

周期外圧をうける円筒かくの動的不安定に 及ぼす軸対称振動の影響*

永井 健一^{*1}, 八巻 昇^{*2}

Influence of Axisymmetric Bending Vibrations on the Dynamic Instability of Circular Cylindrical Shells Under Periodic External Pressure

Ken-ichi NAGAI and Noboru YAMAKI

Theoretical analyses are presented for the title problem under four sets of boundary conditions. By the use of the Galerkin procedure, the Donnell equations modified with the transverse inertia force are reduced to the coupled Hill's equations. Stability regions are examined by utilizing Hsu's method.

Calculations are carried out for typical shells and the instability boundary of the principal, secondary and combination parametric resonances are determined. It is found that unperturbed axisymmetric bending motion has a significant effect on the stability boundary for shells of moderate length while the effect of longitudinal resonance is generally negligible for thin shells.

Key Words: Vibration of Continuous System, Dynamic Instability, Circular Cylindrical Shell, Periodic External Pressure, Stability Boundary

1. 緒 言

円筒かくは軽量構造要素の一つとして宇宙構造物、航空機などに広く用いられている。これらに周期的な変動圧力が作用するとその圧力振幅が十分小なる場合でも、軸対称の振動変形から激しい非軸対称振動が誘起される係数励振形の動的不安定現象が存在する。これらの現象が精密な制御系への外乱として支障をきたすことや疲労破壊の一因となることも考える。近年航空機、ロケットなどが過酷な荷重条件のもとで使用され、これに伴う安全設計の必要性をかんがみると上記現象を解明することは工学上重要といえる。周期外力をうけるかくの動的不安定問題に関し、その不安定領域を明らかにすることが主要な課題で、すでにいくつかの研究^{(1)~(7)}がある。しかし安定を失う前の変形状態を膜理論で近似し、解析の容易な境界条件のもとでの解は得られているが、安定を失う前の軸対称曲げ振動の影響を考慮に入れて各種境界条件のもとに結合形不安定現象を含めて解析した研究は少ない。著者らは

先に周期せん断荷重をうける同種の問題では結合形不安定現象をまた周期軸荷重をうける場合には不安定前の軸対称曲げ振動の影響を考慮に入れ理論的に解析した⁽⁸⁾⁽⁹⁾。

本報では、周期的な外圧をうける円筒かくの動的不安定問題を、安定を失う前の軸対称曲げ振動の影響を考慮に入れ、代表的な4種の境界条件のもとに理論的に解析し、主要な主、副ならびに結合形不安定領域を明らかにした。解法はドンネルの式に横方向慣性力を考慮に入れ、ガレルキン法を適用し、連立のヒルの方程式に変換し、ついでその安定境界をHsuの方法を用いて定めた。なお代表的な円筒かく形状に対し、数値計算を行い不安定領域を定めるとともに、安定を失う前の変形を膜理論により近似した場合の結果との比較検討も行った。

2. 基礎式および境界条件

半径 R 、厚さ h 、長さ L の両端が閉じた円筒かくに静的ならびに周期的な流体圧もしくは側圧 $P = P_0 + P_1 \cos \Omega t$ (P_0, P_1 は静圧および周期圧振幅, Ω, t はそれぞれ加振角振動数および時間) を作用させた場合の動的不安定問題を考える。

図1に示すごとく、かくの中央面上に x, y 軸を、そ

* 昭和62年4月1日 第64期通常総会講演会において講演、原稿受付 昭和61年10月27日。

*¹ 正員、群馬大学工業短期大学部 (〒376 桐生市天神町1-5-1)。

*² 正員、東北大学高速力学研究所 (〒980 仙台市片平2-1-1)。

れに垂直に z 軸を定める。問題を十分に薄いかくの低次の曲げ振動の振動数領域に限定すると、せん断変形、面内ならびに回転慣性の影響は無視できる。安定を失う直前の x と z 方向の軸対称変位成分をそれぞれ U_0, W_0 , 断面力成分を N_{x0}, N_{y0} とする。つぎに安定を失った直後の微小増分変位を U, V, W それに基づく増分断面力を N_x, N_y, N_{xy} , 応力関数を F とする。なお Ω および P_1 はそれぞれ、かくの面内共振振動数および座屈圧力に比べて十分に小さいものとする。安定を失う直前の軸対称変形を支配する無次元化された基礎式は式(1)から(4)で与えられ、安定を失った直後の非軸対称増分に関する基礎式はドンネルの式に横方向慣性力を考慮し、式(5)から(7)のごとくなる。

$$n_{x0} = -(k_p \epsilon / 2c)(p_0 + p_1 \cos \omega \tau) \dots\dots\dots (1)$$

$$n_{y0} = \nu n_{x0} - \alpha w_0 \dots\dots\dots (2)$$

$$w_{0,\tau\tau} + w_{0,\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon} + (p_0 k_p \epsilon / 2) w_{0,\epsilon\epsilon} + \alpha^2 c w_0 = (1 - \nu \epsilon / 2) k_p \alpha (p_0 + p_1 \cos \omega \tau) \dots\dots\dots (3)$$

$$u_{0,\epsilon} + (1/2) w_{0,\epsilon}^2 = n_{x0} - \nu n_{y0} \dots\dots\dots (4)$$

$$\bar{\nabla}^4 f = -\alpha w_{,\epsilon\epsilon} - \beta^2 w_{0,\epsilon\epsilon} w_{,\eta\eta} \dots\dots\dots (5)$$

$$L(w_0, w, f) \equiv w_{,\tau\tau} + \bar{\nabla}^4 w - \alpha c f_{,\epsilon\epsilon} - c(\beta^2 f_{,\eta\eta} w_{0,\epsilon\epsilon} + n_{x0} w_{,\epsilon\epsilon} + \beta^2 n_{y0} w_{,\eta\eta}) = 0 \dots\dots\dots (6)$$

$$\bar{\nabla}^2 = \partial^2 / \partial \xi^2 + \beta^2 \partial^2 / \partial \eta^2 \dots\dots\dots (7)$$

ここで、つぎの記号を導入している。

$$\begin{aligned} \xi &= \pi x / L, \quad \eta = \pi y / l, \quad l = \pi R / N \\ (u_0, u, v) &= (U_0, U, V)(L / \pi h^2) \\ (w_0, w) &= (W_0, W) / h \\ (n_{x0}, n_{y0}, n_x, n_y, n_{xy}) &= (N_{x0}, N_{y0}, N_x, N_y, N_{xy})(L^2 / \pi^2 E h^3), \quad f = F / E h^3 \\ \alpha &= L^2 / \pi^2 R h = (Z / \pi^2 \sqrt{1 - \nu^2}) \\ Z &= \sqrt{1 - \nu^2} L^2 / R h, \quad \beta = L / l = (L / \pi R) N \\ c &= 12(1 - \nu^2), \quad (p_0, p_1) = (P_0, P_1) / P_{cr} \\ P_{cr} &= k_p \pi^2 D / R L^2, \quad \omega = \Omega / \Omega_0 \\ \Omega_0 &= (\pi^2 / L^2) \sqrt{D / \rho h}, \quad \tau = \Omega_0 t \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

上式において $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$ はかくの曲げ剛性、 E はヤング率、 ν はポアソン比、 ρ は密度、カンマの後の添字はそれに関する偏微分を意味する。

また N, l は円周方向の波数および半波長、 α (また

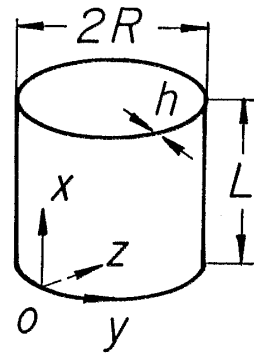


図1 円筒かくの諸元と座標系

は Z), β はそれぞれ円筒かくの形状および波数に関する無次元量、 P_{cr}, k_p は静的座屈圧力とそれに対応する係数、 ω と τ は無次元の加振振動数と時間である。

なお式(1), (3)における ϵ は流体圧の場合 $\epsilon = 1$, 側圧の場合 $\epsilon = 0$ とする**1。

断面力と応力関数との関係は

$$n_x = \beta^2 f_{,\eta\eta}, \quad n_y = f_{,\epsilon\epsilon}, \quad n_{xy} = -\beta f_{,\epsilon\eta} \dots\dots (9)$$

変位成分と応力関数の関係は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} u_{,\epsilon} + w_{0,\epsilon} w_{,\epsilon} &= \beta^2 f_{,\eta\eta} - \nu f_{,\epsilon\epsilon} \\ \beta v_{,\eta} - \alpha w &= f_{,\epsilon\epsilon} - \nu \beta^2 f_{,\eta\eta} \\ \beta u_{,\eta} + v_{,\epsilon} + \beta w_{0,\epsilon} w_{,\eta} &= -2(1 + \nu) \beta f_{,\epsilon\eta} \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

円筒かく両端における境界条件として、増分変位 w に関し、つぎの場合を考える。

$$\xi = 0, \pi :$$

- C1: $w = w_{,\epsilon} = 0, \quad u = v = 0 \dots\dots\dots (11 \cdot a)$
- C2: $w = w_{,\epsilon} = 0, \quad n_x = n_{xy} = 0 \dots\dots\dots (11 \cdot b)$
- S1: $w = w_{,\epsilon\epsilon} = 0, \quad u = v = 0 \dots\dots\dots (11 \cdot c)$
- S2: $w = w_{,\epsilon\epsilon} = 0, \quad n_x = n_{xy} = 0 \dots\dots\dots (11 \cdot d)$

なお上記記号、C は固定、S は単純支持の場合に、(1)は面内変位を許さない、(2)は自由とする場合にそれぞれ対応する。さらに w_0 に関しては C1, C2 および S1, S2 の各場合に対応して、次式を満足するものとする。

- C1, C2: $w_0 = w_{0,\epsilon} = 0 \dots\dots\dots (12 \cdot a)$
- S1, S2: $w_0 = w_{0,\epsilon\epsilon} = 0 \dots\dots\dots (12 \cdot b)$

与えられた境界条件のもとで、かくは一般に定常的な軸対称曲げ振動 w_0 のみが励起され、式(5), (6)の解 w は零以外の解をもたず安定であるが、特定な圧力振幅と振動数の組合せにより、 w は時間とともに発散する解をもち、不安定となる。問題は円筒かくの諸量(形状係数 Z , ポアソン比 ν , 波数 N)と境界条件が指定された場合、解 w が不安定となる p_0, p_1, ω の組合せ、すなわち安定境界を定めることにある。

**1 流体圧の場合、式(3)での $w_{0,\epsilon\epsilon}$ の係数 $p_1 \cos \omega \tau$ の影響は小さいとして省略した。これは p_1 が十分小さく、かつ ω が最低次軸対称固有曲げ振動数の2倍以下の場合には許される。また不安定前の変形を膜理論で近似した式は、上記各式で w_0 を含む項をすべて零とし、式(2)を $n_{y0} = -(k_p/c)(p_0 + k_1 \cos \omega \tau)$ と置換することにより得られる。

3. 解 法

解法は基礎式にガレルキン法を用いて有限多自由度系の係数励振問題へ変換すること、ついでその安定性を吟味することよりなる。なおかくの両端が固定で、面内変位を許さない場合の境界条件式(11・a)につき主に説明する。

3・1 有限自由度系の問題への変換 まず安定を失う前の変形に関する基礎式(3)の解 w_0 を境界条件式(12・a)を考慮に入れて、次式のごとく仮定する。

$$w_0(\xi, \tau) = \sum_r a_r(\tau) [\cos(r-1)\xi - \cos(r+1)\xi], \quad (r=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (13)$$

なお $a_r(\tau)$ は未知の時間関数である。上記を式(3)に代入し、ガレルキン法を適用すると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & (2a_r - a_{r-2} - a_{r+2})_{,rr} + [(a_{r-1} + a_{r+1})a_r - a_{r-1}a_{r-2} - a_{r+1}a_{r+2}] \\ & = 2\delta_{r1}(1 - \nu\varepsilon/2)ak_p(p_0 + p_1 \cos \omega\tau), \quad (r=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

ただし $a_r = r^4 + 12Z^2/\pi^4 - p_0 k_p r^2 \varepsilon/2$, $a_r(r < 0) = -a_{|r|}$

なお δ_{ij} はクロネッカーのデルタで、 a_r は r が負の場合 $-a_{|r|}$ の値をとるものとする。上式の定常解を次式(15)のごとくおき、式(14)に代入すると、 $a_{r0}, a_{r1}(r=1, 3, 5, \dots)$ に関する連立一次方程式を得る。 p_0, p_1, ω の各値に対しこれを解くことにより、それぞれ a_{r0}, a_{r1} が定まる。

$$a_r = a_{r0} + a_{r1} \cos \omega\tau, \quad (r=1, 3, 5, \dots) \dots\dots\dots (15)$$

また $p_1=0$ とおき、上記同様の方法を用い a_{r1} に関する同次式から、この場合の固有振動数 $\bar{\omega}_{(r)}(r=1, 3, 5, \dots)$ ならびに対応する固有振動形が定まる。なお振動数はかく中央に関して対称であるもののみが定常解として存在する。さらに零でない定常解は添字 r が奇数次の場合にのみ $\omega = \bar{\omega}_{(r)}$ 近傍をのぞいて定まる。

つぎに増分変位に関し、円周方向波数を N とし、境界条件式(11・a)を考慮に入れ、 w をつぎのごとく仮定する。

$$\left. \begin{aligned} & w(\xi, \eta, \tau) = \sum_n b_n(\tau) \zeta_n(\xi, \eta), \quad (n=1, 2, 3, \dots) \\ & \zeta_n(\xi, \eta) = [\cos(n-1)\xi - \cos(n+1)\xi] \cos \eta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (16)$$

ただし $b_n(\tau)$ は未知時間関数、 $\zeta_n(\xi, \eta)$ は座標関数である。式(13)、(16)を式(5)に代入し、その一般解を求めると次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} & f = (A_i \cosh \beta\xi + B_i \beta\xi \sinh \beta\xi + C_i \sinh \beta\xi + D_i \beta\xi \cosh \beta\xi) \cos \eta \\ & + \alpha \sum_n b_n [\lambda_{n-1} \cos(n-1)\xi - \lambda_{n+1} \cos(n+1)\xi] \cos \eta \\ & - (1/2) \sum_r \sum_r a_r b_n \{ (r-1)^2 [\gamma_{r-n} \cos(r-n)\xi - \gamma_{r-n-2} \cos(r-n-2)\xi \\ & - \gamma_{r+n} \cos(r+n)\xi + \gamma_{r+n-2} \cos(r+n-2)\xi] + (r+1)^2 [\gamma_{r-n} \cos(r-n)\xi \\ & - \gamma_{r-n+2} \cos(r-n+2)\xi - \gamma_{r+n} \cos(r+n)\xi + \gamma_{r+n+2} \cos(r+n+2)\xi] \} \cos \eta \\ & (i=1, 2; r=1, 3, 5, \dots; n=1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\text{ただし } [\lambda_n, \gamma_n] = [n^2, \beta^2] / (n^2 + \beta^2)^2 \dots\dots\dots (18)$$

上式中の A_i から D_i は任意の時間関数であり、上式ならびに式(13)、(16)を式(10)に代入して u, v を求め、境界条件式(11)の残りの条件からそれぞれ決定される。なお添字 $i=1, 2$ はそれぞれ C1, C2 の両場合に対応する。

以上により w および f は $b_n(\tau)$ をのぞき、すべて定まったことになる。この $b_n(\tau)$ を決定するため、残りの基礎式(6)にガレルキン法を適用すると、座標関数 $\zeta_s(\xi, \eta)$ に関し、つぎの条件式を得る。

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} L(w_0, w, f) \zeta_s(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0, \quad (s=1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (19)$$

上式に w_0, w, f を代入し、積分を実行して整理すると、 b_n に関し、つぎの連立二階常微分方程式を得る。

$$\sum_n \{ A_{sn} b_{,rr} + (B_{sn} - p_0 k_p C_{sn}) b_n - p_1 \cos \omega\tau k_p C_{sn} b_n + (12/\pi^5) Z^2 \beta^2 [D_{sn}^{(i)} + \Phi_{sn}^{(i)} + \Psi_{sn}^{(i)}] b_n \} = 0, \quad (i=1, 2; s, n=1, 3, 5, \dots \text{または } 2, 4, 6, \dots) \dots\dots\dots (20)$$

上式は添字 s, n がともに奇数および偶数の場合に対して、それぞれ独立な運動方程式群に分離できる。C1の場合の係数をつぎに示す。

$$\begin{aligned} A_{sn} &= \delta_{s1} + 2\delta_{sn} - \delta_{s,n-2} - \delta_{s,n+2}, \quad B_{sn} = \beta^4 \delta_{s1} + (\beta_{s-1} + \beta_{s+1}) \delta_{sn} - \beta_{s+1} \delta_{s,n-2} - \beta_{s-1} \delta_{s,n+2} \\ C_{sn} &= (\varepsilon/2) \{ \nu\beta^2 \delta_{s1} + 2[s^2 + 1 + \nu\beta^2] \delta_{sn} - [(s+1)^2 + \nu\beta^2] \delta_{s,n-2} - [(s-1)^2 + \nu\beta^2] \delta_{s,n+2} \} \\ D_{sn}^{(i)} &= -\Gamma_s [\mu_s + (1+\nu)\nu_s] [\mu_n + (1+\nu)\nu_n] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{sn}^{(i)} &= E_{sn} + F_{sn} + F_{ns} + G_{sn}^{(i)} + G_{ns}^{(i)}, \quad \Psi_{sn}^{(i)} = H_{sn} + I_{sn}^{(i)} \\ E_{sn} &= (\pi/2\alpha)[3(a_{s-n-1} - a_{s-n+1} - a_{s+n-1} + a_{s+n+1}) - a_{s-n-3} + a_{s-n+3} + a_{s+n-3} - a_{s+n+3}] \\ F_{sn} &= (\pi/2)[(\lambda_{s-1} + \lambda_{s+1})(c_{s-n} - c_{s+n}) - \lambda_{s-1}(c_{s-n-2} - c_{s+n-2}) - \lambda_{s+1}(c_{s-n+2} - c_{s+n+2})] \\ G_{sn}^{(i)} &= -\Gamma_s[\mu_s + (1 + \nu)\nu_s] \sum_{p=0}^i (\lambda_p - \nu\gamma_p) d_{p,n} \\ H_{sn} &= (\pi/4) \sum_{p=0}^i \gamma_p (-c_{p-s-1} + c_{p-s+1} + c_{p+s-1} - c_{p+s+1}) d_{p,n} \\ I_{sn}^{(i)} &= \Gamma_s \sum_{p=0}^i \sum_{q=0}^i (\lambda_p - \nu\gamma_p)(\lambda_q - \nu\gamma_q) d_{p,s} d_{q,n} \\ & (p, q = 0, 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ただし, $\beta_s = (s^2 + \beta^2)^2 + (12/\pi^4)Z^2 s^4 (s^2 + \beta^2)^{-2}$

$$\mu_s = 8s\rho_s, \nu_s = 8s[(s^2 - 1)^4 - \beta^4]\rho_s^2, \rho_s = \{[(s-1)^2 + \beta^2][(s+1)^2 + \beta^2]\}^{-1}$$

$$\Gamma_s = 2\beta[C + (-1)^s][(1 + \nu)(3 - \nu)S + (-1)^s(1 + \nu)^2\beta\pi]^{-1}$$

$$S = \sinh \beta\pi, \quad C = \cosh \beta\pi, \quad c_n = c_{-n} = (n^2/\alpha)(a_{n-1} - a_{n+1})$$

$$d_{p,n} = -c_{p-n-1} + c_{p-n+1} + c_{p+n-1} - c_{p+n+1} - \delta_{p0}(c_{n-1} - c_{n-1}) \dots\dots\dots (22)$$

なお上記の p, q の総和に関して $p+s, q+s$ がそれぞれ奇数の場合についてのみ行うものとする。 λ_n, γ_n, a_n はそれぞれ式(18)および(14)で定義してある。 $\Phi_{sn}^{(i)}, \Psi_{sn}^{(i)}$ は安定を失う前の変形に関連して、それぞれ c_r についての一次および二次の項を有する**2。

なお両端が単純支持の場合 w_0, w を境界条件式(12・b), (11・c), (11・d)を考慮し次式のごとくおき上記同様の方法にて解析できる。

$$w_0(\xi, \tau) = \sum_r a_r(\tau) \sin r\xi, \quad w(\xi, \eta, \tau) = \sum_n b_n(\tau) \sin n\xi \cos \eta \quad (r, n = 1, 2, 3, \dots) \dots\dots\dots (23)$$

3・2 安定境界の決定 運動方程式(20)は、軸対称振動の定常解(15)を考慮に入れて整理すると、つぎの連立したヒルの方程式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_n [A_{sn} b_{n,\tau\tau} + R_{sn} b_n - (p_1 \cos \omega\tau P_{sn} + p_1^2 \cos 2\omega\tau Q_{sn}) b_n] &= 0 \\ (s, n = 1, 3, 5, \dots \text{または } 2, 4, 6, \dots) \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

なお R_{sn}, P_{sn}, Q_{sn} は一般に $Z, \nu, N, k_p, p_0, \omega$ の関数で添字 s, n に関して対称であることが確かめられる**3。

式(24)において、慣性項ならびに時間項を省略し、 $b_n \equiv b_{n0}, p_0 = 1, p_1 = 0$ とおき、 b_{n0} に関する係数行列式を零とおくことにより波数 N に対する座屈圧力係数 k_p が定まる。ついで式(24)で $p_1 = 0, b_n = b_{n1} \cos \omega\tau$ とおき、 b_{n1} に関する係数行列式から、静圧 p_0 が作用している場合の波数 N に対応する無次元固有振動数 $\bar{\omega}_i \equiv \Omega_i/\Omega_0$ ならびに対応する固有ベクトル $\phi_{ij}(i, j = 1, 3, 5, \dots \text{または } 2, 4, 6, \dots)$ が定まる。これより固有振動形 \bar{w}_i に基づく基準座標 \bar{b}_i を導入すると実際のたわみ w はつぎのごとくなる。

$$\begin{aligned} w &= \sum_j \bar{b}_j \bar{w}_j, \quad \bar{w}_j = \sum_i \psi_{ji} \zeta_j(\xi, \eta), \quad \psi_{ji} = \phi_{ij} [\sum_k \sum_l \phi_{ik} A_{kl} \phi_{il}]^{-1/2} \\ (i, j, k, l = 1, 3, 5, \dots \text{または } 2, 4, 6, \dots) \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

上式と式(16)から b_j と \bar{b}_j との関係を求め、式(24)に代入し、 $p_1 \ll 1$ であることを考慮に入れると $\bar{b}_i(\tau)$ に関するつぎの標準形の連立ヒルの式を得る**4。

$$\begin{aligned} \bar{b}_{i,\tau\tau} + \bar{\omega}_i^2 \bar{b}_i - p_1 \cos \omega\tau \sum_j \bar{P}_{ij} \bar{b}_j - p_1^2 \cos 2\omega\tau \sum_j \bar{Q}_{ij} \bar{b}_j &= 0 \\ \bar{P}_{ij} = \sum_k \sum_l \psi_{ki} P_{kl} \psi_{lj}, \quad \bar{Q}_{ij} = \sum_k \sum_l \psi_{ki} Q_{kl} \psi_{lj} \quad (i, j, k, l = 1, 3, 5, \dots \text{または } 2, 4, 6, \dots) \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

上式の安定性に関して不安定領域としては主、副ならびに結合形不安定領域が重要である。これを求めるため、Hsuの方法⁽⁷⁾を適用すると、和形の結合形不安定領域の安定境界の第1近似解は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \omega/\omega_{ij} &= 1 \pm \theta_{ij} p_1, \quad \omega_{ij} = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j, \quad \theta_{ij} = |\bar{P}_{ij}| [2(\bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j) \sqrt{\bar{\omega}_i \bar{\omega}_j}]^{-1} \\ (i, j = 1, 3, 5, \dots \text{または } 2, 4, 6, \dots) \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

**2 膜理論により近似した場合の式は、上記 $\Phi_{sn}^{(i)}, \Psi_{sn}^{(i)}$ を省略し、 C_{sn} をつぎのごとくおきにより得られる。

$$C_{sn} = \beta^2 \delta_{s1} + [\varepsilon(s^2 + 1) + \beta^2] \delta_{sn} - [\varepsilon(s+1)^2/2 + \beta^2] \delta_{s,n-2} - [\varepsilon(s-1)^2/2 + \beta^2] \delta_{s,n+2}$$

**3 膜理論により近似を行った場合、式(24)においてつぎの係数をもつ連立のマチウの式が得られる。

$$R_{sn} = B_{sn} - p_0 k_p C_{sn} + (12/\pi^5) Z^2 \beta^2 D_{sn}^{(i)}, \quad P_{sn} = k_p C_{sn}, \quad Q_{sn} = 0$$

**4 $p_1 \neq 0$ の場合式(26)第2項係数 $\bar{\omega}_i^2$ の外に p_1^2 を含む項が生ずるが、 $p_1 \ll 1$ であることより一般に $\omega \sim \bar{\omega}_i$ をのぞいて $\bar{\omega}_i^2$ と比べ微量となるので省略した。

ただし ω_{ij} および θ_{ij} はそれぞれ不安定領域の中心振動数および広がり係数に対応し、 $\bar{\omega}_i, \bar{\omega}_j$ は同一の円周方向波数 N をもつ任意の固有振動数である。なお $p_1 \ll 1$ により \bar{P}_{ij} は $\omega = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j$ の値をとるものとする。

つぎに主不安定領域の安定境界の第 1 近似式は上式で $i=j$ とおくことにより得られる。

$$\omega/\bar{\omega}_i = 1 \pm \theta_{ii} p_1, \quad \omega_{ii} = 2\bar{\omega}_i, \quad \theta_{ii} = |P_{ii}|(4\bar{\omega}_i^2)^{-1} \quad (i=1, 2, 3, \dots) \quad (28)$$

さらに副不安定領域の安定境界は Hsu の方法により第 2 近似式まで求めると、

$$\begin{aligned} \omega/\bar{\omega}_i &= 1 + \theta_{ii}^{(+)} p_1^2, \quad \omega/\bar{\omega}_i = 1 - \theta_{ii}^{(-)} p_1^2 \\ \theta_{ii}^{(+)} &= (1/4) \bar{\omega}_i^{-2} \{ \bar{Q}_{ii} - (1/2) \sum_k \bar{P}_{ik} (\bar{\omega}_k^2 - 4\bar{\omega}_i^2)^{-1} \} \\ \theta_{ii}^{(-)} &= (1/4) \bar{\omega}_i^{-2} \{ \bar{Q}_{ii} + \sum_k \bar{P}_{ik} \bar{P}_{ki} [\bar{\omega}_k^2 + (1/2)(\bar{\omega}_k^2 - 4\bar{\omega}_i^2)^{-1}] \} \end{aligned} \quad (29)$$

なお $\bar{\omega}_k = n\bar{\omega}_i$ (n : 整数) とし、 $\bar{P}_{ik}, \bar{Q}_{ii}$ はいずれも $\omega = \bar{\omega}_i$ における値とする。以上によりこの場合の波数 N に対応する不安定領域が決定されたことになる。

4. 計算結果

解析結果にもとづき、主に周期的な流体圧の作用する円筒かく形状 $Z=100$ につき各境界条件のもとで最低固有振動数の数倍の範囲にわたり数値計算を行った。なおポアソン比を $\nu=0.3$ 、かくの半径-厚さ比を $R/h=400$ とし、境界条件 C1 の場合には $Z=10, 1000$ の両場合を考慮に入れた。

4.1 座屈圧力 未定係数 b_{n0}, a_{r0} ($n, r=1, 3, 5, \dots$) をそれぞれ最初の 8 項用いて各場合の座屈圧力係

表 1 各場合の座屈圧力および波数 (流体圧)

$$k_p = (RL^2/\pi^2 D) P_{cr}, \quad \beta_p = (L/\pi R) N_p, \quad R/h=400, \quad \nu=0.3$$

Case	Z	B.D. considered			B.D. neglected		
		k_p	N_p	β_p	k_p'	N_p'	β_p'
C1	10	6.354	29	1.49	6.133	29	1.49
	100	14.86	18	2.93	14.77	18	2.93
	1000	47.95	11	5.67	47.86	11	5.67
C2	100	12.24	17	2.77	12.38	17	2.77
S1	100	14.09	18	2.93	13.89	18	2.93
S2	100	10.53	15	2.44	10.68	16	2.61

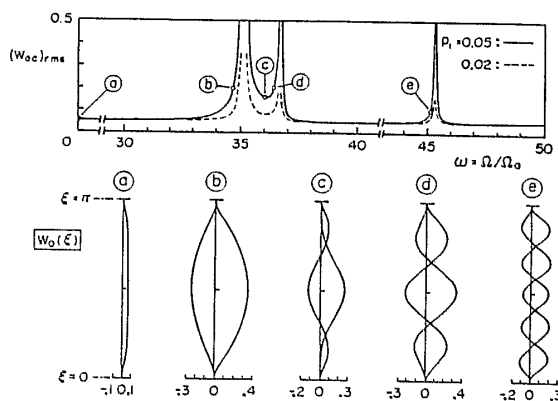


図 2 軸対称曲げ振動振幅と振動形 (流体圧: C, $Z=100, p_0=0.5$)

数 $k_p = (RL^2/\pi^2 D) P_{cr}$ と対応する円周方向波数 N_p の値を決定した。計算結果を表 1 に示す。なお膜理論近似による結果 k_p', N_p' をもあわせて示した。ここで $\beta_p = (L/\pi R) N_p$ は式 (8) で定義した波数係数である。本報における k_p の値を著者の一人がすでに求めた正確な結果⁽¹⁰⁾と比較すると、約 0.4% 以内の値を得た。これより本報の計算結果は工学上十分な精度をもつものと認められる。

4.2 安定を失う前の軸対称曲げ振動 a_{r0}, a_{r1} をそれぞれ 8 項考慮に入れ、 $C, Z=100$ 、静圧 $p_0=0.5$ の場合の軸対称曲げ振動を図 2 に示す。図 2 中の縦軸 (w_{0c})_{rms} はかくの中央における振幅 w_0 の実効値を、横軸は加振振動数 ω を示す。下図は上図の代表点における、 $p_1=0.05$ の場合の振動形 ($\tau=0, \pi/\omega$ における $w_0(\xi)$) を示す。b, d, e 点は第一、第三次および第五次の振動形にそれぞれ対応する。a 点は静圧の影響による静的変形を示し、この場合かく内側へ厚さの約 5% ほどのたわみを有していることがわかる。

4.3 非軸対称曲げ振動の固有振動数と振動形

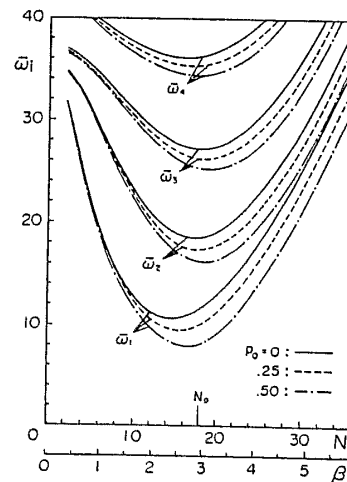


図 3 非軸対称曲げ振動の固有振動数と波数 (流体圧: C1, $Z=100, R/h=400$)

C1, Z=100 の場合の円周方向波数と固有振動数の関係を図3に示す。縦軸は無次元固有振動数 $\bar{\omega}_i$ 、横軸は波数 N (波数係数 β) である。座屈波数 N_p もあわせ示す。図より、静圧の増大にともなう固有振動数の減少の割合は、一般に N_p より大なる波数をもつ振動形にて大きい。最低次固有振動形において特に著しいことがわかる。なお対応する固有振動形は、静圧が増大しても $p_0=0.5$ までほとんど変化がないことを確かめた。

4.4 各場合の不安定領域 各場合の不安定領域を非軸対称曲げ振動の最低固有振動数の数倍の範囲にて計算した。なお不安定領域の表示は不安定領域の中心振動数 ω_{ij} と広がり係数 θ_{ij} ならびに膜理論近似で求めた広がり係数 θ'_{ij} をそれぞれ円周方向波数 N (または β) に対して図示することにする。C1, Z=100, 静圧 $p_0=0$ の場合の結果を図4に示す。下図の ω_{ij} から、 ω を増加させた場合、逐次現れる不安定領域の中心振動数ならびに誘起される振動形 (次数ならびに円周方向波数) が定まり、上図の θ_{ij} , θ'_{ij} から、対応する不安定領域の幅が決定される。なお ω_{ij} の図には軸対称曲げ振動数 $\bar{\omega}_{(r)}$ ($r=1, 3, 5$)、座屈波数 N_p および第一次の最低固有振動数に対応する波数 N_1 の値もあわせ示した。これからつぎのことが認められる。

(1) 周期的な流体圧のもとで、円周方向波数 N の各値に対応して、 i 次の固有振動数 $\bar{\omega}_i$ の2倍の近傍に主不安定領域が、また $i+j$ が偶数を満足する場合に第 i 次と j 次の振動形が誘起される結合形不安定領域がそれぞれの固有振動数の和近傍 ($\omega = \bar{\omega}_i + \bar{\omega}_j$) に存在する。なお周期的な側圧が作用する場合も同様

である。

(2) 膜理論近似による θ'_{ij} は波数 N に対して単調な分布を示し、その最大値は N_p 近傍の最低次の振動形に対応する主不安定領域であり、その大きさは $p_0=0$ の場合約0.25となる。二、三次の次数の主不安定領域では、いずれも0.2以下である。なお結合形不安定領域に関しては、極めて小さく θ'_{11} の約1%程度である。

(3) 不安定となる前の軸対称曲げ振動を考慮した場合の不安定領域の θ_{ij} は波数 N に対して複雑な分布を示す。これは軸対称曲げ振動数 $\bar{\omega}_{(r)}$ が問題となる ω_{ij} の範囲内にあつて、軸対称共振の影響により θ_{ij} が急激に増大するためである。これにともない膜理論近似では無視できた結合形不安定領域 (特に θ_{13} に対応するもの) も十分大きな不安定領域の幅をもって現れてくる。なお図には示さないが静圧の増加にともない、 ω_{ij} および $\bar{\omega}_{(r)}$ はわずかに減少し互いの大きさの関係も多少変化することを確かめた。ゆえに θ_{ij} は静圧による一般的な増大のほか、 $\bar{\omega}_{(r)}$ 近傍においては上記理由による複雑な影響をうけることになる。

つぎに動的安定におよぼす円筒かく形状の影響を調べる。C1の場合について、形状係数 $Z=10, 1000$ とした場合の計算結果を図5に示す。まず図5(a)から $Z=10$ のかくでは、低次の軸対称固有振動数 $\bar{\omega}_{(r)}$ は問題としている ω_{ij} の範囲よりも低周波領域に移行して、 $\bar{\omega}_{(3)}$ のみが ω_{ij} に近接する可能性が生ずる。それより θ_{ij} におよぼす影響は $\bar{\omega}_{(3)}$ 近傍では著しく大きくなるが局部的なものとなる。また $\bar{\omega}_{(3)}$ 以下では θ'_{ij} の値より小さいことがわかる。これは軸対称曲げ振動の位

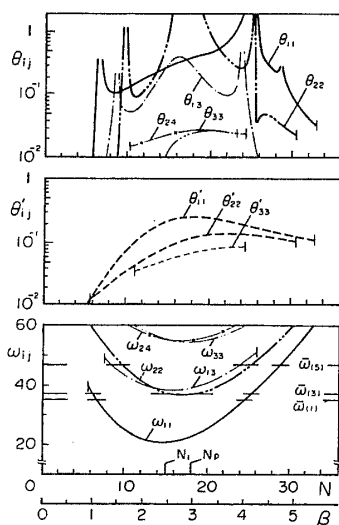
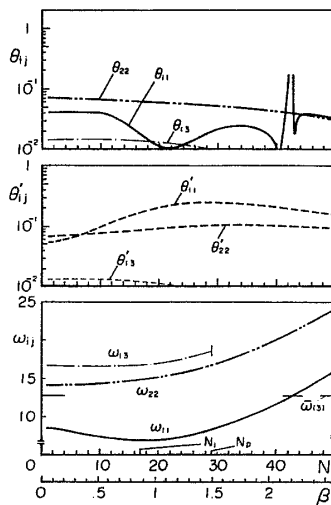
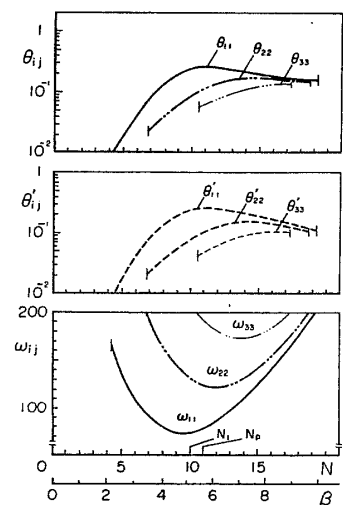


図4 不安定領域の中心振動数と広がり係数 (流体圧: C1, Z=100, $p_0=0$, $R/h=400$)



(a) Z=10



(b) Z=1000

図5 不安定領域の中心振動数と広がり係数 (流体圧: C1, $p_0=0$, $R/h=400$)

相の変化が周期断面力の大きさを減ずることによる。つぎに $Z=1000$ の場合には $\bar{\omega}(r)$ は高周波領域 ($\bar{\omega}_{(1)} \sim 350$) に移行し、それにより θ_{ij} におよぼす影響はほとんどなく θ'_{ij} とほぼ同じ値をとる。

さらに不安定領域におよぼす軸対称曲げ振動の影響を吟味する。軸対称曲げ振動および非軸対称曲げ振動における最低固有振動数をそれぞれ $\Omega_{(1)}$, Ω_1 とすると、近似的に $\Omega_{(1)} \sim 0.35Z(\pi^2/L^2)\sqrt{D/\rho h}$, $\Omega_1 \sim 1.0\sqrt{Z}(\pi^2/L^2)\sqrt{D/\rho h}$ で表される⁽¹¹⁾。これより $\Omega_{(1)}/\Omega_1 \sim 0.35\sqrt{Z}$ 、他の境界条件の場合にも同様な結果が得られる。いま考慮する振動数範囲を Ω_1 の数倍に限定し、主不安定領域の最低中心振動数が $2\Omega_1$ であることを考慮する

と、安定を失う前の軸対称曲げ振動数の影響はおおよそ $50 < Z < 400$ 程度においてもっとも著しいことがわかる。なお $Z < 50$ の比較的短い円筒かくにおいては不安定領域の中心振動数が $\Omega_{(1)}$ の2倍となつて、安定性を失う前の軸対称曲げ振動が係数的に励振される可能性が予想されるが、その影響は前述のごとく考慮していない。ただし周期的な側圧が作用する場合には、この種の現象は生じない。

さらに動的不安定におよぼす境界条件の影響を調べる。 $Z=100$, $p_0=0$ の場合に対し、境界条件を S1, S2, と変えた場合の結果を図6に示す。境界条件の相違により、 $\bar{\omega}(r)$, $\bar{\omega}_i$ などとも変化するから、 ω_{ij} の波数 N に対する関係も当然変わるが、一般に C1 と S1, C2 と

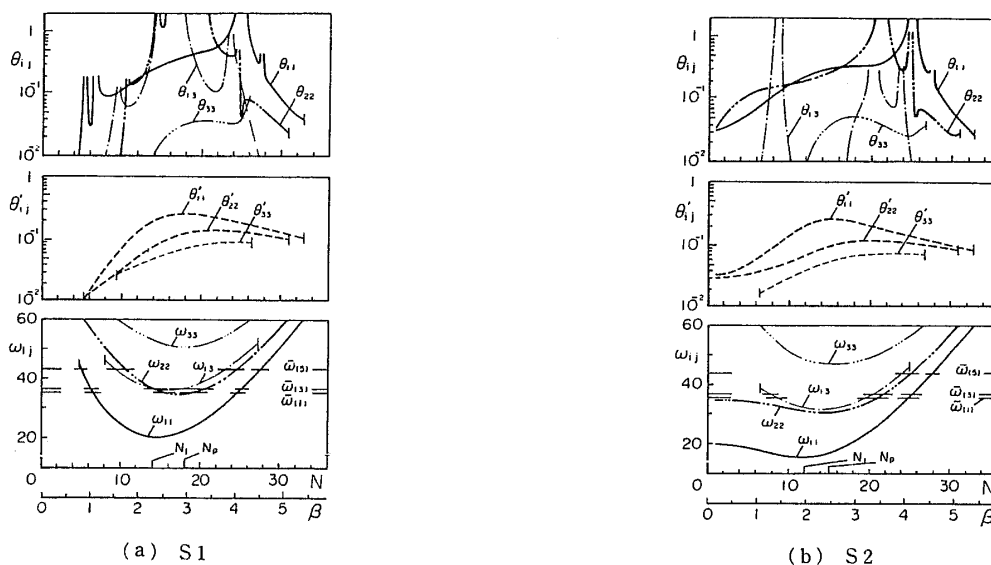


図6 不安定領域の中心振動数と広がり係数(流体圧: $Z=100$, $p_0=0$, $R/h=400$)

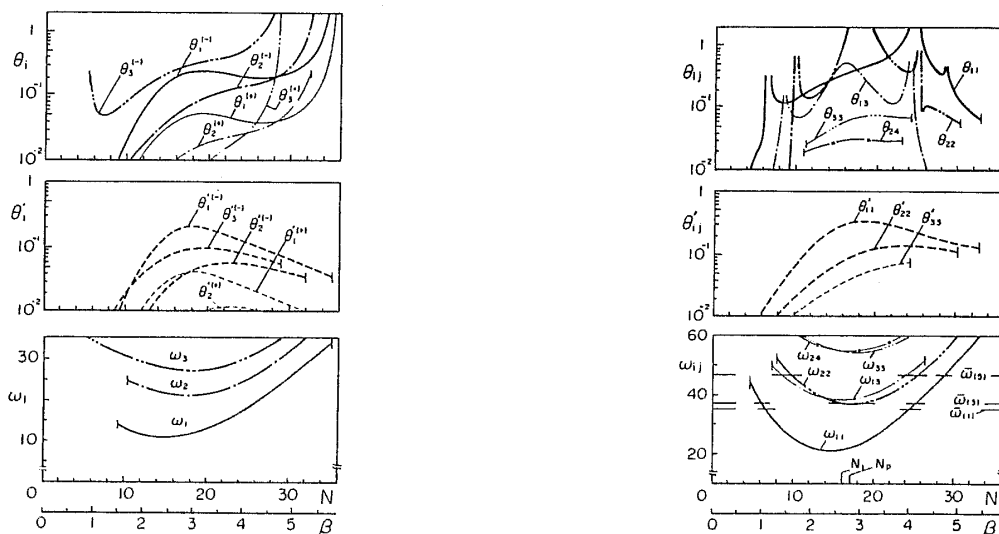


図7 副不安定領域の中心振動数と広がり係数(流体圧: C1, $Z=100$, $p_0=0$, $R/h=400$)

図8 不安定領域の中心振動数と広がり係数(側圧: C1, $Z=100$, $p_0=0$, $R/h=400$)

S2の結果は定性的に一致した。これは面内変位に関する境界条件が動的不安定に支配的であることを示す。なおここで考慮した境界条件においては常に主ならびに結合形不安定領域が存在し、 ω_{ij} が $\bar{\omega}_{(r)}$ に十分近い場合にはその θ_{ij} の値は極めて大きくなる。

つぎに副不安定領域について検討する。式(29)において $k=1, 3(i=奇数), k=2, 4(i=偶数)$ を考慮に入れてC1, $Z=100$ の場合の結果を図7に示す。この場合の不安定領域の幅は前述の、主ならびに結合形不安定領域の幅に比して、一般に小さいから、加振圧力の小さい場合には、無視しうる。ただし、加振振動数 ω が30以上で、この場合の $\bar{\omega}_{(r)}$ に近づくと θ_i は急激に増大することから、その場合には考慮する必要がある。

最後に動的安定に及ぼす荷重条件の影響を調べる。

C1, $Z=100$ の場合に対し、周期的な側圧が作用する場合の結果を図8に示す。流体圧の場合の結果の図4と比較すると、まずこの場合においても周期流体圧が作用する場合と同種の主ならびに結合形不安定領域が存在する。また $(\theta_{ij}, \theta'_{ij})$ の値に若干の差違はあるが $(\theta_{ij}, \theta'_{ij})$ と N との関係においては、ほぼ同様な分布を示すことがわかる。

5. 結 言

両端が閉じた円筒かくに静的ならびに周期的な流体圧もしくは側圧が作用する場合の動的不安定問題に関して、安定を失う前の軸対称曲げ振動の影響を考慮に入れて、代表的な4種の境界条件のもとに理論的解を行った。主な結果を要約するとつぎのごとくなる。

(1) 問題を非軸対称最低固有振動数の数倍以内の振動数範囲に限定すると、不安定領域におよぼす軸対称曲げ振動の影響は、円筒かく形状 Z がほぼ $50 < Z$

< 400 の場合においてもっとも著しく、膜理論近似では予想しえない重要な不安定領域が現れる。ただし $Z \ll 50, Z \gg 400$ の場合においては、この影響は小さく、膜理論近似も適用できる。

(2) 周期的な流体圧が作用する場合には、いずれの境界条件のもとにおいても各円周方向波数の各値に対し、主、副ならびに結合形(ただし誘起される、二つの振動形はかく中央に対して同一の対称性を有する)不安定領域が存在し、一般には座屈波数近傍の波数で最低次数の振動形をもつ主不安定領域がもっとも重要となるが、軸対称曲げ振動の共振をとまなう場合には、他の主不安定領域ならびに副および結合形不安定領域も危険な不安定領域として現れる。なお周期的な側圧が作用する場合においても上記と同様のことがいえる。

文 献

- (1) Yao, J. C., *AIAA J.*, 1-6 (1963), 1391.
- (2) Bolotin, V. V., *The Dynamic Stability of Elastic Systems*, (1964), Holden-Day Inc.
- (3) Wood, J. D. and Koval, L. R., *AIAA J.*, 1-11 (1963), 2576.
- (4) Bieniek, M. P., Fan, T. C. and Lackman, L. M., *AIAA J.*, 4-3 (1966), 495.
- (5) Deng, Z. F., and Popelar, C. H., *J. Acoust. Soc. Am.*, 52-5 (1972), 1430.
- (6) Koval, L. R., *J. Acoust. Soc. Am.*, 55-1 (1974), 91.
- (7) Hsu, C. S. (ed. Fung, Y. C. and Sechler, E. E.), *Thin-Shell Structures*, (1974), 103, Prentice-Hall.
- (8) Yamaki, N. and Nagai, K., *J. Sound Vib.*, 45-4 (1976), 513.
- (9) Nagai, K. and Yamaki, N., *J. Sound Vib.*, 58-3 (1978), 425.
- (10) Yamaki, N., *Rep. Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ.*, 21 (1969/70), 81.
- (11) Yamaki, N., *Rep. Inst. High Speed Mech., Tohoku Univ.*, 22 (1970), 109.