

凹面壁に沿う乱流壁面噴流の安定性に関する一考察*

藤沢延行**, 白井紘行**

On the Stability of Turbulent Wall Jets Along Concave Surfaces

by Nobuyuki FUJISAWA and Hiroyuki SHIRAI

Stability analysis for the occurrence of Taylor-Görtler vortices in turbulent wall jets along concave surfaces is studied by comparative experiment. The eddy viscosity expression in the perturbation equations are determined from a modified version of a two-equation turbulence model including curvature, which predicts well the main features of the turbulent wall jets along concave surfaces. From the stability analysis, it is found that the minimum curvature at the neutral stability state decreases slightly as the Reynolds number increases. Then, the theoretical minimum curvature reaches good agreement with the experiment, when the eddy viscosity expression is treated as a function of curvature.

Key Words: Turbulence, Stability, Wall Jet, Numerical Analysis, Taylor-Görtler Vortex, Concave Surface, Turbulence Model

1. 緒 言

乱流壁面噴流は、最大速度の位置を境として、壁側の壁乱流的特性と噴流領域の自由噴流的特性をあわせもつ流れとして知られている。それは、工学上、固体表面の境界層制御や温度制御に関連して応用されるため、従来より、しばしば研究課題として取り上げられてきた。しかし、その乱流の構造については、いまだに解明されていない問題点が多く残されている⁽¹⁾⁽²⁾。

乱流壁面噴流が曲率の大きい凹面壁に沿って応用される場合、その特性は、流線わん曲の影響と同時に、壁領域の速度分布が遠心力に対して不安定となることから生じる Taylor-Görtler 渦の発生が問題となる⁽³⁾。事実、大曲率凹面壁に沿う乱流壁面噴流に対する実験⁽⁴⁾⁽⁵⁾によると、壁面噴流の半値幅 b と固体表面の曲率半径 R の比で表した曲率 b/R が $0.17 \sim 0.27$ より大きくなると、壁面噴流の壁領域に強い二次流れが発生し、同時に壁面噴流内の乱流混合が急激に増大する。

一方、凹面壁に沿う乱流壁面噴流が遠心力によって

不安定となる中立安定条件は、凹面壁に沿う乱流境界層の安定性解析⁽⁶⁾⁽⁷⁾と同様、渦動粘度を用いた理論解析から求めることができる⁽³⁾⁽⁸⁾。しかし、乱流壁面噴流では、渦動粘度を、平均速度とレイノルズ応力の実験値から定めると、それは平均速度が最大となる位置付近で不定となり、十分な精度で安定条件を得ることはできない。また、不安定が発生する曲率値は、乱流境界層の結果と比べかなり大きいため、従来行われてきたような平面壁に対する渦動粘度を用いた解析では、第一次近似としての結果しか望めない。

本報では、このような問題点を考慮に入れて、凹面壁に沿う乱流壁面噴流の安定性をより厳密に取扱う方法を示すとともに、その中立安定条件を実験と対比検討することを目的とする。

2. 記 号

b : 半値幅

C : 曲率 $= y_m/R$

k : 乱れエネルギー $= (\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2})/2$

M : 無次元化された渦動粘度

p : 圧力

R : 固体表面の曲率半径

Re_m : レイノルズ数 $= U_m y_m / \nu$

* 昭和59年11月24日 東北支部仙台地方講演会において講演、原稿受付 昭和60年5月20日。

** 正員、群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1)。

- t : 時間
- U, V : x, y 軸方向の時間平均速度成分
- U_m : 壁面噴流断面内の最大速度
- U_r : 摩擦速度
- u, v, w : x, y, z 軸方向の速度
- u_1, v_1, w_1 : x, y, z 軸方向の Taylor-Görtler 渦形変動速度振幅
- $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$: 無次元化された Taylor-Görtler 渦形変動速度振幅
- u', v', w' : x, y, z 軸方向の乱れ変動速度
- x, y, z : 直交曲線座標系 (図 1)
- y_m : 平均速度最大の位置
- β : Taylor-Görtler 渦形変動の空間増幅率
- ϵ : 散逸率
- η : 無次元距離
- λ : Taylor-Görtler 渦形変動の波長
- ν : 流体の粘度
- ν_t : 渦動粘度
- ρ : 流体の密度
- σ : 無次元化された Taylor-Görtler 渦形変動の波数 $= 2\pi y_m / \lambda$

添字

max: 最大値

min: 最小値

η : η に関する微分

3. 理 論

3-1 基礎方程式 図 1 に示すように、一定曲率半径 R の凹面壁上の任意の位置 O を原点として、直交曲線座標系 (x, y, z) をとり、その x 軸に沿って乱流壁面噴流を考える。このとき、各軸方向の速度成分を u, v, w とすると、非圧縮性乱流の運動方程式は、次のように書き表される。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{R}{R-y} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{uv}{R-y}$$

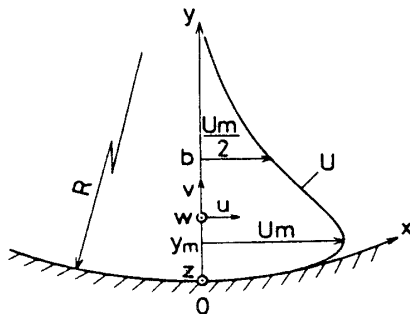


図 1 凹面壁に沿う乱流壁面噴流

$$= \frac{1}{R-y} \left[\frac{R \partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \{ (R-y) T_{yx} \}}{\partial y} + \frac{\partial \{ (R-y) T_{zx} \}}{\partial z} - T_{xx} \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{R}{R-y} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{u^2}{R-y} = \frac{1}{R-y} \left[\frac{R \partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \{ (R-y) T_{yy} \}}{\partial y} + \frac{\partial \{ (R-y) T_{zy} \}}{\partial z} + T_{xx} \right] \dots \dots \dots (2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{R}{R-y} u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{R-y} \left[\frac{R \partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \{ (R-y) T_{yz} \}}{\partial y} + \frac{\partial \{ (R-y) T_{zz} \}}{\partial z} \right] \dots \dots \dots (3)$$

連続の式は、

$$\frac{R}{R-y} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{v}{R-y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots \dots \dots (4)$$

となる。ここに、式(1)~(3)に含まれる応力テンソル T の各成分は、渦動粘度 ν_t を用いて次のように表される。

$$T_{xx} = -\frac{p}{\rho} + 2(\nu + \nu_t) \left(\frac{R}{R-y} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{v}{R-y} \right) \dots \dots \dots (5)$$

$$T_{yy} = -\frac{p}{\rho} + 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial v}{\partial y} \dots \dots \dots (6)$$

$$T_{zz} = -\frac{p}{\rho} + 2(\nu + \nu_t) \frac{\partial w}{\partial z} \dots \dots \dots (7)$$

$$T_{xy} = T_{yx} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{R}{R-y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{u}{R-y} \right) \dots \dots \dots (8)$$

$$T_{xz} = T_{zx} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{R}{R-y} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (9)$$

$$T_{yz} = T_{zy} = (\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 p は圧力、 ρ は密度、そして ν は動粘度である。ただし、以下では $w \ll u$ の条件下において理論を展開するため、式中の ν_t の値は、すべての方向に対して同じとした⁽⁹⁾。

速度 u, v, w は、次に示すように、時間平均速度成分 U, V と Taylor-Görtler 渦形変動速度成分に分けて扱う。

$$u = U(x, y) + u_1(y) \exp \left\{ \int \beta(x) dx \right\} \cos(2\pi z / \lambda) \dots \dots \dots (11)$$

$$v = V(x, y) + v_1(y) \exp \left\{ \int \beta(x) dx \right\} \cos(2\pi z / \lambda) \dots \dots \dots (12)$$

$$w = w_1(y) \exp \left\{ \int \beta(x) dx \right\} \sin(2\pi z/\lambda) \dots (13)$$

ただし、 $\beta(x)$ は Taylor-Görtler 渦形変動の空間増幅率を表す⁽¹⁰⁾。式(11)~(13)を式(1)~(10)に代入して、 $u_1, v_1, w_1 \ll U, V$ および $(y_m/R)^2$ のオーダーの項を省略すると、最終的に中立安定状態 ($\beta=0$) を支配する無次元化された変動方程式が次のように得られる。

$$(M+1)\bar{u}_{\eta\eta} + \{M_\eta - C(M+1) - \bar{V}\}\bar{u}_\eta + \{CM_\eta - \sigma^2(M+1) + \bar{V}_\eta\}\bar{u} = (\bar{U}_\eta - C\bar{U})\bar{v} \dots (14)$$

$$(M+1)\bar{v}_{\eta\eta\eta} + \{M_\eta - 2C(M+1) - \bar{V}\}\bar{v}_{\eta\eta} + \{M_{\eta\eta} - CM_\eta - 2\sigma^2(M+1) - \bar{V}_\eta + C\bar{V}\}\bar{v}_{\eta\eta} - \{CM_{\eta\eta} + \sigma^2 M_\eta - 2C\sigma^2(M+1) - C\bar{V}_\eta - \sigma^2 \bar{V}\}\bar{v}_\eta + \sigma^2 \{M_{\eta\eta} + \sigma^2(M+1) + \bar{V}_\eta\}\bar{v} = -2Rem^2 C\sigma^2 \bar{U}\bar{u} \dots (15)$$

$$\sigma\bar{w} = -v_\eta \dots (16)$$

ただし、小文字 η は η に関する微分を表す。ここに、 $C = y_m/R$, $M = \nu_t/\nu$, $Rem = U_m y_m/\nu$, $\bar{U} = U/U_m$, $\bar{V} = Rem \cdot V/U_m$, $\bar{u} = u_1/U_m$, $\bar{v} = Rem \cdot v_1/U_m$, $\bar{w} = Rem \cdot w_1/U_m$, $\eta = y/y_m$, $\sigma = 2\pi y_m/\lambda$ であり、これらはすべて無次元量である。ただし、 y_m は平均速度が最大となる位置であり、 C は y_m で無次元化した曲率、 Rem はレイノルズ数である。

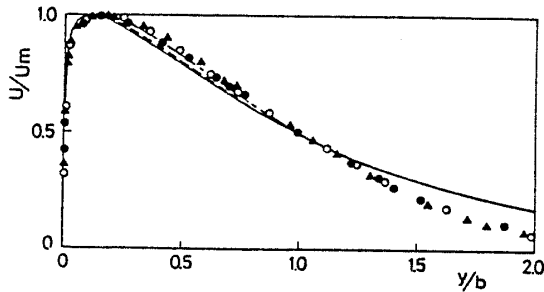


図2 平均速度分布
 予測 (—: $b/R=0$,: $b/R=0.086$, ---: $b/R=0.166$),
 実験 (●: $b/R=0$ ⁽¹⁴⁾, ○: $b/R=0.086$ ⁽¹⁷⁾, ▲: $b/R=0.166$)

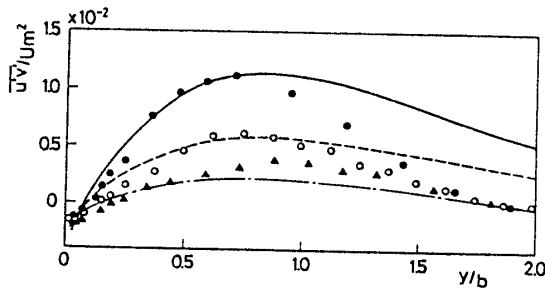


図3 レイノルズ応力分布
 (図の説明は、図2と同じ)

式(14), (15)の満たすべき境界条件は、壁面および噴流の十分外側の位置において、無次元変動速度振幅 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w} = 0$ で与えられる。この条件は、式(16)を用いると、次式となる。

$$\eta = 0, \infty : \bar{u} = \bar{v} = \bar{w} = 0 \dots (17)$$

3.2 変動方程式中の各パラメータ 凹面壁に沿う乱流壁面噴流の渦動粘度 ν_t を、

$$-\overline{u'v'} = \nu_t \left\{ \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U}{R} \right\} \dots (18)$$

の関係から逆算すると、平均速度が最大となる $\partial U/\partial y = 0$ の位置付近で ν_t は不定となり、この位置付近の ν_t は十分な精度で得ることはできない。そのため、 ν_t は、乱れエネルギー k と散逸率 ϵ を用いた Kolmogorov-Prandtl の関係式

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \dots (19)$$

に従って算出する。ただし、 C_μ の値は、よく知られた一定値 0.09⁽¹¹⁾ とすると、十分な精度で凹面壁面噴流の特性を予測することが困難であるため⁽¹²⁾、 C_μ はレイノルズ応力方程式を用いて壁面からの距離と曲率の関数と考える(付録)。 C_μ は、式(34)~(38)のように表される。式(19)から ν_t を求める場合、散逸 ϵ に対する十分な精度の実験結果が得られていないことから、 k, ϵ は、次に示すように、曲率の影響を考慮した方程式から求める。 k の方程式は、

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + \left(1 - \frac{y}{R}\right) V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right\} + \nu_t \left\{ \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U}{R} \right\}^2 - \epsilon \dots (20)$$

ϵ の方程式は、

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + \left(1 - \frac{y}{R}\right) V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right\} + C_{\epsilon 1} \frac{\epsilon}{k} \nu_t \left\{ \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U}{R} \right\}^2 - C_{\epsilon 2} \frac{\epsilon^2}{k} \dots (21)$$

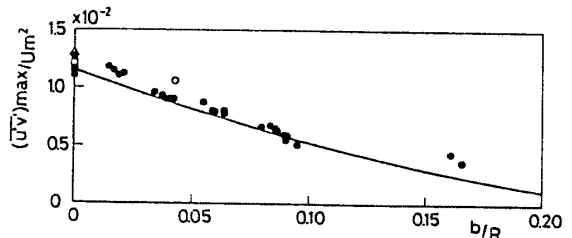


図4 レイノルズ応力の最大値 $(\overline{u'v'})_{\max}/U_m^2$ と曲率 b/R の関係
 予測 (—), 実験 (●: 小林・藤次⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾, □: Tailland ら⁽¹³⁾, ○: Spettel ら⁽¹⁴⁾, △: Wilson ら⁽¹⁵⁾)

となる。ここに、経験定数は、 $\sigma_s=0.7$, $\sigma_e=1.3$, $C_{e1}=1.44$, $C_{e2}=1.92$ とする⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。一方、運動方程式(1), (2)において、定常、二次元、境界層近似の条件を施し、さらに圧力 p を消去すると、

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial U}{\partial x} + \left(1 - \frac{y}{R}\right) V \frac{\partial U}{\partial y} &= \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\partial}{\partial y} \\
 &\times \left\{ \nu_t \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{UV}{R} - \frac{2\nu_t}{R} \right. \\
 &\times \left. \left\{ \left(1 - \frac{y}{R}\right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U}{R} \right\} - \frac{1}{(R-y)} \frac{d}{dx} \int_y^\infty U^2 dy \right. \\
 &\dots\dots\dots(22)
 \end{aligned}$$

が得られる。

式(20)~(22)の境界条件⁽¹²⁾は、壁面近傍の局所平衡と考えられる領域 ($U_\tau y/\nu=30\sim 50$) において

$$k = U_\tau^2 / 0.239 \dots\dots\dots(23)$$

$$\epsilon = U_\tau^3 / (0.461y) \dots\dots\dots(24)$$

$$U/U_\tau = 5.0 \log_{10}(U_\tau y/\nu) + 4.9 \dots\dots\dots(25)$$

噴流外側の位置において、

$$k = \epsilon = U = 0 \dots\dots\dots(26)$$

と表される。式(20)~(22)および境界条件式(23)~(26)を差分化して数値計算⁽¹²⁾を行った結果として、 k, ϵ, U, V が得られる。

図2~4は、上述の方法で求めた予測結果と実験結果^{(13)~(17)}の比較を示す。図2は、平均速度 \bar{U} に対する結果であるが、凹面壁面噴流の \bar{U} の予測値と実験値はほぼ一致する。図3は、式(18), (19)を用いて算出したレイノルズ応力 $\overline{u'v'}/U_m^2$ の壁面噴流断面内分布

を示す。また、レイノルズ応力分布の最大値 $(\overline{u'v'})_{\max}/U_m^2$ と曲率 b/R の関係を図4に示す。図2~4から、壁領域および噴流領域のうち $y/b \leq 0.8$ では、広い凹曲率範囲で予測と実験が一致するが、 $y/b \geq 0.8$ では、多少相違する。しかしながら、安定条件に対する予備的計算結果から、 $y/b \geq 0.8$ の領域における $\overline{u'v'}/U_m^2$ の予測と実験の相違は、あまり安定条件の大小関係には関与しない。したがって、上述の方法から求めた M, \bar{U}, \bar{V} などの各パラメータ値を用いて乱流壁面噴流の安定条件を十分な精度で得ることができると考えられる。

3.3 数値計算法

3.2節に示した方法によって無次元パラメータ M, \bar{U}, \bar{V} およびそれらの η に関する微分値を与えると、変動方程式(14), (15)および境界条件式(17)は、 Re_m, σ のある設定値に対して、曲率 C を固有値とし、変動速度振幅 \bar{u}, \bar{v} を固有関数とする連立常微分方程式と考えられる。その数値計算法としては、式(14), (15)および式(17)を差分形式に展開し、 \bar{u}, \bar{v} の分布に順次修正を加えつつ、それらがある分布に収束するまで計算を繰返す逐次近似法を用いた。その収束条件は、 C の値が η 方向に一定値となる条件から判定される。

4. 結果および考察

4.1 中立安定曲線

図5は、凹面壁に沿う乱流壁面噴流の中立安定状態における曲率 C と波数 σ ($= 2\pi y_m/\lambda$) の関係を示す。ただし、レイノルズ数 $Re_m = 10^4$ である。図5の曲線の上側の領域は、遠心力に起因する不安定の発生が予想される領域であり、この領域内の壁面噴流内には二次流れとして Taylor-Görtler 渦が存在すると考えられる。図5では、 $\sigma \approx 2.2$ 付近に曲率 C の最小値 $C_{\min} \approx 0.0325$ が存在するが、この C_{\min} より小さい曲率では、壁面噴流は常に安定である。

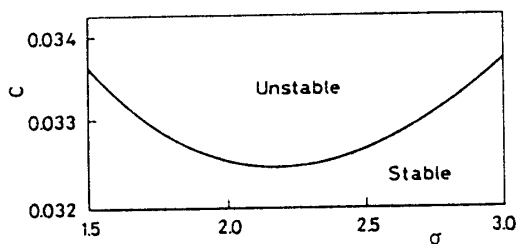


図5 凹面壁に沿う乱流壁面噴流の中立安定曲線 ($Re_m = 10^4$)

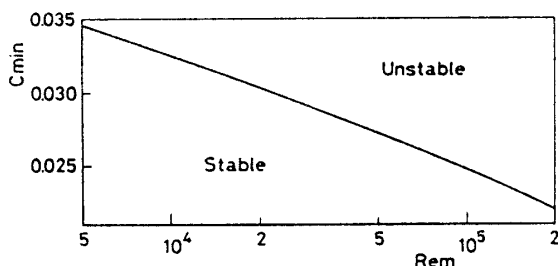


図6 最小曲率 C_{\min} とレイノルズ数 Re_m の関係

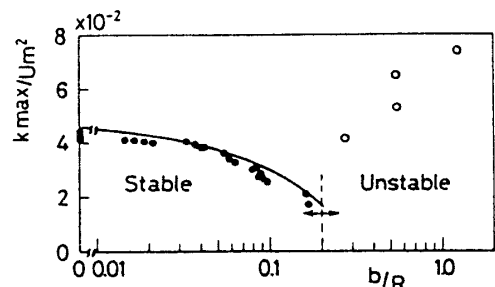


図7 乱れエネルギーの最大値 k_{\max}/U_m^2 と曲率 b/R

図6は、不安定の発生する可能性のある最小曲率 C_{min} とレイノルズ数 Re_m 間の関係を表す。 Re_m が増大すると C_{min} は減少し、同一曲率では、 Re_m が大きいほど壁面噴流が不安定となる最小曲率は小さくなる。

4.2 実験との比較 図7は、凹面壁に沿う乱流壁面噴流の実験⁽⁵⁾⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾から得られた乱れエネルギーの最大値 k_{max}/U_m^2 と曲率 b/R の関係を表す。 $b/R \leq 0.17$ では、 k_{max}/U_m^2 は b/R の増大とともに減少するが、これは、3.2節に示した乱流モデルを用いた予測結果(図7の実線)とも良く一致している。一方、 $b/R \geq 0.27$ の領域では、反対に k_{max}/U_m^2 は増大し、壁面噴流内の乱流混合が活発になる。このとき、流れの可視化による観察において、強い二次流れが認められ、遠心力に起因する不安定が発生したものと推定される⁽⁵⁾。図7には、この実験点を○印で示す。したがって、不安定の発生する最小曲率は $(b/R)_{min} = 0.17 \sim 0.27$ と考えられる。ただし、実験の行われたレイノルズ数範囲は、 $Re_m = (0.9 \sim 1.3) \times 10^4$ である。一方、図6から、この Re_m に対する理論最小曲率は、 $C_{min} = 0.032 \sim 0.033$ と求まる。このとき、凹面壁面噴流に対する関係 $y_m/b \approx 0.16$ ⁽¹⁷⁾を用いると、半値幅 b を基準とした理論最小曲率は $(b/R)_{min} \approx 0.20$ となる。したがって、凹面壁に沿う乱流壁面噴流内に遠心力に起因する不安定が発生する理論値と実験値は一致する。

4.3 理論に対する考察 渦動粘度 ν_t を曲率に依存しないと仮定すると、理論最小曲率は、 $Re_m = 10^4$ に対して $(b/R)_{min} = 0.43$ となり、 ν_t に対する曲率依存性を考慮することによって $(b/R)_{min}$ はかなり減少する。一方、式(11)~(13)の変動を時間増幅型と仮定した場合、および式(14)、(15)で曲率 C に関する一次の項を省略した場合には、 $(b/R)_{min}$ は減少の傾向を示すが、その減少量はいずれも10%以内と少ない。また、凹面壁面噴流では、式(12)の平均速度の V 成分が平面壁の場合と比べかなり小さくなるため、その影響は安定条件にあまり関与しない。

5. 結 論

凹面壁に沿う乱流壁面噴流内に遠心力に起因する不安定が発生する中立安定条件を、より厳密に理論解析する方法を示すとともに、得られた中立安定条件を実験結果と比較検討した。得られた結果は、次のように要約される。

- (1) 乱流壁面噴流内に遠心力に起因する不安定が発生する理論上の最小曲率は、レイノルズ数に弱く依存し、レイノルズ数が大きくなると減少する。
- (2) 理論最小曲率は、実験において二次流れの発

生が観察されるとともに乱流混合が活発となる曲率と良く一致する。

(3) 乱流壁面噴流の安定性を検討する際に、渦動粘度を乱れエネルギーと散逸率で表し、さらにそれを曲率の関数とすることの重要性を示した。

なお、本研究において助言をいただいた東北大学 小林陵二教授および協力を得た群馬大学 高草木文雄氏、当時学部学生 佐藤智之君に謝意を表す。また、群馬大学科学技術振興会の助成を得たことを付記して謝辞とする。

付 録

高レイノルズ数を仮定すると、レイノルズ応力 $(\overline{u_i u_j})$ に関する方程式は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\overline{u_i u_j}) - \text{Dif}(\overline{u_i u_j}) = & \\ & - \overline{u_i u_i} \frac{\partial U_j}{\partial x_i} - \overline{u_j u_i} \frac{\partial U_i}{\partial x_i} \\ & + \frac{\rho'}{\rho} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \varepsilon \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

ただし、 $\text{Ad}(\overline{u_i u_j})$ 、 $\text{Dif}(\overline{u_i u_j})$ は、それぞれ $\overline{u_i u_j}$ の対流および拡散を表す。また、上式の右辺第4項では散逸の局所等方性⁽¹⁸⁾を仮定した。いま、式中の $\text{Ad}(\overline{u_i u_j})$ 、 $\text{Dif}(\overline{u_i u_j})$ を乱れエネルギー k の対流 $\text{Ad}(k)$ および拡散 $\text{Dif}(k)$ を用いて、

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\overline{u_i u_j}) - \text{Dif}(\overline{u_i u_j}) = & \frac{\overline{u_i u_j}}{k} \{ \text{Ad}(k) - \text{Dif}(k) \} \\ & \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

と近似し⁽¹⁹⁾、さらに、圧力歪相関(右辺第3項)を壁面補正モデルを用いて表すと^{(20)~(23)}、式(27)、(28)から $\overline{u'v'}$ に関する式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} -\overline{u'v'} = & \left\{ \frac{1 - C_2(1 - 1.5C_2f)}{C_1(1 + 1.5C_1f/C_1) + P_1/\varepsilon - 1} \right\} \frac{\overline{v'^2} \cdot k}{\varepsilon} \\ & \times \left\{ \left(1 - \frac{y}{R} \right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U}{R} + 2 \left(\frac{\overline{v'^2}}{u'^2} - 1 \right) \frac{U}{R} \right\} \quad \dots\dots\dots (29) \end{aligned}$$

一方、式(18)、(19)を用いると、

$$-\overline{u'v'} = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \left\{ \left(1 - \frac{y}{R} \right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U}{R} \right\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる。式(30)の C_μ は、式(29)との比較から、次式のようになる。

$$\begin{aligned} C_\mu = & \frac{(1 - C_2)\{1 + 1.5C_2C_2f/(1 - C_2)\}}{(C_1 + P_1/\varepsilon - 1)\{1 + 1.5C_1f/(C_1 + P_1/\varepsilon - 1)\}} \\ & \times \frac{\overline{v'^2}}{k} \left\{ 1 + \frac{2U(\overline{u'^2}/\overline{v'^2} - 1)}{(R - y) \frac{\partial U}{\partial y} + U} \right\} \quad \dots\dots\dots (31) \end{aligned}$$

ここに、

$$P_1 = -\overline{u'v'} \left\{ \left(1 - \frac{y}{R} \right) \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U}{R} \right\} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$f = k^{1.5} / (C_w y \varepsilon) \quad \dots\dots\dots (33)$$

である。ただし、経験定数値は、 $C_1=1.8$, $C_2=0.6$, $C'_1=0.6$, $C'_2=0.3$, $C_w=3.72$ とする⁽¹²⁾。式(27), (28) から同様にして、 $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ を導き、それらを式(31)に代入すると、最終的に C_μ は次式で表される。

$$C_\mu = 0.09 G_1 G_2 \{1 - (G_3 - 1) R_i\} \quad \dots\dots\dots (34)$$

$$G_1 = \frac{1 + 1.5 C_2 C'_2 f / (1 - C_2)}{1 + 1.5 C'_1 f / (C_1 + P_1/\varepsilon - 1)} \quad \dots\dots\dots (35)$$

$$G_2 = \frac{1 - 2 C_2 C'_2 P_1/\varepsilon / (C_1 - 1 + C_2 P_1/\varepsilon)}{1 + 2 C'_1 f / (C_1 - 1 + P_1/\varepsilon)} \quad \dots\dots\dots (36)$$

$$G_3 = C_3 \left\{ 1 + \frac{(C_2 C'_2 P_1/\varepsilon + 1.5 C'_1 G_2) f}{C_1 - 1 + (3 - 2 C_2) P_1/\varepsilon} \right\} / G_2 \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$R_i = \frac{-2U/R}{(1 - y/R)\partial U/\partial y + U/R} \quad \dots\dots\dots (38)$$

ただし、壁面の影響を補正するパラメータ $f=0$, および $R \rightarrow \infty$ のとき、自由噴流に対する経験定数 $C_\mu = 0.09$ ⁽¹¹⁾ とした。また、 C_3 は平面壁面噴流の実験値⁽¹⁶⁾ $\overline{u^2}$ と $\overline{v^2}$ の関係から定めた経験定数であり、 $C_3=1.2$ とする。

文 献

- (1) Launder, B. E. and Rodi, W., *Prog. Aerospace Sci.*, **19** (1981), 81.
- (2) Launder, B. E. and Rodi, W., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **15** (1983), 429.
- (3) Kobayashi, R. and Fujisawa, N., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **47-3** (1980), 671.
- (4) 小林・ほか2名, 東北大学高速力学研究所報告, **46-404** (昭56), 97.
- (5) Kobayashi, R. and Fujisawa, N., *Acta Mech.*, **47** (1983), 39.
- (6) Tani, I., *J. Geophys. Res.*, **67-8** (1962), 3075.
- (7) Sandmayr, G., *Dtsch. Luft-Raumfahrt Forschungsber.*, **66-41** (1966).
- (8) Fujisawa, N., ほか2名, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **52-2** (1985), 492.
- (9) Marvin, J. G., *AIAA J.*, **21-7** (1983), 941.
- (10) Smith, A. M. O., *Q. Appl. Math.*, **13-3** (1955), 233.
- (11) Launder, B. E. and Spalding, D. B., *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **3** (1974), 269.
- (12) 藤沢, 機論, **51-466, B** (昭60), 1745.
- (13) Tailland, A. and Mathieu, J., *J. Méc.*, **6-1** (1967), 103.
- (14) Spettel, F., ほか2名, *J. Méc.*, **11-3** (1972), 403.
- (15) Wilson, D. J. and Goldstein, R. J., *Trans ASME, Ser. I.*, **98-3** (1976), 550.
- (16) Kobayashi, R. and Fujisawa, N., *Rep. Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ.*, **45-352** (1982), 95.
- (17) 小林・藤沢, 機論, **49-440, B** (昭58), 757.
- (18) Hanjalić, K. and Launder, B. E., *J. Fluid Mech.*, **52-4** (1972), 609.
- (19) Rodi, W., *Z. Angew. Math. Mech.*, **56** (1976), 219.
- (20) Rotta, J., *Z. Phys.*, **129** (1951), 547.
- (21) Launder, B. E., ほか2名, *J. Fluid Mech.*, **68-3** (1975), 537.
- (22) Dary, B. J. and Harlow, F. H., *Phys. Fluids*, **13-11** (1970), 2634.
- (23) Gibson, M. M. and Launder, B. E., *J. Fluid Mech.*, **86-3** (1978), 491.