

ホモロジー群による位相制約下における構造最適化* (第4報, 密度法によるトポロジー最適化への適用例)

中 西 康 彦*¹

Structural Optimization under Topological Constraint Represented by Homology Groups (4th Report, An Example of Its Application to Topology Optimization by the Use of Density Approach)

Yasuhiko NAKANISHI*²

*² Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

In the process of topology optimization, topology of a structure is, in general, changed in succession. In this paper, a method of inferring the change of topology is proposed. This method makes it possible to impose constraint conditions upon topology of the structure. Topological constraint conditions can be expressed by homology groups. As a numerical example, topology of a plate is optimized using an artificial model (the density approach) under topological constraint conditions that (I) the structure is not divided into pieces during the optimization process, and (II) the number of holes is less than or equal to the prescribed number. As a result, it was found that (1) topological constraints were correctly satisfied by the proposed method, (2) the least useful members tend to be removed by topological constraints, and other ones are reinforced, and (3) the strain energy of structures obtained under certain topological constraints is somewhat higher than that of ones without topological constraints.

Key Words: Optimum Design, Computational Mechanics, Numerical Analysis, Finite Element Method, Homology Theory, Invariant Factors, Density Approach, Topology

1. 緒言

近年, 市販の有限要素解析アプリケーションに構造の寸法およびトポロジーに対する最適化機能が付加されていることが珍しくなくなり, トポロジー最適化も実用の段階に至りつつあるように思われる. しかしながらトポロジー最適化問題を数学の位相幾何学的な立場から捉える手法や理論は殆ど見られない. 位相幾何学のホモロジー理論^{(1)~(3)}では構造のトポロジーはホモロジー群と呼ばれるアーベル群⁽⁴⁾として取扱われる. 既報^{(5)~(7)}ではホモロジー群で記述した条件式でトポロジーに対して様々な制約(以降, 位相制約条件と呼ぶ)を課す方法とその適用例を示してきた. 例えば前報⁽⁷⁾の数値計算例では位相制約条件として最適構造のトポロジーを満たすべき必要条件を設定することで最適構造を得る可能性が大幅に高まることを示した. 本報では本手法の別の応用例としてトポロジーに関する設計者の要望を位相制約条件に設定する. 最適化手法

には M. P. Bendsøe らが提案した artificial model⁽⁸⁾を採用する. これは密度法⁽⁹⁾とほぼ同じ手法である. 密度法は現在均質化法⁽⁸⁾と並んで最も頻りに用いられているトポロジー最適化手法である. 前報⁽⁷⁾では提案した手法の効果を明確に確認するため敢えて特殊な例題を取り上げたが, 本報ではより現実的な例題として現在最もよく用いられている最適化手法の一つ, すなわち密度法に本手法を適用して平板のトポロジー最適化を試みる. 最適化の過程では構造のトポロジーが次々と変化していくが, 本手法によりその変化を逐次予想する. 予測した変化が位相制約に反するならば, それを抑えることで位相制約を満足する.

寸法だけでなくトポロジーも最適化の対象とする設計が普及すれば, それ以前には見られなかったトポロジーに関する要求が出現してくる可能性が考えられる. 例えば均質化法を用いたときに現れるいわゆるチェッカーボード状の構造や製造コストが安く, 作製も容易なトポロジーの獲得については既に問題になっており, 様々な解決方法が提案されている⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾. また, 遺伝的アルゴリズム(GA)等を使った最適化の過程で構造を一体で連結に保つこと等も問題になり得ると考えられる. 既報^{(5)~(7)}も含め本研究はこのような種々の問題に

* 原稿受付 2002年12月17日.

*¹ 正員, 群馬大学工学部(☎376-8515 桐生市天神町1-5-1).
E-mail: nakanisi@me.gunma-u.ac.jp

個別に対応するのではなく、トポロジーをホモロジー群で記述することで共通の方法で統一的に解決できる汎用性のある手法の提案を最終的な目標としている。本報の最適化問題では設計者の要望の例として構造が連結であることと平板に開ける穴の個数が指定値以下であることの2点を制約条件に取り上げる。2番目の条件には製造を容易にする意図が含まれている。

2. 問題の設定

既報^{(5)~(7)}では位相制約条件の適用例として最適構造のトポロジーが満たすべき必要条件を与えたが、本報では別の適用例として構造のトポロジーに対する設計者の要望を設定する。図1に示す2次元の設計領域(a)および(b)を対象に同図中の境界条件下でひずみエネルギーが最小になる材料の分布を決定する。位相制約条件は最適化の過程において常に構造が一体で連結であることと、穴が指定個数以下であることの二点とする。最適化手法としては M. P. Bendsøe らの artificial model⁽⁸⁾を用いる。このモデルでは材料の巨視的なヤング率を $E(1-ab)^m$ と定義している。ここで E は材料のヤング率、 a および b は変数、 m はべき乗係数である。本報では E を 202 G Pa、 m を 2、ポアソン比を 0.3、板の厚さを 0.01 m に設定する。この手法は文献(8)で均質化法の一つとして提案されており、 a と b はマイクロストラクチャーの形状を表すパラメーターと解釈できるが、この手法は密度法⁽⁹⁾とほぼ同じであり、 $1-ab$ は密度法における材料の密度に相当する。よって本報では $1-ab$ を密度 ρ で表すこととする。本例題では材料の占める体積の総計を設計領域全体の 37.5% に指定し、平面応力問題として取扱う。また全要素に対して密度 ρ の初期値として上述の体積の指定値に基づいて 0.375 を設定する。ある要素の密度 ρ がしきい値 0.1875 (初期値の半分) 以下になるとき、その要素は実質的に消去されたとみなして構造のトポロジーの変化を第4章で提案の手法により予測し、位相制約条件を満足させる。有限要素解析には6節点アイソパラメトリック四辺形要素(4節点アイソパラメトリック要素に曲げ型の面内変位モードの精度を向上するため、2節点を追加した非適合要素)⁽¹²⁾を用いる。

3. ホモロジー群による位相制約条件の記述

位相幾何学のホモロジー理論では構造のトポロジーをホモロジー群^{(1)~(3)}により記述する。構造が一体で連結であり、かつ穴の個数が M 個以下であるとの条件を設定する本報の場合、位相制約条件式は下記のように

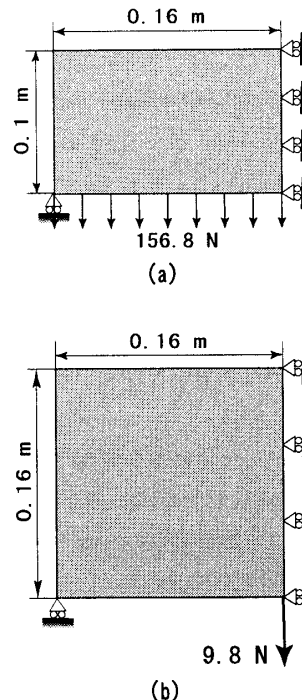


Fig.1 Design domains (a) and (b)

に表される。

$$\text{rank}(H_0(K)) = 1 \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{rank}(H_1(K)) \leq M \dots\dots\dots (2)$$

ここで K は構造に対応する単体的複体を、 $H_0(K)$ および $H_1(K)$ は複体 K の 0 次元および 1 次元ホモロジー群を、 $\text{rank}(\)$ は括弧内の群もしくは行列の階数を表す。これらの式は整数の加法群 Z を用いれば $H_0(K) \cong Z$ および $H_1(K) \cong Z \oplus Z \oplus \dots \oplus Z$ (M 個の Z) と書ける。境界作用素^{(1)~(3)} ∂_i を表す行列を $[A_i]$ 、複体 K の i 次元単体 (i -単体) の個数を m_i とおくと $H_i(K)$ の階数は

$$\text{rank}(H_i(K)) = m_i - \text{rank}([A_i]) - \text{rank}([A_{i+1}]) \dots\dots\dots (3)$$

と表される⁽³⁾。最適化の過程においてある要素の密度がしきい値以下になりトポロジーが変化するとみなされる場合、ホモロジー群の階数 $\text{rank}(H_i(K))$ が増減する。

3次元以上の空間に存在する立体的な構造に対してはねじれ係数^{(1)~(3)}や2次元以上のホモロジー群の変化も考慮しなければならないが、本例題のように2次元の問題ではこれらを見捨てる。ねじれ係数や高次のホモロジー群に対する本手法の妥当性は前報⁽⁷⁾で確認してある。

4. 位相制約条件を満足する方法

4.1 トポロジーの変化を予測する手順 トポロジーの変化の予測法については前報で詳細に説明したので本報ではその概略のみ述べる。本報では構造のホモロジー群を求める方法として単模基本変形⁽¹³⁾により Smith 標準形⁽¹⁴⁾を算出する方法を採用する。境界作用

素 ∂_i を表す行列 $[A_i]$ は次式のように適当な単行列⁽¹³⁾ $[S]$ および $[Q]$ により Smith 標準形 $[\tilde{A}_i]$ に変形される.

$$[\tilde{A}_i] = [S][A_i][Q] \dots\dots\dots (4)$$

$[\tilde{A}_i]$ は対角行列であり, その成分は $[A_i]$ の単因子⁽¹³⁾ である. 単因子の値はねじれ係数に, その個数は $[A_i]$ の階数に一致する. 式(4)を次のように変形する.

$$[A_i] = [S]^{-1}[\tilde{A}_i][Q]^{-1} \dots\dots\dots (5)$$

逆行列 $[S]^{-1}$ および $[Q]^{-1}$ も単行列であり, $[Q]^{-1}$ の列は各要素 (単体) に, 行は各単因子に対応する. 除去されようとしている要素に対応する $[Q]^{-1}$ の列において非零の成分が何行目に存在するか調べることで単因子と構造を構成する各要素との関係が判明する. したがって $[Q]^{-1}$ を算出しておけば, ある要素が1個除去されたときに発生する単因子の変化, すなわちトポロジーの変化を予測できる. 詳細は省略するが, 実際に $[Q]^{-1}$ を利用する際はそのままの形では扱いにくいので $[Q]^{-1}$ を分解して簡単な形に変えてから使用する⁽⁷⁾.

ある要素の密度がしきい値を下回るとき式(5)を利用してトポロジーの変化を予測すれば, その変化が位相制約条件を満たすものか否かを判別できる. 制約条件に反する場合, 本報ではその要素の密度を強制的にしきい値にする方法を取ることにする.

4.2 本手法でトポロジーの変化を予測可能な理由

本節では, 前節で述べた手順でトポロジーの変化を予測できる理由を考察する. まず式(5)を次のように書き直す.

$$[A_i] = a_1\{s_1\}\{q_1\}^T + a_2\{s_2\}\{q_2\}^T + \dots + a_R\{s_R\}\{q_R\}^T \dots\dots (6)$$

ここで a_i は $[\tilde{A}_i]$ の i 番目の対角成分 (非零) を, 添字 R は a_i の個数を, T は転置を, $\{s_i\}$ および $\{q_j\}^T$ は各々 $[S]^{-1}$ の第 i 列および $[Q]^{-1}$ の第 j 行を表す. ある単体が除去されるとき, その単体に対応する成分が $\{q_j\}$ の中にあるとする. $\{q_j\}$ の成分の中に非零成分が1個のみ存在する場合, その単体の除去は $\{q_j\}$ の除去と同義であり, 式(6)の第 j 項も消えることになる. 従って単因子は a_j の分だけ減少し, それはそのままホモロジー群の階数やねじれ係数の減少として反映される. よって除去対象の要素がどの $\{q_j\}$ に含まれるか調査するだけでトポロジーの変化を予測できる. この調査には殆ど数値計算を要しない. ただし, 他の単体の除去によって a_j が消滅する可能性もある. また, 上記の型に当てはまらないより複雑なケースも存在する. 詳細は省略するがその場合は別の対応をしなければならない⁽⁷⁾. 例えば, ある要素の除去によってねじれ係数が増加する場合, $\{q_j\}$ において除去対象以外の要素の成分について最大公約数を求めて a_j に乗じる操作を要する. しかし, このような複雑なケースは本報のような2次元

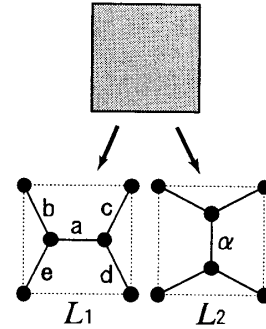


Fig. 2 Relation between square element and imaginary complexes L_1 and L_2

の問題では殆ど発生しない.

4.3 マイヤー・ビートリス完全系列の併用

N 次元の単体的複体から N 次元の単体を1個除去すると多くの場合 $N-1$ 次元以下の単体が複数個, 同時に消える. しかし本手法は単体が1個除去されたときに発生するトポロジーの変化を予測する方法であり, そのままでは複数個の除去に対応できない. また本例題のように1個の四辺形要素を表すのに複数個の2-単体 (三角形) を要する場合も何らかの工夫が必要となる. よって本報では以下に示すようにマイヤー・ビートリス完全系列⁽¹⁾⁻⁽³⁾を併用することとする.

複体 K からその一部分 K_2 を取り除き, 新たな複体 K_1 を作る場合, 次式のマイヤー・ビートリス完全系列が成り立つ.

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow H_2(K_1) \oplus H_2(K_2) \xrightarrow{i} H_2(K) \xrightarrow{\partial} H_1(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} H_1(K_1) \oplus H_1(K_2) \xrightarrow{j} H_1(K) \xrightarrow{\partial} \tilde{H}_0(K_1 \cap K_2) \xrightarrow{i} \tilde{H}_0(K_1) \oplus \tilde{H}_0(K_2) \xrightarrow{j} \tilde{H}_0(K) \dots\dots\dots (7) \end{aligned}$$

ここで $K_1 \cap K_2$ は K_1 と K_2 の共有部分, $H_r(K)$ は r 次元ホモロジー群, $\tilde{H}_r(K)$ は r 次元の簡約ホモロジー群である. i, j および ∂ は準同型写像であり, 輪体の同値類 $[z] \in H_r(K_1 \cap K_2)$, $[z_1] \in H_r(K_1)$, $[z_2] \in H_r(K_2)$, $[z_3] \in H_r(K)$ および r -鎖 $c_1 \in r$ -鎖群 $C_r(K_1)$ とおくと各写像は $i \cdot [z] = ([z], -[z])$, $j \cdot ([z_1], [z_2]) = [z_1] + [z_2]$ および $\partial \cdot [z_3] = [\partial c_1]$ と定義される. 本報の例題では K_2 は1個の四辺形要素なので $K_1 \cap K_2$ は非常に単純な構造であり, そのホモロジー群は以下の5種類(A)~(E)しかあり得ない.

- (A) $\tilde{H}_0(K_1 \cap K_2) = 0$ かつ $H_1(K_1 \cap K_2) = Z$
 - (B) $\tilde{H}_0(K_1 \cap K_2) = 0$ かつ $H_1(K_1 \cap K_2) = 0$
 - (C) $\tilde{H}_0(K_1 \cap K_2) \cong Z$ かつ $H_1(K_1 \cap K_2) = 0$
 - (D) $\tilde{H}_0(K_1 \cap K_2) \cong Z \oplus Z$ かつ $H_1(K_1 \cap K_2) = 0$
 - (E) $\tilde{H}_0(K_1 \cap K_2) \cong Z \oplus Z \oplus Z$ かつ $H_1(K_1 \cap K_2) = 0$
- 例えば(C)の場合, $K_1 \cap K_2$ のホモロジー群を式(7)に代

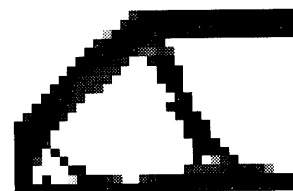
入すると K_1 の未知のホモロジー群は式(8)あるいは式(9)の何れかであることが分かる。

$$\tilde{H}_0(K_1) \cong \tilde{H}_0(K) \oplus Z, \quad H_1(K_1) \cong H_1(K) \cdots \cdots (8)$$

$$\tilde{H}_0(K_1) \cong \tilde{H}_0(K), \quad H_1(K_1) \cong H_1(K)/Z, \cdots \cdots (9)$$

ただし、何れの場合も $H_2(K_1) \cong H_2(K)$ であり、複体 K のホモロジー群は既知とする。 K_1 が式(8)と式(9)のどちらであるかは式(5)で判別するが、前述のように一度に複数の0-単体(要素の節点)や1-単体(要素の辺)が消える場合、そのままでは式(5)を使用できない。よって本報では構造を構成する各四辺形要素を図2のように6個の0-単体(同図中の黒丸)と5個の1-単体(同図中の線分)に置き換えて仮想の複体 L_1 および L_2 を作る方法を取る。ある四辺形要素が消えるとき、その要素に対応する5個の1-単体の内、まず図2の1-単体 a を1本のみ除去する場合について式(5)を用いてトポロジーの変化を予測する。その結果 $\tilde{H}_0(L_1)$ の階数が1個増加すると予測されるならば式(8)が正しい解である。一方1-単体 a の除去で $\tilde{H}_0(L_1)$ に何も変化が起こらないと予測された場合は他の1-単体 $b \sim e$ の除去についても同様に調査する。これらの内、一つでも $\tilde{H}_0(L_1)$ の階数が増加すると予測されたならば、やはり式(8)が正解であり、全ての場合において $\tilde{H}_0(L_1)$ に変化がないと予測された場合は式(9)が正解である。この方法では1個の四辺形要素を除去するだけで5つもの1-単体を調べなければならず数値計算の量が多いように見えるが、実際には殆どの場合、5本全てについて調べる前に結果が判明する。また $a \sim e$ 全てに関して予測が必要な場合でも式(5)の $[Q]^{-1}$ を一度算出しておけば計算し直す必要はないので数値計算の負担も殆ど増えない。 $K_1 \cap K_2$ のホモロジー群が(A)と(B)の場合は式(5)や仮想の複体 L_1 を使わなくとも解が一意に定まる。また(D)と(E)の場合は仮想の複体 L_1 だけでは不十分な場合もある。その場合は L_2 の1-単体 α の除去に伴うトポロジーの変化も考慮に入れなければならない。これら(A)~(E)の場合分けは各々オイラー標数の0, 1, 2, 3および4に対応する。

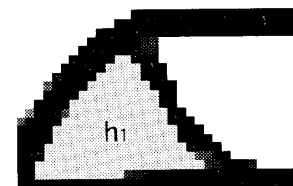
4.4 本手法のアルゴリズム 本報のように2次元の問題を扱う場合、ホモロジー群はねじれ係数が含まれない簡単な形になる。よって本手法における計算の大部分をコンピューターで処理することも可能であるが、本報ではマイヤー・ビートリス完全系列を用いて前節の(A)~(E)の各場合において発生し得る解(構造 K に起こり得るトポロジーの変化)を全て手計算で列挙しておく方法を採用することとする。これは、解の種類が限られていること(例えば(C)では式(8)および(9)の2種類のみ)、本手法をより複雑なトポロジ



(a-1) Topological constraints : None

Strain Energy : 1.68×10^{-4} (J)

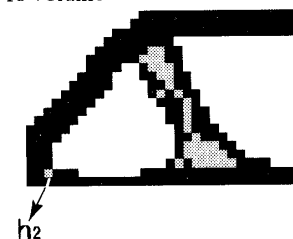
Error of volume : 0.010 %



(a-2) Topological constraints : $\tilde{H}_0(K)=0, H_1(K) \cong 0$

Strain energy : 1.99×10^{-4} (J)

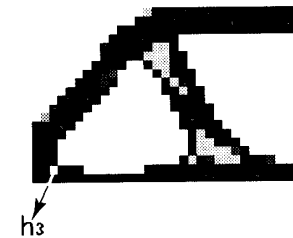
Error fo volume : 0.0083 %



(a-3) Topological constraints : $\tilde{H}_0(K)=0, H_1(K) \cong Z$

Strain energy : 1.74×10^{-4} (J)

Error of volume : 2.5 %



(a-4) Topological constraints : $\tilde{H}_0(K)=0, H_1(K) \cong Z \oplus Z$

Strain energy : 1.82×10^{-4} (J)

Error of volume : 0.0096 %

Fig. 3 Structures obtained under various topological constraints using design domain (a)

一の問題に適用する場合はマイヤー・ビートリス完全系列をコンピューターで処理することが難しいこと、等の理由に因る。さらに1次元複体 L_1 および L_2 におけるトポロジーの変化と構造 K におけるトポロジーの変化(前述の解)との「対応関係表」も作成しておく。これによりコンピューターの演算時間は式(5)の Simth 標準形を算出して L_1 および L_2 の変化を予測することと材料の密度の更新に費やされることになる。詳細は前報⁽⁷⁾で類似の例題を取り上げて説明してある。本手法の具体的な手順は以下になる。手順の(I)以外はコンピューターで処理する。(I) 図1の設計領域を四

角形の要素で分割し、構造 K と見なす。(II) 各四角形要素を図2に従って1-単体と0-単体に置き換え、1次元複体 L_1 を作る。同様に別途 L_2 も作成する。(III) ひずみエネルギーが小さくなるように各四角形要素の密度を繰り返し計算により変化させる。(IV) ひずみエネルギーが最小値に達したと判定された場合、最適化のプロセスを終了する。ひずみエネルギーが最小値に達する前に密度がしきい値を下回る要素(除去対象要素)が発生した場合、(V)に進む。(V) 密度の更新を一旦停止し、除去対象要素と周囲との共有部分(前節の $K_1 \cap K_2$) を調べ、それを構成する節点と辺の個数を数える。(VI) オイラー標数(節点数と辺の個数の差)を求め、共有部分のトポロジーが前節の(A)~(E)のいずれに属するか判別する。(VII) 式(5)のSmith標準形を算出して L_1 および L_2 におけるトポロジーの変化を予測し、その結果と前述の「対応関係表」から構造 K におけるトポロジーの変化を求める。(VIII) 構造 K の変化が位相制約に反する場合は、要素が除去されないように密度を強制的にしきい値に変更して(III)に戻る。また位相制約に反しない場合は密度を操作せずに(III)に戻る。

5. 数値計算例

本報第2章の設定に従い、第3および第4章で提案の手法を用いて位相制約を与え、artificial model により平板のトポロジーを最適化する。図3は図1の設計領域(a)を用いた場合の結果である。設計領域(a)を縦方向に20等分、横方向に32等分して640個の正方形要素に分割した。図中の黒の濃淡は要素の密度を表す。色が濃いほど材料の密度が高く、密度 ρ が1のときは黒に、0のときは白に対応している。図3の各構造の下に位相制約条件、得られた構造のひずみエネルギーおよび体積の誤差を示す。体積の誤差は $(V - V_c) \times 100 / V_c$ と定義した。ここで V_c は材料が設計領域に占める体積の指定値(設計領域の0.375倍)、 V は得られた構造の材料が実際に占める体積である。同図の(a-1)は位相制約条件を一切与えずに最適化を行った結果得られた構造であり、輪郭を成す部材の内側に2本の部材が斜めに配置されている。(a-2)、(a-3)および(a-4)は、構造が一体で連結であることと穴の個数が各々0個、1個および2個を上限とすることを位相制約条件として設定して最適化を行った結果である。穴の上限を3個とする場合も実行したが(a-1)とほぼ同じ構造が得られたので省略する。穴を0個とする(a-2)では大きな穴 h_1 を非常に低い密度の平板でふさぐ構造が得られた。これは、穴を0個に指定する設定が、寸法最適

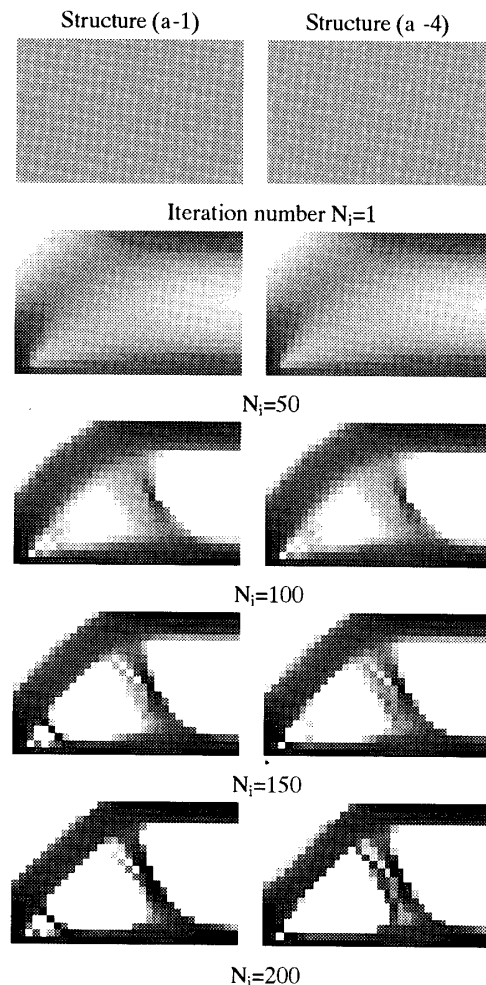


Fig. 4 Change in topology during optimization process

化問題をトポロジー最適化手法で無理に解くよう強いることを意味し、位相制約条件としては適切でないことを示していると考えられる。穴の個数の上限を1個とした(a-3)では輪郭を成す部材の内側に2本の部材が密度の薄い要素を介して一体化した1本の太い部材がみられる。これは(a-1)の構造から荷重の支持に余り役立たないと思われる左端の部材が削除され、その材料が右の部材の補強に使用された結果と考えられる。また設計領域の左下隅に小さな穴 h_2 がみられるがこれも(a-2)の h_1 と同様に密度の低い要素でふさがれている。穴の上限を2個とした(a-4)では(a-3)と似た構造が得られたが、設計領域左下隅の穴 h_3 が空洞である点は(a-3)と異なる。このようにひずみエネルギーの低減に実質的效果が薄いと思われる小さな穴も1個の穴として数えられる場合、(a-3)と(a-4)のように穴の個数の条件が異なっても結果として似た構造が得られることがある。(a-4)は穴の個数が1個の場合の最適解に等しいと考えて差し支えないと思われる。

次に図3中のひずみエネルギーに注目する。位相制約条件を課すと位相制約が無い場合の最適解から外れ

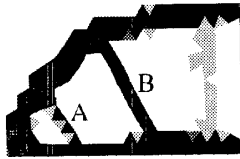
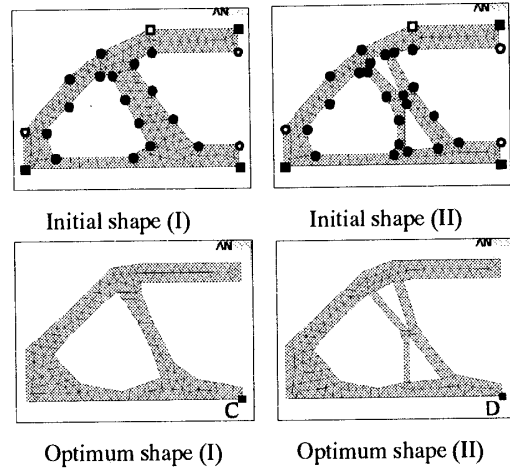


Fig. 5 Topology optimization using Ansys/ED (Ver.5.5)

た構造が得られるので, (a-2)~(a-4)のひずみエネルギーはいずれも(a-1)より高い値になっている. しかし最も高い値の(a-2)でも(a-1)の1.18倍で極端に高いわけではなく, (a-2)~(a-4)は荷重に耐える構造として成り立っている. したがって位相制約条件によって最適化手法の効果が著しく失われることはなく, 与えられた位相制約の中で最適に近い構造が探索されたと考えられる. またひずみエネルギーの値は位相制約条件における穴の個数の上限が大きいかほど概ね低くなる傾向が見られる. ただし, (a-3)では体積の誤差が他に比べて大きいので上記の傾向からはずれた低い値を示している.

図4に最適化の過程におけるトポロジーの変化の様子を示す. 同図中の左列は図3の構造(a-1), 右列は(a-4)の履歴であり, N_i は最適化のステップの繰り返し回数である. 両方とも収束に600回程度の繰り返し回数を要したが, トポロジーは200回程度までにほぼ形成されている. 左列と右列を比較すると, $N_i=100$ までは全く同じ変化をしているが, それ以降は異なった変化を示しており, 本手法による位相制約が正常に作用し始めていることを示している. $N_i=100$ の段階で左下隅に図3の穴 h_3 が形成され, 既に穴は2個に達している. そのため(a-4)では位相制約条件が働き, (a-1)のような穴は形成されなかったと考えられる.

図3の結果の妥当性を検証するため, 市販の有限要素解析アプリケーション Ansys/ED (Ver. 5.5) を用いてトポロジー最適化を行った. その結果を図5に示す. Ansys/EDでは“internal pseudo-density”を設計変数としてコンプライアンスを最小化する方法が採用されている. 同図では6節点の三角形要素を用いた. その他の条件は図3の(a-1)と同じである. 図5を図3の(a-1)と比較すると部材の形状や位置に幾分相違が見られるが, 両者のトポロジーは一致しており, 本報で採用した artificial model はトポロジー最適化手法として妥当であると考えられる. 図6は同じ Ansys/ED を用いて形状 (寸法) 最適化を行った結果である. 図5を参考に図6の上段に示す2種類の初期形状(I)および(II)を作成した. 初期形状(I)は図5から部材Aを除いた構造であり, 初期形状(II)は更に部材Bを図3の(a-3)のように2本の部材を組み合わせた形に置き換えた構造である. これらの初期形状から Ansys/ED の “First order



Strain energy: 1.579×10^4 (J), 1.569×10^4 (J)
Displacement $v_C: 2.979 \times 10^{-6}$ (m), $v_D: 2.938 \times 10^{-6}$ (m)

Fig. 6 Shape optimization using Ansys/ED (Ver.5.5)

method” (制約条件に関するペナルティ項を付加した目的関数を最急降下法と共役勾配法で最小化する方法) を用いてひずみエネルギーを最小化した結果, 各々図6の下段の最適形状(I)および(II)が得られた. 境界形状は同図の上段に示す各点○, □, ●および■を結ぶ直線から構成されており, 点■以外の座標値を設計変数とした. ただし, 点□では x 座標のみを, 点○では y 座標のみを, 点●では x および y 座標を設計変数とし, 各々初期値から ± 20 mmの範囲内で変化させた. トポロジーは初期形状から変化させていない. 形状最適化の結果, 最適構造のひずみエネルギーは(II)が(I)より0.62%低く, 垂直方向の変位は最適構造(II)の点Dにおける値 v_D が(I)の点Cの値 v_C より1.4%小さくなった. 図6と図3は単純に比較できないが, 輪郭を成す部材の内側には図3の(a-3)および(a-4)のような2本の部材を組み合わせた構造を用いる方が1本の部材よりも僅かながら優れていることが図6より推測され, 図3の結果は妥当であると思われる.

図7は図1の設計領域(b)を用いた結果である. 設計領域(b)は縦, 横共に25等分して625個の正方形要素に分割した. 図7の(b-1)は位相制約条件を与えずに得られた構造, (b-2)は構造が一体で連結とする条件と穴の個数の上限を2個とする位相制約を課した結果である. 穴の上限を0個, 1個および3個とする場合についても最適化を実行したが, 図3と同様の傾向が見られたので省略する. すなわち穴が0個のときは密度の低い平板で大きな穴をふさぐ不適切な構造が得られ, 穴の上限を1個とするときは穴が2個の(b-2)と, 穴を3個とするときは制約のない(b-1)とほぼ同じ構造が得られた. (b-1)では輪郭を成す部材の内側に放射状に配置された2本の部材が見られるが, (b-2)の内側に

は太い部材が1本のみ存在する。設計領域(a)を用いた図3のような幅の広い部材は形成されなかったが、これは主に分布荷重と集中荷重の相違が影響したのではないかと考えられる。また図3の場合と同様、位相制約を課さない構造のひずみエネルギーの方が低い値を示している。

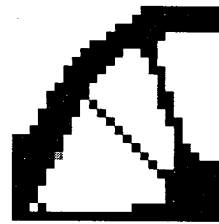
以上の結果から本手法により位相制約条件を満たすことができ、本手法が正常に機能することが示されたといえる。ただし、穴を密度の低い平板でふさいだ構造が見られる、あるいは穴の指定個数が異なっても類似した構造が得られる等、設計者の意図しない結果が得られる場合もあり、本手法には利用に際して注意すべき点や改良すべき点があることも分った。また、artificial modelによる最適化手法は位相制約条件がなくとも最適化の過程で常に構造を連結に保てるので、0次元ホモロジー群に対する位相制約条件については明確な効果を確認できなかった。

6. 結言

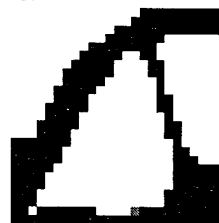
本報では位相幾何学ホモロジー論を利用して構造最適化の過程で発生するトポロジーの変化を逐次予測する方法を提案した。これにより構造のトポロジーに対して位相制約条件を課することが可能になった。数値計算例では artificial model (密度法とほぼ同じ)を用いた平板のトポロジー最適化問題に本手法を適用した。位相制約条件として構造が一体で連結であること、穴が指定個数以下であることの2点を設定した。その結果、以下の所見を得た。

(1)ホモロジー群で記述された位相制約条件は本手法により正常に満たすことができる。(2)位相制約条件を課すと余り荷重の支持に寄与していないと思われる部材が削除され、他の部材が補強される傾向がある。(3)位相制約条件を課すと構造全体のひずみエネルギーは制約がない構造よりも高くなるが、極端な上昇ではない。(4)位相制約条件において穴の個数の上限を大きくする程、ひずみエネルギーの低い構造が得られる傾向がある。(5)穴の個数を0個とする位相制約条件は、低い密度の要素を多く発生させる。(6)穴の指定個数に異なる値を設定しても非常に似た構造が得られる場合がある。

今後は本手法を artificial model 以外のトポロジー最適化手法に適用し、本手法の汎用性を確認すると共に0次元ホモロジー群に対する位相制約(構造を連結に保つ制約)が有効に機能する応用方法を検討する。またトポロジーの変化が位相制約条件に反する場合、本報では要素の密度を強制的にしきい値に変える方法を採用したが、これは低い密度の要素を発生させる原因



(b-1) Topological constraints : None
Strain Energy : 0.96×10^{-4} (J)



(b-2) Topological constraints : $\tilde{H}_0(K)=0, H_1(K) \cong Z \oplus Z$
Strain energy : 1.24×10^{-4} (J)

Fig.7 Structures obtained using design domain (b)

になる場合が多いので改良が必要であると考えられる。

参考文献

- (1) 瀬山, トポロジー:柔らかな幾何学, (1991), 日本評論社.
- (2) 中岡 稔, 復刊 位相幾何学 ホモロジー論, (1999), 共立出版.
- (3) 加藤, 数学シリーズ 位相幾何学, (1991), 裳華房.
- (4) 横田一郎, 初めて学ぶ人のための群論入門, (1997), 現代数学社.
- (5) 中西, 中桐, 機論, **62**-596, A(1996), 1098-1103.
- (6) 中西, 中桐, 機論, **63**-605, A(1997), 189-194.
- (7) 中西, 機論, **68**-670, A(2002), 850-857.
- (8) M. P. Bendsøe, A. Diaz and N. Kikuchi, *Topology Design of Structures* (M. P. Bendsøe and C. A. Mota Soares eds.), (1993), Kluwer Academic Publishers, 159-205.
- (9) e.g., R. J. Yang and C. H. Chuang, *Computers & Structures*, **52**-2, (1994), 265-275.
- (10) 例えば, 松井, 寺田, 西脇, 日本機械学会 第5回最適化シンポジウム講演論文集, (2002), 247-252.
- (11) e.g., R. B. Haber, C. S. Jog and M. P. Bendsøe, *ASME, Advances in Design Automation*, **69**-2, (1994), 261-272.
- (12) 鷺津, 宮本, 山田, 山本, 川井, 有限要素法ハンドブック I 基礎編, (1994), 培風館.
- (13) 伊理, 岩波講座応用数学 1 基礎 1 線形代数 I, (1993), 岩波書店, 79-84.
- (14) 伊理, 岩波講座応用数学 11 基礎 1 線形代数 II, (1994), 岩波書店, 235-236.