

回転するロボットアームの障害物への衝突 および急停止における非定常応答*

神 宮 利 夫*¹

Transient Response of One-Link Robotic Arm Striking a Rigid Wall

Toshio JINGU

This paper describes the transient response of a robotic arm which rebounds from a wall or is interrupted by the wall, after the free end of the arm comprising a beam attached to a hub gyrating about an axis, strikes the surface of a rigid wall. Two integro-differential equations are produced to use Hamilton's principle, providing the variational method upon which the finite-element weak form is built. The flexure energy of the beam is derived by using the Bernoulli-Euler beam theory. The kinetic energy caused by the moment of inertia of the hub is also taken into account. The finite-element method is used to discretize the equations of motion. The results of simulation are compared to time histories of bending strain measured by a strain gage. The variations of bending strain consist of the basic frequency mode and other frequency modes. The time histories of the simulated bending strain is in agreement with that from experiment, except in high-frequency modes.

Key Words: Computational Mechanics, Robotic Arm, Rigid Wall, Rebound, Interruption, Transient Response, Hamilton's Principle, Finite-Element Method

1. 緒 言

マニピュレータで構成される産業用ロボットの動作は電気系、情報制御系および機械系が連動して行われる。ロボットアームの高速位置決め⁽¹⁾⁽²⁾の高精度化や作業効率の向上のための制御アルゴリズムのソフトウェアサーボ⁽³⁾が効果的である。高速制御においては機械系の運動部の慣性を小さくすることが必要であり、軽量化が指向される。軽量化はアームの剛性を低下させ、振動の発生の原因になる。また機械系の運動部分には摩擦と間げきという避けられない問題が存在する。摩擦は振動を低減させるが動作を鈍化させる。間げきはその逆の作用をする。この機械系が含む問題はソフトウェアサーボによる制御の限界を越えている。フレキシブル・ロボットアームの振動特性とその制御方式に関する研究⁽⁴⁾が行われている。最近ではフレキシブル・アーム自体の振動特性に重点を置いた1リンク⁽⁵⁾⁽⁶⁾および2リンク⁽⁴⁾⁽⁷⁾のアームの振動応答が研究されている。また回転するハブに取付けられた1リンクのフレキシブル・アームの先端に重量物体が衝突し、ハブと回転軸の間の粘性摩擦を考慮してアーム自体の

振動応答⁽⁸⁾の問題が研究されている。片持ばりや単純支持ばりのような端部を固定し、はりの他端あるいは中央部に球状物体⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾や円柱物体⁽¹¹⁾⁽¹²⁾が衝突するときのはりの非定常応答の問題が解析的にまた有限要素法によって研究されている。本研究は回転するハブに取付けられたはり状のアームの先端が剛体壁に衝突し、反発する場合と衝突後停止するときのアームの非定常応答の問題を有限要素法によってシミュレーションし、実験によって検証する。本問題ははり状のアーム自体の慣性の変化が非定常応答の原因であり、ロボットアームの高速位置決めや、建設機械のショベルローダの掘削におけるアームの動作の力学的挙動と同じである。

2. 運動方程式の誘導

回転するハブに取付けられた1リンクのはり状のアームが回転軸を中心に旋回し、その先端が剛体壁に衝突し、反発する場合と衝突後停止する場合のはり状アームの非定常応答を解析する。アームの運動エネルギー、ハブの運動エネルギーおよびはりのたわみエネルギーを解析し、ハミルトンの原理を適用して運動方程式を誘導する。図1(a)に示すように回転するハブに取付けられたアームは自然落下の状態で回転軸を中心

* 原稿受付 平成6年6月16日。

¹ 正員, 群馬大学工学部 (☎ 376 桐生市天神町 1-5-1)。

に旋回してアームの先端が剛体壁に衝突する。衝突後アームの先端がはね上がる場合 [図1(b)] と、衝突後停止する場合 [図1(c)] である。アームが反発すると位置エネルギーをもつが、反発直後のアームの挙動に注目するので位置のエネルギーは考慮しない。鉛直平面内ではりは振動するが、振幅が小さいのでこのような場合の位置のエネルギーも考慮しない。図2に示すようにアームにはたわみが生ずると同時に剛体的な回転 $\theta(t)$ も存在する。アームの軸方向の長さは横断面の大きさに比べて十分大きい場合であるので、たわみエネルギーの解析には Bernoulli-Euler のはりの曲げ理論を用いる。実験にはアームの先端に衝撃受部材を取付けるためにアームは一樣断面ではない。このような実験と比較するために運動方程式の解析は有限要素法によって行う。

アームの運動エネルギー U_1 とハブの運動エネルギー U_2 およびアームのひずみエネルギー V が関係し、ハミルトンの原理を用いて表すと

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (U_1 + U_2 - V) dt = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

t は時間に関する項であり、 δ は変分を表す。アームの運動エネルギー U_1 は

$$U_1 = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \{ (a+x)\dot{\theta} + \dot{w} \}^2 dx \quad \dots\dots\dots (2)$$

ρ はアームの質量、 A は横断面積、 l は長さ、 θ はハブの回転角、 w はアームのたわみを表す。 $\dot{\theta} = d\theta/dt$, $\dot{w} = dw/dt$ である。ハブの運動エネルギー U_2 は

$$U_2 = \frac{1}{2} I_h (\dot{\theta})^2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

I_h はハブの慣性モーメント、 $\dot{\theta}$ はハブの回転角速度である。アームのひずみエネルギー V は

$$V = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx \quad \dots\dots\dots (4)$$

E はアームの縦弾性係数、 I は断面二次モーメントである。式(2), (3), (4)を式(1)に代入すると次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \int_0^l \left\{ (a+x)^2 \rho A \frac{d^2 \theta}{dt^2} + (a+x) \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} \right\} dx \\ + I_h \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0 \\ \int_0^l \left\{ (a+x) \rho A \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} \right\} dx \\ + \int_0^l EI \frac{d^4 w}{dx^4} dx = 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(5)の第1式において $d^2 \theta / dt^2$ は dx に関する積分には関係しないから

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = - \frac{\int_0^l (a+x) \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} dx}{\left\{ \int_0^l (a+x)^2 \rho A dx + I_h \right\}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

上式を式(5)の第2式に代入すると次式の運動方程式が得られる。

$$\begin{aligned} - \frac{\int_0^l (a+x) \rho A dx}{\left\{ \int_0^l (a+x)^2 \rho A dx + I_h \right\}} \int_0^l (a+x) \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} dx \\ + \int_0^l \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} dx + \int_0^l EI \frac{d^4 w}{dx^4} dx = 0 \quad \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

式(7)における

$$\int_0^l (a+x) \rho A dx \text{ と } \int_0^l (a+x)^2 \rho A dx$$

はアームの材質と形状が与えられればあらかじめ計算できる。

3. 有限要素法による離散化

図3に示すようにアームを分割する。式(7)における

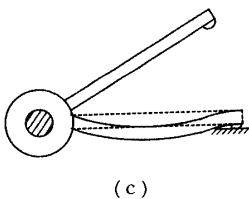
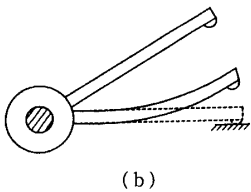
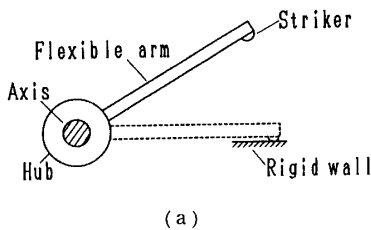


図1 アームの剛体壁への衝突後の反発および停止

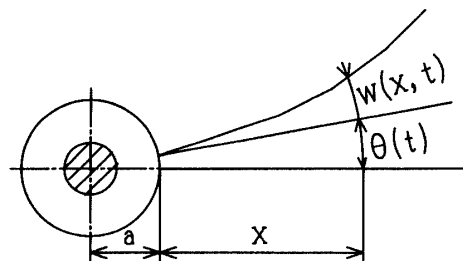


図2 アームの回転運動とたわみ

$$\int_0^l (a+x)\rho A \frac{d^2 w}{dt^2} dx$$

を次のように離散化する。

$$\begin{aligned} \int_0^l (a+x)\rho A \frac{d^2 w}{dt^2} dx &= (a+L_1/2)M_1 \frac{d^2 w_1}{dt^2} \\ &+ (a+L_1+L_2/2)M_2 \frac{d^2 w_2}{dt^2} \\ &+ \dots + (a+L_1+L_2+\dots \\ &+ L_n/2)M_n \frac{d^2 w_n}{dt^2} \dots \dots \dots (8) \end{aligned}$$

ただし、 $M_n = \rho_n A_n L_n$ である。

外力および物体力が作用しない場合のたわみの方程式は

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = 0 \dots \dots \dots (9)$$

この方程式の一般解を

$$w = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \dots \dots \dots (10)$$

で表す。 a_1, a_2, a_3, a_4 は未知係数である。要素分割の節点におけるたわみ w_0, w_L およびたわみ角 θ_{z0}, θ_{zL} を用いてたわみ w を表すと、

$$w = [s_1, s_2, s_3, s_4][w_0, \theta_{z0}, w_L, \theta_{zL}]^T \dots \dots \dots (11)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= 1 - \frac{3}{L^2} x^2 + \frac{2}{L^3} x^3 \\ s_2 &= x - \frac{2}{L} x^2 - \frac{1}{L^2} x^3 \\ s_3 &= \frac{3}{L^2} x^2 - \frac{2}{L^3} x^3 \\ s_4 &= -\frac{1}{L} x^2 + \frac{1}{L^2} x^3 \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (12)$$

式(11)の変位関数を用いて式(7)を離散化すると

$$[M]\{\dot{w}_n\} + [K]\{w_n\} = 0 \dots \dots \dots (13)$$

ただし

$$[M] = \left\{ C \left(a + \sum_{k=1}^n L_{k-1} + \frac{L_n}{2} \right) + 1 \right\} \rho_n A_n L_n [m] \dots \dots \dots (14)$$

$[m]$ は質量マトリックス、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $L_0 = 0$ である。なお式(14)における C は

$$C = \frac{\int_0^l (a+x)\rho A dx}{\int_0^l (a+x)^2 \rho A dx + I_n} \dots \dots \dots (15)$$

式(13)の積分は New Mark の β 法を用いて行う。加速度 $\{\ddot{w}\}$ 、および速度 $\{\dot{w}\}$ を次式のように差分式で表す。

$$\begin{aligned} {}_{k+1}\{\ddot{w}\}_n &= (1-1/2\beta) {}_k\{\ddot{w}\}_n - \frac{{}_k\{\dot{w}\}_n}{(\beta \Delta t)} \\ &+ [{}_{k+1}\{w\}_n - {}_k\{w\}_n] \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_{k+1}\{\dot{w}\}_n &= (1-\delta/\beta) {}_k\{\dot{w}\}_n + \left(1 - \frac{\delta}{2\beta}\right) \Delta t {}_k\{\ddot{w}\}_n \\ &+ [{}_{k+1}\{w\}_n - {}_k\{w\}_n] \delta / (\beta \Delta t) \dots \dots \dots (17) \end{aligned}$$

なお k は時間分割を表し、 n は要素分割を表す。 Δt は分割時間間隔を表す。式(16)と式(17)を式(13)に代入すると実際計算する式が得られる。

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{2}{\beta (\Delta t)^2} [M] + [K] \right\} {}_{k+1}\{w\}_n &= [M] \left\{ \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} {}_k\{w\}_n \right. \\ &+ \left. \frac{1}{\beta \Delta t} {}_k\{\dot{w}\}_n + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) {}_k\{\ddot{w}\}_n \right\} \dots \dots \dots (18) \end{aligned}$$

数値計算においては $\delta = 0.5$ 、 $\beta = 0.25$ を用いる。初期条件はアームの先端が剛体壁に衝突する速度から按分して各節点の初期速度を与える。しかしアームの先端の速度だけは反発速度を用いる。またアームの先端が停止する場合はアームの先端の初期速度を零とする。実験結果と比較するための曲げひずみ ϵ_b は

$$\epsilon_b = -y[B]\{w\}_n \dots \dots \dots (19)$$

ただし、 y は中立軸からの距離である。 $[B]$ は次式で表される。

$$[B] = \left[\begin{aligned} &-\frac{6}{L^2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right), -\frac{2}{L} \left(2 - \frac{3x}{L}\right), \\ &\frac{6}{L^2} \left(L - \frac{2x}{L}\right), -\frac{2}{L} \left(1 - \frac{3x}{L}\right) \end{aligned} \right] \dots \dots \dots (20)$$

なおハブが回転しないで固定される場合は片持ばりであり、式(5)において $d^2 \theta / dt^2 = 0$ とすると

$$\int_0^l \rho A \frac{d^2 w}{dt^2} dx + \int_0^l EI \frac{d^4 w}{dx^4} dx = 0 \dots \dots \dots (21)$$

上式を有限要素法によって離散化し、はりの先端に鋼球が衝突する問題に応用することができる。

4. アームの衝撃応答実験

図4(a)に示すように外径40 mm、内径18 mmのハブに長さ200 mm、横断面が10×10 mmの鋼材(S45C)のはり状のアームを取付け、アームの先端を高さ50 mmから落下させ鋼製定盤に衝突させる。アームが反発する場合については図4(b)に示すような半球状の衝撃体をアームの先端に取付ける。アームの先端が衝突後停止する場合は図4(c)に示すような針

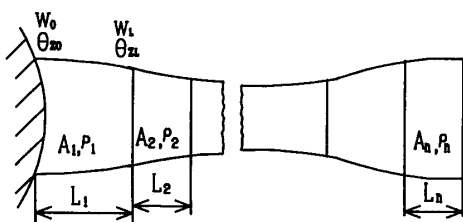


図3 アームの要素分割

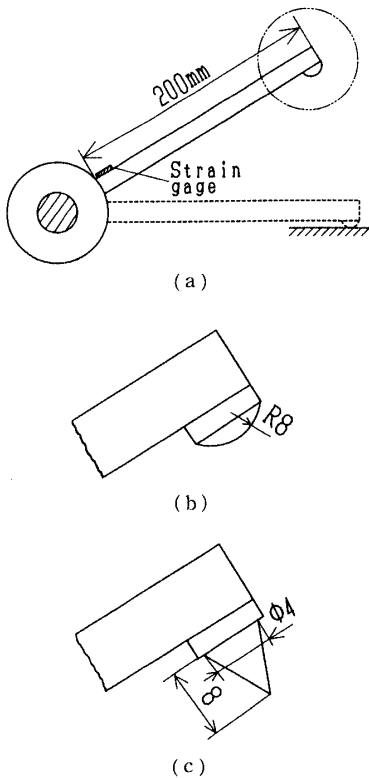
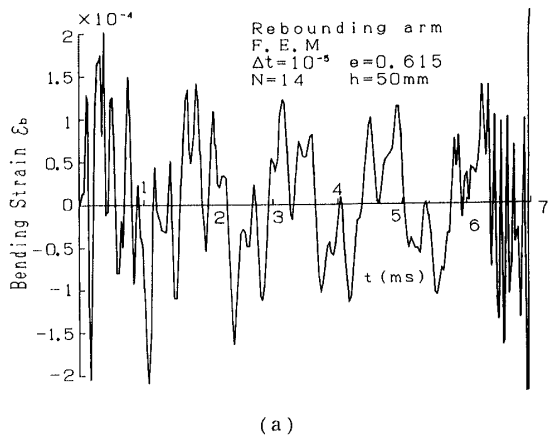
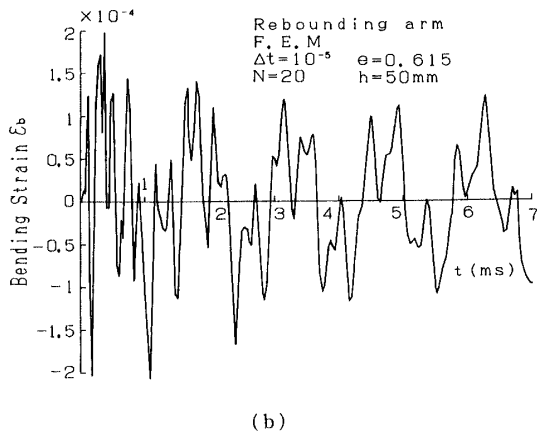


図4 アームの衝撃実験とアームの先端の形状



(a)



(b)

図5 要素分割に対する収束性(反発の場合)

状の物体を先端に取付け、木製定盤に食い込ませて停止させる。この場合のアームの先端の落下高さは200 mmである。アームの先端が定盤に衝突するときの速度および反発速度はビデオカメラを用いて測定する。アームの曲げひずみの変動を、ハブの端部から5 mmの位置に貼ったストレイン・ゲージ(ゲージ長さ3 mm, FLA-3-11, 東京測器)で検出し、直流ブリッジ式動ひずみ測定器(6 M 92, 日本電気三栄)で電圧に変換し、増幅する。アームの先端が反発する場合はデジタルオシロスコープ(DL-1200, 横河電機)に波形を表示し、付属のプリンタで記録する。アームの先端が停止する場合はウェーブメモライザ(Model 3652, 横河電機)とX-Yレコーダ(Model 3025, 横河電機)を用いる。後者の方式のほうが時間を長く表示できる。

5. 解析結果と実験結果の比較

5.1 解析結果 図5はアームの先端が衝突し、反発する場合の曲げひずみ ε_b の変動を有限要素法で解析するときの要素分割に対する解の収束性を調べた。ハブに隣接する要素の曲げひずみである。実験データと比較するために、衝突速度および反発速度は実測結果を用いた。アームの先端は高さ $h=50$ mmから自然落下し、衝突速度は933.64 mm/sである。また反発速度は574.19 mm/sであり、反発係数 $e=0.615$ を用いた。図5(a)に示す要素分割数 $N=14$ の場合の曲げひずみ ε_b は約 $t=6$ msから発散する。 $N=20$ の場合は、図5(b)に示している時間以内では曲げひずみ ε_b は発散しない。波形が発散する以前においては $N=14$ と $N=20$ は同じ波形である。したがって $N=20$ では収束していると考えられる。図6は時間分割に対する曲げひずみ ε_b の収束性を調べたものである。要素分割数は $N=20$ である。分割時間が $\Delta t=10^{-5}$ s, 10^{-4} sおよび 10^{-3} sの各場合とも曲げひずみ ε_b が収束する。アームの先端が衝突し、反発しない場合の曲げひ

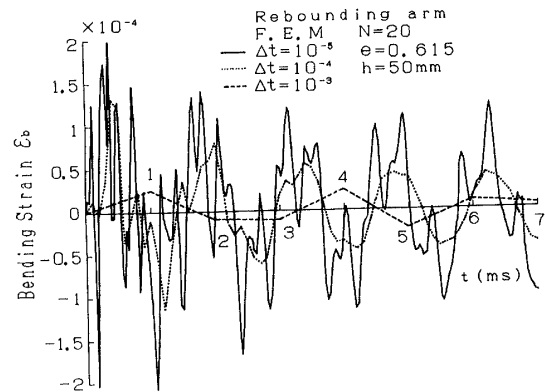


図6 時間分割に対する収束性(反発の場合)

ずみ ϵ_b についても要素分割に対する収束を検討した。ハブに隣接する要素の曲げひずみ ϵ_b である。衝突速度はアームの先端が高さ $h=200$ mmから自然落下したときの実測結果 $1\,266.89$ mm/s を用いた。反発係数は $e=0.0$ である。図 7(a) は要素分割数が $N=14$ の場合の曲げひずみ ϵ_b の変動を示す。約 $t=6$ ms から曲げひずみ ϵ_b の変動は発散する。図 7(b) は要素分割数が $N=20$ の場合の曲げひずみ ϵ_b の変動を示す。図に示す時間以内では曲げひずみ ϵ_b は発散しない。発散する以前については $N=14$ と $N=20$ については波形は同じである。したがって $N=20$ で要素分割に対して曲げひずみ ϵ_b は収束していると考えられる。図 8 は時間分割に対する曲げひずみ ϵ_b の収束を調べたものである。要素分割数は $N=20$ である。分割時間が $\Delta t=10^{-3}$ s, 10^{-4} s および 10^{-5} s の各場合とも曲げひずみ ϵ_b は発散しない。

5.2 実験結果との比較 図 9 はアームの先端が衝突し、反発する場合の図 4(a) に示す位置の曲げひずみ ϵ_b の実験結果(実線)と解析結果(点線)を比較して示した。図に示した時間範囲の $t=4$ ms は反発高さ $h_e=2.3$ mm であり、実測された最大反発高さ $h_e=17$ mm に対して 13% であり、アームの位置のエネルギー

は小さいと考えられる。表 1 はアームが剛体壁に衝突して、反発する場合(左欄)および停止する場合(右欄)の固有値 λ および固有周期 T を有限要素法によって解析した結果である。実験結果は固有周期 $T=1.315$ ms と 0.419 ms, 0.204 ms の波形が顕著である。波形全体は、これらの波形が合成されて形成される。解析結果の固有周期 $T=1.315$ ms の波形は、実験とほぼ一致する。時間が経過するとともに実験のほうが位相が遅れる。固有周期 $T=0.419$ ms の波形の振幅は両者ほぼ一致する。しかし固有周期 $T=0.204$ ms の波形の振幅は実験の場合は小さく、解析結果の場合は非常に大きい。図 10 はアームの先端が衝突し、停止する

表 1 回転するアームの固有値と固有周期

n	Gyrating arm		Supported arm	
	Eigen value $\lambda \times 10^9/s$	Period T (ms)	Eigen value $\lambda \times 10^9/s$	Period T (ms)
1	4.77	1.315	3.074	2.044
2	14.98	0.419	11.93	0.526
3	30.74	0.204	26.24	0.239
4	52.91	0.119	46.71	0.134
5	82.37	0.076	74.30	0.084
6	119.4	0.052	109.5	0.057
7	164.2	0.038	152.3	0.041
8	216.6	0.029	202.7	0.031
9	276.6	0.023	260.9	0.024
10	344.4	0.018	326.8	0.019

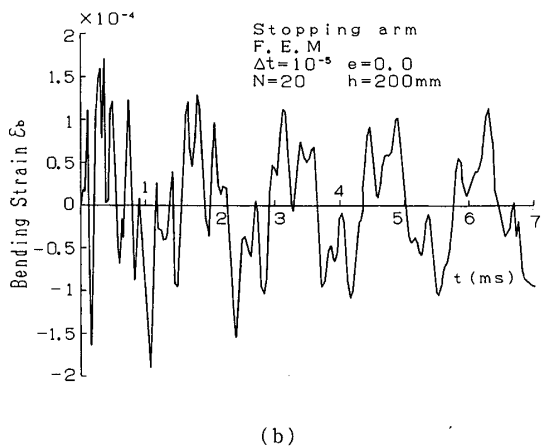
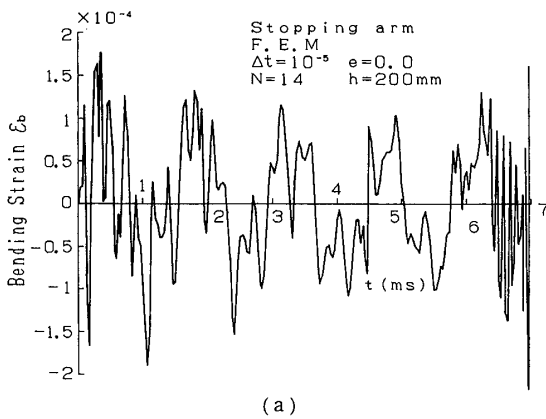


図 7 要素分割に対する収束性(停止の場合)

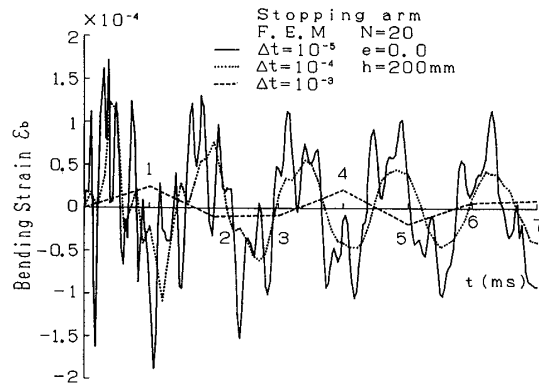


図 8 時間分割に対する収束性(停止の場合)

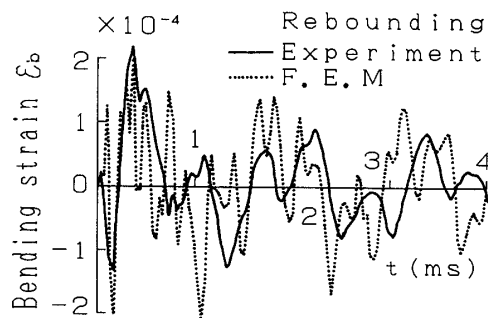
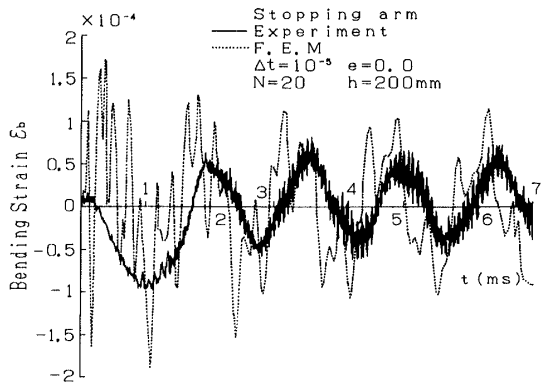


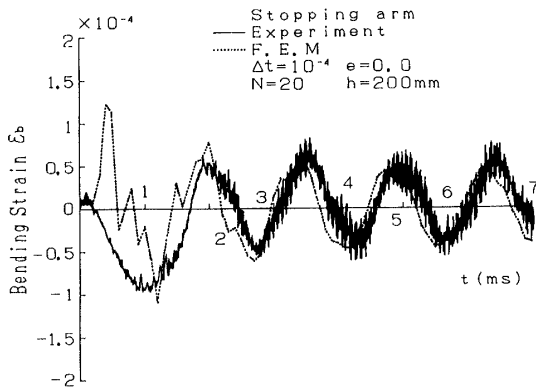
図 9 解析結果と実験結果の比較(反発の場合)

場合の図4(a)に示す位置の曲げひずみ ϵ_b の実験結果(実線)と解析結果(点線)を比較して示した。図10(a)は分割時間が $\Delta t=10^{-5}$ の解析結果と実験の比較であり、図10(b)は $\Delta t=10^{-4}$ の場合の解析結果と実験の比較である。解析結果の固有周期 $T=2.044$ msの波形は実験とほぼ一致している。時間経過とともに実験のほうが位相が遅れる。図10(b)の $\Delta t=10^{-4}$ の解析結果では固有周期 $T=2.044$ msの波形が支配的であり、衝突直後を除けば、実験とよく一致する。実測に含まれる $T=0.2$ msの固有周期の波形は、図10(a)の $\Delta t=10^{-5}$ の解析結果は振幅が大きい。実験においては、固有周期 $T=0.03$ ms以下の周期が非常に短い波形が含まれている。他端にある回転軸とハブの間には

きまがあると回転軸とハブの間で高周波の衝突が生じ、アームには超高周波の振動が伝ばすると考えられる。アームの先端の針状物体が木製定盤に侵入し、固定される。アームの先端のほうが支点となり、支点まわりのアームの微小な回転が生ずることも考えられるが、表1の右欄はアームの先端が単純支持であるとしたときの固有値 λ および固有周期 T であり、この欄に示す一次、二次、三次等の固有周期は図9および図10に示す波形には見られない。図11に示すような、長さ200 mm、横断面 10×10 mmの鋼製(S45C)アームに球を落下高さ150 mmから衝突させ、固定端から5 mmの位置の曲げひずみを測定し、有限要素法の解析結果と比較して図12に示した。表2は固有値と固有周期を示す。図12には固有周期 $T=4.677$ msの波形があり、実験とほぼ一致するが、実験のほうが時間の経過とともに位相が遅れる。固有周期 $T=0.746$ msと $T=0.266$ msの波形も含まれる。固有周期 $T=0.746$ msの波形の振幅は実験もほぼ一致するが、固有周期



(a)



(b)

図10 解析結果と実験結果の比較(停止の場合)

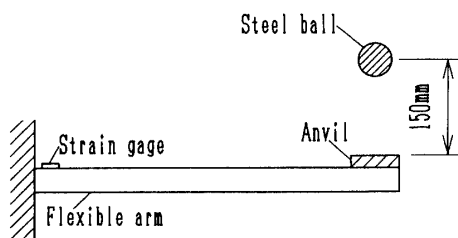


図11 鋼球の衝突を受ける片持ばりの実験

表2 片持ばりの固有値と固有周期

Steel arm		
n	Eigen value $\lambda \times 10^9/s$	Period T (ms)
1	1.343	4.677
2	8.418	0.746
3	23.57	0.266
4	46.19	0.136
5	76.36	0.082
6	114.1	0.055
7	159.4	0.039
8	212.4	0.029
9	273.0	0.023
10	341.4	0.018

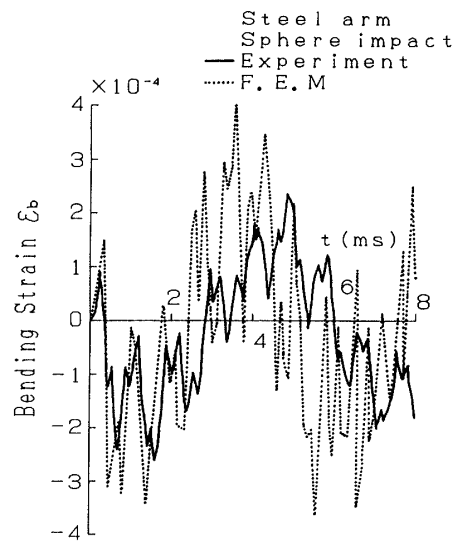


図12 片持ばりの動的応答の解析結果と実験結果

$T=0.266$ ms の波形は実験における振幅が小さく、解析結果の振幅は非常に大きい。アームの旋回の問題および鋼球の落下衝突の問題においても、実験のほうが位相が遅れ、高周波振動において振幅が小さい。この原因は文献(9)、(10)に示されているようにアームの固定状態や支持状態が解析で定義するようにならないことにある。

6. 結 論

回転するハブに取り付けられたはり状のアームの先端が剛体壁に衝突し、反発する場合と衝突後停止する場合のアームの非定常応答の問題を有限要素法によってシミュレーションし、実験によって検証した。明らかになったことを要約する。

(1) ハミルトンの原理を用いると問題は連立微積分方程式で表されるが、両式に含まれるハブの回転角加速度に注目すると一つの式で表される運動方程式が得られる。

(2) 非一様断面のアームを用いた実験によって検証するために運動方程式を有限要素法によって離散化し、New Mark の β 法によって運動方程式の積分を行った。要素分割および時間分割に対する収束性は良好である。

(3) 第一次固有周期に対する曲げひずみの変動波形については、解析結果と実験はほぼ一致した。しかし時間の経過とともに位相にずれが生ずる。

(4) 第二次の固有周期に対する曲げひずみの変動振幅は実験とほぼ一致した。

(5) 第三次の固有周期に対する曲げひずみの変動振幅は実験のほうが小さく、解析結果のほうが非常に大きい。

文 献

- (1) 神谷・横山・高野, 精密機械, 45-2 (1979), 161.
- (2) 福田, 機論, 51-468, C(1985), 2140.
- (3) 神谷, 精密機械, 51-11(1985), 2014.
- (4) Tang, L. and Skaar, S. B., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 60-3(1993), 491.
- (5) Bayo, E., *J. Robo. Syst.*, 4-1(1987), 63.
- (6) Hastings, G. G. and Book, W. J., *IEEE Control Syst. Mag.*, (1987), 61.
- (7) Usoro, P. B., Nadira, R. and Mahil, S. S., *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas Control*, 108-4,(1986), 198.
- (8) Chapnik, B. V., Heppler, G. r. and Aplevich, J. D., *IEEE Trans. Robo Auto*, 7-4 (1991), 479.
- (9) 日本機械学会編, 衝撃と破壊調査研究分科会成果報告書, (1981), 120-133.
- (10) 神宮・松本・根津, 機論, 53-492, A(1987), 1713.
- (11) 文献(9)の134-136ページ.
- (12) 神宮・根津・坂本, 機論, 54-499, A(1988), 539.