac{Q_0 \omega^*}{b^3} \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - r \sin \theta \right) + \frac{G}{E} \frac{Q_0}{I_x} k_y^* \left(\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \right) + \frac{G}{E} \frac{Q_0}{I_x} k_x^* \\ &\quad \times \left[\frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} - (1+\nu)r^2 \cos^2 \theta + \nu r^2 \sin^2 \theta \right] \\ \tau''_{zy} &= \frac{Q_0}{b^3} \omega^* \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + r \cos \theta \right) + \frac{G}{E} \frac{Q_0 k_x^*}{I_x} \left(\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right) + \frac{G}{E} \frac{Q_0 k_y^*}{I_x} \\ &\quad \times \left[\frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} - (1+\nu)r^2 \sin^2 \theta + \nu r^2 \cos^2 \theta \right] \end{aligned} \dots\dots\dots(41)$$

式(18), (23)および(28)を式(41)に代入し, 無次元量を用いて整理すると

$$\tau''_{zx} = (Q_0/b^2) \bar{\tau}_{zx}, \tau''_{zy} = (Q_0/b^2) \bar{\tau}_{zy} \dots\dots\dots(42)$$

ここに

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{zx} &= -\eta \omega^* \sin \theta + \{k_x^*/(\delta I_x^*)\} \{-(1+\nu)\eta^2 \cos^2 \theta + \nu \eta^2 \sin^2 \theta\} + \sum_{n=1}^N n \eta^{n-1} [\omega^* \bar{B}_{1n} \sin(n-1)\theta \\ &\quad + \{k_x^*/(\delta I_x^*)\} B_{2n} \cos(n-1)\theta + \{k_y^*/(\delta I_x^*)\} \bar{B}_{3n} \sin(n-1)\theta] \\ \bar{\tau}_{zy} &= \eta \omega^* \cos \theta + \{k_y^*/(\delta I_x^*)\} \{-(1+\nu)\eta^2 \sin^2 \theta + \nu \eta^2 \cos^2 \theta\} + \sum_{n=1}^N n \eta^{n-1} [\omega^* \bar{B}_{1n} \cos(n-1)\theta \\ &\quad - \{k_x^*/(\delta I_x^*)\} B_{2n} \sin(n-1)\theta + \{k_y^*/(\delta I_x^*)\} \bar{B}_{3n} \cos(n-1)\theta] \end{aligned} \dots\dots\dots(43)$$

また $\delta = E/G$ である。2方向せん断荷重 Q_x および Q_y を受ける任意形状断面棒のせん断応力分布は式(42)より計算できる。

この問題の数値計算の方法は単純ねじりの場合と同様であるが, せん断の問題では境界での法線角度 γ_i が必要である。この角度 γ_i は正確には境界曲線の方程式を適用して求めるべきであるが⁽¹⁴⁾⁻⁽¹⁹⁾, 断面境界の分割数を多くとれば, 二点を結ぶ直線より求めても実用上はさしつかえないと思われる (〔付録1〕参照)。一例として集中荷重 $Q_y = Q_0, Q_x = 0$ を受ける横寸法 $2a$, 縦寸法 $2e$ の円形断面棒を考え, 荷重が縦軸上にあるとし, 横軸を x 軸とした場合の棒表面に沿う無次元せん断応力 $\tau^* = (a^2/Q_0)(\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2)^{1/2}$ の値を表2に示す。この場合も代表長さは a としてあり, 角度 θ は横軸より反時計まわりにとられている。本問の場合も厳密解が求められており⁽²¹⁾, 表中にその値をも併記した。本解の結果と厳密解の結果は非常によく一致していることがわかる。

2・4 曲げによる垂直応力 本報では棒断面が ε だけ傾いている場合を考えているので, 曲げモーメントによる垂直応力の計算ではこの倒れを考慮することとする(図1参照)。式(1・c)で与えられる曲げモーメントは y' 軸まわりに回転する曲げモーメントであるから, x' 軸より ε だけ回転した x 軸および y 軸に関する曲げモーメントはそれぞれ $M \cos \varepsilon$ および $M \sin \varepsilon$ となる。したがってばね素線の軸方向断面内垂直応力はそれぞれ $\sigma_1 = (Mr \cos \varepsilon \cos \theta)/I_x, \sigma_2 = (Mr \sin \varepsilon \sin \theta)/I_x$ となる。これに式(1・c)を代入し, 力の方向を考慮すると

$$\sigma_z = (Q_0/b^2) \sigma_z^* \dots\dots\dots(44)$$

ここに

$$\begin{aligned} \sigma_z^* &= (R/b)(r/b)[(\cos \varepsilon \cos \theta)/I_x^* \\ &\quad + (\sin \varepsilon \sin \theta)/I_x^*] \sin \alpha \dots\dots\dots(45) \end{aligned}$$

2・5 ばねの合応力および主応力 上記の解析は真直棒にねじり, せん断および曲げが作用する場合の断面内応力を与える式である。しかし, ばねには曲率が存在するので, 上記の応力を直接合成しても正しい結果は求められない。この問題に対し, Wahl⁽¹⁾は曲線棒の理論により曲率の影響を導入している。しかし Wahl は丸線ばねを考えたため, ばねの内側と外側の二点のみの応力を与える方法を示したのみで, 断面全領域に適用できる解を与えていない。異形断面の場合は断面外周に沿う応力がすべて必要であり, とくに等強度ばねの設計ではこのことが不可欠となる。本報では曲線棒の理論を適用して, 曲率の影響を導入し, ばね断面全領域に適用できる一般式を誘導する。

図3のようにコイル重心までの半径を R とし, 重心からねじり中心 O' までのずれを ζ とおく。図より微小断面積および座標 x は

$$dA = r dr d\theta, x = r \cos \theta - \zeta \dots\dots\dots(46)$$

となり, また材料力学より

$$\int [x/(R-\zeta-x)] dA = 0 \dots\dots\dots(47)$$

式(46)を(47)に代入し, ζ を求めると

$$\begin{aligned} \zeta &= \left(\iint \frac{r^2 \cos \theta}{R-r \cos \theta} dr d\theta \right) \\ &\quad / \left(\iint \frac{r}{R-r \cos \theta} dr d\theta \right) \dots\dots\dots(48) \end{aligned}$$

前述の記号を用い、かつ断面が x 軸に関して対称であることを考慮すると

$$\frac{\xi}{b} = \left(\int_0^\pi \int_0^{c(\theta)} \frac{\eta^2 \cos \theta}{R/b - \eta \cos \theta} d\eta d\theta \right) / \left(\int_0^\pi \int_0^{c(\theta)} \frac{\eta}{R/b - \eta \cos \theta} d\eta d\theta \right) \dots\dots\dots (49)$$

式(49)内の二重積分は断面形状が複雑な場合はただちに求めることが困難であるが、数値積分法を適用するとその値を容易に求めることができる。一方断面内のねじりによるせん断応力 S は⁽¹⁾

$$S = S_a \sqrt{x^2 + y^2} / x \dots\dots\dots (50)$$

ここに

$$S_a = [xG / \{(R - \xi - x) d\theta'\}] da \dots\dots\dots (51)$$

また da は微小角 $d\theta'$ で囲れる微小素片のねじれ角であり、断面2次極モーメントを I_p とすると、 $da = T_z R d\theta' / (GI_p)$ となる。この関係を式(51)に代入し、極座標表示すると

$$S_a = \frac{T_z r}{I_p} \frac{\cos \theta - (\xi/b)(b/r)}{1 - (r/b)(b/R)\cos \theta} \dots\dots\dots (52)$$

式(52)を(50)に代入して整理すると

$$S = (T_z r / I_p) \kappa \dots\dots\dots (53)$$

ここに

$$\kappa = \left[\frac{\cos \theta - (\xi/b)(b/r)}{1 - (r/b)(b/R)\cos \theta} \right] \times \left[\frac{\{(r/b)^2 - 2(r/b)(\xi/b)\cos \theta + (\xi/b)^2\}^{1/2}}{(r/b)\cos \theta - \xi/b} \right] \dots\dots\dots (54)$$

式(53)で $T_z r / I_p$ は真直棒の単純ねじり応力である。したがってこの代わりに本解で求めた正確な真直棒のねじり応力の式 $\tau_n = T_z r_n^* / b^3$ [式(9)参照]を代入すると、曲率の影響を考慮したばね断面のねじり応力は $S = (T_z r_n^* / b^3) \kappa$ となる。すなわち式(54)で表される κ はばね素線の曲率の影響を表す補正係数であることがわかる。このことよりばねのねじりによるせん断応力 τ'_{zx}, τ'_{zy} は式(7)に κ を乗じて

$$\tau'_{zx} = (T_z / b^3) \tau''_{zx} \kappa, \tau'_{zy} = (T_z / b^3) \tau''_{zy} \kappa \dots\dots (55)$$

以上よりばね断面に作用するせん断応力はねじりによるせん断応力 τ'_{zx}, τ'_{zy} ならびにせん断荷重による応力 τ''_{zx}, τ''_{zy} を足し合わせるにより次式のように求められる。すなわち式(1・a)を用いて

$$\tau_{zx} = \tau'_{zx} + \tau''_{zx} = (Q_0 / b^2) \bar{\tau}''_{zx}$$

$$\tau_{zy} = \tau'_{zy} + \tau''_{zy} = (Q_0 / b^2) \bar{\tau}''_{zy} \dots\dots\dots (56)$$

ここに無次元応力は力の方向を考慮して(図1参照)、

$$\bar{\tau}''_{zx} = -(R/b) \tau''_{zx} \kappa \cos \alpha + \bar{\tau}_{zx}$$

$$\bar{\tau}''_{zy} = -(R/b) \tau''_{zy} \kappa \cos \alpha + \bar{\tau}_{zy} \dots\dots\dots (57)$$

一方主せん断応力は式(56)と曲げ応力[式(44)]を合成して次式のように表される。

$$\tau_p = (Q_0 / b^2) \tau_p^* \dots\dots\dots (58)$$

ここに

$$\tau_p^* = [(1/4)(\sigma_z^*)^2 + (\bar{\tau}''_{zx})^2 + (\bar{\tau}''_{zy})^2]^{1/2} \dots\dots (59)$$

式(54)の補正係数の誘導では、ばね断面の倒れを考慮すると、ねじり中心は断面对称軸(x 軸)からずれることになり、この場合の解析は極めて複雑となる。しかし一般に断面の倒れは製作誤差に基づくものであまり大きくはならず、またあまり倒れが大きいばねでは異形断面とする意味が失われることになる。したがって

表2 せん断応力 Q_0 を受けるだ円形断面棒の棒表面に沿うせん断応力 $\tau^* = (a^2 / Q_0) \tau_n$ の本解と厳密解との比較

θ deg.	a/e=0.5		a/e=1		a/e=2	
	Author	Exact	Author	Exact	Author	Exact
0	0.2096	0.2071	0.3964	0.3918	0.7132	0.6996
10	0.2081	0.2057	0.3904	0.3858	0.7615	0.7613
20	0.2032	0.2013	0.3703	0.3681	0.8036	0.8076
30	0.1940	0.1932	0.3390	0.3393	0.7542	0.7545
40	0.1797	0.1800	0.2980	0.3001	0.6426	0.6420
50	0.1584	0.1594	0.2494	0.2518	0.5098	0.5100
60	0.1279	0.1290	0.1944	0.1959	0.3758	0.3767
70	0.0876	0.0871	0.1338	0.1339	0.2465	0.2474
80	0.0417	0.0397	0.0683	0.0680	0.1219	0.1225
90	0.0021	0	0	0	0.0008	0

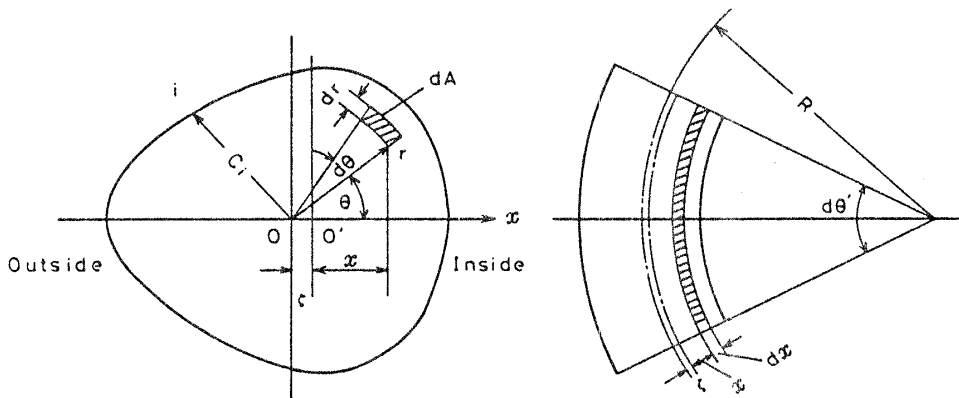


図3 コイルばねの曲率とねじり中心の関係

本報では補正係数 κ の誘導の過程では断面の倒れの影響を無視し、ねじり中心は断面对称軸上にあるものとして解析を行っている。すなわち式(54)の κ は断面の倒れがあまり大きい場合は適用できなくなるので使用上の注意が必要である。

本解の適用例の一例として円形断面ばねの結果を求め、Wahl⁽¹⁾の結果と比較したものを表3に示す。表中 b はコイル素線半径である。本解の結果はWahlの結果とよく一致していることがわかる。

本報で与えたばねの計算式はばね断面の対称性を考慮して解析されたもので、 θ の範囲は $0 \sim \pi$ 区間で成立する。一方 $\pi < \theta < 2\pi$ の範囲では、これらの式で、ねじり応力の計算では $\bar{\theta} = \theta - 2\pi$ 、せん断応力の計算では $\bar{\theta} = \theta - 2\pi$ また曲げ応力の計算では $\bar{\theta} = \theta$ として前式の θ の代わりに $\bar{\theta}$ を代入すると $\pi < \theta \leq 2\pi$ の範囲の結果が求められる。

なお本報の具体的適用法ならびに等強度ばねの開発については第2報で詳述する。

3. 結 言

本報は任意形状断面を有する円筒コイルばねの応力解析法を提案したものであり、その内容を要約すると次のようである。

(1) 任意形状断面を有する真直棒のねじり、せん断、および曲げの応力を弾性学の基礎式に基づき誘導した。すなわち解析では、基礎方程式の厳密解を適用し、境界条件はフーリエ展開境界値平均法により満足させ、ばね素線の断面境界の座標値をデータとして導入するだけで、あらゆる断面形状のばねの応力値が求められる一般式を示した。

(2) 本解の精度を検討するため、単純ねじりを受ける円形断面真直棒、せん断を受ける円形断面真直棒のせん断応力を計算し、厳密解との比較検討を行ったところ、本解の結果と厳密解は非常によく一致した。また円形断面ばねに本解のばね理論の結果を適用し、Wahlの結果と比較したところ両結果は非常によく一致することがわかった。

本報の遂行にあたり種々のご協力をいただいた群馬大学工学部 井開重男技官に厚く謝意を表す。

〔付録 1〕 断面重心、境界までの半径 C_i および法線角度の計算法 数値計算では断面内の任意の一点に原点を定め、対称軸を x 軸とし、それと垂直に y 軸をとり、断面外周上の直交座標の値をデータで入れるものとする。この場合、任意の点 $i-1$ と i の座標値を $(\bar{x}_{i-1}, \bar{y}_{i-1})$ および (\bar{x}_i, \bar{y}_i) で表し、 $i-1$ 点と i 点の二点を直線で近似すると (図2参照)。

$$\bar{y}_i = a_i \bar{x}_i + b_i, \bar{y}_{i-1} = a_i \bar{x}_{i-1} + b_i \dots\dots\dots (60)$$

式(60)より

$$\left. \begin{aligned} a_i &= \frac{\bar{y}_i/b - \bar{y}_{i-1}/b}{\bar{x}_i/b - \bar{x}_{i-1}/b} \\ \frac{b_i}{b} &= \frac{(\bar{y}_i/b)(\bar{x}_{i-1}/b) - (\bar{y}_{i-1}/b)(\bar{x}_i/b)}{\bar{x}_i/b - \bar{x}_{i-1}/b} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (61)$$

ここに b は式を無次元化するための代表長さである。一方原点から境界までの半径 \bar{C}_i は $\bar{C}_i \cos \theta = \bar{x}_i, \bar{C}_i \sin \theta = \bar{y}_i$ より

$$\frac{\bar{C}_i}{b} = \frac{-(b_i/b) \cos \theta}{(a_i \cos \theta - \sin \theta) \cos \theta} \dots\dots\dots (62)$$

となり、 i 番めの境界を通る法線 q と基準軸 (x 軸) とのなす角は

$$\left. \begin{aligned} \gamma_i &= \pi/2 - \tan^{-1}|a_i| \quad (a_i < 0) \\ \gamma_i &= \pi/2 \quad (a_i = 0) \\ \gamma_i &= \pi/2 + \tan^{-1}(a_i) \quad (a_i > 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (63)$$

一方任意の i 番めの点における角度を Θ_i とすると (図2参照)、この角度は

$$\left. \begin{aligned} \Theta_i &= \tan^{-1}[(y_i/b)/(x_i/b)] \quad (y_i/x_i > 0) \\ \Theta_i &= \pi - \tan^{-1}[(y_i/b)/(x_i/b)] \quad (y_i/x_i < 0) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (64)$$

ばね断面が x 軸に関して対称とすると、重心は x 軸上に存在し、任意に定めた原点からのずれ x_0 は $x_0 = \int_A x dA/A$ となり、 $\theta = 0 \sim \pi$ の間の境界を I 分割すると断面積 A は近似的に次式で表される。

$$A = \int dA = 2 \int_0^\pi \int_0^{\bar{C}_i} r dr d\theta = \sum_{i=1}^I \bar{C}_i^2 (\Theta_i - \Theta_{i-1})$$

同様にして

$$\begin{aligned} \int_A x dA &= 2 \int_0^\pi \int_0^{\bar{C}_i} r \cos \theta r dr d\theta \\ &= (2/3) \sum_{i=1}^I \bar{C}_i^3 (\sin \Theta_i - \sin \Theta_{i-1}) \end{aligned}$$

したがって

表3 素線半径 b の円形断面ばねの無次元主せん断応力 $\tau_p^* (= b^2 \tau_p / Q_0)$ の値 ($\alpha = 0, \epsilon = 0$)

R/b	Inside ($\theta = 0^\circ$)		Outside ($\theta = 180^\circ$)	
	Author	Wahl [1]	Author	Wahl [1]
4	3.567	3.574	1.786	1.773
5	4.167	4.171	2.407	2.393
6	4.781	4.784	3.033	3.019
7	5.403	5.404	3.662	3.647
8	6.029	6.030	4.293	4.277
9	6.659	6.658	4.925	4.908
10	7.290	7.288	5.557	5.540
11	7.922	7.919	6.191	6.173
12	8.555	8.552	6.826	6.807
15	10.459	10.452	8.732	8.710

$$\frac{x_G}{b} = \frac{(2/3) \sum_{i=1}^I (\bar{C}_i/b)^3 (\sin \theta_i - \sin \theta_{i-1})}{\sum_{i=1}^I (\bar{C}_i/b)^2 (\theta_i - \theta_{i-1})} \dots (65)$$

座標原点を任意に定め (\bar{x}_i, \bar{y}_i) を与えると, 原点から断面境界までの r 座標 \bar{C}_i が式(62)より決定されるので, これを式(65)に代入すると, 重心の位置が決定される. 新たに重心を原点とした x, y 座標 (x_i, y_i) は $x_i = \bar{x}_i - x_G, y_i = \bar{y}_i$ となるので, これを用いると式(62), (63)より重心から境界までの r 座標 C_i および法線角度 γ_i が決定されれることになる.

【付録2】 ねじり応力の誘導法 ねじり応力関数とねじりモーメントの関係は

$$T_z = 2 \int_A \phi dA \dots (66)$$

である. 断面境界を I 個の微小線分に分割し, 任意の i 番めの微小境界上で $\theta = (\theta_{i-1} + \theta_i)/2$ の境界までの r の値 C_i を一定と仮定し, これを \bar{a}_i とおくと, 式(7)の積分は近似的に

$$T_z = 2 \sum_{i=1}^I \int_0^{\bar{a}_i} \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \phi r dr d\theta \dots (67)$$

式(3)を式(67)に代入し, 積分を実行すると, ねじりモーメントは

$$T_z = 2b^4 \omega G \left(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^I A_n M_{in} - \sum_{i=1}^I f_i \right) \dots (68)$$

ここに

$$\begin{aligned} M_{i0} &= (1/2)(\bar{a}_i/b)^2 (\theta_i - \theta_{i-1}) \\ M_{in} &= 2 \left(\frac{\bar{a}_i}{b} \right)^{n+2} \frac{1}{n(n+2)} (\sin n\theta_i - \sin n\theta_{i-1}) \\ &\quad (n \geq 1) \\ f_i &= (1/4)(\bar{a}_i/b)^4 (\theta_i - \theta_{i-1}) \end{aligned} \dots (69)$$

式(68)より ω が求められ, ねじり応力関数は外力トルク T_z を用いて表される. すなわち

$$\phi = \{ T_z / (2b^2 H) \} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n A_n \eta^n \cos n\theta - 0.5 \eta^2 \right) \dots (70)$$

ここに $\eta = r/b$, 一方棒断面内のせん断応力成分は

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial r} \sin \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \cos \theta \\ \tau_{zy} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} \cos \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \sin \theta \end{aligned} \right\} (71)$$

式(70)を(71)に代入し, 無次元化すると式(7)が求められる.

【付録3】 断面2次モーメントおよび断面相乗モ

ーメントの計算法 断面2次モーメントを I_x, I_y および断面相乗モーメントを I_{xy} とすると, これらは【付録1】の C_i および θ_i を用いて表すことができる. すなわち

$$\begin{aligned} I_x &= \int y^2 dA = 2 \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \int_0^{C_i} r^2 \sin^2 \theta r dr d\theta \\ I_y &= \int x^2 dA = 2 \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \int_0^{C_i} r^2 \cos^2 \theta r dr d\theta \\ I_{xy} &= \int xy dA = 2 \sum_{i=1}^I \int_{\theta_{i-1}}^{\theta_i} \int_0^{C_i} r^2 \cos \theta \sin \theta r dr d\theta \end{aligned} \dots (72)$$

式(72)より次式が得られる.

$$\begin{aligned} I_x^* &= I_x/b^4 = \sum_{i=1}^I (0.5 C_i^4/b^4) [-0.25(\sin 2\theta_i - \sin 2\theta_{i-1}) + 0.5(\theta_i - \theta_{i-1})] \\ I_y^* &= I_y/b^4 = \sum_{i=1}^I (0.5 C_i^4/b^4) [0.25(\sin 2\theta_i - \sin 2\theta_{i-1}) + 0.5(\theta_i - \theta_{i-1})] \\ I_{xy}^* &= I_{xy}/b^4 = \sum_{i=1}^I (0.25 C_i^4/b^4) (\sin^2 \theta_i - \sin^2 \theta_{i-1}) \end{aligned} \dots (73)$$

文 献

- (1) Wahl, A. M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 51 (1929), 185.
- (2) Göhmer, O., *Ing. Arch.*, 1 (1929), 619.
- (3) Goodier, J. N., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 25 (1958), 466.
- (4) Okubo, H., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 20 (1953), 273.
- (5) Röver, A., *VDI-Z*, 57 (1913), 1906.
- (6) Takata, M., *Proc. 7th Jpn. Nat. Congr. Appl. Mech.*, 1957 (1958), 365.
- (7) 清水・ほか2名, 機論, 27-179 (昭35), 1119.
- (8) 下関・ほか3名, 機論, 45-396 (昭53), 901.
- (9) 下関・早坂, 機論, 48-435, C (昭57), 1774.
- (10) 井上・吉永, 機論, 27-179 (昭36), 1130.
- (11) 清水・ほか2名, 機論, 27-179 (昭36), 1138.
- (12) 沢登・福島, 機論, 49-439, C (昭58), 422.
- (13) Fuchs, H. O., *Product Eng.*, 27 (1969), 86.
- (14) Nagaya, K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 46-3 (1979), 667.
- (15) Nagaya, K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 47-3 (1980), 620.
- (16) Nagaya, K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 49-1 (1982), 157.
- (17) Nagaya, K., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 50-4 (1983), 757.
- (18) 長屋, 機論, 47-420, C (昭56), 1000.
- (19) 長屋, 機論, 49-446, C (昭58), 1831.
- (20) Laura, P. A., ほか2名, *IEEE, Trans. Microwave Theory Tech.*, MTT-28 (1980), 568.
- (21) 例えば, 平, 現代弾性力学, (昭55), 99, オーム社.

討 論

〔質問〕 沢 俊行 (山梨大学工学部)
円筒コイルばねの応力解析法を示された著者の研究に敬意を表す。

(1) 断面境界の分割数は具体的にどのように決められるのか。分割数を多くすれば精度は上がるのか。

(2) 断面に角部がある場合、あるいは複連結領域の場合の取扱いについてお教え願いたい。

〔回答〕 (1) 断面境界の分割数は数字的には多くとればとるほど精度が向上するはずであるが、実際の数値計算ではあまり分割数を大とすると数値計算誤差が累積されるので、分割による収束を見ながら分割数を決定することになる。本報の表1および表2の値

は $0 \sim \pi$ の区間の断面の分割数を 51 とした場合の結果である。

(2) 断面に角部がある場合は角部を分割点のひとつに取ることであとは曲線の場合と同様にして取扱うことができる(第2報で詳述している)。しかし角部の応力は解析上その点は特異点となるので求められなくなる。

複連結の問題は基礎方程式の解の選択が異なり、また内周境界の処理が必要となるが、取扱い方法は本報の場合と同様である。方法の詳細については著者の前報をご参照いただければ幸いである⁽¹⁷⁾。