

高温超電導浮上系の非線形振動解析のモデリング*

長屋 幸助*¹, 周東 俊介*²Modeling in Nonlinear Vibrations of a High-Tc
Superconducting Levitation System

Kosuke NAGAYA and Shunsuke SHUTO

Three-dimensional analytical results for the levitation force of a vibrating high-Tc superconducting levitation system were presented. When the levitated superconductor vibrates, the levitation force shows nonlinear relationships with the air gap, amplitude and vibration frequency, so that the conventional models which do not consider dynamic effects cannot be applied. In the model proposed by (Uesaka et al.), dynamic effects are considered, but the critical current is constant. We propose an improved Kim model which is applicable to vibration problems of conductors. Numerical results for the levitation force were obtained and compared with previously published experimental data. A modeling method for the superconducting levitation system was presented, and the nonlinear spring constants obtained in an analysis which included the effects of air gap, amplitude and frequencies were given. Numerical calculations were carried out for nonlinear vibrations of the system based on the modeling results.

Key Words: High Tc Superconductor, Three Dimensional Analysis, Levitation Force, Modeling, Nonlinear Vibration

1. 結 言

近年、高温超電導体の製造技術が飛躍的に進歩したことにより、高臨界電流密度をもつバルク材の製造が可能となったことから^{(1)~(3)}、その応用が注目されている。高温超電導体の特長は、大きなピン止め効果により強力な浮上力を得ることができることのみならず、浮上系において反発方向およびそれと直角の両方向に安定であることがあげられる。したがって安定な非接触浮上を実現させる系としては、高温超電導磁気浮上系が最も適しているといえる。高温超電導体の非接触浮上という性質を利用した、磁気軸受^{(4)~(6)}や電力貯蔵用の磁気浮上フライホイール、搬送システム⁽⁷⁾、磁気ダンパ等への応用⁽⁸⁾がすでに発表されている。また、アクチュエータとしての利用も検討されているが、高温超電導体の浮上力は初期設定空げき、振幅、周波数に依存する非線形系であるため、ただちにアクチュエータとして利用することは困難であり、まだ十分な研究がなされておらず、特にその基礎である動的特性については、非線形な周波数特性をも含む本格的な解析

は、著者らの調べた限り見受けられない。高温超電導体をばね要素として用いる場合、まず浮上力の解析が必要となるが、これに関して静的問題に対しては、すでに多くの研究が発表されている。しかし、動的な場合の特性は静的な場合とまったく異なるため、静的な場合の解析を動的問題に直接応用することはできない。一方、上坂・宮・吉田ら^{(8)~(9)}は、有限要素法に基づく動的浮上力の数値解析法を提案し、実験も行いその妥当性を検証し、さらに差分法を組合せて非線形振動を解析した。この方法は、実験結果もよく説明することができ、またはん用性もあるため今後の応用が期待されるが、数値解法のため簡単な問題に対しても大がかりな計算を必要とする。これらにかんがみ、著者ら⁽¹⁰⁾はコンパクトな理論解を求め、それをを用いて除振用アクチュエータを開発し、その計算法を示した。しかしその研究では、簡単のため超電導体を極薄い円板に仮定しているため、強力な浮上力を必要とするある程度の厚みを持った超電導体には適用できない。

そこで本報では、一般的な三次元超電導円板の浮上力のコンパクトな理論解を誘導し、厚さの影響を無視した薄板近似式との比較検討を行った。特にこれまでの動解析では、臨界電流密度を一定としているが、実際には変動するので、磁束密度の臨界電流密度に及ぼ

* 原稿受付 1995年5月9日。

¹ 正員、群馬大学工学部 (〒376 桐生市天神町151)。² 准員、(株)明電舎 (〒100 東京都千代田区大手町221)。

す影響を考慮した Kim モデルを導入した解析解を求める。また超電導磁気浮上アクチュエータを設計する場合、非線形浮上力等が与えられれば、適当な数値解法により、そのダイナミクスを容易に求めることができるが、これまでの研究では浮上力計算と浮上系の応答計算を連立して扱っているため、計算が極めて複雑となり、したがって詳しい動特性まで調べた例は見受けられない。そこで本報では、これまで明らかにされていない、動的復元力と初期設定空げき、振幅、振動数等の関係を定量的に明らかにし、実際に超電導磁気浮上系をばね要素として使用する場合の適用範囲を明確にするとともに、近似的な解法も併せて示し、実用的な超電導磁気浮上系の設計法を確立することを目的とする。

2. 高温超電導体の三次元浮上力解析

2.1 解析モデル 本論で解析するモデルは、図1のようなもので、その構成は、固定された永久磁石上に高温超電導浮上体が板ばね(はり)で吊るされており、重力下で釣合状態にあるものとする。高温超電導浮上体、および磁石は、ともに円形(円板、あるいは円筒形)であるとし、軸対称問題として扱うものとする。また板ばねは超電導浮上体の変位に比べ十分に長いものとし、板ばねの回転による影響は無視することができる。板ばねのばね定数 k_s だけを考えるものとする。

2.2 基礎方程式および境界条件 永久磁石によって空間の一点に作られる半径方向磁束密度 B_r 、および軸方向磁束密度 B_z は、著者らの前報⁽¹⁴⁾より、

$$B_r = B_{pr}(r, z) \dots\dots\dots(1\cdot a)$$

$$B_z = B_{pz}(r, z) \dots\dots\dots(1\cdot b)$$

ここに、 B_{pr} 、 B_{pz} は永久磁石により発生する半径方向および軸方向磁束密度であり、磁石の厚みを考慮した厳密解が文献(14)に与えられている。

一方、超電導体の基礎方程式は、超電導体内部と空気中のそれぞれで、

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A = -J \dots\dots(2\cdot a)$$

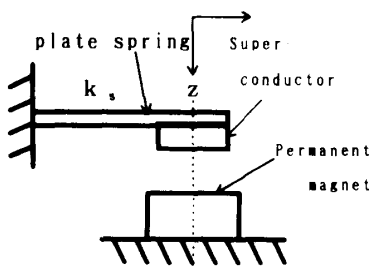


Fig.1 Analytical model

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A = 0 \dots\dots(2\cdot b)$$

と表される。

境界条件は、式(2)の超電導体内と空気中のそれぞれの解の連続条件となるが、その境界条件を用いて解析的を誘導することは三次元問題ではかなり困難となる。そこで本報ではまず超電導体の半径方向に対し、次のような近似的境界条件を用いる。すなわち

$$\left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \dots\dots\dots(3\cdot a)$$

式(3・a)は付録に示されるように、実用上十分な精度を有する(付録参照)。

一方厚さ方向に対して、超電導体内部電流による半径方向磁束密度は、本例の場合ベクトルポテンシャルが周方向成分のみであるので、($B_r = -\partial A / \partial z$)となる。超電導体の上下表面では磁束のほとんどが軸方向成分と考えられるので、半径方向成分を零と仮定すると、軸方向の境界条件を近似的に次のように置くことができる。

$$\left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{z=0} = \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{z=l} = 0 \dots\dots\dots(3\cdot b)$$

ここに、 μ_0 は空気の透磁率、 $J(r, z)$ は超電導体の単位面積当たりの遮蔽電流、 $A(r, z)$ はベクトルポテンシャル、 a は超電導体の半径、 l は超電導体の厚さである。式(3)を用いることにより超電導体内だけの解を用いた解析が可能となり、解析は極端に簡単となる。

式(3)を考慮して A を z 方向にフーリエ展開し、それを式(2・a)に代入して整理すれば任意の n について次のようなベッセル形の方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} - \left(\frac{n\pi}{l} \right)^2 \right\} A_n(r) = -\mu_0 J_n(r) \dots\dots\dots(4)$$

この解は1次の変形ベッセル関数で与えられる。また、超電導体内部においては外部磁束の変化によって、分布電流が生ずるが、これを半径方向に i 番め、軸方向に j 番めの線(円)電流に近似して表せば線電流は、

$$J \Delta r_i \delta(r - r_i) \Delta z_j \delta(z - z_j) \dots\dots\dots(5)$$

と表すことができる。ゆえに式(4)を解き、式(3)および(5)と併せれば、ベクトルポテンシャルは、

$$A(r, z) = \frac{2\mu_0}{l} \sum_{j=1}^{N'} \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_{jn} r_i \Delta r_i \Delta z_j D_n(r) \times \cos \frac{n\pi z_j}{l} \cos \frac{n\pi z}{l} \dots\dots\dots(6)$$

と表せる。ここに、 N' は軸 (z) 方向分割数、 N は半径方向分割数である。また、 $n=0$ 、 $n \geq 1$ に対して D_n は、

$$D_{0i}(r) = \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{r_i^2}{a^2} \right) \left(\frac{r}{r_i} \right) - \frac{r}{r_i} \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) u(r - r_i) \right]$$

$$D_{ni}(r) = \{ \{ K_i(a_n r_i) - K_i'(a_n r_i) I_1(a_n r_i) / I_1(a_n a) \} \\ \times I_1(a_n r) - \{ I_1(a_n r) K_i(a_n r_i) \\ - K_i'(a_n r) I_1(a_n r_i) \} u(r - r_i) \}$$

$$\epsilon_n = \begin{cases} \frac{1}{2} & n=0 \\ 1 & n \geq 1 \end{cases}, \quad a_n = \frac{n\pi}{l}$$

であり、 $I_1(\)$ は 1 次の第 1 種変形ベッセル関数、 $K_1(\)$ は 1 次の第 2 種変形ベッセル関数、および u は単位ステップ関数であり、ダッシュ(') は $(a_n r)$ についての微分を表す。すなわち

$$I_i'(a_n r) = I_0(a_n r) - (1/a_n r) I_1(a_n r)$$

$$K_i'(a_n r) = -\{ K_0(a_n r) + (1/a_n r) K_1(a_n r) \}$$

2.3 Flux Flow と Flux Creep 超電導体の動きが非常に遅い場合、すなわち静的な場合は外部磁界の変化とともに超電導体の遮蔽電流密度が臨界電流密度に等しいとする Bean モデル⁽¹¹⁾ および遮蔽電流密度が臨界電流密度と磁束密度に依存するとする Kim モデル⁽¹²⁾ がほぼ成立する。しかし、超電導体の動きが速くなると、フラックスフローとフラックスクリープの二つの領域が存在することが上坂・宮・吉田ら⁽⁸⁾⁽⁹⁾ の研究で指摘され、これらを考慮した J E 構成方程式⁽¹³⁾ を用いた数値解析法が報告されている。

Anderson の理論によると、フラックスクリープゾーンにおける電流密度と電場の構成方程式は、

$$f(J) = E = 2\rho_c J_c \sinh\left(\frac{U_0}{k\theta} \frac{J}{J_c}\right) \exp\left(-\frac{U_0}{k\theta}\right) \dots\dots\dots(7)$$

一方、フラックスフロー領域においては次式が成立する。

$$f(J) = E = \pm [E_c + \rho_f J_c (|J|/J_c - 1)] \\ (|J| > J_c) \dots\dots\dots(8)$$

ここに、 E は電場、 J は電流密度、 θ は温度、 U_0 はピン止めポテンシャル、 k はボルツマン定数、 ρ_c はフラックスフロー抵抗、 J_c は熱の影響がないときの臨界電流密度、 ρ_f はフラックスフロー抵抗、 $E_c = \rho_c J_c$ であり、符号は J が正のとき正、負のとき負である。

z 方向に s 番め、半径方向に m 番めの内部ベクトルポテンシャルは、式(6)で与えられるが、一方、電場とベクトルポテンシャルの間には、

$$E = -\left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A_{ex}}{\partial t} \right) \dots\dots\dots(9)$$

の関係がある。したがって、時刻 $t = T - \Delta t$ と $t = T$ の間を考えると、

$$A_s = A + A_{ex} \dots\dots\dots(10)$$

とおけば、

$$E = -\left\{ \frac{A_s(T) - A_s(T - \Delta t)}{\Delta t} \right\} \dots\dots\dots(11)$$

を得る。ここに、 A は内部ベクトルポテンシャル、 A_{ex} は外部ベクトルポテンシャルである。

一方、 E は、 J の関数で与えられるので、式(11)と併せ、この式は超電導体内の全ての位置で成立しなければならないことを考慮して、それぞれに j と i の添字を付せば、

$$f_{ji}(J_{ji}) + \left\{ \frac{A_{sji}(T) - A_{sji}(T - \Delta t)}{\Delta t} \right\} = 0 \\ j=1, 2, \dots, N', \quad i=1, 2, \dots, N \dots\dots\dots(12)$$

上式において J_c は臨界電流密度であり、上坂らの研究ではこれを一定と仮定しているが、実際の臨界電流密度は、磁束密度にも依存することが Kim ら⁽¹²⁾ の研究によって明らかにされている。すなわち、臨界電流密度 J_c は、

$$J_c = J_{c0} \frac{B_0}{|B| + B_0} \dots\dots\dots(13)$$

で与えられる。ここに、 J_{c0} は磁場変動を考えないときの臨界電流密度であり、 B_0 は実験等により決定される一定の磁束密度である。本研究では、臨界電流密度の式として式(13)を用いることとする。

また、浮上力は、

$$F = \sum_{j=1}^{N'} \sum_{i=1}^N 2\pi r_i J_{ji} \Delta r_i \Delta z_j B_{rji} \dots\dots\dots(14)$$

より計算できる。ここに、 B_{rji} は点 (j, i) における r 方向の外部磁場の磁束密度である。式(12)において $j = 1, 2, \dots, N', \quad i = 1, 2, \dots, N$ であるために $N' \times N$ 個の連立非線形方程式を得るので、これをプレント法を用いて解くものとする。また、外部ベクトルポテンシャルの計算は、著者の前報⁽¹⁰⁾ によるものとする。

3. 動的特性とモデリング

3.1 動的浮上力 まず、本解析法の妥当性の検討のため、上坂らの実験と同条件の高温超電導円板の浮上力の計算をしたところ、図 2 のような結果を得た。ここに永久磁石の直径 = 25 mm、厚さ = 2.5 mm、超電導円板の直径 = 18 mm、厚さ = 2.5 mm、 $U_0 = 96$ meV、 $E_c = 100 \mu\text{V/m}$ 、温度 = 77° K とし、ギャップ 25 mm のところで冷却し、ギャップ 0.05 mm まで 2 秒で近付け(等速で速度 $v = 0.01225$ m/s)、その後静止させるものとしている。上式の計算を行う場合、臨界電流密度およびフロー抵抗は超電導体に結晶粒界が存在するため、結晶粒界を無視した解析解とのマッチングを図るため、一般には浮上力の実験データを参照して各解析モデルに対して仮定される⁽⁸⁾。したがって本報でも上坂らの実験値を基にこれらの値を決定した

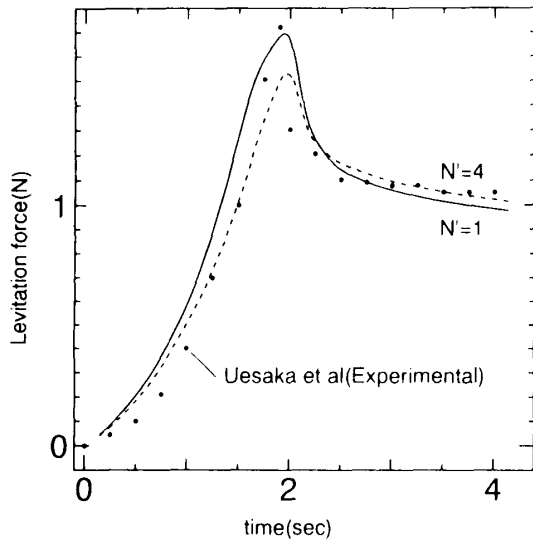


Fig. 2 Levitation force
($h=0.0025$ m, $v=0.01225$ m/s)

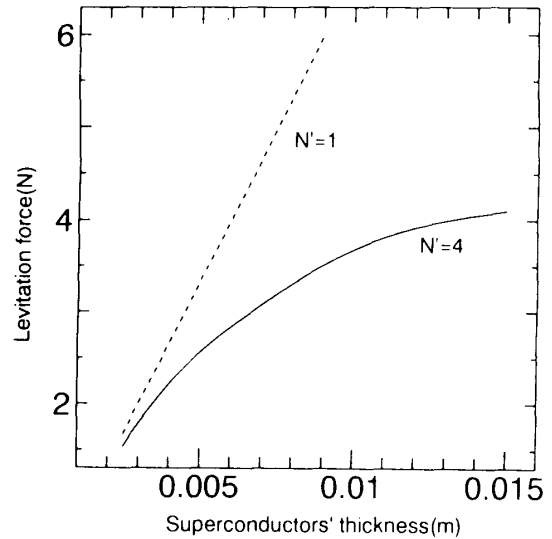


Fig. 3 Levitation force versus thickness
($v=0.01225$ m/s)

ところ $J_{c0}=2.6 \times 10^7$ A/m², $\rho_f=2.5 \times 10^{-10}$ Ω·m が得られた。これらの値は Kim モデルを用いて、磁束密度の変化を考慮に入れて決定しており、磁束密度の影響を考慮しない上坂らの値 $J_c=1.3 \times 10^7$ A/m², $\rho_f=6.58 \times 10^{-11}$ Ω·m とは異なっている。すなわち磁束密度の変化を考慮しない場合は、磁束密度の平均的な変化もこれらの値に取込まれているため、磁束密度を別に考慮した本解の値と上坂らの値は当然のことながら大幅に異なる⁽¹⁵⁾。この場合、本解で用いた Kim モデルのほうが現実に近い仮定となっており、より正しい浮上力特性が得られるものと思われる。一方 B_0 については、磁石の表面磁束密度にほぼ等しい 0.35 T を仮定した(本例の磁石表面の磁束密度は約 0.39 T)。図 2 中 N' は円板の厚さ方向分割数であり、 $N'=1$ は薄板近似の場合を表し、 $N'=4$ は厚みを考慮した本解析の場合を表す。いずれの結果も立上がり部分と収束部分においてはほぼ上坂らの実験値と一致しており、全体的にも比較的良好に合っているため、板厚が小さいときは、薄板近似でも三次元解析でも大きな差はなく、薄板近似で扱えば計算時間の大幅な短縮になる。しかし厚が増すと薄板近似では無理である。薄板近似と三次元解析による浮上力の最大値の傾向を種々の板厚についてまとめたのが図 3 である。図 3 より厚が増すと、浮上力は飽和する傾向が認められる。すなわち磁場を直接受ける面の遮蔽電流が大きく、磁場を直接受けない反対の面で遮蔽電流が小さくなっていることがわかる。しかし本例の場合、円板の厚みが 2.5 mm 程度までは、薄板理論が適用できることから、以下厚みを 2.5 mm とし動的特性を検討する。

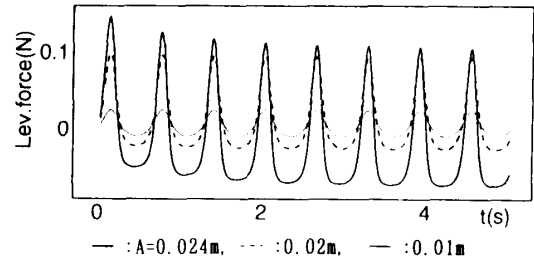


Fig. 4 Levitation force for sinusoidal displacements
($\omega=10$ rad/s, $d=0.025$ m)

3.2 モデリングと非線形振動の解析 下側磁石を固定し、高温超電導浮上体が初期空げき d の位置を平衡点として、周期的な変位振動

$$u_a = u_0 \sin \omega t$$

を行う場合を考える。

図 4 は初期空げき $d=25$ mm, 強制振動数 $\omega=10$ rad/s において、振幅 A を変えて浮上力の時刻歴応答を計算した結果を示す。図 4 から、振幅が大きい場合においては、浮上力のピーク値が周期を経るごとに減衰していくことがわかる。この原因としては、振幅が大きい場合には履歴特性が大きく、逆に、小さい場合には履歴特性が小さくなるためであると考えられる。しかし時間が経過すると、ピーク値はほぼ一定の値に収束し、定常状態では、浮上力のピーク値はほぼ一定と仮定できる。そこでピーク値がほぼ一定となる時刻に対し、振幅を種々に変えたときの浮上力の最大、最小値と振幅比(振幅/初期ギャップ=Amp/Gap)の関係をプロットしたところ図 5 が得られた。図 5 より超電導体の復元力特性は一般の磁気浮上系とまったく異

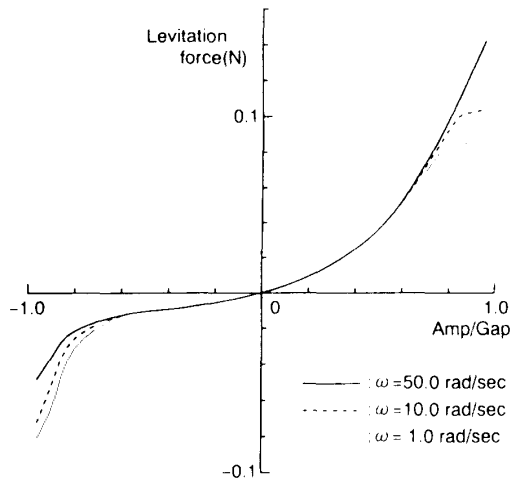


Fig. 5 Levitation force versus amplitude ratio (Amp/Gap = A/d)

なり、初期ギャップ、振幅のみならず、振動数の関数ともなっていることがわかる。すなわち、引張り側(図5の負の領域)で軟化ばねから硬化ばねに移り、また圧縮側(図の正の領域)で振動数が高い場合に硬化ばね特性を有するが、振動数が低い場合は硬化ばねから軟化ばねに移る非線形特性を有することが認められる。しかし振幅と初期空げきの比が比較的小さい場合(|A/d| < 0.7)の場合は振動数の影響を無視でき、適当な近似式を用いることにより浮上系を簡単な式でモデリングできることがわかる。振幅がごく微小な場合は線形近似も可能である。しかし共振領域を含む非線形現象を解析するにはもちろん振動数の影響を考慮する必要がある。そこで本報ではいくつかの周波数帯について復元力特性を近似し、各周波数帯について、復元力特性を変化させて周波数応答を計算する。すなわち図5の浮上力についての近似をいくつかの周波数について行い、それが非線形ばね力として系に作用するとして、系に強制振動荷重が加わる場合の振動問題を考察する。このときの復元力特性は図5より次にように近似できる。

$$F = \sum_{k=1}^K X_k \left(\frac{A}{d}\right)^k \dots\dots\dots (15)$$

式(15)をもとに最小二乗近似を行ったところ、K=6でほぼ式(15)と図5の曲線は一致し、係数 X_k は表1のようになる。

一方運動方程式は

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + (k_s x + F) = P \dots\dots\dots (16)$$

ここに x は超電導浮上体の変位、m は質量、c は系の減衰係数であり、k_s は浮上体を図1のように板ばねでつった場合の板ばねのばね定数(後述)である。浮上体

Table 1 Coefficients for the approximation of the levitation force (d = 0.025 m, h = 0.0025 m)

	ω = 1.0 rad/sec	ω = 10.0 rad/sec	ω = 50.0 rad/sec
X ₁	2.721379 × 10 ⁻⁷	3.139556 × 10 ⁻⁷	3.434071 × 10 ⁻⁷
X ₂	3.951440 × 10 ⁻⁷	2.684271 × 10 ⁻⁷	3.545286 × 10 ⁻⁷
X ₃	9.572219 × 10 ⁻⁷	6.767892 × 10 ⁻⁷	4.722808 × 10 ⁻⁷
X ₄	9.631223 × 10 ⁻⁷	1.441180 × 10 ⁻⁷	8.426518 × 10 ⁻⁷
X ₅	-3.822462 × 10 ⁻⁷	-1.824871 × 10 ⁻⁷	2.511629 × 10 ⁻⁷
X ₆	-1.551501 × 10 ⁻⁷	-1.681422 × 10 ⁻⁷	-7.376348 × 10 ⁻⁷

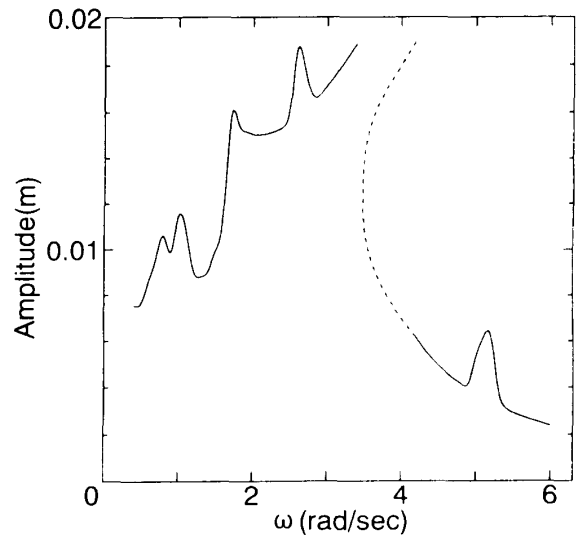


Fig. 6 Frequency response of the levitated body (without spring, P = 0.015 N, d = 0.025 m)

質量 m を 0.2 kg、系全体の減衰係数 c を 5.5 × 10⁻² Ns/m、初期空げき d を 0.025 m とし、浮上力は前述のように六次曲線で近似し(K=6)、図1および式(16)において k_s = 0 とし、強制力 P が 0.015 N の場合について、Runge-Kutta-Gill法によって数値的にその非線形振動の周波数応答を求めた結果を図6に示す。図6中、破線の部分は数値計算上不安定な数値結果の求められない領域であるため予想線として示した。図6より本系には、左から順に3次、2次、3/2次、4/3次の高調波共振、主共振および1/2次の分数次調波共振が認められ、高い非線形性を有することがわかる。

実際の応用では、線形的に扱えることが重要であるので、図1および式(16)において k_s = 10 N/m とし、浮上力による非線形ばねに、線形ばねを併せて考えた。すなわち浮上体を k_s の板ばねでつることにより、線形性を増大し、線形部分の振幅に対して、高調波成分を出にくくすることを考える。その場合の計算結果を、線形一自由度強制振動の周波数応答の結果に重ねたものが図7である。図7中、実線が非線形、破線が線

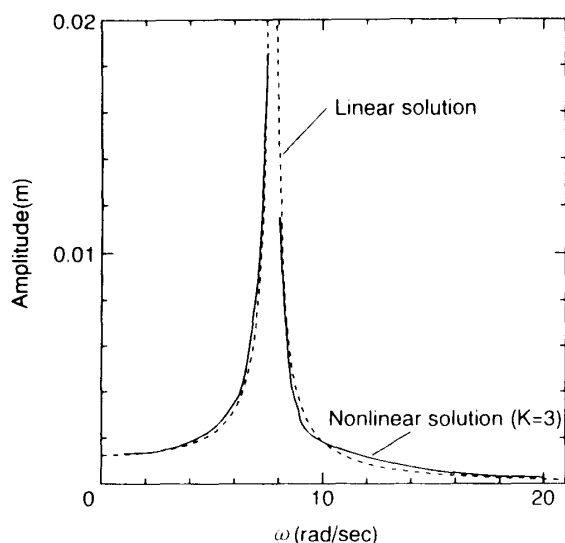


Fig. 7 Frequency response of the levitated superconductor with a linear spring ($P = 0.015$ N, $d = 0.025$ m)

形強制振動の場合である。これらは全体的によく一致しており、これによって浮上力による非線形ばねに、適当な線形ばねを併せることにより、系を線形化できるということがわかる。本例で、線形ばねのばね定数を大とすると、当然のことながら非線形性は低くなるが、あまりばね定数を大きくしたのでは、浮上力を操作力として使用するとき、操作力が系の剛性に比べて小さくなり過ぎ意味がなくなる。線形ばねのばね定数の決定の仕方は、まず振動振幅の領域を定め、線形復元力 $k_s x$ と式(15)の浮上力を足し合せ、ほぼ線形となるように k_s を定める。この場合、多少の非線形性が残っても高調波と分数次調波振動は極端に抑制され、かつ系に含まれる減衰の影響でほとんど消失する。本系の実際の応用は、例えば永久磁石に電磁石を結合して、磁場を変化させるアクチュエータとして用いることが考えられるが、その場合は本例のような構成によりかなり大きな振幅でも線形制御が適用できると思われる。

4. 結 言

本研究では、高温超電導体を用いた磁気浮上系の実用を考えたときに必要となる、高温超電導体の動的特性に注目し、その基礎となる三次元浮上力解析と、浮上体の非線形振動、および、系が強制振動荷重を受けたときの近似解析についての検討を行った。それらの内容を要約すると、

(1) 実用上望まれる、ある程度の力を発生させるための厚みをもった超電導円板について、その浮上力を求めるために必要とされる三次元の解析解を新たに

Kim モデルを導入して誘導した。また、薄板近似の実用式との比較検討を行った。

(2) 初期空げき、振幅、周波数が超電導体の浮上力に与える影響について、さまざまなシミュレーションを行うことによって、浮上力の非線形性の傾向を明らかにし、さらに系の非線形ばね定数(ばね力)についての近似式を提案した。すなわち従来の解析では、浮上力と運動方程式を直接連成して解析する必要があったが、本解析のようなモデリングにより、簡単な非線形運動方程式に直して高温超電導浮上系にみられる非線形系を解析できることを示した。

(3) 浮上力による非線形なばねに、適当な線形ばねを併せると、線形的に扱えることができるということを明らかにした。

付録(境界条件の検討)

本研究で用いている境界条件は電磁気学における通常の方法とは異なる。しかし本解析の境界条件を用いると、超電導体内だけの解析のみで空気中の解析が不要であり、三次元問題等の複雑な系では解析が極端に簡単となり、かつかなり厳密な解を得ることができ、以下平面問題について、厳密な境界条件と、本解析の境界条件の二つの場合について解析し、比較検討を行う。境界条件は通常の渦電流の場合も超電導の場合も同じであるので、導体について考える。

(1) 厳密な境界条件に対する解 導体の厚さを無視した平面問題の基礎方程式は導体内で

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) A = -J \quad \dots\dots\dots (17)$$

一方導体の外部では

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \right) A_2 = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここに A および A_2 は導体内部および外部のベクトルポテンシャルである。式(17)および(18)の解は

$$A = Cr - \frac{\mu_0}{2} \int_0^r J(\eta) \left(r - \frac{\eta^2}{r} \right) d\eta \quad \dots\dots\dots (19)$$

$$A_2 = Br + D/r \quad \dots\dots\dots (20)$$

$r = \infty$ で $A_2(r) = 0$ とならなければならないので、積分定数 B は零となる。またベクトルポテンシャルは境界で連続であるから、連続条件は

$$(A)_{r=a} = (A_2)_{r=a}, \quad \left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)_{r=a} = \left(\frac{\partial A_2}{\partial r} \right)_{r=a} \quad \dots\dots\dots (21)$$

導体内の分布電流を円形線電流に置き換えると、

$$J dr \delta(r - r_i) \quad \dots\dots\dots (22)$$

式(22)を式(20)、(21)に代入すると、積分定数 C, D が決定する。したがって導体内部のベクトルポテンシ

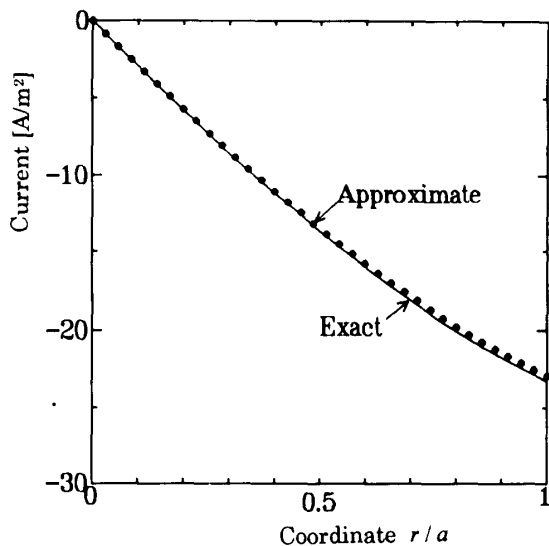


Fig. 8 Eddy current distribution in a circular conductor

ャルは次のように求められる。

$$A(r) = \frac{I_0}{2} \sum_{i=1}^N J(r_i) r_i \Delta r_i \times \left[1 - \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) u(r - r_i) \right] \dots\dots\dots (23)$$

(2) 内部領域のみを考えた境界条件に対する解簡単のため、導体内部のみを考え、導体の外部には電流が流れないことから、電流の半径方向の傾きを零と考える。本問のような軸対称問題では、円形電流もベクトルポテンシャルも共に周方向成分であるので、境界条件はベクトルポテンシャルを用いて

$$\left(\frac{\partial A}{\partial r} \right)_{r=a} = 0 \dots\dots\dots (24)$$

式(19)を式(24)に代入し、同様の取扱いによりベクトルポテンシャルが次のように求められる。

$$A(r) = \frac{I_0}{2} \sum_{i=1}^N J(r_i) r_i \Delta r_i \left[\left(1 + \frac{r_i^2}{a^2} \right) - \left(1 - \frac{r_i^2}{r^2} \right) u(r - r_i) \right] \dots\dots\dots (25)$$

(3) 両結果の電流分布の比較 式(23)と(25)は明らかに異なり、両境界条件に対するベクトルポテンシャルは一見異なるように見える。しかし解の形だけでは解の正否を判断できないので、以下実際に渦電流を計算し両結果の比較検討を行う。いま外部磁場によるベクトルポテンシャルを A_e とし $A_s = A + A_e$ とおくと、このとき導体内部の渦電流 J は

$$J = \sigma E = -\sigma (\partial A_s / \partial t)$$

ここに σ は導体の電気伝導度である。したがって導体

内で分割された i 番めの円周上における渦電流に着目し、添字 i を付して上式を書き換えると

$$J_i + \sigma \left[\frac{A_{si}(T) - A_{si}(T - \Delta t)}{\Delta t} \right] = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, N \dots\dots\dots (26)$$

任意の i 番め周上の渦電流は式(26)にそれぞれの境界条件に対する解を代入することにより求めることができる。

一例として円形導体の同心軸上 z (導体中央面と円形電流の中央までの距離) の位置に半径 R のコイルがあり、このコイルに電流 I を印可する場合を取上げる。このとき電流は

$$I = bt$$

で変化するものとする。数値例として、 $R = 0.1$ m, $a = 0.2$ m, $\sigma = 5.81 \times 10^7$ (A/m²), $z = 0.5$ m, $b = 100$ (A) の場合を取上げ、 $t = 1$ (s) のときの両結果の電流分布の比較を行ったものが図8である。図8中実線が厳密な境界条件を用いた結果であり、黒丸印が本解析で用いた境界条件 [式(24)] の結果である。境界近傍ではほんのわずかの差が認められるものの両結果はほとんど一致している。したがって導体内部だけのベクトルポテンシャルを用い、境界でその傾きを零とした本解は正しい結果を与えることがわかる。

文 献

- (1) Murakami, M., ほか2名, *Jpan. J. Appl. Phys.*, **29** 11 (1990), L. 1125 L1127.
- (2) Murakami, M., ほか7名, *Jpan. J. Appl. Phys.*, **28** 7 (1990), L. 1991 L1994.
- (3) Murakami, M., ほか5名, *Supercon. Sci. Technol.*, (1991), S43 S50.
- (4) 岡野・ほか3名, 第47回低温工学, 超電導学会講演概要集, (1990), 124.
- (5) Takahara, R., Ueyama, H. and Yotsuya, T., *Proc. Fourth Int. Sym. on Super-conductivity*, (1991), Tokyo.
- (6) 福山・ほか3名, 機械学会第70期全国大会講演論文集, Vol. E (1992), 267 269.
- (7) Ogiwara, H., Azukizawa, T. and Morishita, M., *Appl. Superconductivity*, **1** S7 9 (1993), 1185 1192.
- (8) 上坂・ほか2名, *機論*, **60** 570, C (1993), 524 529.
- (9) Yoshida, Y., ほか2名, *Proc. ISEEM Sapporo, Elsevier Studies on Elec. Magn. in Mater.*, **4** (1994), 301 304.
- (10) 長屋, *機論*, **61** 565 (1995), 1942 1948.
- (11) Bean, C. P., *Rev. Mod. Phys.*, (1964), 31 39.
- (12) Kim, Y. B., ほか2名, *Mod. Phys.*, **43** (1964), 528 535.
- (13) Yamafuji, K. and Mawatari, W., *Cryogenics*, **32** 6 (1992), 569 577.
- (14) Nagaya, K. and Arai, M., *Trans. ASME, J. Dyn. Syst. Meas. Control*, **113** (1990) 472 478.
- (15) Sugiura, T., ほか2名, *Int. J. Appl. Electromag. Materials*, **2** (1991), 183 196.