

## 多重周期繰返し補償器を用いた繰返し制御系の一設計法\*

山田 功<sup>\*1</sup>, 佐藤 桂 司<sup>\*2</sup>  
荒川 徹<sup>\*3</sup>, 奥山 正<sup>\*4</sup>

## A Design Method of Repetitive Control Systems with Multi-Period Repetitive Compensator

Kou YAMADA<sup>\*5</sup>, Keiji SATOH,  
Tooru ARAKAWA and Tadashi OKUYAMA<sup>\*5</sup>Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,  
1-5-1 Tenjincho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

In the present paper, we examine a design for repetitive control systems with multi-period repetitive compensator. The repetitive control system is a type of servomechanisms for periodic signal. The repetitive control system is a neutral type of time delay system and can not apply for strictly proper plants. Almost all plants are strictly proper. Several modifications of repetitive control system for strictly proper plants are proposed. One of them, it is well known that the modified repetitive control is easy to apply for strictly proper plants. Sugimoto and Washida point out that if time-delay is settled to cancel the phase angle of low-pass filter in the repetitive compensator, then the disturbance attenuation characteristics is improved. However, the method by Sugimoto and Washida improve the disturbance attenuation characteristics in only low frequency range. Generally, the disturbance includes variable frequency signals. In this paper, in order to attenuate the disturbance with higher frequency range, we overcome this problem and propose a design method for repetitive control systems with multi-period repetitive compensator. In addition, a design method for repetitive control systems, which is stable, is given.

**Key Words:** Multi-Period Compensator, Time-Delay, Repetitive Controllers

## 1. はじめに

本稿では、多重周期繰返し補償器を用いた繰返し制御系の一設計法について検討する。繰返し制御は、外乱や不確かさの存在のもとで、周期目標入力に定常偏差なく追従する制御系である<sup>(1)~(6)</sup>。陽子シンクロトロンの電磁石電源の高精度制御を目的としてはじめられた研究であり<sup>(1)</sup>、これまで多くの理論とその応用に関する研究が発表されている<sup>(1)~(6)</sup>。任意の周期目標入力に定常偏差なく追従する繰返し制御系は、中立型むだ時間系であり、安定化が難しく、繰返し制御系を安定にするには制御対象がバイプロパーである必要性が指摘されている<sup>(2)</sup>。

実際は、ほとんどすべての制御対象がバイプロパーではなく、真にプロパーであるため、真にプロパーな制御対象に適用可能な繰返し制御系の設計法が検討されている<sup>(2)</sup>。これまで発表されてきた真にプロパーな制御対象に適用可能な繰返し制御系の設計法は、大きく二つに分類される。一つはローパスフィルタを用い

遅れ型のむだ時間系にする方法、一つは減衰器を用いた方法に分けられる。前者は、実用的に周期目標入力の低周波成分に対し高精度で追従し、周期目標入力の高周波成分に対する偏差を許容するというアイデアをもとに、ローパスフィルタを繰返し補償器内部に含めて安定化する方法である<sup>(1)(2)(4)~(6)</sup>。後者は、減衰器を用いて遅れ型むだ時間系に変換し、さらに部分極配置を用いて安定化をはかる方法である<sup>(3)</sup>。後者は、周期目標入力の高周波成分に対しても定常偏差を小さくできるが、繰返し補償器内のむだ時間要素の状態を利用して設計が難しいのに対し、前者は周期目標入力の高周波成分に対する定常偏差は大きなものになるが、構成、安定化が簡単であるという特徴がある<sup>(1)(2)(4)~(6)</sup>。そのため、前者の方法を用いた制御系は、修正繰返し制御系と呼ばれ、多くの実システムに適用され、その有用性が検証されている。

真にプロパーな制御対象に対する修正繰返し制御系は制御系設計が容易ではあるが、修正繰返し制御系は外乱抑制特性に問題があることが指摘されている<sup>(5)(6)</sup>。修正繰返し制御の外乱抑制特性には、修正繰返し補償器内部の漸近安定なローパスフィルタが重要な働きをし、ローパスフィルタのベクトル軌跡が $(1,0)$ 点に存

\* 原稿受付 2002年9月10日。

\*<sup>1</sup> 正員, 群馬大学工学部(☎376-8515 桐生市天神町1-5-1)。\*<sup>2</sup> 群馬大学大学院工学研究科。\*<sup>3</sup> 群馬大学工学部。\*<sup>4</sup> 正員, 山形県立産業技術短期大学校庄内校(☎998-0102 酒田市京田3-57-4)。

E-mail: yamada@me.gunma-u.ac.jp

在する周波数領域の周期外乱を完全に抑制することができる。しかしながら、指定した周波数領域でベクトル軌跡が(1,0)点に存在する漸近安定なローパスフィルタは構成できない。すなわち、指定した周波数領域でゲインが1となるローパスフィルタを構成したとしても、ローパスフィルタの位相遅れのために、指定した周波数領域でベクトル軌跡を(1,0)点に存在させることはできない。修正繰返し制御系の外乱抑制特性の劣化は、この修正繰返し補償器内部のローパスフィルタの位相遅れが悪影響を及ぼしている<sup>(5)(6)</sup>。杉本、鷺田は、修正繰返し制御系内の時間遅れを若干修正することにより、修正繰返し制御系の外乱抑制特性を改善する方法を提案している<sup>(5)(6)</sup>。しかし、参考文献<sup>(5)(6)</sup>の方法は、厳密には、きわめて低い周波数成分の外乱を抑制しているにすぎない。すなわち、参考文献<sup>(5)(6)</sup>の方法は、より高い周波数成分の外乱を抑制できず、抑制できる外乱の周波数領域が狭いという問題がある。より広い周波数領域の外乱を抑制するためには、杉本、鷺田のように通常の繰返し補償器を用いては補償できないことは明らかである。通常の繰返し補償器を用いず、通常の繰返し補償器よりも設計自由度が大きい繰返し補償器を用いることで、広い周波数領域の外乱を抑制することができる可能性がある。通常の繰返し補償器よりも設計自由度の大きい繰返し補償器には、後藤らが提案した多重周期繰返し補償器<sup>(4)</sup>がある。すなわち、通常の繰返し補償器よりも設計自由度が大きい後藤らが提案した多重周期繰返し補償器を適用することにより、より広い周波数領域の外乱を抑制することができる可能性があるが、これまで検討されていない。

本稿では、広い周波数領域における外乱抑制特性を改善するため、多重周期繰返し補償器を用いた繰返し制御系の設計法を提案する。はじめに、検討する問題を定式化する。つぎに、問題に解を与える多重周期繰返し補償器の設計法を提案する。つぎに、提案した多重周期繰返し補償器を用いたときの閉ループ系の安定性を保証する補償器の設計法を与える。制御対象が最小位相の場合の閉ループ系の安定性を保証する補償器の設計法を与える。さらに、制御対象が安定な場合の閉ループ系の安定性を保証する補償器の設計法を与える。最後に数値例を示し、本稿で述べた多重周期繰返し補償器を用いた繰返し制御系の有効性を検証する。本稿で使用する記号を以下にまとめる。

- $R$  実数の集合
- $R(s)$   $s$  の実有理関数の集合
- $RH_{\infty}$  安定プロパーな実有理関数の集合

- $H_{\infty}$  安定 Causal な関数の集合
- $\mathcal{U}$   $H_{\infty}$  上のユニモジュラ行列。すなわち、 $U(s) \in \mathcal{U}$  は、 $U(s) \in H_{\infty}$ 、 $U^{-1}(s) \in H_{\infty}$  を意味する。

## 2. 問題の記述

次式で表される制御系を考える。

$$\begin{cases} y = G(s)u \\ u = C(s)(r-y) \end{cases} \quad (1)$$

ただし、 $G(s) \in R(s)$  は制御対象、 $C(s) \in R(s)$  は補償器、 $u$  は制御入力、 $y$  は観測出力である。また、 $r$  は周期  $T$  の周期目標入力であり、

$$r(t+T) = r(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (2)$$

を満足するものとする。外乱や不確かさの存在のもと周期  $T$  の目標入力に定常偏差なく追従するための多重周期繰返し補償器  $C(s)$  は、

$$C(s) = C_r(s)\hat{C}(s) \quad (3)$$

と表される<sup>(4)</sup>。ただし、 $C_r(s)$  は

$$C_r(s) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} \quad (4)$$

であり、 $N$  は正の整数、 $q_i(s) (i=1, \dots, N)$  は漸近安定で真にプロパーなローパスフィルタである。また、(1)式の制御系が内部安定となるために必要な条件が成り立つ、すなわち  $G(s)C_r(s)$  が不安定な極零消去がないものと仮定する。なお参考文献<sup>(4)</sup>では、

$$T_i = Ti \quad (5)$$

に設定されていた。本稿では、 $T_i$  を(5)式のように選ばず、杉本、鷺田と同様に  $T_i$  も設計パラメータの一つであるとの立場をとり、広い周波数帯の周期外乱を抑制する  $T_i$ 、 $q_i(s)$  の設計問題を検討する。すなわち、(4)式で表される多重周期繰返し補償器を用いて、

$$\omega_k = \frac{2\pi k}{T} \quad (k=0, \dots, N) \quad (6)$$

の周波数成分の周期外乱を完全に抑制する補償器の設計問題を考える。このことは、内部モデル原理から、

$$1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i} = 0 \quad \forall s = j\omega_k \quad (k=0, \dots, N) \quad (7)$$

とする  $T_i$ 、 $q_i(s)$  の設計問題と等価であることに注意する。

### 3. 多重周期繰返し補償器を用いた外乱抑制問題

ここでは, (7) 式を満足する (4) 式で表される多重周期繰返し補償器の  $T_i$ ,  $q_i(s)$  の設計手順を与える.

設計の見通しが良くなるように, (7) 式の左辺を

$$\begin{aligned} & 1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i} \\ &= 1 - q_1(s)e^{-sT_1} (1 + \bar{q}_2(s)e^{-s\bar{T}_2} \\ & \quad (1 + \bar{q}_3(s)e^{-s\bar{T}_3} (1 + \dots (1 + \bar{q}_N(s)e^{-s\bar{T}_N}))) \end{aligned} \quad (8)$$

に書き換える. ここで,  $\bar{q}_i(s) (i=2, \dots, N) \in RH_\infty$ ,  $\bar{T}_i \in R (i=1, \dots, N)$  であり,  $\bar{q}_1(s) = q_1(s)$  とおくと,

$$q_i(s) = \sum_{k=1}^i \prod_{k=1}^i \bar{q}_k(s) \quad (9)$$

が成り立つ. このとき, (7) 式を満足する  $T_i$ ,  $q_i(s)$  の設計は, つぎの手順にまとめられる.

#### 設計手順

##### 1. $i=1$ とする

(a)  $q_i(0) = 1$  と  $|q_i(j\omega_i)| = 1$  を満足するようにローパスフィルタ  $q_i(s) \in RH_\infty$  を設計する. また,  $\bar{q}_i(s) = q_i(s)$  とおく.

(b)  $T_i$  の設計

$T_i$  を

$$T_i = Ti + \Delta T_i \quad (10)$$

とおく. このとき,

$$e^{-j\omega_i T_i} = e^{-j\omega_i \Delta T_i} \quad (11)$$

が成り立つ. 真にプロパーなローパスフィルタ  $q_i(j\omega_i)$  の位相角をむだ時間  $e^{-j\omega_i T_i} = e^{-j\omega_i \Delta T_i}$  の位相角で修正するよう

$$\angle q_i(j\omega_i) + \angle e^{-j\omega_i \Delta T_i} = 0 \quad (12)$$

を満足するように  $\Delta T_i$  を定める. (10), (12) 式から,  $T_i$  を

$$T_i = Ti + \frac{1}{\omega_i} \angle q_i(j\omega_i) \quad (13)$$

で与える.

(c)  $i$  に 1 を加え, つぎのステップへ.

2. まず,  $q_i(s)$  を設計する. (9) 式の  $\bar{q}_i(s)$  を

$$\bar{q}_i(s) = h_i \hat{q}_i(s) \quad (14)$$

とする. ここで,  $h_i \in R$ ,  $\hat{q}_i(s) \in RH_\infty$  である. ただし,  $i=2$  のとき  $\hat{q}_i(s)$  は,  $\hat{q}_i(0) = 0$ ,  $\hat{q}_i(j\omega_{i-1})$  を満足するように

$$\hat{q}_i(s) = \frac{s(s^2 + \omega_{i-1}^2)}{b_i(s)} \quad (15)$$

とし,  $i > 2$  のとき  $\hat{q}_i(j\omega_{i-1})$  を満足するように

$$\hat{q}_i(s) = \frac{s^2 + \omega_{i-1}^2}{b_i(s)} \quad (16)$$

とする.  $b_i(s)$  は, (15) 式または (16) 式の  $\hat{q}_i(s)$  をプロパーとする安定な多項式とする.  $h_i$  を

$$h_i = \frac{\left| 1 - \sum_{k=1}^{i-1} q_k(j\omega_i) e^{-j\omega_i T_k} \right|}{\left| \hat{q}_i(j\omega_i) \prod_{k=1}^{i-1} \bar{q}_k(j\omega_i) \right|} \quad (17)$$

とする.

つぎに,  $T_i$  を設計する.  $T_i$  を (10) 式とおく. このとき, (11) 式が成り立つ.  $q_i(j\omega_i) e^{-j\omega_i T_i} = q_i(j\omega_i) e^{-j\omega_i \Delta T_i}$  の位相角が  $1 - \sum_{k=1}^{i-1} q_k(j\omega_i) e^{-j\omega_i T_k}$  の位相角と等しくなるように  $\Delta T_i$  を修正する. すなわち,

$$\angle q_i(j\omega_i) e^{-j\omega_i \Delta T_i} = \angle \left( 1 - \sum_{k=1}^{i-1} q_k(j\omega_i) e^{-j\omega_i T_k} \right) \quad (18)$$

が成り立つように  $\Delta T_i$  を設計する. (10), (18) 式から  $T_i$  は,

$$T_i = Ti - \frac{1}{\omega_i} \left\{ \angle \left( 1 - \sum_{k=1}^{i-1} q_k(j\omega_i) e^{-j\omega_i T_k} \right) - \angle (q_i(j\omega_i)) \right\} \quad (19)$$

にするとよい.

3.  $i+1 > N$  ならば終了. そうでない場合には,  $i$  に 1 を加えて前のステップに戻る.

上記の設計手順を用いると,  $q_i(s) (i=1, \dots, N)$  は, 真にプロパーとなることに注意する.

つぎに, 上記の設計手順で  $q_i(s)$  と  $T_i$  を設計した場合に, (7) 式を満足することを示す. まず,  $s = j\omega_0 = j0$  に対して (7) 式が成り立つことを示す. (8), (15) 式と  $q_1(0) = 1$  が成り立つという仮定から,

$$\begin{aligned} \left. \left\{ 1 - \sum_{i=1}^N q_i(s) e^{-sT_i} \right\} \right|_{s=j0} &= 1 - q_1(0) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (20)$$

が成り立つ。つぎに、 $s = j\omega_1$  に対して (7) 式が成り立つことを示す。(8) 式と (15) 式から

$$\left\{ 1 - \sum_{i=1}^N q_i(s) e^{-sT_i} \right\} \Big|_{s=j\omega_1} = \left\{ 1 - q_1(s) e^{-sT_1} \right\} \Big|_{s=j\omega_1} \quad (21)$$

が成り立つ。 $|q_1(j\omega_1)| = 1$  が成り立つという仮定と、(12)、(13) 式から、

$$\left\{ 1 - q_1(s) e^{-sT_1} \right\} \Big|_{s=j\omega_1} = 0 \quad (22)$$

が成り立つ。つぎに、 $s = j\omega_k (N \geq k \geq 2)$  に対して (7) 式が成り立つことを示す。(15)、(16) 式から

$$\left\{ 1 - \sum_{i=1}^N q_i(s) e^{-sT_i} \right\} \Big|_{s=j\omega_k} = \left\{ 1 - \sum_{i=1}^k q_i(s) e^{-sT_i} \right\} \Big|_{s=j\omega_k} \quad (23)$$

が成り立つ。(17)、(19) 式を上式に代入し、

$$\left\{ 1 - \sum_{i=1}^k q_i(s) e^{-sT_i} \right\} \Big|_{s=j\omega_k} = 0 \quad (24)$$

が成り立つことが確認される。

#### 4. 制御系設計

ここでは、前節で述べた多重周期繰返し補償器  $C_r(s)$  を用いて、(1) 式の制御系を安定化する (3) 式の補償器  $\hat{C}(s)$  の設計法を述べる。補償器  $\hat{C}(s)$  の設計法に関しては、制御対象  $G(s)$  が最小位相の場合と安定の場合に分けて述べることにする。なお制御対象  $G(s)$  が、最小位相でなく、さらに安定でもない場合には、制御対象  $G(s)$  にローカルフィードバック補償を施し安定化してから、安定な制御対象に対する制御系設計を施すとよい。

**4.1 最小位相系に対する制御系設計** 制御対象  $G(s)$  が最小位相のとき、(4) 式の  $q_i(s) (i = 1, \dots, N)$  が安定になるように定められていることから、 $G(s)C_r(s)$  は最小位相となる。このとき、(1) 式を安定化する補償器  $\hat{C}(s)$  のパラメトリゼーションは、参考文献<sup>(7)</sup>の最小位相系に対する繰返し補償器のパラメトリゼーションと同様の手法により求めることができる。このとき、(1) 式を安定化する補償器  $\hat{C}(s)$  のパラメトリゼーションに関して、つぎの定理が成り立つ。

**定理 1**  $G(s)C_r(s) + K(s) = G(s)/(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}) + K(s)$  を最小位相とする漸近安定な  $K(s)$  のうち  $K(s)$ 、 $1/K(s)$  がともに *Causal* な  $K(s)$  が必ず存在する。その

ような  $K(s)$  を用いると、制御対象  $G(s)$  を内部安定化する (3) 式の  $\hat{C}(s)$  のパラメトリゼーションは、

$$\hat{C}(s) = \frac{\bar{C}(s)}{1 + \bar{C}(s)K(s)} \quad (25)$$

$$\left( \lim_{\omega \rightarrow \infty} \bar{C}(j\omega)K(j\omega) \neq -1 \right)$$

で与えられる。ただし、 $\bar{C}(s)$  は、

$$\bar{C}(s) = \frac{1}{Q(s)} - \frac{1}{G(s) \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} + K(s)} \quad (26)$$

で与えられる。ここで、 $Q(s)$  は、 $Q(s)$ 、 $1/Q(s)$  がともに *Causal* で 0 でない漸近安定な関数である。■

定理 1 の証明には、つぎの補題を用いる。

**補題 1** 制御対象  $G(s)$  がバイプロパーのとき、(1) 式が内部安定となる *Causal* な補償器  $\hat{C}(s)$  のパラメトリゼーションは

$$\hat{C}(s) = \frac{1}{Q(s)} - \frac{1}{G(s) \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}}} \quad (27)$$

と表される。ここで、 $Q(s)$  は、 $Q(s)$ 、 $1/Q(s)$  がともに *Causal* で 0 でない漸近安定な実有理関数である。□

(証明)  $q_1(s)$  が真にプロパーという仮定から、(1) 式の制御系は遅れ型むだ時間系となる。 $q_i(s)$  が安定であるので、 $G(s)/(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i})$  は閉右半平面に零点を持たない。また、 $G(s)/(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i})$  の不安定極数は有限個である。したがって、参考文献<sup>(8)</sup>から、必ずしも *Causal* とは限らない (1) 式の制御系を内部安定にする補償器  $\hat{C}(s)$  のパラメトリゼーションは、漸近安定な自由パラメータ  $Q(s)$  を用いて (27) 式で与えられる。制御対象  $G(s)$  がバイプロパーという仮定から、 $1/G(s)$  はプロパーとなる。したがって、 $1/Q(s)$  が *Causal* という仮定から、(27) 式の補償器  $\hat{C}(s)$  は、*Causal* である。以上のことから証明された。■

**補題 2**  $G(s)/(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}) + K(s)$  を最小位相とし、 $K(s)$ 、 $1/K(s)$  がともに *Causal* で漸近安定な  $K(s)$  は必ず存在する。□

(証明)  $G(s)/(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}) + K(s)$  を最小位相とし、 $K(s)$ 、 $1/K(s)$  がともに *Causal* で漸近安定な  $K(s)$  が存在することを示す。

$G(s)/(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}) + K(s)$  は、次式のように変形できる。

$$G(s) \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} + K(s)$$

$$= \frac{N(s) + K(s)D(s) \left(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}\right)}{D(s) \left(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}\right)} \quad (28)$$

ただし,  $D(s) \in RH_\infty$ ,  $N(s) \in RH_\infty$  は,  $G(s)$  を

$$G(s) = D^{-1}(s)N(s) \quad (29)$$

のように  $RH_\infty$  上で既約分解したときの因子である. したがって,  $G(s)/(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}) + K(s)$  が最小位相となる漸近安定な  $K(s)$  の存在条件は,

$$U(s) = N(s) + K(s)D(s) \left(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}\right) \in \mathcal{U} \quad (30)$$

とする漸近安定な  $K(s)$ ,  $U(s)$  の存在条件と一致する. この条件は,

$$\frac{d^j}{ds^j} U(s_i) = \frac{d^j}{ds^j} N(s_i) \quad (31)$$

$(j = 0, \dots, m_i - 1, i = 1, \dots, l)$

を満足する補間問題の可解条件と等しい. ただし,  $s_1, \dots, s_l$  は,  $D(s)(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i})$  の不安定零点, 重複度をそれぞれ  $m_1, \dots, m_l$  とする. このことは, つぎのことから証明できる. すなわち,  $U(s)$  がユニモジュラ,  $K(s)$  が漸近安定であるならば, (31) 式が必要なことは明らかである. 逆に (31) 式が成り立つならば,  $U(s) \in \mathcal{U}$  で,  $N(s), D(s) \in RH_\infty$  であることから

$$K(s) = \frac{U(s) - N(s)}{D(s) \left(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}\right)} \quad (32)$$

の不安定極となり得るのは,  $D(s)$  の不安定零点と  $1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}$  の不安定零点しかあり得ない. (31) 式から,  $D(s)$  の不安定零点は,  $K(s)$  の不安定極にはなり得ない. 同様に  $1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}$  の不安定零点は,  $K(s)$  の不安定極にはなり得ない.

つぎに, (31) 式の補間問題が可解であることを示す.  $q_i(s)$  が真にプロパーという仮定から,  $1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i} = 0$  の閉右半平面の根の数は有限である. したがって, (31) 式の補間問題に参考文献<sup>(9)</sup>の結果が適用可能である.  $N(s)$  が最小位相であることから,  $s_i$  のうち実軸上に存在する任意の  $s_i$  に対して,  $N(s_i)$  は常に同符号となる. 参考文献<sup>(9)</sup>から, (31) 式を満足する  $U(s)$  が存在する. ある  $U(s) \in \mathcal{U}$  が (31) 式を満足しているとする. このとき, (32) 式から得られる  $K(s)$  が,  $K(s)$ ,  $1/K(s)$  がともに Causal であることを示す.  $N(s)$  が真にプロパーであることか

ら,  $N(s)/\{D(s)(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i})\}$  が Causal となる.  $U(s) \in \mathcal{U}$  から, (32) 式の  $K(s)$  は,  $K(s)$ ,  $1/K(s)$  がともに Causal となる.

以上のことから証明された. ■

上記の補題を用いて定理 1 を証明する.

(証明)  $G(s)/(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}) + K(s)$  を最小位相とする  $K(s)$ ,  $1/K(s)$  がともに Causal で漸近安定な  $K(s)$  が存在することは, 補題 2 から証明されている. それゆえ, つぎのことが成り立つことを示し証明する. まず, 制御対象  $G(s)$  を内部安定化する (3) 式の補償器  $\hat{C}(s)$  が Causal ならば,

$$\bar{C}(s) = \frac{\hat{C}(s)}{1 - \hat{C}(s)K(s)} \quad (33)$$

は  $G(s)C_r(s) + K(s) = G(s)/(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}) + K(s)$  を内部安定化することを示す. すなわち,

$$\begin{aligned} \bar{C}(s) &= \frac{\hat{C}(s)}{1 - \hat{C}(s)K(s)} \\ &= \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{G(s) \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} + K(s)} \end{aligned} \quad (34)$$

とおいたとき,  $\bar{Q}(s)$  は漸近安定となることを示す. つぎに,  $G(s)C_r(s) + K(s) = G(s)/(1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}) + K(s)$  を内部安定化する補償器  $\bar{C}(s)$  が Causal ならば,

$$\hat{C}(s) = \frac{\bar{C}(s)}{1 + \bar{C}(s)K(s)} \quad (35)$$

は  $G(s)C_r(s)$  を内部安定化することを示す. すなわち,

$$\begin{aligned} \hat{C}(s) &= \frac{\bar{C}(s)}{1 + \bar{C}(s)K(s)} \\ &= \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{G(s) \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}}} \end{aligned} \quad (36)$$

とおいたとき,  $\bar{Q}(s)$  は漸近安定となることを示す.

定理の前半を示す.  $C(s) = C_r(s)\hat{C}(s)$  が制御対象  $G(s)$  を内部安定化しているという仮定と,  $G(s)$  と  $C_r(s)$  が閉右半平面に零点を持たないという仮定から, 補償器  $\hat{C}(s)$  は  $G(s)C_r(s)$  を内部安定化している. したがって, (1) 式の制御系は内部安定で, 補償器  $\hat{C}(s)$  のパラメトリゼーションは,

$$\hat{C}(s) = \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{G(s) \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}}} \quad (37)$$

与えられる。\$K(s)\$, \$1/K(s)\$ がともに Causal という仮定から、\$\hat{C}(s)/(1-\hat{C}(s)K(s))\$ は Causal となる。(34) 式から、\$\bar{Q}(s)\$ は、

$$\bar{Q}(s) = \frac{(1-\hat{C}(s)K(s)) \left( G(s) \frac{1}{1-\sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} + K(s) \right)}{1+\hat{C}(s) \frac{1}{1-\sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} G(s)} \quad (38)$$

で表される。補償器 \$\hat{C}(s)\$ が \$G(s)C\_r(s) = G(s)/(1-\sum\_{i=1}^N q\_i(s)e^{-sT\_i})\$ を安定化していることから、\$\bar{Q}(s)\$ は漸近安定となる。以上のことから、定理の前半は証明された。

定理の後半を示す。補償器 \$\bar{C}(s)\$ が \$G(s)C\_r(s) + K(s) = G(s)/(1-\sum\_{i=1}^N q\_i(s)e^{-sT\_i}) + K(s)\$ を内部安定化しているという仮定から、補償器 \$\bar{C}(s)\$ のパラメトリゼーションは、定理 1 から

$$\bar{C}(s) = \frac{1}{\bar{Q}(s)} - \frac{1}{G(s) \frac{1}{1-\sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} + K(s)} \quad (39)$$

与えられる。\$\bar{C}(s)\$ が Causal、\$K(s)\$, \$1/K(s)\$ がともに Causal という仮定から、

$$\frac{1}{G(s) \frac{1}{1-\sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} + K(s)}$$

は Causal となる。(36) 式から、\$Q(s)\$ は、

$$Q(s) = \frac{(1+\bar{C}(s)K(s)) \frac{1}{1-\sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} G(s)}{1+\bar{C}(s) \left( \frac{1}{G(s) \frac{1}{1-\sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-sT_i}} + K(s)} \right)} \quad (40)$$

で表される。補償器 \$\bar{C}(s)\$ が \$G(s)C\_r(s) + K(s) = G(s)/(1-\sum\_{i=1}^N q\_i(s)e^{-sT\_i}) + K(s)\$ を内部安定化しているという仮定から、\$Q(s)\$ は漸近安定となる。

以上のことから定理 1 は、証明された。 ■

制御対象 \$G(s)\$ が最小位相の場合には、定理 1 の (1) 式の制御系を安定にする補償器 \$\hat{C}(s)\$ のパラメトリゼーションを用いて、補償器 \$\hat{C}(s)\$ を設計するとよい。

**4.2 安定な制御対象に対する制御系設計** ここでは、制御対象 \$G(s)\$ が安定であるとき、(1) 式の制御系を安定化する多重周期繰返し制御系の設計法を検討する。

制御対象 \$G(s)\$ が安定であるとき、多重周期繰返し制御系の安定性に関してつぎの定理が成り立つ。

**定理 2** 制御対象 \$G(s)\$ が安定であると仮定する。このとき、\$\hat{C}(s)G(s)/(1+\hat{C}(s)G(s))\$ が安定な実有理関数で、

$$\left\| \frac{\sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-s(T_i-T_1)}}{1+\hat{C}(s)G(s)} \right\|_{\infty} < 1 \quad (41)$$

を満足するならば (1) 式の制御系が安定となる。 ■

(証明) (1) 式の制御系の \$r\$ から \$y\$ までの伝達関数は、

$$y = \frac{\hat{C}(s)G(s)}{1+\hat{C}(s)G(s)} \frac{1}{1-\frac{\sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-s(T_i-T_1)}}{1+\hat{C}(s)G(s)} e^{-sT_1}} r \quad (42)$$

と表される。\$\hat{C}(s)G(s)/(1+\hat{C}(s)G(s))\$ は安定な有理関

数であるという仮定から、\$1-\frac{\sum\_{i=1}^N q\_i(s)e^{-s(T\_i-T\_1)}}{1+\hat{C}(s)G(s)} e^{-sT\_1}\$ が閉右半平面に零点を持たなければ、(1) 式の制御系は安定となる。(41) 式の仮定とルーシェの定理から、

$$1-\frac{\sum_{i=1}^N q_i(s)e^{-s(T_i-T_1)}}{1+\hat{C}(s)G(s)}$$

は閉右半平面に零点を持たない。

以上のことから (1) 式の制御系は安定であることが証明された。 ■

制御対象が安定な場合には、定理 2 の条件を満足する、すなわち、\$\hat{C}(s)G(s)/(1+\hat{C}(s)G(s))\$ が安定で (41) 式を満足するように補償器 \$\hat{C}(s)\$ を設計するとよい。条件を満足する補償器 \$\hat{C}(s)\$ をシステムティックに設計するにはつぎのように行うとよい。まず、

$$\left| \sum_{i=1}^N q_i(j\omega)e^{-j\omega(T_i-T_1)} \right| \leq |W(j\omega)| \quad \forall \omega \in \mathbb{R} \quad (43)$$

を満足する \$W(s) \in RH\_{\infty}\$ を見つける。つぎに、

$$\left\| \frac{W(s)}{1+\hat{C}(s)G(s)} \right\|_{\infty} < 1 \quad (44)$$

を満足する補償器 \$\hat{C}(s)\$ を \$H\_{\infty}\$ 制御理論を用いて求める とよい。

## 5. 数値例

ここでは数値例を示し、本稿で検討した多重周期繰返し補償器の有用性を検証する。

つぎの安定な制御対象

$$G(s) = \frac{-0.1s + 880}{s^2 + 201s + 200} \quad (45)$$

に対し、周期  $T = 2\pi/5$ [sec] の周期目標入力に対する多重周期繰返し補償器を用いた繰返し制御系の設計問題を検討する。なお、(45)式の制御対象は、実在の制御対象のモデルではない。(45)式の制御対象  $G(s)$  は、複素平面上の右半平面に零点を持つ非最小位相系であり、非最小位相系は制御がしにくい制御対象であることが知られているので、理論の有用性を検証するために用いるものである。

補償器  $C(s)$  を(3)式とおく。ただし、 $C_r(s)$  は

$$C_r(s) = \frac{1}{1 - \sum_{i=1}^3 q_i(s)e^{-sT_i}} \quad (46)$$

とする。(46)式の  $q_i(s)$ 、 $T_i$  を前節で述べた設計手順で設計する。まず、 $q_1(s)$  を

$$q_1(s) = \frac{1}{0.01s + 1} \quad (47)$$

とする。 $q_i(s)$  ( $i = 2, 3$ )、 $T_i$  ( $i = 2, 3$ ) は、それぞれ、

$$q_2(s) = \prod_{k=1}^2 \bar{q}_k(s) \quad (48)$$

$$q_3(s) = \prod_{k=1}^3 \bar{q}_k(s) \quad (49)$$

$$\bar{q}_1(s) = \frac{1}{0.01s + 1} \quad (50)$$

$$\bar{q}_2(s) = \frac{0.0068s(s^2 + 5^2)}{(s + 1)^3} \quad (51)$$

$$\bar{q}_3(s) = \frac{25.5162(s^2 + 10^2)}{(s + 1)^3} \quad (52)$$

$$T_1 = 1.2466 \quad (53)$$

$$T_2 = 2.5382 \quad (54)$$

$$T_3 = 3.6710 \quad (55)$$

と求められる。

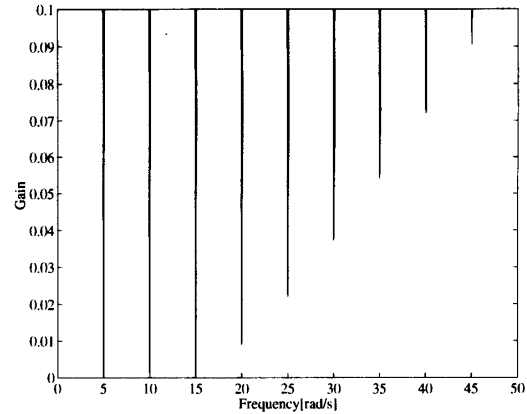


Fig. 1 Gain plot of  $1 - \sum_{i=1}^3 q_i(s)e^{-sT_i}$

$1 - \sum_{i=1}^3 q_i(s)e^{-sT_i}$  のゲイン線図を図 1 に示す。制御系が安定であれば、 $\omega_i = 5i$  ( $i = 0, \dots, 3$ ) の外乱が完全に除去されることが示されている。

一方、参考文献<sup>(5)(6)</sup>の方法による  $1 - q(s)e^{-sT_1}$  のゲイン線図を図 2 に示す。ただし、 $q(s) = q_1(s)$  である。制御系が安定であれば、 $\omega_i = 5i$  ( $i = 0, 1$ ) まで外乱が完

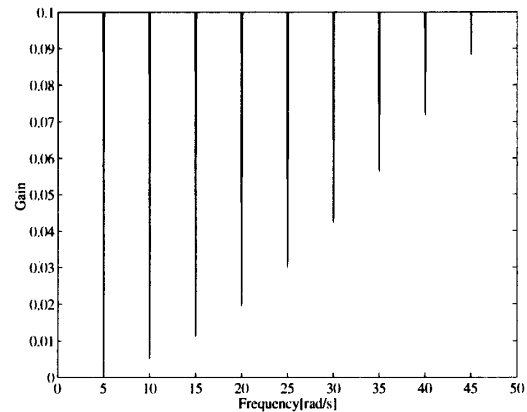


Fig. 2 Gain plot of  $1 - q(s)e^{-sT_1}$

全に除去されることが示されているが、それよりも高い成分の周期外乱に対しては、外乱を抑制する効果が減少していることが示されている。

したがって、本稿で提案した設計法の方が、より広い周波数領域で外乱を抑制可能であることが明らかにされた。本稿の設計法は、 $N$  を大きく選ぶことにより、より広い周波数成分の周期外乱を抑制することができる。

つぎに(1)式の制御系を安定とする補償器  $\hat{C}(s)$  を設計する。制御対象  $G(s)$  が安定であるので、定理 2 の条件を満足するように  $\hat{C}(s)$  を設計することを考える。

$\hat{C}(s)$  を

$$\hat{C}(s) = \frac{13s + 52}{s + 1} \quad (56)$$

と選ぶと、簡単な計算から  $\hat{C}(s)G(s)/(1 + \hat{C}(s)G(s))$  が安定となることが確認できる。図 3 に  $\sum_{i=1}^3 q_i(s)e^{-s(T_i-T_1)}$  のゲイン線図を示す。図 3 から (41) 式の条件も満足していることが確認できる。以上のことから、 $\hat{C}(s)$  を (56) 式に選ぶことで、定理

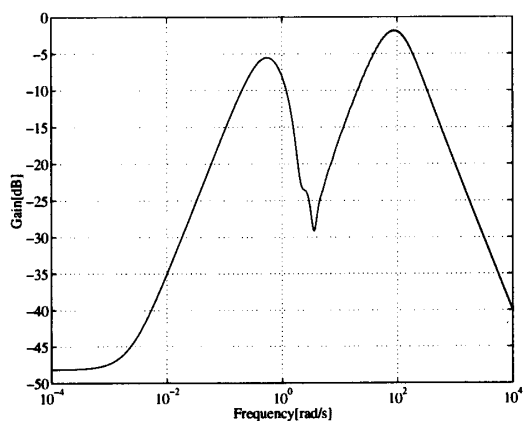


Fig. 3 Gain plot of  $\frac{\sum_{i=1}^3 q_i(s)e^{-s(T_i-T_1)}}{1 + \hat{C}(s)G(s)}$

2 の条件を満足し、(1) 式の制御系が安定となる。

つぎに、本稿で提案した繰返し補償器を用いた場合と参考文献<sup>(5)(6)</sup>の繰返し補償器を用いた場合の応答の違いを検討する。ただし、どちらの方法も  $\hat{C}(s)$  は (56) 式を用いた。目標入力  $r = \sin(5t)$  に対する偏差  $e = r - y$  の応答を図 4 に示す。ただし、実線が本稿

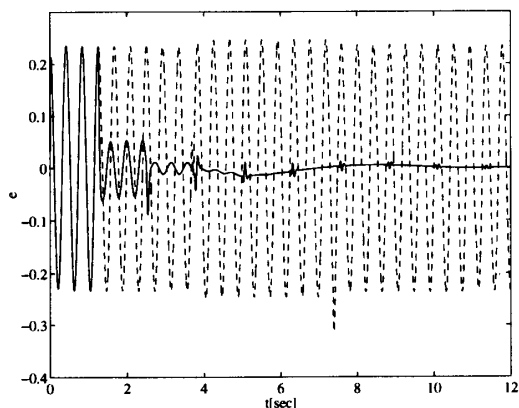


Fig. 4 Response for the reference input  $r = \sin(5t)$

で提案した多重周期繰返し補償器を用いたときの偏差を表し、点線が参考文献<sup>(5)(6)</sup>の方法を用いたときの偏

差を表す。図 4 から、本稿で提案した多重周期繰返し補償器の方が、小さな偏差で目標入力に追従していることが確認できる。つぎに、外乱  $d = \sin(5t)$  が観測出力  $y$  に加わった場合の応答を図 5 に示す。ただし、

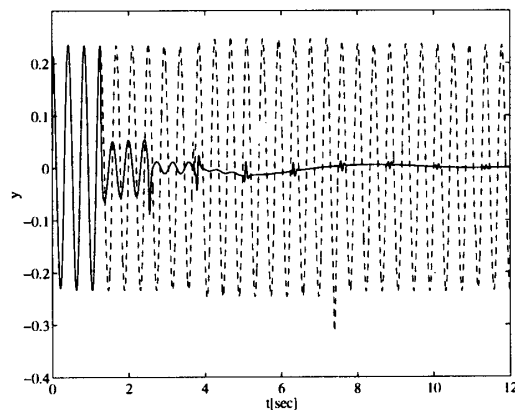


Fig. 5 Response for the disturbance  $d = \sin(5t)$

実線が本稿で提案した多重周期繰返し補償器の外乱応答を表し、点線が参考文献<sup>(5)(6)</sup>の方法の外乱応答を表す。図 5 から本稿で提案した多重周期繰返し補償器の方が、参考文献<sup>(5)(6)</sup>の方法よりも外乱の影響を低減できていることが示されている。なお、この数値例では、 $d = \sin(5t)$  の場合の数値例を示したため、割合低い周波数成分の外乱の影響を考慮したにすぎないと誤解されるかもしれないが、 $N$  を大きくすることにより低減できる外乱の周波数成分は、いくらでも広げることができることに注意する。

## 6. おわりに

本稿では、広い周波数領域における外乱抑制特性を改善するため、多重周期繰返し補償器を用いた繰返し制御系の設計法を提案した。まず、広い周波数領域における外乱抑制特性を改善する多重周期繰返し補償器の設計手順を与えた。つぎに、提案した多重周期繰返し補償器を用いたときの閉ループ系の安定性を保証する補償器の設計法を与えた。

## 文 献

- (1) 井上, 中野, 久保, 松本, 馬場, 陽子シンクロトン電磁石電源の繰返し運転における高精度制御, “電気学会論文集”, C100, (1980), pp.234-240
- (2) 中野, 井上, 山本, 原, 繰返し制御, 計測自動制御学会, (1989)
- (3) 渡部, 山足: スペクトル分解法による繰返し制御系の安定化, 計測自動制御学会論文集, 22-5, 535-541(1986)
- (4) 後藤, 松林, 宮崎, 川村, 有本, 繰返し型学習補償器を用いた制御系の外乱抑制特性の考察と多重周期学習補償器の提案, “システムと制御”, 31-5, (1987), pp.367-374
- (5) 杉本, 鷲田, むだ時間補正型修正繰返し制御系の一設計法, “計測自動制御学会論文集”, Vol.34, No.6, (1996), pp.645-647



- (6) 杉本, 鷺田, むだ時間補正型修正繰返し制御の提案, “計測自動制御学会論文集”, Vol.34, No.7, (1996), pp.761-768
  - (7) 山田, 奥山, 最小位相系に対する繰返し制御系のパラメトリゼーション, “計測自動制御学会論文集”, Vol.38, No.4, (2000), pp.328-334
  - (8) J.J.Glaria and G.C.Goodwin, *A parameterization for the class of all stabilizing controllers for linear minimum phase systems*, “IEEE Trans. on AC”, (1994), Vol.39, No.2, pp.433-434
  - (9) M.Vidyasagar, *Control System Synthesis—A factorization approach—*, “MIT Press”(1985)
-