

軸弾性拘束を受ける座屈後はりのカオス振動*

(飛び移りカオス振動と内部共振の連成)

永井 健一^{*1}, 鈴木 央^{*2}山口 誉夫^{*1}, 丸山 真一^{*1}Chaotic Oscillations of a Buckled Beam Constrained by an Axial Spring
(Interaction between Dynamic Snap-Buckling and Internal Resonance)Ken-ichi NAGAI^{*3}, Hisashi SUZUKI,

Takao YAMAGUCHI and Shinichi MARUYAMA

^{*3}Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

Analytical result is presented on chaotic oscillations of a buckled beam under an axial spring. The beam with a concentrated mass is clamped at both ends. The beam is compressed to the post-buckled configuration by the axial spring. The beam is subjected to periodic lateral acceleration. Introducing a mode shape function to a basic equation, nonlinear ordinary differential equations of multiple-degree-of-freedom system is reduced to by the Galerkin procedure. Changing a stiffness of the axial spring, an internal resonance condition of one to two is selected. First, steady-state resonance responses are calculated by the harmonic balance method. The chaotic responses are obtained by a numerical integration. The chaotic responses are examined by the Poincare projection, the maximum Lyapunov exponent and bifurcation diagrams. The chaos due to the internal resonance is easily generated by a small amplitude of excitation. As the exciting frequency decreased, transition to the chaos from a periodic response needs larger amplitude of excitation. In a lower range of frequency, the chaotic oscillations are mixed with the internal resonance and the dynamic snap buckling. Two modes of vibration contribute to the chaos related to the internal resonance. Number of the modes increases more than three for the chaos involved the dynamic snap buckling.

Key Words: Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Chaos, Flexible Structure, Coupled Vibration, Beam, Lyapunov Dimension

1. 緒言

自動車や航空機などの輸送機械で用いられる要素は、軽量で高い構造剛性を持つことが要求される。一般に、薄肉要素の剛性は低い、初期曲率を有するアーチや、座屈後の変形により曲率を持たせたはりでは、剛性を相対的に向上させることができる。しかし、周期荷重を受けると共振により大振幅の非線形振動が生じ、特定の振動数領域では、動的飛び移りや内部共振に起因した非定常なカオス振動が発生しやすい。カオス振動は、複数の振動モードが同時に誘起され、振動疲労や騒音などの原因となり易い。それゆえ、カオス振動の挙動や誘起される振動モードを解明することは工学上重要な課題であり、著者らによるものも含め多くの研究がなされてきた⁽¹⁾⁻⁽⁵⁾。

特に、一般の薄肉部材は形状の不均一性を有すると共に、他の部材との接合で使用され弾性拘束となる場合が多い。著者らは、変断面座屈後はり⁽⁶⁾と変断面偏平アーチ⁽⁷⁾について解析を行い、対称モードと非対称

モードの連成を吟味した。ついで、軸方向弾性拘束を受ける変断面アーチの解析⁽⁸⁾と座屈後補強はりの実験⁽⁹⁾を行った。さらに、変断面座屈後はりの解析を行い、飛び移り形カオス振動と内部共振形カオス振動との相互作用について調べた⁽¹⁰⁾。

本報では、両端固定の一樣はりに、軸方向に弾性拘束力を与え、座屈後状態にした後、横方向周期加速度が作用する場合のカオス振動について解析を行った。はりには非対称位置に集中質量を配することで、対称モードと非対称モードの連成問題として、飛び移り形カオス振動と内部共振形カオス振動との相互作用についてより詳細に分析した。まず、形状関数を導入して基礎式にガラーキソ法を適用し、多自由度系の非線形連立常微分方程式を導いた。復元力特性と線形固有振動形を求めると共に、調和バランス法により定常共振応答を定めた。ついで、方程式を直接積分し、カオス振動の時刻歴応答とポアンカレ写像図を得た。リアプノフ指数およびリアプノフ次元を計算し、カオス振動を確定した。さらに、分岐図を求め、周期応答からカオスへの分岐挙動を検討した。弾性拘束を変化させ、カオス振動におよぼす動的飛び移りと1対2の内部共振の相互作用ならびに振動モードの影響を吟味した。

* 原稿受付 2002年6月20日。

^{*1} 正員, 群馬大学工学部(☎ 376-8515 桐生市天神町1-5-1)。^{*2} 正員, サンデン(株)(☎ 372-8502 伊勢崎市寿町20)。

E-mail: nagai@eng.gunma-u.ac.jp

2. 基礎式

図1のように、はりは両端で、たわみに関して固定支持とする。軸方向には、弾性拘束による圧縮変位を与え座屈後りを得た。両支持端の長さを L とし、断面積 A 、密度 ρ 、ヤング率 E 、断面二次モーメント I とする。また弾性拘束のばね定数を K とする。座標系を定め、 $x = x_0$ の位置に質量 M の集中質量を付加する。はりに周期的な横方向の加速度 $a = a_s + a_d \cos \Omega t$ を作用させた場合のカオス振動問題を扱う。なお、 a_s, a_d は一定加速度と動的加速度振幅、 Ω, t は加振角振動数と時間である。問題を十分に薄いはりの低次の曲げ振動に限定すると、軸方向慣性力、回転慣性、せん断変形は無視できる。なお、はり境界では、軸方向摩擦力やたわみ方向の弾性変形の影響はないものとする。

はりの全たわみ、初期たわみ並びに軸方向変位をそれぞれ $W(x, t)$, $W_0(x)$, $U(x, t)$ とし、両端からの初期軸圧縮変位を $U(0, t) = U_c/2$, $U(L, t) = -U_c/2$ とすると、無次元化した基礎式は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} L(w) \equiv & [1 + \beta \delta(\xi - \xi_0)] w_{,\tau\tau} - n_x w_{,\xi\xi} \\ & + (w - w_0)_{,\xi\xi\xi\xi} - (p_s + p_d \cos \omega\tau) \\ & - \delta(\xi - \xi_0)(q_s + q_d \cos \omega\tau) = 0 \\ n_x = & \kappa [-u_c + \int_0^1 \frac{1}{2} (w_{,\xi}^2 - w_{0,\xi}^2) d\xi] \end{aligned} \quad (1)$$

上式で $\delta(\xi - \xi_0)$ はディラックのデルタ関数である。カンマのあとの添字はそれに関する偏微分を示す。ただし、つぎに示す諸量を導入してある。

$$\begin{aligned} [\xi, \xi_0] = & [x, x_0]/L, [w, w_0] = [W, W_0]/r, r = \sqrt{IA}, \\ u_c = & (L/r^2) U_c, \beta = M/\rho AL, k = KL/EA, \\ \kappa = & \{2k^{-1} + 1\}^{-1}, [p_s, p_d] = [a_s, a_d] \rho AL^4/EI r, \\ [q_s, q_d] = & [a_s, a_d] ML^3/EI r, n_x = N_x L^2/EI, \\ \Omega_0 = & (1/L^2) \sqrt{EI/\rho A}, \tau = \Omega_0 t, \omega = \Omega/\Omega_0 \end{aligned} \quad (2)$$

w, w_0 はそれぞれ無次元のたわみと初期たわみ、 r は、はりの断面二次半径、 u_c は無次元の初期軸圧縮変位、 β ははり質量に対する集中質量の質量比、 n_x は無次元の断面力、 k は弾性拘束の無次元ばね定数である。 p_s, p_d は、はりの静的ならびに動的の無次元分布荷重の大きさである。なお、 q_s, q_d はそれぞれ集中質量に作用する静的荷重および動的荷重振幅の無次元量である。 ω, τ は加振角振動数と時間の無次元量である。

はりのたわみに関する境界条件は両端固定であることから、 w, w_0 に関して、以下の条件を用いる。

$$\xi = 0, 1; w = 0, w_{,\xi} = 0, w_0 = 0, w_{0,\xi} = 0 \quad (3)$$

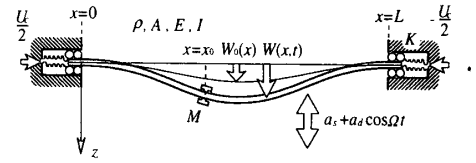


Fig.1 Buckled Beam and coordinate system

3. 解法

まず、形状関数 $\zeta_j(\xi)$ を用いて、たわみ w, w_0 を次式で仮定する⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。

$$[w, w_0] = \sum_j [b_j(\tau), a_j] \zeta_j(\xi), \quad (j = 1, 2, 3, \dots) \quad (4)$$

$$\zeta_j(\xi) = f(\xi) e_j(\xi),$$

$$f(\xi) = \sum_{k=1}^5 c_k \xi^{k-1}, e_j(\xi) = \cos(j-1)\pi\xi \quad (5)$$

$b_j(\tau)$ は未知の時間関数で、 a_j は初期たわみを表す既知定数である。両端固定支持の場合の c_k の値は次式で示される。

$$c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 1, c_4 = -2, c_5 = 1 \quad (6)$$

式(4)を用いて基礎式(1)に Galerkin 法を用いると、つぎの連立の非線形常微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \sum_j B_{ij} b_{j,\tau\tau} + \sum_j C_{ij} b_j + \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} b_j b_k b_l \\ - F_i - (p_s + p_d \cos \omega\tau) G_i - (q_s + q_d \cos \omega\tau) H_i = 0 \\ (i, j, k, l = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (7)$$

ただし、以下の記号を用いてある。

$$\begin{aligned} B_{ij} = & J_{ij}^{(0)} + \beta \zeta_i(\xi_0) \zeta_j(\xi_0), C_{ij} = \Lambda J_{ij}^{(1)} + J_{ij}^{(2)}, \\ E_{ijkl} = & \frac{\kappa}{2} J_{ij}^{(1)} J_{kl}^{(1)}, F_i = \sum_j a_j J_{ij}^{(2)}, G_i = I_i, \\ H_i = & \zeta_i^{(0)}(\xi_0), \Lambda = \kappa \left(-u_c - \frac{1}{2} \sum_j \sum_k a_j a_k J_{kl}^{(1)} \right), \\ J_{ij}^{(n-1)} = & \int_0^1 \zeta_i^{(n-1)} \zeta_j^{(n-1)} d\xi, I_i = \int_0^1 \zeta_i^{(0)} d\xi \end{aligned} \quad (8)$$

なお、 $\zeta_i^{(n)}$ は ζ_i の ξ についての n 階微分を示す。式(7)で、時間依存項を省略し、 $b_j = b_j^0$ とおくと b_j^0 に関する連立三次方程式を得る。これを解いて式(4)より静たわみが求まる。つぎに、 $b_j(\tau) = b_j^0 + \tilde{b}_j(\tau)$ とおいて、式(7)に代入すると定数項を含まない方程式を得る。さらに、非線形項と周期外力項を省略すると、線形の自由振動における第 i 次の固有振動数 ω_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) と固有ベクトル ϕ_{iq} ($q = 1, 2, 3, \dots$) が定まる。これよりつぎの固有振動形 $\tilde{\zeta}_i$ を得る。

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_i(\xi) = & \frac{1}{n_i} \sum_q \psi_{qi} \zeta_q(\xi), \\ \psi_{qi} = & \phi_{iq} \left[\sum_k \sum_l \phi_{qk} B_{kl} \phi_{ql} \right]^{-1/2} \quad (q, k, l = 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (9)$$

なお, n_i は振動形の最大振幅を基準化する定数である。つぎに, 線形自由振動の固有振動形 $\tilde{\zeta}_i$ に基づく基準座標を $b_i^{(1)}$ とすると, 実際のたわみは次式で示される。

$$w = \sum_i b_i^{(1)} \tilde{\zeta}_i(\xi), \quad (i=1,2,3,\dots) \quad (10)$$

上式の変位成分 $b_i^{(1)}$ に対し速度成分を $b_i^{(2)}$ とし, 運動方程式を変換すると, つぎの一階連立非線形常微分方程式を得る。

$$\begin{aligned} b_{i,\tau}^{(1)} &= b_i^{(2)} \\ b_{i,\tau}^{(2)} &= -2\varepsilon_i \omega_i b_i^{(2)} - \omega_i^2 b_i^{(1)} - \sum_{j,k} \bar{D}_{ijk} b_j^{(1)} b_k^{(1)} \\ &\quad - \sum_{j,k,l} \bar{E}_{ijkl} b_j^{(1)} b_k^{(1)} b_l^{(1)} + p_d \bar{G}_i \cos \omega \tau \end{aligned} \quad (i,j,k,l = 1,2,\dots) \quad (11)$$

なお, 上式は $b_i^{(p)}$ ($p=1,2; i=1,2,\dots$) に関する相空間内での運動方程式に対応する。ただし上式は, 新たに減衰項を導入し, ε_i は第 i 次モードに対応する減衰比である。さらに, 各項の係数を以下に示す。

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ijk} &= \frac{n_i}{n_j n_k} \sum_{p,q,r} \bar{D}_{pqr} \psi_{pi} \psi_{qj} \psi_{rk}, \\ \bar{D}_{pqr} &= D_{pqr} + \sum_s (E_{pqrs} + E_{prsq} + E_{psqr}) b_s^0, \\ \bar{E}_{ijkl} &= \frac{n_i}{n_j n_k n_l} \sum_{p,q,r,s} E_{pqrs} \psi_{pi} \psi_{qj} \psi_{rk} \psi_{sl}, \\ \bar{G}_i &= n_i \sum_p \psi_{pi} (G_p + \beta H_p) \end{aligned} \quad (p,q,r,s = 1,2,\dots) \quad (12)$$

3.1 定常応答 カオス振動は分数次調波共振, 高調波共振や亜分数次調波共振応答の近傍に発生しやすい。カオス振動と定常解との対応を調べるため, 定常解を次式で仮定し, 調和バランス法を用いる。

$$b_i^{(1)} = C_{i1\mu 0} + \sum_p [C_{i1\mu p} \cos \mu p \omega \tau + C_{i2\mu p} \sin \mu p \omega \tau] \quad (i=1,2,\dots; p=1,2,\dots) \quad (13)$$

ここで $C_{i1\mu 0}, C_{i1\mu p}$ ($j=1,2; p=1,2,\dots$) は未定係数である。 μ は共振応答に対する定数である。主共振応答や高調波共振応答では $\mu=1$ とおき, 分数次調波共振応答では $\mu=1/n$ (n : 整数) とする。式(13)を式(11)に代入し, $\cos \mu s \omega \tau$ ならびに $\sin \mu s \omega \tau$ ($s=0,1,2,\dots$) と等しい項をとり出す。これより, 得られた $C_{i1\mu 0}, C_{i1\mu p}$ ($i=1,2,\dots$) に関する連立三次方程式を数値的に解いて, 共振応答の定常解が得られる。

3.2 非定常応答の数値解 カオス振動での非周期解を得るには, 式(11)を数値的に直接積分して解を得る必要がある。変数 $b_i^{(1)}$ の最大近似モード数を l_c とすると, 式(11)は $b_i^{(p)}$ ($p=1,2; i=1,2,\dots, l_c$) に関する $2l_c$ 次元相空間内での運動方程式に対応する。この式を数値積分して時刻歴応答が定められる。

3.3 リャプノフ指数とリャプノフ次元 カオス振動は応答のリャプノフ指数の最大値が正値を持つことで確定できる。さらに近似モード数とリャプノフ次元の関係から, カオス振動に寄与する振動モード数を推定できる⁽³⁾⁽¹⁴⁾。式(11)で基準座標 $\{b(\tau)_i^{(1)}, b(\tau)_i^{(2)}\}$, ($i=1,2,\dots, l_c$) を $2l_c$ 個のベクトル \mathbf{b} とし, 基準軌道と定義する。基準軌道からの変分 $\{\delta b(\tau)_i^{(1)}, \delta b(\tau)_i^{(2)}\}$ を $\delta \mathbf{b}$ とし近接軌道とする。式(11)の変分方程式として次式を得る。

$$\frac{d}{d\tau} \delta b_r = \sum_j \bar{\varphi}_{rs} \delta b_s, \quad (r,s = 1,2,\dots, 2l_c) \quad (14)$$

上式で $\bar{\varphi}_{rs}$ は式(11)のヤコビ行列に対応する。ここで任意の成分 δb_r の微小時間 Δt における基準軌道から近接軌道への距離はつぎのようになる。

$$e^{\lambda_r \Delta t} = |\delta b_r| / |\delta b_{r,0}| \quad (15)$$

ただし, $|\delta b_{r,0}|$ は初期値であり単位長さを選ぶ。一方, 式(14)の $\bar{\varphi}_{rs}$ は系の非線形連成を有する時間関数となる。基準軌道 b_r の変化に伴い, δb_r の他の成分 δb_s ($r \neq s; s=1,2,\dots, 2l_c$) も値を持つ。それゆえ, 全成分の距離の変化率をユークリッドノルム $\|\delta \mathbf{b}\|$ で計算することにより, つぎのリャプノフ指数が定義される⁽¹³⁾。

$$\lambda_r = \frac{1}{\tau} \log_e \|\delta \mathbf{b}\| \quad (16)$$

ただし, τ は十分に長い時間を考慮する。これより任意時間間隔 τ ごとの λ_r の時間平均を求め, 正確値を得る。同様な操作により $2l_c$ 次元のリャプノフ指数が得られる。基準軌道 b_r の値は式(12)を直接積分して求めた。カオス振動における近接軌道は短時間に発散するため, 一定時間後に近接軌道の値を単位長さに変換し, 距離の伸び率を計算した。なお, 各成分間の直交性を保つようにグラムシュミットの直交化を一定の時間間隔で適用した。これよりリャプノフ指数 λ_r が定まる。

リャプノフ指数 λ_r から Kaplan & Yorke⁽¹⁴⁾ の方法によりリャプノフ次元 d_L が次式で求まる。

$$d_L = s + \left[\sum_{r=1}^s \lambda_r \right] / |\lambda_{s+1}| \quad (17)$$

上式の s はつぎの条件を満たしているものとする。

$$\sum_{r=1}^s \lambda_r > 0 \quad \text{and} \quad \sum_{r=1}^{s+1} \lambda_r < 0 \quad (18)$$

なお λ_r ($r=1,2,\dots, 2l_c$) はリャプノフ指数を大きい順に再配列し, リャプノフスペクトラムと呼ばれる。式(11)での近似モード数 l_c を逐次増加させ d_L を求める。 d_L の値が収束する l_c をもってカオス応答において寄与する振動モード数が推定できる。

4. 計算結果

4.1 計算条件 二種類の軸方向弾性拘束の下で、カオス振動応答を求める。はりの断面は長方形で幅 b 、厚さ h は一定とする。これより、無次元たわみは $\tilde{w} = W/h$ ($r = h/\sqrt{12}$)で整理する。初期たわみは式(4)で、最低次($j=1$)の曲げ形状を有するものとし、 $\tilde{w}_0 = W_0/h = 0.03$ とした。初期軸圧縮変位は $u_c = 70$ とし、無次元ばね定数は $k=5$ と $k=15$ を選んだ。 $\xi = x_0/L = 0.4$ に集中質量を持つはりに、重力加速度が作用した場合の、はりと質量による静荷重はそれぞれ $p_s = 170$ 、 $q_s = 52.7$ となる。式(4)の近似項数は5を選び、式(11)の計算には $l_c = 3$ の三自由度まで考慮した。減衰比は $\varepsilon_i = 0.009$ と仮定し、観測位置は $\xi = x/L = 0.6$ とした。数値積分での時間刻みは、加振周期($T_c = 2\pi/\omega$)の $1/240$ とした。なお、数値積分での初期値依存の過渡応答を除くため、最低 $3000 T_e$ 以後の結果を用いた。

4.2 はりの復元力特性と固有振動数 静的分布荷重 p_s を変化させ、たわみ \tilde{w} の関係を求めた。軸方向ばねのばね定数 k の変化による結果を図2に示す。ばね定数 k が5を越えると、負の復元力を含む漸軟-漸硬のばね特性を示す。はりは横荷重により飛び移り座屈を起こす。ばね定数 k における第 i 次の線形固有振動数 ω_i ($i = 1, 2, 3$)を図3に示す。ばね定数 k の増加に伴い、 ω_i

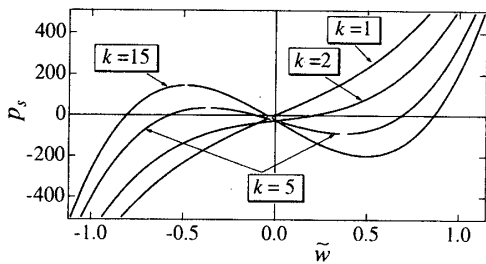


Fig.2 Spring Characteristics of buckled beam $\tilde{w}_0 = 0.03$

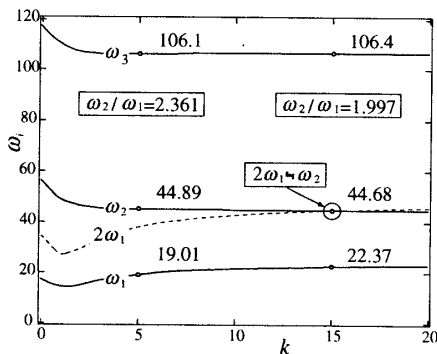


Fig.3 Linear natural frequency of buckled beam $\tilde{w}_0 = 0.03$, $p_s = 170$, $q_s = 52.7$, $\xi = 0.4$

は最初に減少し、座屈荷重に対する極値を超えると固有振動数は一様に増加する。なおばね定数 $k = 15$ での ω_1 と ω_2 の比は $\omega_2/\omega_1 = 1.997$ となり、1対2の内部共振発生の条件を満たす。

4.3 周波数応答線図とカオス発生領域 はりの主要な共振応答を調和バランス法で求め、周波数応答曲線を得た。さらにカオス振動応答を数値積分で求め、最大リアプノフ指数 λ_{max} を計算した。 $k=5$ と $k=15$ での結果を図4と図5に示す。横軸は加振振動数 ω を示す。図の(a)での縦軸は最大リアプノフ指数を示す。図の(b)では、応答振幅の実効値 \tilde{w}_{rms} を示す。図中の記号 $C_{i,j}$ はカオス応答を示す。添字 i, j はカオス応答に寄与する主要な振動モードと主要な共振応答の種類を表わす⁽⁴⁾⁽⁵⁾。

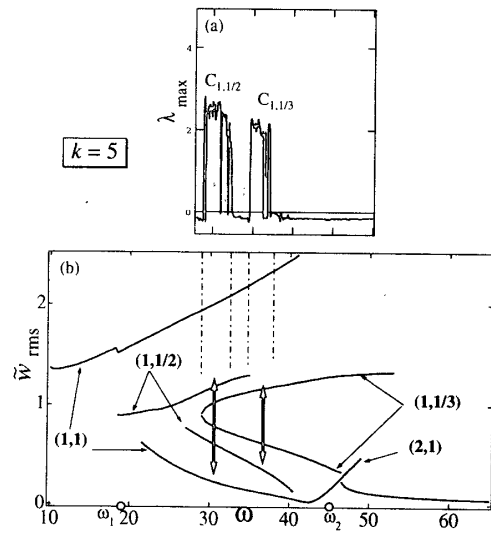


Fig.4 Frequency response curve and Lyapunov exponent $k = 5$, $\varepsilon_i = 0.009$, $p_d = 700$, $\xi = 0.6$

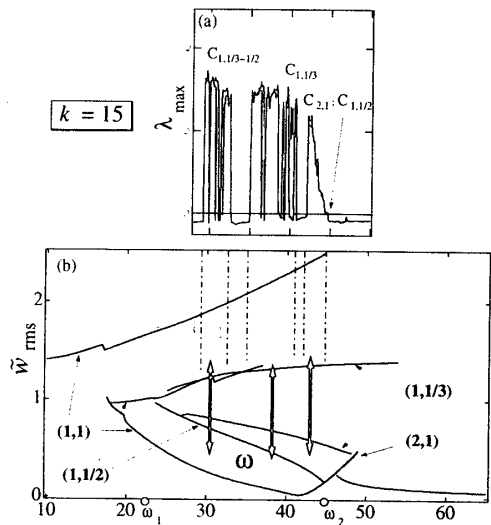


Fig.5 Frequency response curve and Lyapunov exponent $k = 15$, $\varepsilon_i = 0.009$, $p_d = 700$, $\xi = 0.6$

つまり, $C_{1,1/2}$ は第一次の振動モードを伴い1/2次数調波共振の近傍で発生するカオス振動である. 図の(b)において, 記号(i, j)は定常共振応答の種類を示す. i は誘起される振動モードであり, j は共振応答の種類で $j=1$ は主共振, $j=n$ は n 次の高調波共振, $j=1/n$ は $1/n$ 次数調波共振である. 図中の太い矢印はカオス振動が変動する振幅を示す. カオス振動領域の境界を一点鎖線で示す. 図の(b)より, カオス振動が1/2次や1/3次数調波共振応答曲線と互いに交差し発生しているのがわかる. なお, 線形固有振動数 ω , を記号○で示してある. $k=15$ のはりの λ_{\max} は, $k=5$ の λ_{\max} と比較すると, これより以下のことが明らかになった. 最大リアプノフ指数 λ_{\max} が正の値を持つ振動数領域にカオス振動が発生し, その λ_{\max} は加振振動数が増加するに従い, 全般に低下する. その平均的な値は高くなる. さらに, カオス領域も高振動数側に広がるのがわかる.

$k=5$ のはりでは, カオス振動応答は $C_{1,1/3}$ の1/3次数調波共振成分が主要なカオス振動と $C_{1,1/2}$ の1/2次数調波共振成分によるカオス振動の二つが存在する. これに対し, $k=15$ のはりでは, $C_{1,1/3-1/2}$ で示すように, 1/3次と1/2次の応答が混在した応答となる. その応答の周波数分析結果を図6に示す. この場合の加振振動数 ω_{ex} に対し, 1/2ならびに1/3近傍に応答のピークが共に存在していることがわかる. ついで, 図5で示す(a)の $C_{1,1/3-1/2}$ の高振動数側に $C_{1,1/3}$ のカオス振動応答が存在する.

さらに, $\omega = 44.675$ では第二次の主共振応答と一次モードの1/2次数調波共振応答が互いに交差し, その振動数域に, 最大リアプノフ指数 λ_{\max} が0.1程度の正値を持つカオス振動が存在する. これは, 一次と二次の振動モードが連成した内部共振のカオス振動に対応する.

4.4 カオス応答の分岐図 加振振動数 ω を逐次減少させカオス応答の分岐図を求めた. 図7の(a)に, ばね定数 $k=5$ における結果を示す. 縦軸はたわみのポアンカレ写像 \bar{x} , 横軸は加振振動数 ω を示す. 加振力は $p_d = 700$ とし ω の刻み幅は $\Delta\omega = 0.1$ とした. ポアンカレ写像の各点は, 加振力の最大振幅より位相角 $\theta = 0$ radで検出記録した. 振動応答が加振力の周期と同期すれば一周期点として記される. $1/n$ 次数調波共振応答であれば, n 周期点となる. 非周期のカオス状態では, 写像図は分布した点となる. 図より, 加振振動数の減少により, はりの応答は非共振応答の一周期点

から, $\omega = 41.3$ 近傍で1/2次数調波共振の二周期点に分岐する. さらに(b)に示す拡大図では, $\omega = 36.3$ 近傍で二周期点から四周期点の周期倍化形に分岐となる. その後, $C_{1,1/3}$ のカオス振動に至り, $\omega = 34.5$ 近傍で再び二周期点に移行し, $\omega = 33.0$ 近傍で $C_{1,1/2}$ のカオス振動が発生する. $\omega = 29.0$ 近傍でカオス振動から1/2次数調波共振の定常応答に至る.

図8は, ばね定数 $k=15$ における分岐図である. 加振振動数の減少により, 第二次線形固有振動数の非共振応答の一周期点から $\omega = 45$ 近傍で二周期点に分岐したうえ, $\omega = 44.57$ から内部共振に起因したカオス応答が発生する. この分岐図を拡大して図8(b)に示す. これより, 振動数の減少と共に振幅が逐次増加しつつ, モード間の位相が変調する, いわゆるホップ形に分岐を示す. さらに振動数を減少させると, $\omega = 44.40$ 近傍から $C_{1,1/3}$ の飛び移り形のカオス振動に至る.

つぎに, 加振力振幅 p_d を変化させた分岐図を求めた. $k=15$ のはりで, 内部共振形から飛び移り形のカオス

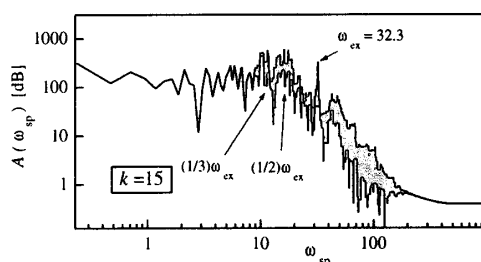


Fig.6 Fourier spectrum of chaotic response

$$k = 15, p_d = 700, \omega_{ex} = 32.3$$

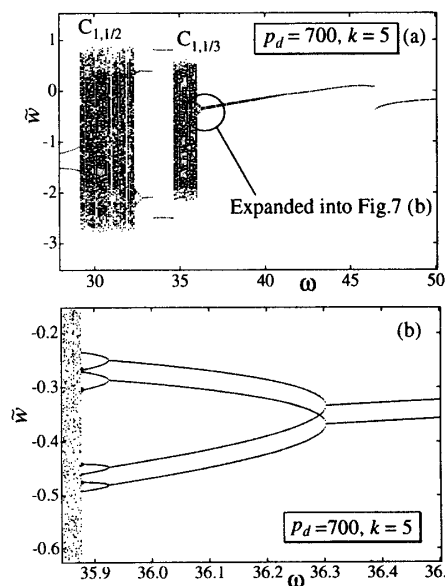


Fig.7 Bifurcation diagram of Poincaré projection versus exciting frequency

$$k = 5, p_d = 700, \theta = 0$$

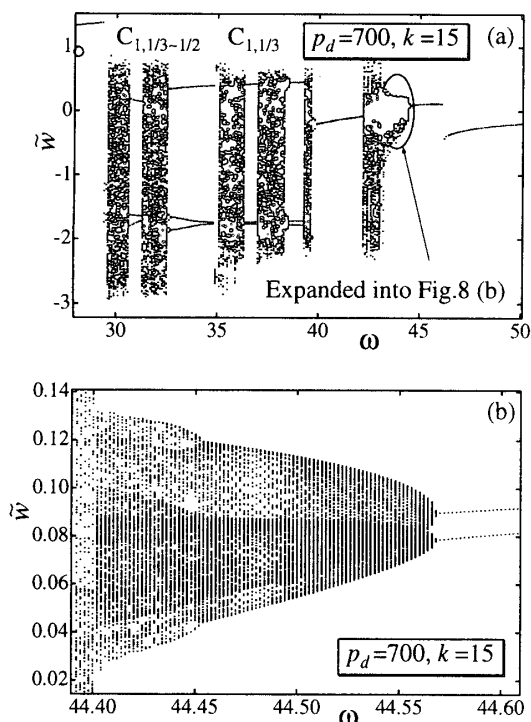


Fig.8 Bifurcation diagram of Poincaré projection versus exciting frequency

$$k = 15, p_d = 700, \theta = 0$$

振動に変化する結果を図9に示す。縦軸はたわみのポアンカレ写像 \tilde{w} 、横軸は加振力 p_d である。図の(a)から(c)は $\omega = 43.8$ 、 $\omega = 43.5$ と $\omega = 43.0$ の場合に対応する。なお、加振力 p_d は、0から1000まで変化させ、刻み幅は $\Delta p_d = 2.0$ とした。なお、解の初期値は前の荷重における値を用いた。それぞれの図において、加振力の増加により一周期点から、内部共振に起因した写像点となる。さらに荷重力を増加させると、内部共振形と $C_{1,1/3}$ の飛び移り形のカオスが連成し発生する。最終的に、三周期点の1/3次の分数次調波の定常応答に至る。内部共振形のカオスは図9(a)の $\omega = 43.8$ では、 $p_d = 133$ 以上で発生する。図9(c)の $\omega = 43.0$ では $p_d = 230$ 以上でカオス振動が発生する。内部共振形のカオスの発生は、加振振動数が低い程より大きな加振力が必要となることがわかる。

一方、内部共振形と飛び移り形の連成したカオスは、 $\omega = 43.8$ で約 $p_d = 800$ で発生し、 $\omega = 43.5$ では約 $p_d = 750$ 、 $\omega = 43.0$ で約 $p_d = 590$ となる。つまり、振動数の減少に伴い、カオスが発生するための加振力は小さくなることがわかる。

この現象の説明のために、 $p_d = 170$ と $p_d = 700$ における共振応答曲線を図10の(a)と(b)に示す。図の(a)で

は、第一次振動モードの1/2分数次調波共振の定常応答(1,1/2)と第二次振動モードの主共振定常応答近傍に内部共振形のカオスが発生する。図9の分岐図に対応する ω の位置を破線で示す。 $p_d = 170$ では、 $\omega = 43.8$ と $\omega = 43.5$ ではカオスが発生し、 $\omega = 43.0$ では発生しない。つまり互いの共振応答の振幅差が小さいほど、内部共振形のカオス振動は誘起されやすいことがわかる。

図の(b)は内部共振形と飛び移り形のカオスに対応した共振曲線である。第一次振動形の1/2分数次調波振動応答(1,1/2)の振幅は、低振動数側に至ると、増大、一方1/3次の分数次調波振動応答(1,1/3)の振幅はわずかに減少する。高周波数側の応答では飛び移り形のカオスは発生しない。これより(1,1/2)と(1,1/3)の応答の振幅差が小さい程、内部共振形と飛び移り形のカオス振動が発生しやすいことがわかる。

4.5 ポアンカレ写像図 カオス振動におよぼすモード

間連成の影響を、 $k = 5$ と $k = 15$ について $C_{1,1/3}$ のカオス振動の、ポアンカレ写像図により調べた。結果を図11に示す。観測位置 $\xi = 0.6$ での実際のたわみの写像図 $\tilde{w}_{i,\omega t}$ と \tilde{w} の関係ならびに各振動形の写像図 $\tilde{b}_{i,\omega t}$ と \tilde{b}_i との関係を示す。添字 i は対応する振動モードを表す。

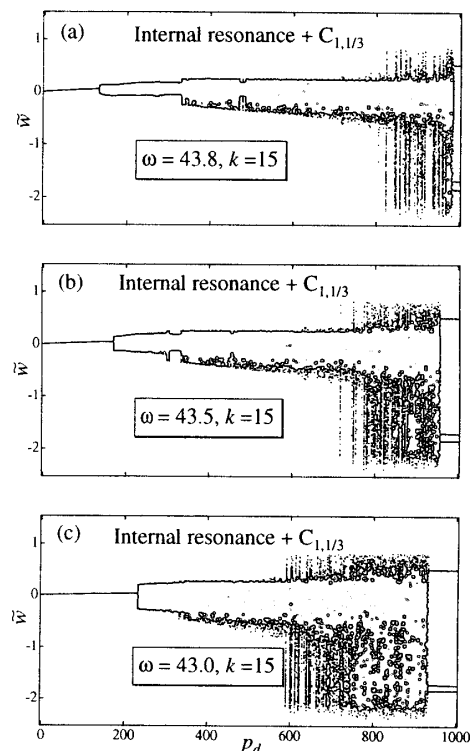


Fig.9 Bifurcation diagram of Poincaré projection versus exciting amplitude

$$k = 15, \theta = 0$$

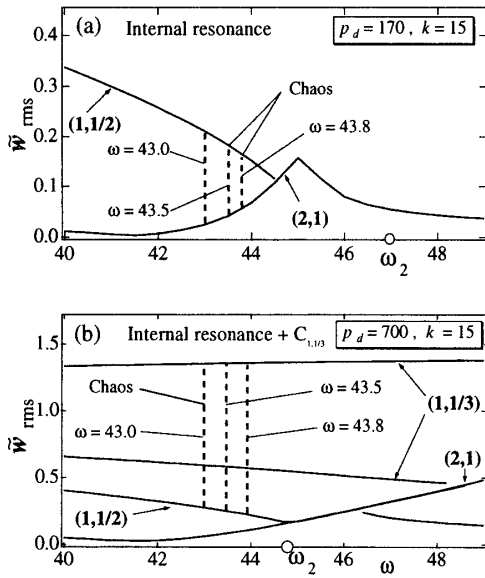


Fig.10 Frequency response curve and chaotic area

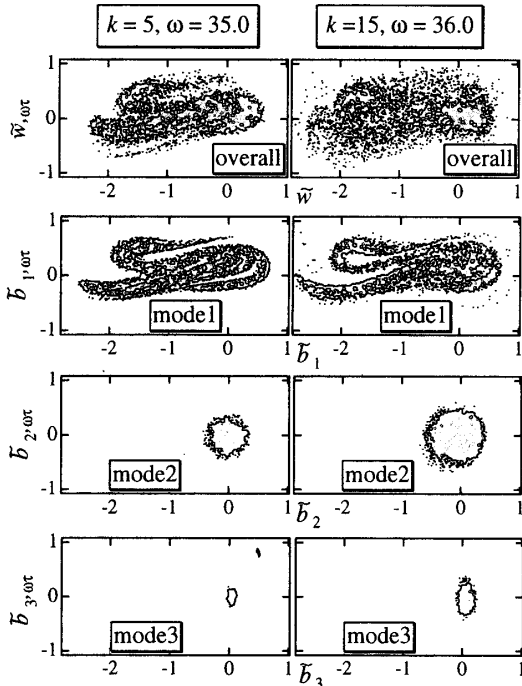


Fig.11 Poincaré projection

なお、横軸の \bar{b}_i は各振動形の最大振幅を示す位置での変位である。縦軸は速度を示す。時系列波形の写像点は加振力の最大振幅より位相角 $\theta = \pi/6$ radの遅れで記録し、点の総数は4000である。たわみ \bar{w} の写像図を比較すると、 $k=5$ の場合は折り畳みと引き延ばしを持つフラクタル構造が認められる。一方、 $k=15$ の場合では、写像図は若干不鮮明となる。一次の振動モードの写像図では、共にフラクタル構造が確認できる。一次の振動モードがカオス振動に大きく寄与することがわ

かる。二次と三次の振動モードの写像は不鮮明となる。 $k=15$ における高次モードでのポアンカレ点の領域が増大している。一次モードの像の最大振幅を基準に高次モードの大きさを比較すると、 $k=5$ の場合、二次モードと三次モードはそれぞれ25%,5.6%となる。 $k=15$ では、30%,9.6%と増加している。これより、ばね定数 k の高いはりではカオス振動に寄与する高次振動モードの割合が大きくなることを示している。これは、軸方向の圧縮力が増加し飛び移りの際の衝撃や高次振動モードが内部共振の条件を伴って誘起されやすくなるためと考えられる。

4.6 リャプノフ次元 カオス振動応答のリャプノフ次元 d_L を、近似モード数 l_c を増加させて計算した。結果を図12に示す。縦軸は次元 d_L 横軸は解の近似モード数 l_c である。図の(a)には、ばね定数 $k=5$ と $k=15$ において発生した $C_{1,1/3}$ のカオス振動のリャプノフ次元を示す。図の(b)には、内部共振形のカオス振動と $C_{1,1/3}$ の結果ならびに飛び移り形の連成カオス振動内部共振形のみを示す。

ばね定数が高い $k=15$ でのリャプノフ次元 $d_L=5$ は $k=5$ での $d_L=4.5$ より大きな値を示す。ともに、近似モード数 l_c が3以上で d_L は一定値に収束する。最低次から三次までの振動モードがカオス振動に寄与する。一方、図の(b)より飛び移りを含まない内部共振形のカオス振動の d_L は、 l_c が2以上で $d_L=2.4$ に収束する。これより、内部共振のカオス振動は、一次と二次の振動モードが支配的であるといえる。また、内部共振形のカオス振動に飛び移り形のカオス振動の影響が加わると $l_c=3$ 以上で $d_L=4$ の値に収束し、高次の振動モードが誘起されることがわかる。

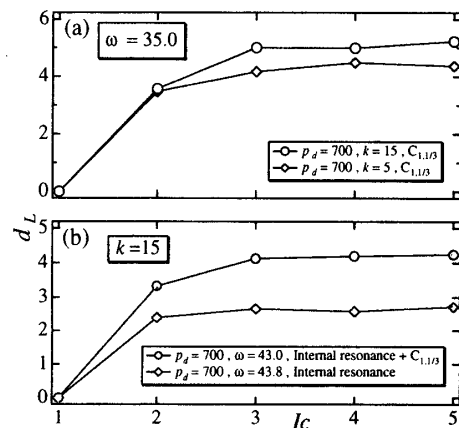


Fig.12 Lyapunov Dimension

5. 結 言

文 献

軸方向の弾性拘束による一様断面で集中質量を有する座屈後りのカオス振動において、飛び移り形カオス振動と内部共振形カオス振動の相互作用を理論解により明らかにした。得られた結果をつぎに示す。

- (1) 第一次振動モードの1/2次と1/3次の分数調波共振応答近傍にこれらの応答が連成した飛び移り形のカオス振動が発生する。軸拘束のばね定数を増加させると、カオス振動領域は一般に広がり、その最大リアプノフ指数は増加する。なお、リアプノフ指数は低振動数側では一般に高くなる。
- (2) 第一次振動モードの1/2次分数調波応答と第二次振動モードの主共振応答による内部共振形のカオス振動において応答は加振力振幅が小さくとも、二つの振動モードを伴い発生する。加振力振幅が増大すると、高次の複数振動モードが誘起される飛び移り形のカオス振動に移行する。その応答のリアプノフ次元は前者と比べ高い値を持つ。
- (3) 加振振動数の変化に伴うカオス振動の発生は関連する振動モードの非線形共振応答に深くかかわり、相互の定常応答の振幅差が小さいほど、容易に発生する。

本研究で、文書と図面の検討に協力を受けた群馬大学 大学院生 堺本和也君、学部生 大谷充、加藤考行両君に感謝する。

- (1) Holmes, P. J., "A nonlinear oscillator with a strange attractor," *Philosophical Transactions of the Royal Society of London, A* **292**, (1979), 419-448.
- (2) Moon, F. C. and Holmes, P. J., "The magnetoelastic strange attractor," *Journal of Sound and Vibration*, **65-2**, (1979), 276-296.
- (3) Pezeshki, C. and Dowell, E. H., "Generation and analysis of Lyapunov exponents for the buckled beam," *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **24-2**, 1989, 79-97.
- (4) 永井健一・山口誉夫, 集中質量を付加した圧縮座屈後りのカオス振動(第1報, 実験), 機論, **60-579, C** (1994), 3733-3740.
- (5) 山口誉夫・永井健一, 集中質量を付加した圧縮座屈後りのカオス振動(第2報, 理論解析), 機論, **60-579, C** (1994), 3741-3748.
- (6) 永井健一・山口誉夫, 変断面を有する圧縮座屈後りのカオス振動, 機論, **61-586, C** (1995), 2202-2209.
- (7) 山口誉夫・永井健一, 変断面を有する偏平アーチのカオス振動, 機論, **61-583, C** (1995), 799-807.
- (8) 永井健一・大山貞夫・山口誉夫, 軸方向弾性拘束を受ける変断面偏平アーチのカオス振動, 機論, **64-624, C** (1998), 2816-2823.
- (9) Nagai K., Kasuga, K., Kamada, M., Yamaguchi, T. and Tanifuji, K., "Experiment on Chaotic Oscillations of a Post-Buckled Reinforced Beam Constrained by an Axial Spring," *JSME Int. J. Series C*, **41-3** (1998), 563-569.
- (10) 山口誉夫・永井健一・鈴木央, 変断面座屈後りの連成カオス振動(内部共振と動的飛び移りの相互作用), 機論, **66-652, C** (2000), 3820-3827.
- (11) 永井健一・荒井徳幸・長屋幸助・武田定彦, 形状関数近似による質量搭載片持ちばりの曲げ振動解析, 機論, **55-516, C** (1989), 1941-1947.
- (12) 永井健一・長屋幸助・武田定彦・荒井徳幸, 分布軸力を受ける集中質量搭載ばりの曲げ振動解析, 機論, **54-497, C** (1988), 39-46.
- (13) Wolf, A., Swift, J., Swinney, H. L. and Vastio, J. A., "Determining Lyapunov Exponents from a Time Series," *Physica* **16D** (1985), 285-317.
- (14) Kaplan, J. and Yorke, J., "The Lyapunov dimension of strange attractors," *Journal of Differential Equations*, **49** (1983), 185-207.