

## ロボットによる倒立振子の安定化制御\* (最適レギュレータ理論による制御システムの設計と実験)

小島 宏行\*<sup>1</sup>, 山口 晃明\*<sup>2</sup>, 坂本 賢治\*<sup>1</sup>

### Stabilizing Control of a Inverted Pendulum by a One-Link Robot (Design of Control System by Optimal Regulator Theory and Experiment)

Hiroyuki KOJIMA, Teruaki YAMAGUTI and Kenji SAKAMOTO

This paper describes the control design method and the experimental results of the stabilizing control of a inverted pendulum by a one-link horizontal robot. First, the nonlinear equation of motion of the mechanical system consisting of the pendulum and the robot is showed. Then, by applying the optimal regulator theory to the linear equation of motion, the optimal feedback coefficients are derived, and the validity of the control design method are confirmed by the numerical simulation of the stabilizing control of the inverted pendulum. Furthermore, it is showed experimentally that the inverted pendulum can be controlled well by the robot, and the experimental results of the continuous control consisting of the swing-up control and stabilizing control is demonstrated.

**Key Words:** Robotics, Automatic Control, Control Device, Inverted Pendulum, Stabilizing Control, Optimal Regulator Theory, Experiment

#### 1. 緒 言

不安定な力学系を安定化制御する一つの問題として、倒立振子に関する研究が行われている。例えば、倒立振子の安定化制御<sup>(1)(2)</sup>、振子の振り上げ制御<sup>(3)(4)</sup>などの研究が報告されている。著者らは、アミューズメントロボット<sup>(5)</sup>の一種として、水平1関節形ロボットアームの先端に振子を取付けた形式の振子制御ロボットを試作するとともに、数値シミュレーションと逆動力学に基づくフィードフォワード方式の制御システムを構築し、倒立状態に移行するような振子の振り上げ制御についての実験結果を報告した<sup>(6)</sup>。

本研究では、ロボットによる倒立振子の安定化制御システムの設計法について述べるとともに、振り上げから倒立安定化制御に至る一連の運動制御の実験結果ならびに数値シミュレーション結果を示し、本制御法の有効性を検証したものである。安定化制御システムの設計においては、力学系の運動方程式を線形化し、これに最適レギュレータ理論を適用することにより、制御システムの設計式を導いている。また、数値シミ

ュレーションと実験結果を比較し、両者の差異などについて検討を加えている。

#### 2. 安定化制御システムの設計

図1は、水平1関節形振子制御ロボットの機構部のモデルを示したものである。図中の記号を用いると、

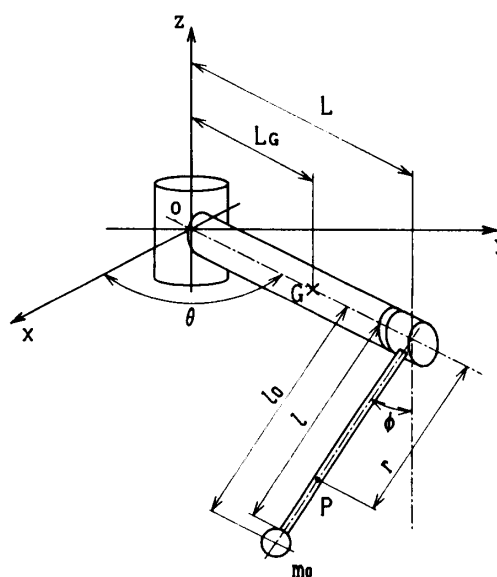


図1 水平1関節形振子制御ロボットのモデル<sup>(6)</sup>

\* 原稿受付 平成3年4月5日。

<sup>1</sup> 正員, 群馬大学工学部(☎376 桐生市天神町1-5-1)。

<sup>2</sup> (株)安川電機製作所(☎100 東京都千代田区大手町1-6-1)。

系の運動方程式は、次式のように書くことができる<sup>(6)</sup>。

$$\begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N \\ 0 \end{Bmatrix} T_m \dots\dots\dots (1)$$

ここに、

$$J_{11} = N^2 J_m + J_c + M L_c^2 + (m + m_o) L^2 + \left(\frac{1}{3} m l^2 + m_o l_o^2\right) \sin^2 \phi \dots\dots\dots (2)$$

$$J_{12} = J_{21} = -\left(\frac{1}{2} m l + m_o l_o\right) L \cos \phi \dots\dots\dots (3)$$

$$J_{22} = \frac{1}{3} m l^2 + m_o l_o^2 \dots\dots\dots (4)$$

$$b_1 = -2\left(\frac{1}{3} m l^2 + m_o l_o^2\right) \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \phi \cos \phi - \left(\frac{1}{2} m l + m_o l_o\right) L \dot{\phi}^2 \sin \phi \dots\dots\dots (5)$$

$$b_2 = -\left(\frac{1}{3} m l^2 + m_o l_o^2\right) \dot{\theta}^2 \sin \phi \cos \phi - \left(\frac{1}{2} m l + m_o l_o\right) g \sin \phi - c \dot{\phi} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $\theta, \phi$  はリンクならびに振子の回転角、 $N$  はハーモニックドライブの減速比、 $T_m, J_m$  は直流サーボモータのトルクおよび慣性モーメント、 $L, L_c, l_o, l$  はリンクと振子の長さ、 $M, J_c$  はリンクの質量ならびに重心回りの慣性モーメント、 $m, m_o$  は振子の棒状および先端の質量、 $g$  は重力加速度、 $c$  は減衰力係数である。

次に、図2のように、倒立状態からの振子の微小な回転角度を用いて、次式の変数変換を行う。

$$\varphi_1 = \theta - \theta_0 \dots\dots\dots (7)$$

$$\varphi_2 = \phi - \pi \dots\dots\dots (8)$$

ただし、 $\theta_0$  はリンク回転角の初期値を表している。式(7)を用いて、運動方程式(1)を倒立状態の近傍で線形化すると次式が導かれる。

$$\dot{y} = A y + b T_m \dots\dots\dots (9)$$

ここに、

$$y = \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \dot{\varphi}_1 \\ \dot{\varphi}_2 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (10)$$

$$A = \begin{bmatrix} M^{-1} C & M^{-1} K \\ E & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{Bmatrix} M^{-1} B \\ 0 \end{Bmatrix}, B = \begin{Bmatrix} N \\ 0 \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (11)$$

$$M = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (m l / 2 + m_o l_o) g \end{bmatrix} \dots\dots (12)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \dots\dots\dots (13)$$

$$J_{11} = M L_c^2 + (m + m_o) L^2 + J_m N^2 \dots\dots\dots (14)$$

$$J_{12} = J_{21} = \left(\frac{1}{2} m l + m_o l_o\right) L \dots\dots\dots (15)$$

$$J_{22} = \frac{1}{3} m l^2 + m_o l_o^2 \dots\dots\dots (16)$$

ただし、式(11)中の  $E$  は  $(2 \times 2)$  の単位マトリクスを表している。

倒立振子を安定化制御するために、次式で記述される状態フィードバックを行う。

$$T_m = -F y \dots\dots\dots (17)$$

ここに、

$$F = \{F_{c\theta}, F_{c\phi}, F_{h\theta}, F_{h\phi}\} \dots\dots\dots (18)$$

本研究では、最適レギュレータ理論を用いて、状態フィードバック係数  $F$  を設計することにする。すなわち、状態フィードバック係数  $F$  は、評価関数

$$J = \int_0^{\infty} (y^T Q y + T_m^2) dt \dots\dots\dots (19)$$

$$Q = \text{diag} [Q_1, Q_2, Q_3, Q_4] \dots\dots\dots (20)$$

を極小化させる Riccati 方程式

$$P A + A^T P - P b b^T P + Q = 0 \dots\dots\dots (21)$$

の解  $P$  を用いると、次式で与えられる。

$$F = b^T P \dots\dots\dots (22)$$

ただし、式(20)の  $Q$  は、評価関数の重みを意味している。

### 3. 実験結果ならびに数値シミュレーション結果

#### 3.1 数値シミュレーション結果

本実験で用いたロボットならびに振子の諸元は、 $L=30$  cm,  $L_c=10.3$  cm,  $l=28.6$  cm,  $l_o=29.3$  cm,  $M=1.22$  kg,  $m=0.0206$  kg,  $m_o=0.0268$  kg,  $J_m=3.59 \times 10^{-5}$  kg·m<sup>2</sup>,  $J_c=0.0126$  kg·m<sup>2</sup>,  $N=50$ ,  $c=0.00153$  kg·m<sup>2</sup>/s のようである。また、直流サーボモータのトルク定数および抵抗は  $0.0442$  N·m/A,  $5.3 \Omega$  のとおりである。

図3は、ロボットによる倒立振子の振り上げ制御ならびに安定化制御システムのブロック線図を示したものである。

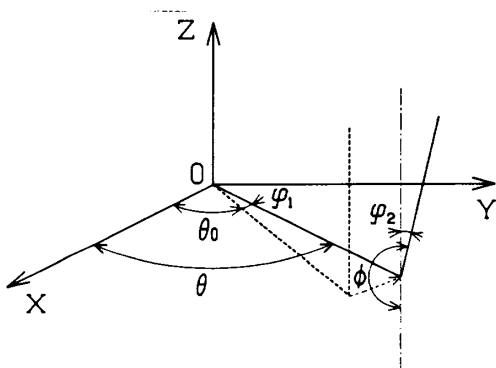


図2 力学系の線形化モデル

図4に、振子の初期条件として、振子の回転角を倒立状態から10°だけ傾けさせた場合の倒立安定化制御の数値シミュレーション結果を示す。式(21)のRiccati方程式の解は、有本・ポッターの解法を用いて求めている。図より、振子ならびにリンクは、倒立状態ならびに初期位置に良好に運動制御されており、制御システムの設計法の妥当性が検証されたものと言える。

図5は、振り上げ制御から、倒立安定化制御に至る連続運動制御についての数値シミュレーション結果を示したものである。振子は、1.5回のリンクの正弦波的旋回運動によりほぼ振り上がり、その後は慣性力により倒立状態に移行し、さらに状態フィードバックにより倒立安定化制御されていることがわかる。なお、1回の正弦波的旋回運動に要する時間  $T_p$  は1.3sとしてあり、これは線形化した振子の固有周期1.03sよりも約26%大きい。

本研究では、振り上げ制御時におけるリンクの正弦波的旋回運動の制御指令値  $\theta_c$  を次式のように定めている。

$$0 \leq t < \frac{T_p}{4} : \theta_c = \frac{\theta_m}{2} (\cos 2\omega t - 1) \dots\dots\dots (23)$$

$$\frac{T_p}{4} \leq t < \frac{5T_p}{4} : \theta_c = -\theta_m \sin \omega t \dots\dots\dots (24)$$

$$\frac{5T_p}{4} \leq t < \frac{3T_p}{2} : \theta_c = \frac{\theta_m}{2} (\cos 2\omega t - 1) \dots\dots\dots (25)$$

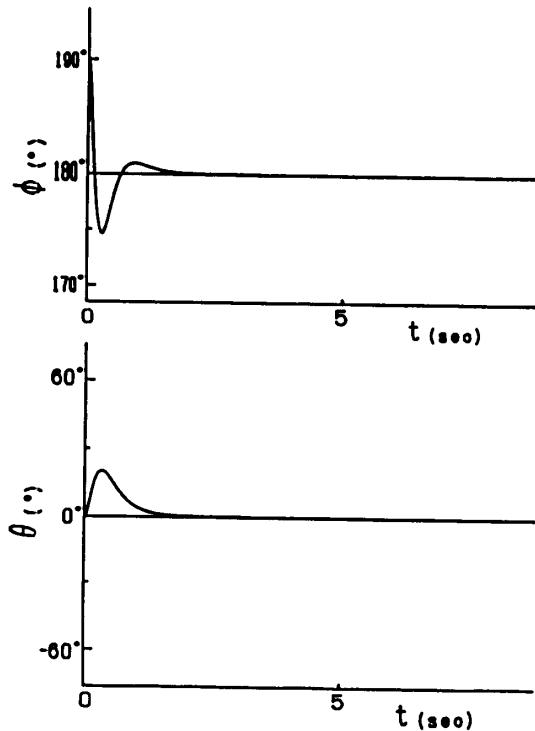
$$\frac{3T_p}{2} \leq t : \theta_c = 0 \dots\dots\dots (26)$$

ここに、

$$\omega = 2\pi/T_p \dots\dots\dots (27)$$

**3.2 実験結果** 図5の数値シミュレーションにおける状態フィードバック係数を用いて安定化制御の

実験を行ったところ、振子を安定に制御することが可能であることが確かめられたが、過度的な振動が生じ、整定時間が比較的長くなってしまった。そこで、過度振動を抑制するように、状態フィードバック係数を微調整し実験を行った。この実験結果を示したものが図



$$F = \{-0.0726, -0.122, -0.0999, -0.777\}$$

$$Q = \{10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-2}, 10^{-5}\}$$

図4 倒立安定化制御の数値シミュレーション

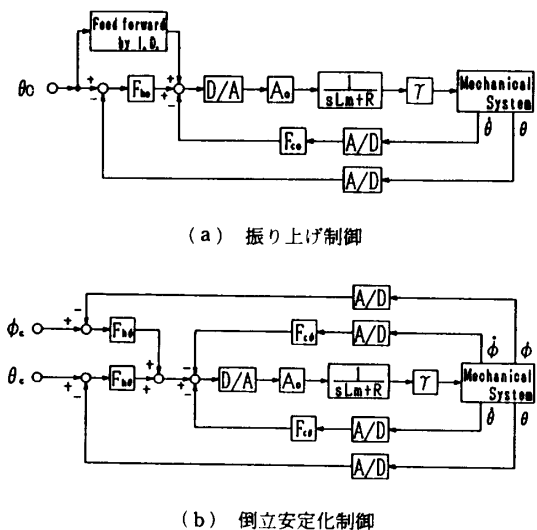
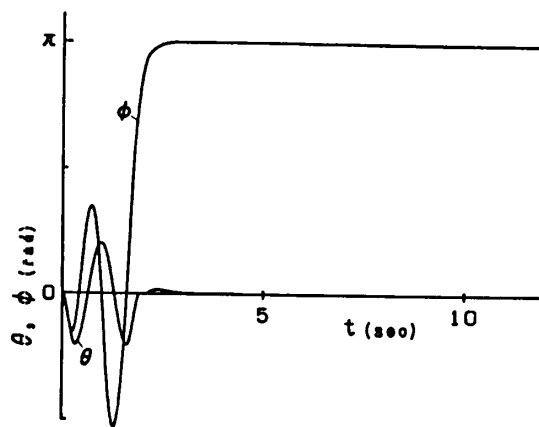


図3 制御システムのブロック線図



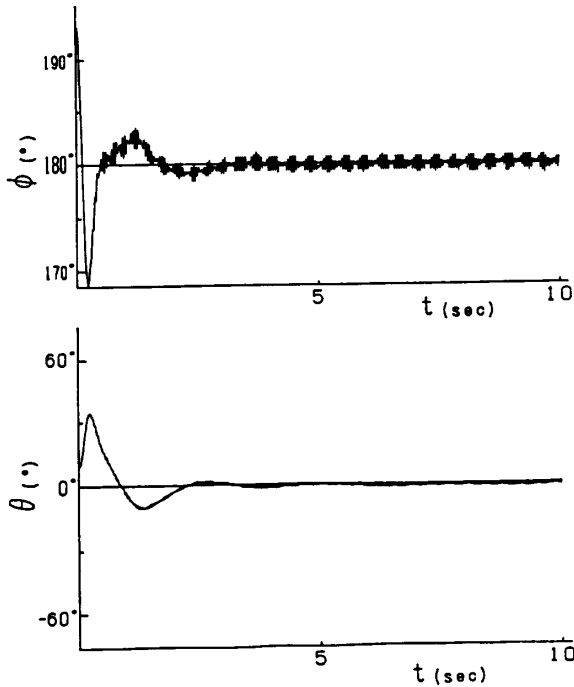
$$T_p = 1.3s, \theta_m = 36.5^\circ$$

$$F = \{-0.0726, -0.122, -0.0999, -0.777\}$$

$$Q = \{10^{-3}, 10^{-5}, 10^{-2}, 10^{-5}\}$$

図5 振子の振り上げ制御から倒立安定化制御に至る連続運動制御の数値シミュレーション

6である。図より、振子は倒立状態に安定化制御されており、リンクも目標値(0°)に位置制御されていることがわかる。なお、数値シミュレーションでは見られなかった、うなりを伴う高周波の持続的な振動が生



$$F = \{-0.0726, -0.094, -0.0999, -0.67\}$$

図 6 倒立安定化制御の実験結果

起しているが、このことは、制御システムでは考慮しなかったハーモニックドライブのねじり弾性などに起因しているものと推定される。

また図7は、安定化制御されている状態の倒立振子の先端に、指先で外乱力を作用させた場合の実験結果を示したものであるが、外乱力に対する本制御法の良好な制御性能が十分に認められる。

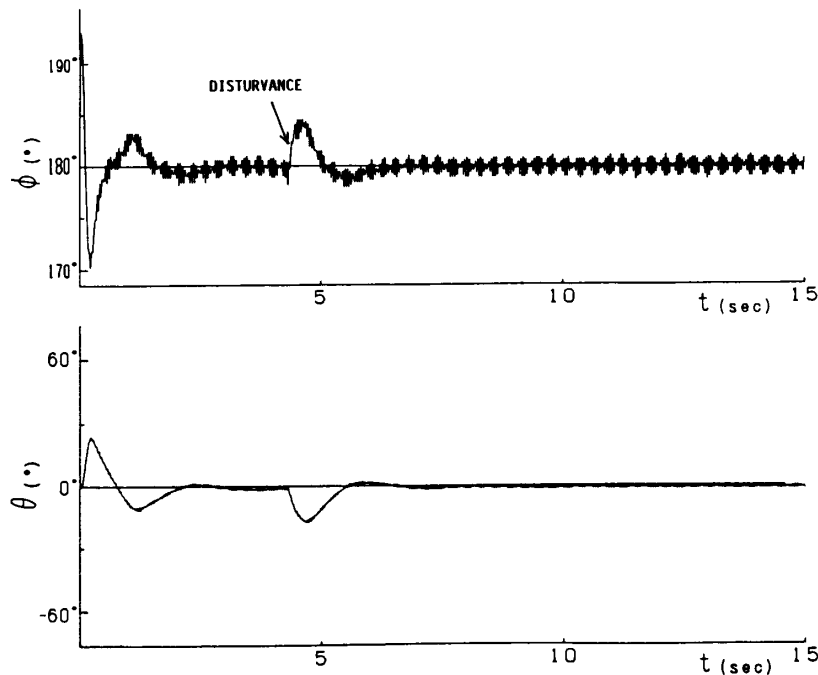
図8は、振り上げ制御から倒立安定化制御を行い、さらに倒立安定化制御の状態でリンクを30°回転させるような連続運動制御が実験により実現されている様子を示したものである。振り上げ制御時においては、逆動力学に基づくフィードフォワード制御とPD制御とからなる複合制御方式(図3(a))を採用している。

#### 4. 結 言

本研究は、水平1関節形ロボットによる倒立振子の安定化制御について、制御システムの設計と実験を行ったものであり、得られた結果を要約すると、次のとおりとなる。

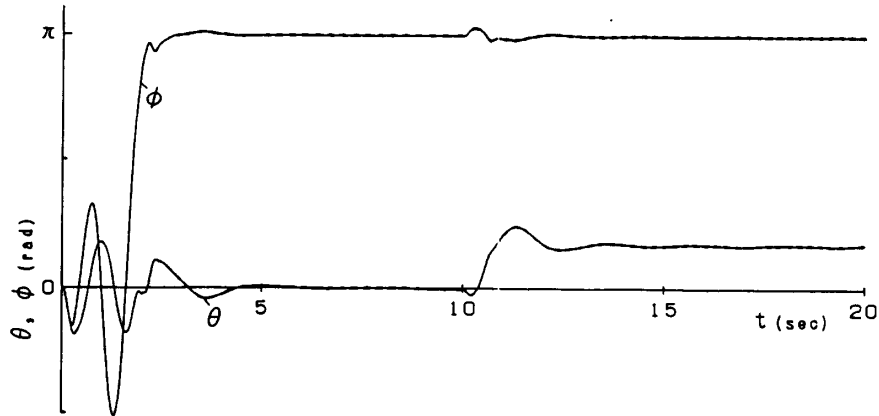
(1) ロボットと振子とから成る力学系の運動方程式を線形化するとともに、これに最適レギュレータ理論を適用し、倒立振子の安定化制御システムの設計式を導いた。また、数値シミュレーションを行い、制御システムの設計式の妥当性を検証した。

(2) 実験を行ったところ、本制御法により、倒立



$$T_p = 1.3s, \theta_m = 36.5^\circ, F = \{-0.0726, -0.094, -0.0999, -0.67\}$$

図 7 倒立振子の先端に外乱力を作用させた場合の安定化制御の実験結果



$$T_p=1.3s, \theta_m=36.5^\circ, F=\{-0.0726, -0.094, -0.0999, -0.67\}$$

図 8 振子の振り上げ制御から倒立安定化制御に至る連続運動制御の実験結果

振子の安定化制御が良好に実現され、本制御法の有効性が立証された。また、振り上げ制御から倒立安定化制御を行い、さらに倒立状態の振子を移動させるような連続運動制御も良好に実現できることが確かめられた。

#### 文 献

(1) 杉江・井上・木村, 計測自動制御学会論文集, 14-5 (1978),

591.

- (2) 辻澤・余湖・田川, 計測自動制御学会論文集, 19-12 (1983), 964.  
 (3) 結城・猪岡・小林, 機論, 52-475, C(1986), 1026.  
 (4) 高橋・猪岡, 機論, 53-485, C(1986), 107.  
 (5) 井口, 日本ロボット学会誌, 8-3 (1990), 315.  
 (6) 小島・小山・根津・坂本, 機論, 57-535, C(1991), 854.  
 (7) 計測自動制御学会編, 自動制御ハンドブック(基礎編), (1983), 609.