

## だ円断面線ばねの実用設計式\*

長屋幸助\*<sup>1</sup>, 平田康夫\*<sup>2</sup>, 鶴見豊明\*<sup>3</sup>  
武田定彦\*<sup>1</sup>, 永井健一\*<sup>1</sup>, 谷藤克也\*<sup>4</sup>

## Design Formulae for Elliptical-Cross-Section Helical Springs

Kosuke NAGAYA, Yasuo HIRATA, Toyoaki TSURUMI,  
Sadahiko TAKEDA, Ken-ichi NAGAI and Katsuya TANIFUJI

Stresses in elliptical-cross-section coil springs become small as compared to other springs used in practical machines at a certain aspect ratio. This article presents a simplified stress expression for designing the elliptical-cross section coil springs. The stresses obtained by the present design formula are compared with those obtained by numerical methods. It is ascertained that the present formula is applicable to design the elliptical-cross section-coil springs.

**Key Words:** Machine Design, Machine Element, Stress, Spring, Elliptical Cross Section, Helical Spring

## 1. 結 言

近時機械部品の小形・軽量化が進み、機械部品としてのばねも小形・軽量化を余議なくされている。とくにこの傾向は自動車エンジンの動弁系で顕著である。ばねの小形化のためのコイル断面としては Fuchs の提案による卵形断面が古くから知られている<sup>(1)</sup>。しかし Fuchs の提案による応力計算式は誤差が多く実用式として利用できないことがその後の研究で明らかにされ、弾性学に基づく解析式<sup>(2)(3)</sup>、境界要素法に基づく数値結果<sup>(4)</sup>、有限要素法による結果<sup>(5)</sup>などが次々に発表され、いくつかの異形断面線ばねが実用化され、実際の自動車エンジン動弁系等に用いられるようになった。このような状況のもとで日本ばね工業会ばね技術研究会では異形断面線ばね調査委員会を発足させ、ばね諸元の調査、解析法の調査を行うとともに種々の方法による応力値の検討を円、だ円、卵形の三つの素線断面について行った結果、これまで注目されてい

なかった円断面線ばねが動弁系で使用されるばね諸元のもとでは、他の二つに比べ応力的に有利であることを報告した<sup>(6)</sup>。もちろんこの断面は最適なものではないが、製造が簡単であり、規格化も容易であることから、今後ばねに応用されていくことと思われる。しかし現在のところ、その応力を求めるには、フーリエ展開境界値平均法<sup>(2)</sup>、有限要素法<sup>(4)</sup>などの大がかりな計算プログラムによる数値計算が必要であり、通常の円形断面ばねの設計のように現場の一般技術者が電卓で設計できる状況にはない。本報ではこれらにかんがみだ円断面線ばねの実用設計式を提案する。設計式の誘導にあたっては、弾性学によるだ円断面真直棒の単純ねじりおよび単純せん断の厳密解を基礎として、これに曲がりによる影響式を新たに求めて組合せ、円筒極座標による簡単な実用式を求めた。

一方ばねの巻数が少なくなると、一般に末端の影響が大となり、末端を無視した解析が適用できない<sup>(7)(8)</sup>。本報では、著者の一人がすでに求めている末端を考慮した任意断面線ばねの解析式に基づき、だ円断面線ばねの末端を考慮した応力計算をも行い、上記の実用設計式がどの範囲まで適用可能かも検討した。

\* 原稿受付 平成2年5月15日。

<sup>1</sup> 群馬大学工学部 (☎376 桐生市天神町1-5-1)。<sup>2</sup> オリンパス光学工業(株) (☎163-91 東京都新宿区西新宿1-22-2)。<sup>3</sup> 東芝(株) (☎370-21 東京都港区芝浦1-1)。<sup>4</sup> 新潟大学工学部 (☎950-21 新潟市五十嵐2の町8050)。

2. だ円断面線ばねの実用化の検討

丸い断面を仮にだ円形につぶしてみると断面図形は横方向に長くなるが、高さ方向は短くなる。このことをばねにあてはめると、ばねの線を密着状態にしたときの長さ（密着長）が丸い断面のときよりも短くなることを意味している。もしこのような断面を有するばねが丸線ばねと同等かそれ以上の性能があれば、ばねを取付けている機器の性能を損なわず、ばねの収納スペースをばねの長さが短くなった分だけ小さくすることができる。すなわち機器の小形化ができることになる。しかし断面を扁平にしすぎるとばねが弱くなってしまうので、扁平度にももちろん限界がある。

円形断面以外の異形断面線はこれまでの研究によると、丸線ばねに比べ小形化が図れること、断面の扁平度と形状を適当に選択すると、丸線ばねに比べ同じ断面積のばねで応力値を小さくすることができ、さらに固有振動数を高め、動的応力値が丸線ばねに比べ小さくなるので動的変位・荷重を受ける機器のばねとしても有利であることが報告されている。これらの観点から同一断面積、同一ばね諸元を有する丸線ばね、半だ円と半円を組合せた断面の卵形断面線ばね (Fuchs の卵形断面ばね) およびだ円断面線ばねの応力値の比較が図1のように得られている<sup>(6)</sup>。図よりだ円断面線ばねは他の二つに比べ最大応力値が小さく、小形化も図れるので有利な断面となっており、加えて製造面でも現在実用化されている卵形断面線ばねよりも線材の引き抜きが容易、ばねを巻くときの倒れ防止が容易などの利点がある。したがってだ円断面線ばねはある特定のばね諸元のもとでは上記三つのなかで実用上最適なばねとなり得ることがわかる。しかし断面の縦横比、ばね諸元によっては当然その利点が失われるので、本断面のばねを用いる場合には、その都度最適な設計を行う必要がある。そこで本報ではだ円断面線ばねの最

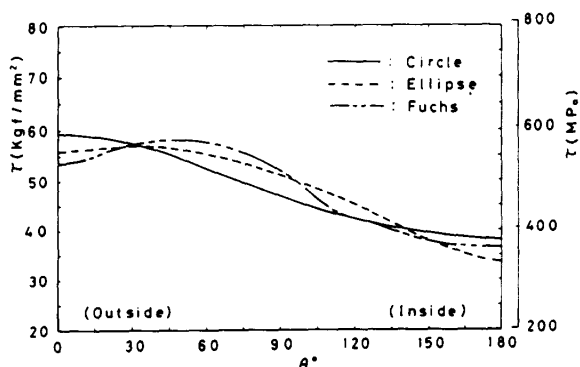


図1 円、だ円、Fuchsの卵形断面ばねの素線表面上の応力分布

適設計を簡単に行えるよう、以下に実用計算式を提案する。

3. だ円断面線ばねの実用計算式の誘導

コイル半径  $R$ 、断面の長軸  $2a$ 、短軸  $2b$  のだ円断面ばねの座標関係を図2に示す。図中だ円の中心を原点  $O$  とし、直交座標  $x, y, z$  をとり、素線表面 (だ円境界) までの極座標を  $r$ 、ばね内側の軸上からの極座標を  $\theta$  ととる。図2のようなだ円断面を有する真直棒にねじりモーメント  $T_z$  を使用させたときのだ円境界上の点  $r$  におけるせん断応力  $\tau_{zx}'$  および  $\tau_{zy}'$  は次のように与えられる<sup>(9)</sup>。

$$\begin{aligned} \tau_{zx}' &= -\frac{2}{\pi} \frac{T_z}{ab^3} y \\ \tau_{zy}' &= \frac{2}{\pi} \frac{T_z}{a^3b} x \end{aligned} \dots\dots\dots (1)$$

一方だ円断面を有する真直棒にせん断力  $W$  を  $y$  軸方向に作用させたときのせん断応力は次式で表される<sup>(9)</sup>。

$$\begin{aligned} \tau_{zx}'' &= -\frac{\nu a^2 + (1 + \nu)b^2}{(1 + \nu)(a^2 + 3b^2)} \frac{W}{I} xy \\ \tau_{zy}'' &= \frac{a^2 + 2(1 + \nu)b^2}{(1 + \nu)(a^2 + 3b^2)} \frac{W}{2I} \\ &\times \left\{ b^2 - y^2 - \frac{(1 - 2\nu)b^2}{a^2 + 2(1 + \nu)b^2} x^2 \right\} \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

ここに  $\nu$  はポアソン比、 $I$  は  $x$  軸に関する断面二次モーメントである。

式(1)、(2)はそれぞれ真直棒へねじり、せん断が作用したときの応力式で、ばねのように曲率の大きいコイルの場合はこれらの式を直接用いて正しい応力値を求めることはできない。ばね素線の応力問題において、Whal<sup>(10)</sup>は円形断面に対して曲がりの影響を考慮したねじり応力の修正係数を提案した。この修正係数はその後丸線ばねの設計式として用いられている。一方著者の一人は任意断面線ばねに対する修正係数を提案し、それによる任意断面線ばねの応力式を提案し

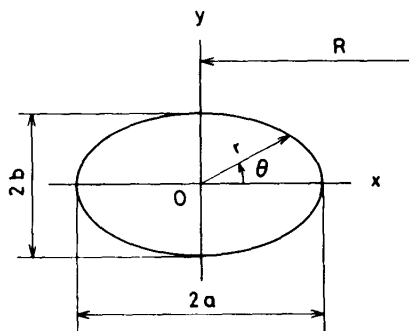


図2 だ円素線断面の座標関係

た<sup>(2)</sup>。しかしその修正係数の式はかなり複雑であり、電子計算機によらなければその値を求めることは一般に困難である。そこで本報ではこの修正係数に注目し、その簡易計算式を誘導する。

現在実用化されている異形断面線ばねの断面の長短径比は形状にかかわらずほぼ1~1.3程度であり、またもっとも多く用いられているばね指数(コイル直径/素線断面直径)は5~7の範囲にある<sup>(6)</sup>。そこでまずばね指数を5.5として長短径比を1~1.3まで変化させたときの修正係数  $K$  の  $\theta$  に対する変化を文献(2)に基づき数値計算を行ったところ図3が得られた。図より  $\theta=0$  (ばね内側) および  $\theta=180^\circ$  (ばね外側) で修正係数は断面の長短径比に無関係となり、それぞれある値にほぼ収束することがわかる。この傾向はばね指数が7のときについての計算でも同様であった。すなわちこのことはばね断面の内側( $\theta=0$ )と外側( $\theta=180^\circ$ )で近似的に断面形状に無関係な丸線ばねのWahlの式が適用できることを意味している。そこで  $\theta=0$  の値を  $k_1$ ,  $\theta=\pi$  の値を  $k_2$  として、この2点につ

いてWahlの式<sup>(10)</sup>を適用すると

$$k_1 = \frac{4c-1}{4c-4}, k_2 = \frac{4c+1}{4c+4} \dots\dots\dots (3)$$

ここに

$$c = R/a$$

はばね指数を表し、 $R$  はコイル半径、 $a$  は前述のだ円の長軸の半分の長さである。文献(2)に基づき、修正係数  $k$  の値を種々計算し、式(3)の  $k_1, k_2$  を用いて曲線適合を行い、近似式を考察したところ、次のような修正係数を見出すことができた。

$$K = (k_1 + k_2)(a/b - 1)c^{-k_1/k_2}(\cos^2\theta - 1)\cos\theta + \frac{k_1 + k_2}{2}\cos^2\theta + \frac{k_1 - k_2}{2}\cos\theta - (\cos^2\theta - 1) \dots\dots\dots (4)$$

式(4)により計算した修正係数の結果と、弾性学に基づく修正係数の結果<sup>(2)</sup>の比較を図4~6に示す。図から本計算式[式(4)]は縦横比  $a/b$  が1.3までなら文献(2)の修正係数とほとんど一致し、 $a/b=1.5$ でも若干の誤差はあるもののかなり良い近似度を示している

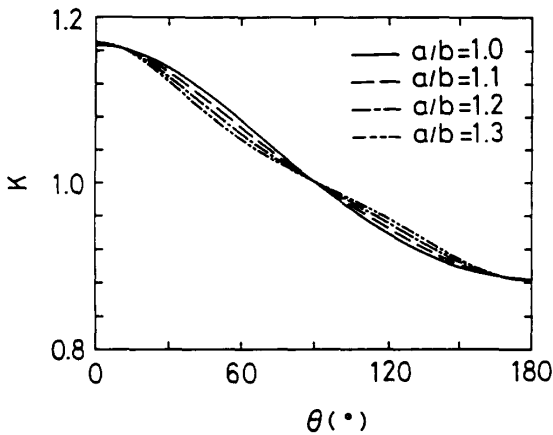


図3 種々の縦横比に対する修正係数  $K$  の値 ( $R/a=5.5$ )

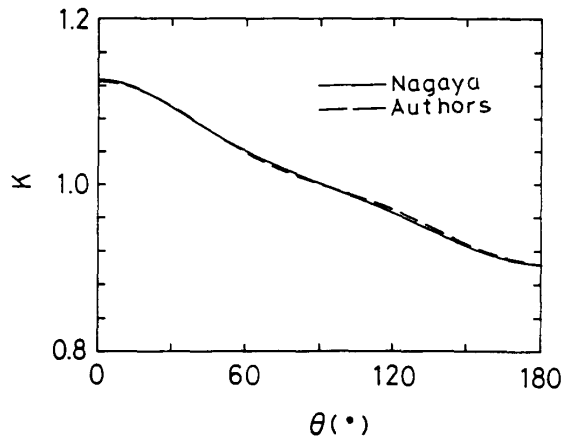


図5 修正係数  $K$  と角度  $\theta$  の関係 ( $R/a=7, a/b=1.3$ )

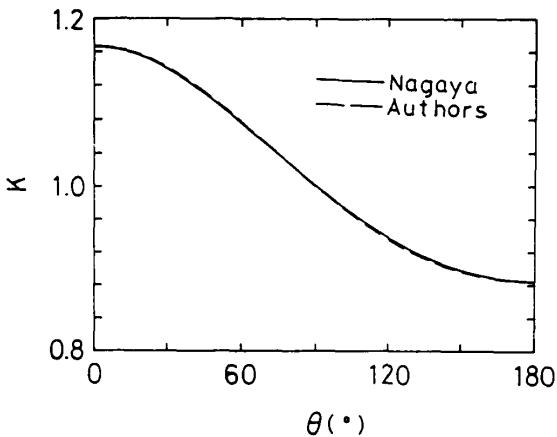


図4 修正係数  $K$  と角度  $\theta$  の関係 ( $R/a=5.5, a/b=1.0$ )

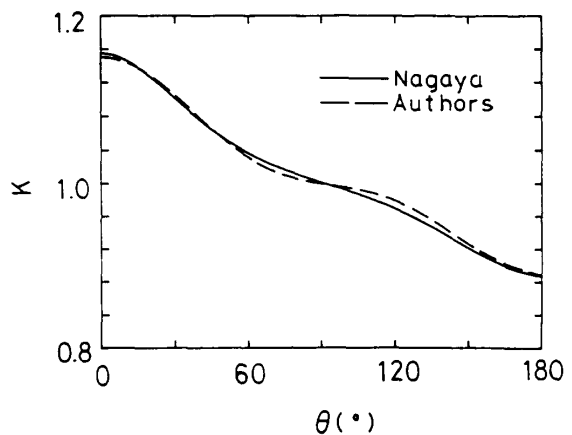


図6 修正係数  $K$  と角度  $\theta$  の関係 ( $R/a=b, a/b=1.5$ )

ことがわかる。

コイルばねの場合、作用する荷重を  $W$  とするとねじりモーメントは

$$T_z = WR \quad \dots\dots\dots (5)$$

また

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad \dots\dots\dots (6)$$

であるから、式(5)、(6)を式(1)、(2)に代入し、式(4)を用いて曲がりの影響を考慮すると、コイル素線表面上の主せん断応力  $\tau_p$  は次式のように与えられる。

$$\tau_p = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに

$$\begin{aligned} \tau_{zx} = & -\frac{2}{\pi} \frac{WR}{ab^3} Kr \sin \theta - \frac{\nu a^2 + (1+\nu)b^2}{(1+\nu)(a^2+3b^2)} \\ & \times \frac{Wr^2}{I} \sin \theta \cos \theta \\ \tau_{zy} = & \frac{2}{\pi} \frac{WR}{a^3b} Kr \cos \theta + \frac{a^2+2(1+\nu)b^2}{(1+\nu)(a^2+3b^2)} \frac{W}{2I} \\ & \times \left\{ b^2 - r^2 \sin^2 \theta - \frac{(1-2\nu)b^2}{a^2+2(1+\nu)b^2} r^2 \cos^2 \theta \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (8)$$

またコイルの内側あるいは外側の2点のみの値を求めるときは、 $\tau_{zx} = 0$  となり、 $\tau_p$  は式(7)、(8)の代わりに次式を用いれば良い。

$$\begin{aligned} \tau_p = & \pm \frac{2}{\pi} \frac{WR}{a^3b} \left( \frac{k_1+k_2}{2} \pm \frac{k_1-k_2}{2} \right) r \\ & + \frac{a^2+2(1+\nu)b^2}{(1+\nu)(a^3+3b^2)} \frac{W}{2I} \left\{ b^2 - \frac{(1-2\nu)b^2r^2}{a^2+2(1+\nu)b^2} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(9)で上側の符号がばね内側の値を、下側が外側の値を表す。また上式でばね素線表面上の半径は

$$r = a\sqrt{1/[\cos^2 \theta + (\sin^2 \theta)/(b/a)^2]} \quad \dots\dots\dots (10)$$

であり、断面二次モーメントは

$$I = \pi b^3 a / 4 \quad \dots\dots\dots (11)$$

で与えられる。

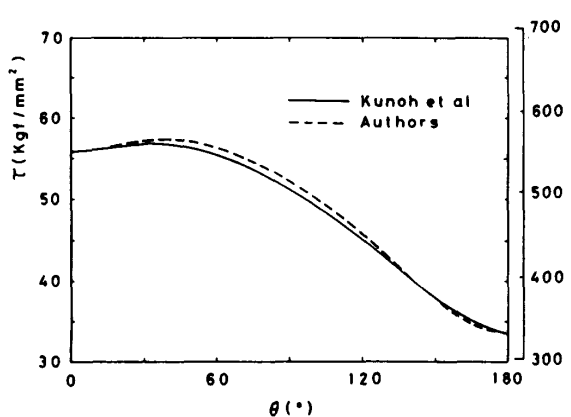


図7 本計算式と数値計算法による結果との比較

実際の設計ではまず注目している点の角度  $\theta$  を与え、だ円表面上の半径  $r$  と断面二次モーメントを計算し、ついで式(3)、(4)より修正係数  $K$  を算出する。この  $K$  を式(8)に代入し、式(7)より主せん断応力を計算する。一例としてコイル径 24 mm ( $R=12$  mm)、断面の長軸 4.382 mm ( $a=2.191$  mm)、短軸 3.652 mm ( $b=1.826$  mm) のだ円断面線ばねに 50 kgf (490 N) の荷重が作用したときの表線表面上の主せん断応力を、 $\nu=0.3$  として計算した結果を図7に示す。図中実線は日本ばね工業会ばね技術研究会異形断面線ばね調査委員会の発表した同諸元のばね応力値<sup>(6)</sup>を表す。この応力は有限要素法、境界要素法、フーリエ展開境界値平均法など合計6種類の数値計算による結果の平均値であり、厳密解ではない。しかしその値は実用上十分な精度を有するものである。一方破線は式(7)に基づく本計算式の結果である。本計算式の結果と文献(6)の結果は  $\theta=60^\circ$  付近で若干の差異が見られるものの非常に良く一致していることがわかる。もともと文献(6)は7%程度のばらつきのある結果を平均化した近似解であり、また本解も真直棒のねじり、せん断の厳密解を用いてはいるものの修正係数に若干の近似がなされているので、どちらの結果が正しいとは一概に言えない。しかしこの図より本計算式は有限要素法等と同程度の精度を有しているといえる。

4. ばね定数

だ円断面線にねじりモーメント  $T_z = WR$  が作用したときのコイルの単位長さ当たりのねじれ角  $\omega$  は

$$\omega = \frac{(a^2+b^2)WR}{G\pi a^3 b^3} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに  $G$  は横弾性係数を表す。コイルの巻数を  $n$  とすると、コイル全長の長さは  $L=2\pi Rn$  となり、コイル全長のねじれ角は  $L\omega=2\pi Rn\omega$  となる。したがって、

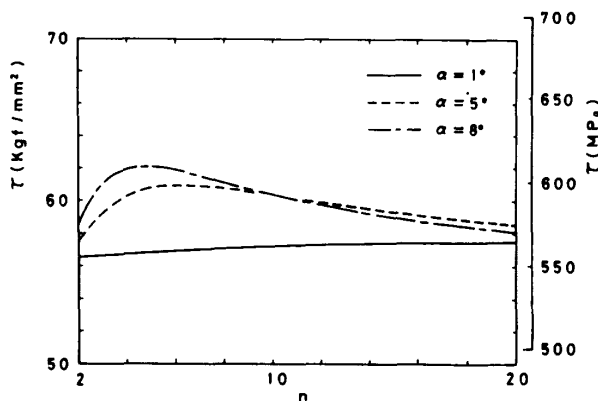


図8 ピッチ角および総巻数の平行圧縮ばねの応力に及ぼす影響

コイル軸長の伸びは  $\delta = L\omega R = 2\pi R^2 n\omega$  で与えられ、ばね定数  $k$  は

$$k = W / (2\pi R^2 n\omega) \dots\dots\dots (13)$$

式(12)を(13)に代入して、だ円断面線ばねのばね定数が次のように得られる。

$$k = \frac{Ga^3b^3}{2n(a^2+b^2)R^3} \dots\dots\dots (14)$$

### 5. 端末の影響の検討

ばねによっては巻数が比較的少なく、またばね両端の座の部分(座巻部)が平行に巻かれ、座が平行に保持されたまま圧縮される場合がある。この平行圧縮ばねは実際に自動車エンジンの弁ばね等に用いられている。このような場合は、座の影響により応力は上述で計算した密巻きばねの結果と異なり、素線の軸方向に応力の大きな箇所と小さな箇所がでてくる。この影響を考慮した異形断面線の応力解析もすでになされている<sup>(8)</sup>。本報では先に求めた実用計算式の平行圧縮ばねへの適用を図るため、以下に文献(8)に基づきだ円断面線ばねの端末の影響を検討する。端末を考慮した場合、素線軸方向に応力は変動するが、その応力最大の位置は座巻部から数えてほぼ0.75巻めの位置である。したがってその位置の断面に注目し、 $\theta=0$ の点のせん断応力と総巻数  $n$  の関係をピッチ角  $\alpha$  を種々に変え前述のばね諸元について示したものが図8である。図よりピッチ角  $\alpha$  が小さい場合( $\alpha=1^\circ$ )、端末の影響は小さく、応力値は総巻数とともにほぼ直線状に微増するが、その変化は2%弱で実用上は端末の影響を無視できる。しかしピッチ角が大となると( $\alpha=5^\circ, \alpha=8^\circ$ )、総巻数が5程度で応力が最大となり、それより巻数が増すと応力値は減少し、 $n=20$ 程度でほぼ一定となる。実用上の圧縮コイルばねのピッチ角は $\alpha=5^\circ \sim 7^\circ$ が多く、かつ巻数も4~8巻程度であるので、もともと端末の影響を受けることになる。この領域での影

響は本例の場合、最大で7%弱である。したがって本報で与えた実用近似式を平行圧縮コイルばねに適用する場合は、求められた値にさらに7%程度の余裕を見込めば安全な設計となることがわかる。

### 6. 結 言

本報はだ円断面線ばねの開発を目的として、その実用設計式を求めたものである。その内容を要約すると

(1) だ円断面線ばねに適用できる曲がりの影響の近似修正係数を提案して、同ばねの実用応力計算式を示した。

(2) 本報で与えた実用計算式による応力値を実際に用いられているばね諸元のもとで計算し、他の数値解法による結果と比較したところ、両者は非常に良く一致し、本計算式が十分な精度を有することが明らかにされた。

(3) だ円断面線ばねのばね定数の計算式を示した。

(4) 平行圧縮ばねの端末の影響は現在多く用いられているばね諸元のもとでは、7%以下であることを示した。

### 文 献

- (1) Fuchs, H. O., *Product Eng.*, 27(1969), 86.
- (2) 長屋, 機論, 51-470, A(1985), 2293.
- (3) 佐藤・ほか5名, 文献(2)の2303ページ.
- (4) 神谷・豊福, ばね技術研究会昭和60年度秋期前刷, (1985), 25.
- (5) 大河内・今泉・市川, ばね技術研究会昭和63年度秋期前刷, (1988), 29.
- (6) 久納・ほか6名, ばね技術研究会1989年秋期前刷, (1989), 47.
- (7) 下関・早坂, 機論, 48-435, C(1982), 1774.
- (8) Nagaya, K., *Trans. ASME, J. Vib. Acoust. Stress and Reliability in Design*, 109(1987), 289.
- (9) 例えば, 平, 現代弾性力学, (1986), 98.
- (10) Wahl, A. M., *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 25(1929), 185.