

形状関数近似による集中質量搭載中実円板の振動解析*

永井 健一^{*1}, 大佐々 吉宏^{*2}, 長屋 幸助^{*1}
武田 定彦^{*1}, 谷 藤 克也^{*3}

A New Mode of Shape Function Approach to Bending Vibrations of a Circular Disc with Concentrated Masses

Ken-ichi NAGAI, Yoshihiro OSASA, Kosuke NAGAYA,
Sadahiko TAKEDA and Katsuya TANIFUJI

An analytical method is presented for the bending vibration of a circular disc carrying concentrated masses, introducing a new mode of shape function to the Galerkin method. Deflection of the plate is expressed by a product of the mode shape function along radial direction and the circumferential periodic function. The mode shape function is assumed to be the sum of the product of the trigonometrical function and the finite power series. The coefficients of the power series are found to be satisfied by the boundary condition of the plate. Applying the Galerkin method, the number of sets of differential equation with second-order time functions are reduced. It is found that this method gives good accuracy to the natural frequencies within the small number of terms for unknown time functions

Key Words: Vibration, Modal Analysis, Mode-shape Function, Galerkin Method, Circular Disc, Concentrated Masses

1. 結 言

任意の位置に集中質量を搭載する内周固定、外周自由端の円環板の自由曲げ振動問題に関して形状関数を導入しガレルキン法を用いて解析した。解析では余弦と正弦項を含む三角関数と四次までのべき級数との積による形状関数を導入し、まず高次までの振動形を記述できるように三角関数の定数を設定し、ついで境界条件を満足するようにべき級数の係数を定めた。この関数をもとに基礎式にガレルキン法を適用して、有限自由度系の運動方程式を導き、その固有振動数を求め、さらに集中質量が板の振動数に及ぼす影響を明らかにした。

2. 基礎式および境界条件

任意の位置に集中質量を配した内周固定、外周自由端の円板の自由曲げ振動問題を解析する。図1のごとく、外半径 a 、内半径 b ($b \neq 0$)、厚さ h 、密度 ρ 、ヤン

グ率 E 、ポアソン比 ν 、の円板を考える。円板の任意位置を半径 r と X 軸からの角度 θ で表す。ついで r_p 、 θ_p の位置に質量 M_p ($p=1, 2, 3, \dots$) の集中質量を付加する。横方向たわみを $W(r, \theta, t)$ とすると、これを支配する無次元化した基礎式および境界条件式は式(1)、式(2)のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned} L(w) &\equiv \nabla^4 w + w_{,rr} \\ &+ \sum_p m_p \xi^{-1} \delta(\xi - \xi_p) \delta(\theta - \theta_p) w_{,rr} \\ \nabla^2 &= \partial^2 / \partial \xi^2 + \xi^{-1} (\partial / \partial \xi) + \xi^{-2} (\partial^2 / \partial \xi \partial \theta^2) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

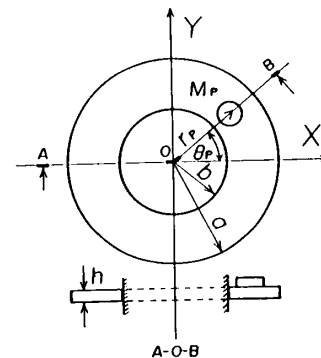


図1 円板の諸元と座標系

* 平成2年9月24日 第68期全国大会講演会において講演、原稿受付 平成2年10月8日。

*¹ 正員、群馬大学工学部 (☎376 桐生市天神町1-5-1)。

*² 学生員、群馬大学大学院。

*³ 正員、新潟大学工学部 (☎950-21 新潟市五十嵐2の町 8050)。

$$\left. \begin{aligned} \xi = \xi_1 : w = w_{,\xi} = 0 \\ \xi = 1 : m_{\xi} \equiv -[w_{,\xi\xi} + \nu(\xi^{-1}w_{,\xi} + \xi^{-2}w_{,\theta\theta})] = 0 \\ v_{\xi} \equiv q_{\xi} + \xi^{-1}m_{\xi\theta,0} = 0 \\ \text{ただし} \\ q_{\xi} = -(\nabla^2 w)_{,\xi} \\ m_{\xi\theta} = -(1-\nu)(\xi^{-1}w_{,\xi\theta} - \xi^{-2}w_{,\theta}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

上式で、次の記号を導入してある、

$$\left. \begin{aligned} [\xi, \xi_p, \xi_1] = [r, r_p, b]/a, w = W/h \\ m_p = M_p/\rho h \pi (a^2 - b^2), \tau = \Omega_0 t \\ D = Eh^3/12(1-\nu^2), \Omega_0 = a^{-2}\sqrt{D/\rho h} \\ m_{\xi} = -DhM_r/a^2, v_{\xi} = -Dh\nu_r/a^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

なお $\delta(\xi - \xi_p)$, $\delta(\theta - \theta_p)$ はディラックのデルタ関数、カンマの後の添字はそれに関する偏微分を示す。 ξ は無次元座標、 m_p ($p=1, 2, 3, \dots$) は板全体に対する個々の集中質量の比、 p は集中質量の数、 τ は無次元時間 (t は時間)、 Ω_0 は曲げ振動数に関する量で D は板の曲げ剛性である。また m_{ξ} , v_{ξ} はそれぞれ無次元の曲げモーメントとせん断力を示す。

3. 解析方法

本解析では、変位 $w(\xi, \tau, \theta)$ を次のごとく仮定する。

$$\left. \begin{aligned} w(\xi, \tau, \theta) = \sum_j \sum_N [C_{jN}(\tau) \zeta_{jN}(\xi) \cos N\theta \\ + S_{jN}(\tau) \zeta_{jN}(\xi) \sin N\theta], (j=1, 2, 3, \dots) \\ \zeta_{jN}(\xi) = e_j(\xi) f_{jN}(\xi), (N=0, 1, 2, \dots) \\ e_j(\xi) = \cos p_{1j}\pi\xi + q_j \sin p_{2j}\pi\xi \\ f_{jN}(\xi) = \sum_{k=1}^5 C_{jNk} \xi^{k-1} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

上式で $C_{jN}(\tau)$, $S_{jN}(\tau)$ はそれぞれ円周方向の波数 N を持つ余弦と正弦項に対応した時間関数である。ここで $\zeta_{jN}(\xi)$ は形状関数と定義し、三角関数 $e_j(\xi)$ と四次までのべき級数 $f_{jN}(\xi)$ との積で示される。 $e_j(\xi)$ の係数 p_{1j} , q_j , p_{2j} は半径方向の振動次数 j に対応した係数である。その値は後に述べるごとく、予想される振動形の形状に近似して仮定する。また C_{jNk} はべき級数の係数で、境界条件を満足するように決定される。すなわち式(4)を境界条件式(2)に代入すると、任意の波数 N と、各次数 j に対して次の条件式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^5 \beta_{ikN} C_{jNk} = 0, (i=1, 2, 3, 4) \\ \text{ただし} \\ \beta_{11N} = 1, \beta_{12N} = \xi_1, \beta_{13N} = \xi_1^2, \beta_{14N} = \xi_1^3, \beta_{15N} = \xi_1^4 \\ \beta_{21N} = e_j(\xi_1), \beta_{22N} = e_j(\xi_1) + e^{(1)}_j(\xi_1)\xi_1, \beta_{23N} = 2e_j(\xi_1)\xi_1 + e^{(1)}_j(\xi_1)\xi_1^2 \\ \beta_{24N} = 3e_j(\xi_1)\xi_1^2 + e^{(1)}_j(\xi_1)\xi_1^3, \beta_{25N} = 4e_j(\xi_1)\xi_1^3 + e^{(1)}_j(\xi_1)\xi_1^4 \\ \beta_{31N} = -\nu N^2 e_j(1) + \nu e^{(1)}_j(1) + e^{(2)}_j(1), \beta_{32N} = \nu(1-N^2)e_j(1) + (\nu+2)e^{(1)}_j(1) + e^{(2)}_j(1) \\ \beta_{33N} = (2+2\nu-\nu N^2)e_j(1) + (\nu+4)e^{(1)}_j(1) + e^{(2)}_j(1) \\ \beta_{34N} = (6+3\nu-\nu N^2)e_j(1) + (\nu+6)e^{(1)}_j(1) + e^{(2)}_j(1) \\ \beta_{35N} = (12+4\nu-\nu N^2)e_j(1) + (\nu+8)e^{(1)}_j(1) + e^{(2)}_j(1) \\ \beta_{41N} = N^2(3-\nu)e_j(1) + \{N^2(\nu-2)-1\}e^{(1)}_j(1) + e^{(2)}_j(1) + e^{(3)}_j(1) \\ \beta_{42N} = (N^2-1)e_j(1) + (\nu N^2-2N^2+1)e^{(1)}_j(1) + 4e^{(2)}_j(1) + e^{(3)}_j(1) \\ \beta_{43N} = N^2(\nu-1)e_j(1) + (\nu N^2-2N^2+9)e^{(1)}_j(1) + 7e^{(2)}_j(1) + e^{(3)}_j(1) \\ \beta_{44N} = (-3N^2+2\nu N^2+9)e_j(1) + (\nu N^2-2N^2+23)e^{(1)}_j(1) + 10e^{(2)}_j(1) + e^{(3)}_j(1) \\ \beta_{45N} = (-5N^2+3\nu N^2+32)e_j(1) + (\nu N^2-2N^2+43)e^{(1)}_j(1) + 13e^{(2)}_j(1) + e^{(3)}_j(1) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

なお $e^{(n)}_j(\xi)$ は、式(4)の $e_j(\xi)$ の n 階微分を示す。また上式で、 $C_{j5N}=1$ とおくと境界条件を満足するごとく C_{j1N} から C_{j4N} が p_{1j} , q_j , p_{2j} の関数として決定される。

次に $f_{jN}(\xi)$ の $(m-1)$ 階微分を $f_{jN}(\xi)^{(m-1)}$ とすると次式のごとくなる。

$$f_{jN}(\xi)^{(m-1)} = \sum_{k=1}^5 d_{mjNk} \xi^{k-1} \dots\dots\dots (6)$$

ただし $d_{mjNk} = P_{m+k-2,k-1} C_{j,m-k-1,N}$, $d_{mjNk} = 0$, ($k+m > 6$ の場合), $P_{m,n} \equiv m!/n!$

さらに形状関数 $\zeta_{jN}(\xi)$ の $(m-1)$ 階微分を次式に示す。

$$\zeta_{jN}(\xi)^{(m-1)} = \sum_{i=1}^2 \sum_{k=1}^5 (g_{m,i,jNk} \xi^{k-1} \cos p_{1j}\pi\xi + h_{m,i,jNk} \xi^{k-1} \sin p_{1j}\pi\xi) \dots\dots\dots (7)$$

$g_{m,i,jNk}$, $h_{m,i,jNk}$ ($m=1 \sim 5$) は d_{mjNk} の関数で次に示す。

$$\left. \begin{aligned}
 g_{1,1,jkN} &= d_{1,jkN}, \quad h_{1,1,jkN} = 0, \quad g_{1,2,jkN} = 0, \quad h_{1,2,jkN} = q_j d_{1,jkN}, \quad g_{2,1,jkN} = d_{2,jkN}, \quad h_{2,1,jkN} = -p_{1,j} \pi d_{1,jkN} \\
 g_{2,2,jkN} &= q_j p_{2,j} \pi d_{1,jkN}, \quad h_{2,2,jkN} = q_j d_{2,jkN}, \quad g_{3,1,jkN} = d_{3,jkN} - p_{1,j}^2 \pi^2 d_{1,jkN}, \quad h_{3,1,jkN} = -2p_{1,j} \pi d_{2,jkN} \\
 g_{3,2,jkN} &= 2q_j p_{2,j} \pi d_{2,jkN}, \quad h_{3,2,jkN} = q_j (d_{3,jkN} - p_{2,j}^2 \pi^2 d_{1,jkN}), \quad g_{4,1,jkN} = d_{4,jkN} - 3p_{1,j}^2 \pi^2 d_{2,jkN}, \\
 h_{4,1,jkN} &= -3p_{1,j} \pi d_{3,jkN} + p_{1,j}^3 \pi^3 d_{1,jkN} \\
 g_{4,2,jkN} &= q_j (3p_{2,j} \pi d_{3,jkN} - p_{2,j}^3 \pi^3 d_{1,jkN}), \quad h_{4,2,jkN} = q_j (d_{4,jkN} - 3p_{2,j}^2 \pi^2 d_{2,jkN}) \\
 g_{5,1,jkN} &= d_{5,jkN} - 6p_{1,j}^2 \pi^2 d_{3,jkN} + p_{1,j}^4 \pi^4 d_{1,jkN}, \quad h_{5,1,jkN} = -4(p_{1,j} \pi d_{4,jkN} - p_{1,j}^3 \pi^3 d_{2,jkN}) \\
 g_{5,2,jkN} &= 4q_j (p_{2,j} \pi d_{4,jkN} - p_{2,j}^3 \pi^3 d_{2,jkN}), \quad h_{5,2,jkN} = q_j (d_{5,jkN} - 6p_{2,j}^2 \pi^2 d_{3,jkN} + p_{2,j}^4 \pi^4 d_{1,jkN})
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで基礎式(1)にガレルキン法を適用すると次の条件式を得る。

$$\int_0^{2\pi} \int_{\xi_1}^1 L(w) \zeta_{is}(\xi) \begin{bmatrix} \cos S\theta \\ \sin S\theta \end{bmatrix} \xi d\xi d\theta = 0, \quad (i=1, 2, 3, \dots; S=0, 1, 2, \dots) \dots\dots\dots (9)$$

上式に(4)式を代入し、積分を実行し整理すると C_{jN}, S_{jN} に関する連立方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_j \sum_N (\Phi^{(1)}_{ijNS} C_{jN, \tau\tau} + \Phi^{(2)}_{ijNS} S_{jN, \tau\tau} + \Psi_{ijNS} C_{jN}) &= 0, \quad (i, j=1, 2, \dots; N, S=0, 1, \dots) \\
 \sum_j \sum_N (\Phi^{(3)}_{jINS} C_{jN, \tau\tau} + \Phi^{(4)}_{jINS} S_{jN, \tau\tau} + \Psi_{ijNS} S_{jN}) &= 0 \quad (i, j, N, S=1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

上式の係数 $\Phi^{(1)}_{ijNS}, \Phi^{(2)}_{ijNS}, \Phi^{(3)}_{jINS}, \Phi^{(4)}_{jINS}, \Psi_{ijNS}$ は次のごとくなる。

$$\left. \begin{aligned}
 \Phi^{(1)}_{ijNS} &= \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l [g_{1,m,jkN} g_{1,n,iS} (\bar{v}^{(+)}_{ijklmn,1} \pi \delta_{NS} + \sum_p m p \bar{C} \bar{N} p \bar{C} \bar{S} \bar{C}^{(+)}_{ijklmn}) \\
 &\quad + h_{1,m,jkN} h_{1,n,iS} (\bar{\mu}^{(-)}_{ijklmn,1} \pi \delta_{NS} + \sum_p m p \bar{C} \bar{N} p \bar{C} \bar{S} \bar{C}^{(-)}_{ijklmn}) \\
 &\quad - g_{1,m,jkN} h_{1,n,iS} (\bar{\mu}^{(-)}_{ijklmn,1} \pi \delta_{NS} + \sum_p m p \bar{C} \bar{N} p \bar{C} \bar{S} \bar{C}^{(-)}_{ijklmn}) \\
 &\quad + h_{1,m,jkN} g_{1,n,iS} (\bar{\mu}^{(+)}_{ijklmn,1} \pi \delta_{NS} + \sum_p m p \bar{C} \bar{N} p \bar{C} \bar{S} \bar{C}^{(+)}_{ijklmn})] \\
 \Phi^{(2)}_{ijNS} &= \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l [g_{1,m,jkN} g_{1,n,iS} \sum_p m p \bar{S} \bar{N} p \bar{C} \bar{S} \bar{C}^{(+)}_{ijklmn} + h_{1,m,jkN} h_{1,n,iS} \sum_p m p \bar{S} \bar{N} p \bar{C} \bar{S} \bar{C}^{(-)}_{ijklmn} \\
 &\quad - g_{1,m,jkN} h_{1,n,iS} \sum_p m p \bar{S} \bar{N} p \bar{C} \bar{S} \bar{C}^{(-)}_{ijklmn} + h_{1,m,jkN} g_{1,n,iS} \sum_p m p \bar{S} \bar{N} p \bar{C} \bar{S} \bar{C}^{(+)}_{ijklmn}] \\
 \Phi^{(3)}_{jINS} &= \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l [g_{1,m,jkN} g_{1,n,iS} \sum_p m p \bar{C} \bar{N} p \bar{S} \bar{C}^{(+)}_{ijklmn} + h_{1,m,jkN} h_{1,n,iS} \sum_p m p \bar{C} \bar{N} p \bar{S} \bar{C}^{(-)}_{ijklmn} \\
 &\quad - g_{1,m,jkN} h_{1,n,iS} \sum_p m p \bar{C} \bar{N} p \bar{S} \bar{C}^{(-)}_{ijklmn} + h_{1,m,jkN} g_{1,n,iS} \sum_p m p \bar{C} \bar{N} p \bar{S} \bar{C}^{(+)}_{ijklmn}] \\
 \Phi^{(4)}_{jINS} &= \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l [g_{1,m,jkN} g_{1,n,iS} (\bar{v}^{(+)}_{ijklmn,1} \pi \delta_{NS} + \sum_p m p \bar{S} \bar{N} p \bar{S} \bar{C}^{(+)}_{ijklmn}) \\
 &\quad + h_{1,m,jkN} h_{1,n,iS} (\bar{v}^{(-)}_{ijklmn,1} \pi \delta_{NS} + \sum_p m p \bar{S} \bar{N} p \bar{S} \bar{C}^{(-)}_{ijklmn}) \\
 &\quad - g_{1,m,jkN} h_{1,n,iS} (\bar{\mu}^{(-)}_{ijklmn,1} \pi \delta_{NS} + \sum_p m p \bar{S} \bar{N} p \bar{S} \bar{C}^{(-)}_{ijklmn}) \\
 &\quad + h_{1,m,jkN} g_{1,n,iS} (\bar{\mu}^{(+)}_{ijklmn,1} \pi \delta_{NS} + \sum_p m p \bar{S} \bar{N} p \bar{S} \bar{C}^{(+)}_{ijklmn})] \\
 \Psi_{ijNS} &= \sum_m \sum_n \sum_k \sum_l [(g_{5,m,jkN} g_{5,n,iS} \bar{v}^{(+)}_{ijklmn,1} + h_{5,m,jkN} h_{5,n,iS} \bar{v}^{(-)}_{ijklmn,1} \\
 &\quad - g_{5,m,jkN} h_{5,n,iS} \bar{\mu}^{(-)}_{ijklmn,1} + h_{5,m,jkN} g_{5,n,iS} \bar{\mu}^{(+)}_{ijklmn,1}) \\
 &\quad + 2(g_{4,m,jkN} g_{4,n,iS} \bar{v}^{(+)}_{ijklmn,0} + h_{4,m,jkN} h_{4,n,iS} \bar{v}^{(-)}_{ijklmn,0} \\
 &\quad - g_{4,m,jkN} h_{4,n,iS} \bar{\mu}^{(-)}_{ijklmn,0} + h_{4,m,jkN} g_{4,n,iS} \bar{\mu}^{(+)}_{ijklmn,0}) \\
 &\quad - (2N^2 + 1)(g_{3,m,jkN} g_{3,n,iS} \bar{v}^{(+)}_{ijklmn,-1} + h_{3,m,jkN} h_{3,n,iS} \bar{v}^{(-)}_{ijklmn,-1} \\
 &\quad - g_{3,m,jkN} h_{3,n,iS} \bar{\mu}^{(-)}_{ijklmn,-1} + h_{3,m,jkN} g_{3,n,iS} \bar{\mu}^{(+)}_{ijklmn,-1}) \\
 &\quad + (2N^2 + 1)(g_{2,m,jkN} g_{2,n,iS} \bar{v}^{(+)}_{ijklmn,-2} + h_{2,m,jkN} h_{2,n,iS} \bar{v}^{(-)}_{ijklmn,-2} \\
 &\quad - g_{2,m,jkN} h_{2,n,iS} \bar{\mu}^{(-)}_{ijklmn,-2} + h_{2,m,jkN} g_{2,n,iS} \bar{\mu}^{(+)}_{ijklmn,-2}) \\
 &\quad + N^2(N^2 - 4)(g_{1,m,jkN} g_{1,n,iS} \bar{v}^{(+)}_{ijklmn,-3} + h_{1,m,jkN} h_{1,n,iS} \bar{v}^{(-)}_{ijklmn,-3} \\
 &\quad - g_{1,m,jkN} h_{1,n,iS} \bar{\mu}^{(-)}_{ijklmn,-3} + h_{1,m,jkN} g_{1,n,iS} \bar{\mu}^{(+)}_{ijklmn,-3})] \\
 &\quad (m, n=1, 2 \quad k, l=1, 2, 3, 4, 5 \quad i, j=1, 2, 3, \dots \quad N, S=0, 1, 2, \dots)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ただし次の定積分および関数を用いてある。なお $\Phi^{(i)}_{ijNS} (i=1, 2, 3, 4), \Psi_{ijNS}$ は添字 i と j また、 N と S に関して対称であることが確かめられる。

$$\left. \begin{aligned}
 \bar{\nu}^{(\pm)}{}_{ijklmn,\mu} &\equiv \int_{\xi_1}^1 \xi^{k+l-2+\mu} \cos(P_{mj}-P_{ni})\pi\xi d\xi \pm \int_{\xi_1}^1 \xi^{k+l-2+\mu} \cos(P_{mj}+P_{ni})\pi\xi d\xi \\
 \bar{\mu}^{(\pm)}{}_{ijklmn,\mu} &\equiv \int_{\xi_1}^1 \xi^{k+l-2+\mu} \sin(P_{mj}-P_{ni})\pi\xi d\xi \pm \int_{\xi_1}^1 \xi^{k+l-2+\mu} \sin(P_{mj}+P_{ni})\pi\xi d\xi \\
 \bar{c}^{(\pm)}{}_{ijklmn} &\equiv \xi_P^{k+l-2} [\cos(P_{mj}-P_{ni})\pi \xi_P \pm \cos(P_{mj}+P_{ni})\pi \xi_P] \\
 \bar{s}^{(\pm)}{}_{ijklmn} &\equiv \xi_P^{k+l-2} [\sin(P_{mj}-P_{ni})\pi \xi_P \pm \sin(P_{mj}+P_{ni})\pi \xi_P] \\
 \bar{c}_{NP} &\equiv \cos N\theta_P, \quad \bar{s}_{SP} \equiv \sin S\theta_P, \quad \bar{c}_{NP} \equiv \cos N\theta_P, \quad \bar{s}_{SP} \equiv \sin S\theta_P
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

上式はすべて $\xi^r \cos \bar{p}\pi\xi$, $\xi^r \sin \bar{p}\pi\xi$ (r は整数, $\bar{p} = p_{mj} \pm p_{ni}$) の関数の ξ_1 ($\xi_1 \neq 0$) から 1 での定積分で示され, その値は次式より容易に求まる.

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_{r,p} &= \int_{\xi_1}^1 \xi^r \cos \bar{p}\pi\xi d\xi \\
 &\left\{ \begin{aligned}
 &(1 - \xi_1^{r+1}) \times (r+1)^{-1}; \quad (\bar{p}=0 \text{ の場合}) \\
 &(1 - \sin \bar{p}\pi\xi_1) \sin \bar{p}\pi/\bar{p}\pi; \quad (r=0, \bar{p} \neq 0 \text{ の場合}) \\
 &\sum_{k=1}^l (-1)^{k+1} P_{r,r-2k+1} (\bar{p}\pi)^{-2k} [\cos \bar{p}\pi + \bar{p}\pi \sin \bar{p}\pi/(r-2k+2)] \\
 &\quad + \xi_1^{r+1-2k} [\cos \bar{p}\pi\xi_1 + \bar{p}\pi\xi_1 \sin \bar{p}\pi\xi_1/(r-2k+2)] + (1/2)(-1)^l r! (\bar{p}\pi)^{-2l} \{1 - (-1)^r \\
 &\quad + [1 + (-1)^r] \sin \bar{p}\pi/\bar{p}\pi\}; \quad (r > 0, \bar{p} \neq 0 \text{ の場合}) \\
 &\sum_{k=1}^l (-1)^k (\bar{r}-2k) P_{\bar{r}-2k,r-1} (\bar{p}\pi)^{2k} [\cos \bar{p}\pi - \sin \bar{p}\pi/(\bar{r}-2k)\bar{p}\pi] \\
 &\quad + \xi_1^{\bar{r}-2k-1} [-\cos \bar{p}\pi\xi_1 + \xi_1 \sin \bar{p}\pi\xi_1/(\bar{r}-2k)\bar{p}\pi] + (1/2)(-1)^{l+1} (\bar{p}\pi)^{-2l}/(\bar{r}+1)! \\
 &\quad \times \{-[1 + (-1)^r] (\sin \bar{p}\pi - \xi_1^{-1} \sin \bar{p}\pi\xi_1) - [1 + (-1)^r] \bar{I}_{-1,p} + [1 + (-1)^{r+1}] I_{-1,p}\} \\
 &\quad ; \quad (r < -1, \bar{p} \neq 0 \text{ の場合})
 \end{aligned} \right. \\
 I_{r,p} &= \int_{\xi_1}^1 \xi^r \sin \bar{p}\pi\xi d\xi \\
 &\left\{ \begin{aligned}
 &(\cos \bar{p}\pi\xi_1 - \cos \bar{p}\pi)/\bar{p}\pi; \quad (r=0, \bar{p} \neq 0 \text{ の場合}) \\
 &\sum_{k=1}^l (-1)^{k+1} P_{r,r-2k+1} (\bar{p}\pi)^{-2k} [\sin \bar{p}\pi - \bar{p}\pi \cos \bar{p}\pi/(r-2k+2)] \\
 &\quad + \xi_1^{r+1-2k} [-\sin \bar{p}\pi\xi_1 + \bar{p}\pi\xi_1 \cos \bar{p}\pi\xi_1/(r-2k+2)] + (1/2)(-1)^l r! (\bar{p}\pi)^{-2l-1} \\
 &\quad \times [1 + (-1)^r] (\cos \bar{p}\pi\xi_1 - \cos \bar{p}\pi); \quad (r > 0, \bar{p} \neq 0 \text{ の場合}) \\
 &\sum_{k=1}^l (-1)^k (\bar{r}-2k) P_{\bar{r}-2k,r-1} (\bar{p}\pi)^{2k} [\sin \bar{p}\pi + \cos \bar{p}\pi/(\bar{r}-2k)\bar{p}\pi] \\
 &\quad + \xi_1^{\bar{r}-2k-1} [-\sin \bar{p}\pi\xi_1 - \xi_1 \cos \bar{p}\pi\xi_1/(\bar{r}-2k)\bar{p}\pi + (1/2)(-1)^{l+1} (\bar{p}\pi)^{-2l}/(\bar{r}-1)! \{[1 + (-1)^r] \\
 &\quad \times (\cos \bar{p}\pi - \xi_1^{-1} \cos \bar{p}\pi\xi_1) + [1 + (-1)^r] \bar{I}_{-1,p} - [1 + (-1)^{r+1}] I_{-1,p}\}; \quad (r < -1, \bar{p} \neq 0 \text{ の場合})
 \end{aligned} \right. \\
 &I_{-1,p}, \bar{I}_{-1,p} \text{ はシンプソンの積分公式を用いた, ただし } l \text{ の値は以下のとおりである.} \\
 &P_{r,s} \text{ は式(6)で定義してある.} \\
 &\left. \begin{aligned}
 &(イ) \quad r \text{ が奇数の場合 } l=(r+1)/2(r>0), \quad l=(\bar{r}-1)/2(r<-1) \\
 &(ロ) \quad r \text{ が偶数の場合 } l=r/2(r>0), \quad l=\bar{r}/2(r<-1)
 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)
 \end{aligned}$$

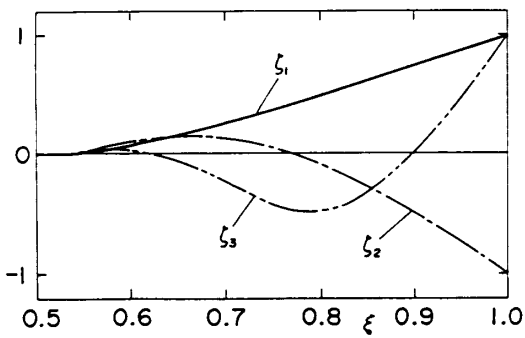


図 2 半径方向における形状関数

ついで式(10)で $C_{jN} \equiv \bar{C}_{jN} \cos \omega\tau$, $S_{jN} \equiv \bar{S}_{jN} \cos \omega\tau$, とおき \bar{C}_{jN} , \bar{S}_{jN} に関する係数行列式を零とおいた式より無次元固有振動数 ω と固有ベクトルが求まる. な

表 1 形状関数における $e_j(\xi)$ の係数

j	p_{1j}	q_j	p_{2j}
1	0	0	0
2	0.65	0	0
3	2.40	0.9	1.6
4	6.00	0.6	4.00

お ω を小さい順に $\omega_{iN} (i=1, 2, 3, \dots; N=0, 1, 2, \dots)$ とする。

4. 計算過程および結果

以下の計算では、 $\nu=0.3$ として計算した。

4.1 形状関数の設定 形状関数 $\zeta_{jN}(\xi)$ は三角関数 $e_j(\xi)$ とべき級数 $f_{jN}(\xi)$ の積よりなるため、 $e_j(\xi) = 0$ を満足する ξ が値を振動形の節点位置に直接対応できる。この $e_j(\xi)$ を変化させながら形状関数を仮定する。その際、三角関数の余弦項は主に節点の数と自由端近傍の形状を近似でき、また正弦項は節点位置の移動の調整を可能とする。これにより得られた形状関数 $\zeta_{jN}(\xi)$ を次数 $j=3$ まで図2に示す。図にて、縦軸は各関数の最大値を1として示してある。この場合に対応する $e_j(\xi)$ の係数 p_{1j}, q_j, p_{2j} の値を表1に示す。

4.2 集中質量がない場合 次に、集中質量がない場合の固有振動数を求めた。周方向波数がない場合で ζ_{jN} の項数 j を逐次増加させた時の半径方向一次および二次モードの固有振動数 ω_{10}, ω_{20} の収束状況を図3, 図4に示す。縦軸は固有振動数の値、横軸は近似項数の最大値 j である。図3は一次モードの固有振動数変化を示している。図より最低次振動数においては3項近似程度で収束していることがわかる。図4は二

次モード固有振動数変化を示している。これより、振動数 +1~2 項すなわち 3~4 項近似程度で収束していることがわかる。また、周方向波数が0または1の場合で得られた半径方向一次および二次モードの固有振動数を表2に示す。ただし近似項数は3項とって計算した。ベッセル関数による解をカッコの中に示す。これより本結果は良い近似であることがわかる。

4.3 集中質量を付加した場合 前述で得た形状関数を、集中質量を付加した円板の場合に適用した。始めに、周方向位置 $\theta_p=0$, 半径位置 $\xi_p=0.75$ に質量比 $m_p=0.3$ の集中質量を1個付加し、周方向波数を逐次変えた時の周方向最低次における半径方向一次モードの固有振動数 ω'_i を図5に示す。縦軸は固有振動数の値、横軸は周方向の波数を示している。固有振動数は、波数が4から5においてほぼ収束していくことがわかる。

次に、 $N=3, \theta_p=0, m_p=0.3$ または 1.0 の集中質量1個を $\xi_p=0.5 \sim 1.0$ まで変化させた場合の半径方向一次モードおよび二次モードの持つ固有振動数 ω'_1, ω'_2

表2 各場合の固有振動数

NO. OF NODAL CIRCLE	NO. OF NODAL DIAMETER	b/a		
		0.3	0.5	0.7
0	0	6.667 (6.55)	13.02 (13.0)	36.95 (37.0)
1	0	42.63 (42.6)	85.06 (85.1)	239.8 (240)
0	1	6.566 (6.33)	13.29 (13.3)	37.49 (37.5)
1	1	44.65 (44.6)	86.73 (86.7)	241.2 (241)

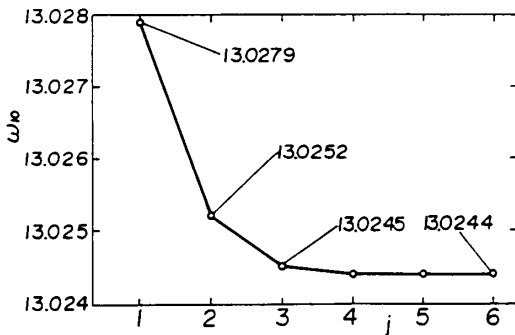


図3 固有振動数に及ぼす近似項数の影響 ($\xi_1=0.5, m_p=0, i=1$)

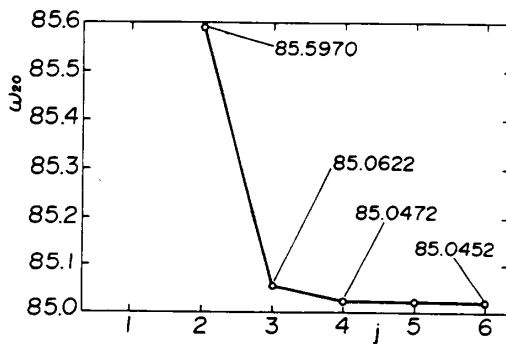


図4 固有振動数に及ぼす近似項数の影響 ($\xi_1=0.5, m_p=0, i=2$)

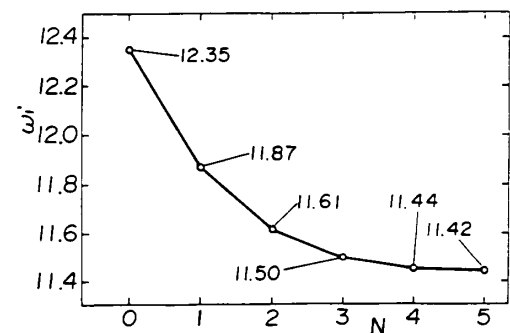


図5 固有振動数に及ぼす周方向波数の影響 ($\xi_1=0.5, m_p=0.3, \theta_p=0, \xi_p=0.75, i=1$)

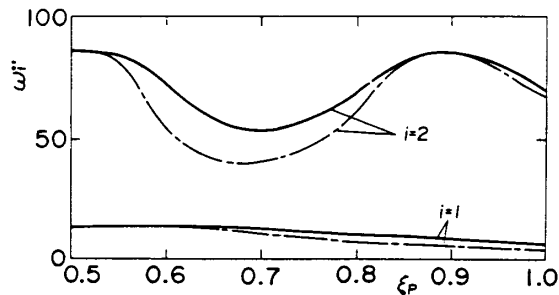


図6 固有振動数に及ぼす集中質量半径位置の影響
($N=3$, $\xi_1=0.5$, $m_p=0.3$ or 1.0 , $\theta_p=0$, — : $m_p=0.3$, - - - : $m_p=1.0$)

を図6に示す。縦軸は固有振動数の値、横軸は集中質量の位置を示している。これより、二次モードでは $\xi=0.85$ 付近で節円を持つことがわかる。また、固有振動数は一次では外周、二次では $\xi_p=0.7$ で最も減少していることがわかる。その減少率は、一次モードにおいて質量比が0.3の時47%、1.0の時68%、二次モードにおいて質量比が0.3の時36%、1.0の時53%の減少となる。

最後に、 $N=3$, $\xi_p=0.75$, $m_p=0.1$ の集中質量3個を、周方向に分散させ、その時の集中質量間の角度を $0.4\sim 0.8$ (rad)まで変化させた場合の半径方向一次モードおよび二次モードの持つ固有振動数 ω_1' , ω_2' を図7に示す。縦軸は固有振動数の値、横軸は集中質量間の角度を示している。これより分散させるほど、一次、二次ともに大きくなっていることがわかる。その増加率は、集中質量間の角度を $45^\circ\sim 90^\circ$ に広げた場合に、一次モードで2.5%、二次モードで7%の増加となる。

5. 結 言

任意位置に集中質量を搭載する内周固定、外周自由端を有する円板の振動問題において、予想される振動形を近似できるように、三角関数と四次までのべき級数との積で示される形状関数を導入し、基礎式にガレルキン法を適用して運動方程式を導く方法を示した。

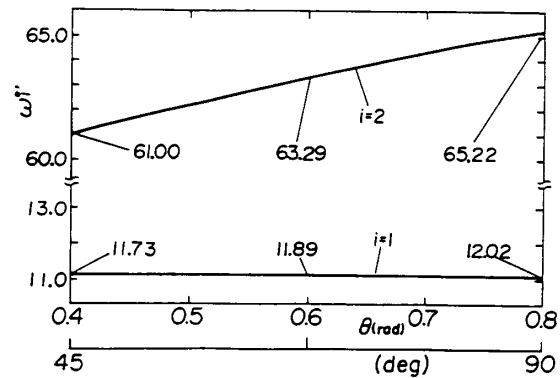


図7 固有振動数に及ぼす集中質量分布の影響
($N=3$, $\xi_1=0.5$, $m_p=0.1\times 3$, $\xi_p=0.75$)

ついで円板に集中質量を有する場合の問題に本解法を適用し、解の精度を吟味することにより形状関数の有用性を明らかにした。得られた結果を要約すると次のごとくなる。

(1) 本解法で用いた形状関数は、円板の振動解析に、容易に適用できる。

(2) 集中質量のない場合、近似項数が振動次数より2ないし3項ほど多く仮定するのみで、振動数は工學上十分な精度を有する。

(3) 集中質量を付加すると固有振動数は、すべて減少する。周方向波数変化による固有振動数は、最低波数の+4程度の波数を考慮にいれると良い収束を得る。

(4) 3個の集中質量を、周方向に対称的に配置して分散させると、3個が集中していた場合の固有振動数と比べて大きくなる。

文 献

- (1) Vogel, S. M. and Skinner, D. M., *J. Appl. Mech.*, **32-4** (1965), 926.
- (2) Leissa, A. W., *Vibration of Plate*, NASA SP-160, (1969).
- (3) 永井・荒井・ほか2名, 機論, **55** 516, C (1989), 1941.