

衝突を伴う片持ちはりにおけるカオス振動の実験*

丸山 真一^{*1}, 加藤 考行^{*2}
永井 健一^{*1}, 山口 誉夫^{*1}Experiments on Chaotic Vibrations of a Cantilevered
Beam under VibroimpactShinichi MARUYAMA^{*3}, Takayuki KATO,
Ken-ichi NAGAI and Takao YAMAGUCHI^{*3} Department of Mechanical System Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

Experimental results are presented on chaotic vibrations of a cantilevered beam under vibroimpact. A rigid bar that is located close to the free end of the beam limits the amplitude of the beam under lateral periodic acceleration, and then asymmetric vibroimpacts are induced. In the frequency region of the impact vibration near the fundamental resonance of the lowest mode, two regions of chaotic responses are observed. There is one impact in an excitation cycle in the higher frequency region of the chaos, while occurrence of impacts in the lower frequency region is less frequent than the former one. The maximum Lyapunov exponent of the chaotic response in the higher frequency region takes higher value than that of the chaos in the lower frequency. Mode contributions to the chaos are inspected by the principal component analysis. The lowest mode of vibration prevails in the vibroimpacting response. In the regions of the chaos, contribution of the second mode of vibration to the chaotic responses increases up to 5%. As the exciting frequency is increased, the contribution of the second vibration mode to the chaos becomes larger owing to the increase in the amplitude of impact vibration. Furthermore, contribution of the second vibration mode drastically increases as the super-harmonic resonance of the second mode is generated. The maximum Lyapunov exponent increases as the contribution of the second mode increases, which implies the close relation between the complexity of the chaotic responses and the participation of the higher modes of vibration.

Key Words: Nonlinear Vibration, Vibration of Continuous System, Chaos, Flexible Structure, Impacting System, Beam, Principal Component Analysis, Lyapunov Exponent

1. 緒 言

機械の中には、コンプレッサーのリード弁や電磁リレーのように、衝突振動の発生が機能上避けられない要素が多く見られる。衝突振動系におけるカオス振動については多くの研究が行われており⁽¹⁾⁻⁽³⁾、近年では Grazing 分岐に関する研究⁽⁴⁾が多く見られる。ところで、薄肉の連続体で構成される要素の衝突振動においてカオス振動が生じた場合には、高次振動モードが顕著に誘起される可能性がある。従って、薄肉連続体で構成された衝突振動を伴う機械要素の耐久性や静粛性を確保するために、衝突に伴うカオス振動における高次振動モードの寄与を明らかにする必要がある。

薄肉連続体の基本的な要素であるはりの衝突を伴うカオス振動について、以下のような研究がなされている。MoonとShaw⁽⁵⁾は、はりの衝突振動系の理論解析と実験を行った。ここでは、衝突の前後で異なるはりのモード形状を仮定したガラーキン法を用いることで、単一モードを考慮した理論解析を行い、カオス振動が分数次調波共振に起因して発生することを示している。

高次振動モードの影響に関する研究として、吉武、原田ら⁽⁶⁾は実験における分岐挙動との比較により、数値計算において仮定すべき線形固有振動モードの数を示している。さらに、多点で計測されたはりの時系列波形から、はりの各線形固有振動モードが占有するエネルギーを評価している。ところで、非線形信号処理の手法の一つである主成分分析(Principal Component Analysis, PCA または Proper Orthogonal Decomposition, POD と呼ばれる)が、連続体の振動

* 原稿受付 2005年12月20日。

^{*1} 正員、群馬大学工学部(〒376-8515 桐生市天神町1-5-1)。^{*2} 正員、群馬大学大学院工学研究科。

E-mail: maruyama@me.gunma-u.ac.jp

問題における空間モードの同定に有効であるとして関心を集めている。主成分分析は、多点において観測した連続体振動の時系列応答を、互いに相関がない成分へ分解するものである。この方法は、非線形振動において発生する空間モードの形状が、線形固有振動モードと一致しない場合にも適用できるという利点を持つ。

Azeez と Vakakis⁽⁷⁾ は、はりおよびオーバーハングローターの衝突振動について、数値計算ならびに実験で得た多点の時系列波形に対し、主成分分析を適用することで高次振動モードの寄与を分析している。さらに、モード展開の基底として主成分分析により得られた空間モードを用いることで、系の低次元モデルの構築を試みている。しかしながら、衝突を伴うカオス振動における高次振動モードの寄与の解明を目的として主成分分析を適用した例は著者らが知る限りない。

一方著者らは従来より、座屈後はりに関する実験⁽⁸⁾や理論解析⁽⁹⁾、扁平アーチの理論解析⁽¹⁰⁾を行い、動的飛び移りや内部共振を伴うカオス振動で支配的となる振動モードの数を、最大リアプノフ指数により分析してきた。さらに、主成分分析を適用することで、系の挙動に寄与している空間モード形状を同定するとともに、それらの寄与率を明らかにしてきた⁽¹¹⁾⁻⁽¹³⁾。

本報では、棒との衝突を伴う片持ちはりのカオス振動について実験を行った。周期横方向加速度を受けるはりの一次振動モードの主共振近傍で発生する衝突振動を調べ、特徴的なカオス振動応答について、時系列波形、ポアンカレ写像図、最大リアプノフ指数により分析を行った。さらに、はり変位の時系列波形を多点にわたって測定し、主成分分析を適用することで、カオス振動への高次振動モードの寄与を詳細に調べた。

2. 実験装置

2.1 片持ちはりの衝突振動系 実験に用いた衝突振動系の概要を図1に示す。系は片持ちはりとは振幅を制限する棒により構成される。長さ $L'=98.7$ mm、幅 $b=19.5$ mm、厚さ $h=0.210$ mmのりん青銅板をブロックで固定支持した。これより、長さ $L=52.7$ mmで一端固定、他端自由の片持ちはりを得た。実測より、はりのヤング率 $E=95.7$ GPa、密度 $\rho=8.65 \times 10^3$ kg/m³を得た。はりの固定端から中心軸に沿って $L_{bar}=43.6$ mmの位置に先端を丸く加工したボルトを取り付けた。今後、このボルトを衝突棒と呼ぶ。はりと衝突棒との間隙は、 $S=1.06$ mmとした。片持ちはりの線形固有振動数 f_i ($i=1, 2, \dots$)の実測結果を表1に示す。図中にモード形状の概略図と後述する無次元固有振動数の値 ω_i を併記した。座標系として固定端を原点とし、はりの

中心軸上に x 軸を、はりに対し横方向に z 軸をとった。はりのたわみ W は静的平衡位置から計測した。

2.2 振動試験装置 振動試験装置の概要を図2に示す。装置は主に、はりに加速度振幅一定で正弦波の周期横方向加速度を与える加振装置と、はりの動的変位を多点で同時計測するレーザ変位計、変位応答の分析・記録装置からなる。1から4は加振装置であり、波形発生器1が発振する正弦波信号を電力増幅器2で増幅し、電磁式加振器3に入力する。これにより、はりが取り付けられた加振台が駆動される。加振台には加速度ピックアップ4が取り付けられており、はりに与えられた加速度の信号を波形発生器に帰還させる。この構成により、歪みの少ない加振および加速度振幅を一定とした周波数掃引が可能となる。装置の最大加

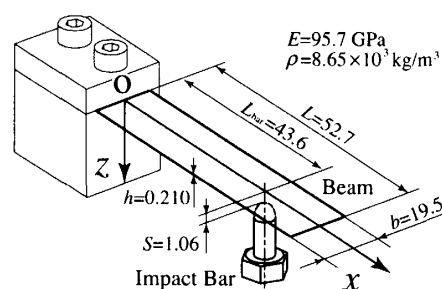


Fig. 1 The cantilevered beam under vibroimpact with the bar

Table 1 Natural frequencies and vibration modes of the beam

Mode	Mode pattern	f_i [Hz]	ω_i
1		40.6	3.52
2		257	22.2
3		722	62.5
4		1420	123

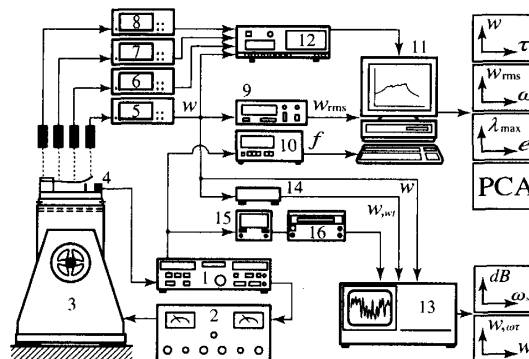


Fig. 2 Experimental apparatus of the vibration test

速度振幅は約 120 m/s^2 ，周波数掃引範囲は 30 Hz から 500 Hz ，掃引幅は 1 mHz 単位で制御可能である。5 から 8 はレーザ変位計である。5 から 7 の 3 台のレーザ変位計によりはりの 3 点の変位を検出し，8 で加振台の変位を検出する。はりの変位と加振台の変位との差，すなわち加振台に対するはりの相対変位を電圧信号に変換する。これよりはりの 3 点の変位を同時に計測することが可能となる。レーザ変位計の分解能は $0.2 \mu\text{m}$ である。9 から 16 は応答の分析・記録装置である。周波数応答曲線は，電圧計 9 で得たはりの実効値振幅と，周波数カウンタ 10 により計測される加振振動数とを，計算機 11 に記録することで得られる。はり変位の時系列波形は，記録装置 12 に収録した。その波形を後に計算機に転送し，最大リアプノフ指数および主成分分析の計算を行った。時系列波形の確認ならびに周波数分析は，FFT アナライザ 13 で行った。ポアンカレ写像図は次の手順で記録した。まず変位を微分器 14 により速度に変換した。位相計 15 で加振周期ごとに加振加速度が最大となる時刻を検出し，遅延パルス発振器 16 で任意の位相遅れを設定したパルス波形を生成する。このパルスごとに変位と速度を FFT アナライザに記録し，ポアンカレ写像図を得た。

3. 実験要領

実験結果を整理するために，はりの物理量を基準に次の無次元量を導入した。

$$\xi = x/L, w = W/h, \omega = 2\pi f/\Omega_0, \omega_i = 2\pi f_i/\Omega_0$$

$$\tau = \Omega_0 t, \tau_e = 2\pi/\omega, p_d = \rho A a_d L^4/EI r \quad (1)$$

$$q_s = QL^3/EI r, s = S/h, \xi_{\text{bar}} = L_{\text{bar}}/L$$

ξ ははり全長に対する無次元座標， w ははりの厚さ h を基準としたたわみ W の無次元量である。 ω は無次元加振振動数で， f は有次元の加振振動数， Ω_0 は振動数の代表量 ($\Omega_0 = L^{-2}\sqrt{EI/\rho A}$ ， $A = bh$ ， $I = bh^3/12$) である。 ω_i は i 次の無次元固有振動数である。 τ は時間 t に対応する無次元時間で， τ_e は無次元加振周期である。 p_d ははりに与えられる周期荷重の無次元振幅であり， a_d ははりを加振する加速度を $a = a_d \cos 2\pi ft$ とした場合の加速度振幅である。 $r = \sqrt{TA}$ は，はりの断面二次半径である。 q_s は，はりの復元力特性を調べる際に，はりに与える横方向の集中荷重 Q の無次元量である。 s は，板厚を基準とした間隙の無次元量であり， ξ_{bar} は衝突棒の位置を表す無次元量である。

実験は次の順序で行った。はじめに，衝突を伴うはりの基本特性として，はりの復元力特性を調べた。はり上の一点に集中荷重 Q を与え，他の一点においてたわみ W を計測して Q と W の関係を得た。続いて片

持ちはりの一次固有振動モードの主共振近傍における衝突振動に注目し，振動実験を行った。まず，衝突振動が生じる加振振動数の領域を確定するために，種々の周期荷重振幅において周波数掃引を行い，周波数応答曲線を得た。続いて，衝突振動領域内の時系列波形より最大リアプノフ指数を計算し，カオス振動が生じる領域を調べた。さらに，衝突振動領域内の特徴的な応答について周波数分析とポアンカレ写像図による分析を行った。最後に，カオス振動に寄与するはりの振動モードを明らかにするため，はり上の 3 点 ($\xi = 0.17, 0.50, 0.83$) で同時測定したはり変位の時系列波形に対して主成分分析を行った。加振振動数ならびに加振振幅による高次振動モードの寄与の変化を調べた。

振動実験では，無次元のはり一衝突棒間の間隙を $s = 5.02$ ，無次元衝突位置を $\xi_{\text{bar}} = 0.83$ とし，主成分分析に用いる三点同時計測の場合を除き，はりのたわみの計測位置は主に $\xi = 0.89$ を選んだ。はりのたわみは，静的平衡位置からの変位として測定した。はりに与える加振加速度の振幅は $a_d = 5.00, 10.0, 15.0, 20.0, 25.0, 30.0 \text{ m/s}^2$ とした。これは無次元周期荷重振幅 $p_d = 15.6, 31.3, 46.9, 62.6, 78.2, 93.9$ にそれぞれ対応する。

最大リアプノフ指数 λ_{max} の計算には，Wolf の方法⁽¹⁴⁾を用いた。時系列波形から，Takens の定理⁽¹⁵⁾に基づき埋め込み次元 e を持つ疑似位相空間をつくり，空間内の軌道上の一点から隣接軌道上までの距離の変化率を時間軸にそって計算し平均をとる。これより時間経過に対する λ_{max} を得る。埋め込み次元 e の増加に対し， λ_{max} が正値に収束すれば応答がカオス振動であることが確定できる。また， λ_{max} が収束する際の埋め込み次元 e は，カオス振動において支配的な自由度の二倍を表す。また，主成分分析には Karhunen-Loève 法⁽¹⁶⁾を用いた。Karhunen-Loève 法とは，多点同時測定された各時系列波形を互いに相関を持たない成分に分解する方法である。具体的には， n 点で計測された時系列波形間の共分散行列を求め，その固有値 p_i および固有ベクトル Φ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) を得る。この固有ベクトル Φ_i は，測定された系の応答に寄与する空間モードを表す⁽¹⁷⁾。さらに固有値 p_i は，対応する空間モードが系の応答に与える寄与の大きさを示すものであり，主成分と呼ばれる。各主成分の寄与の度合いを表す指標として，次式の寄与率 μ_i を用いる。

$$\mu_i = p_i / \sum_{j=1}^n p_j \quad (2)$$

4. 実験結果および検討

4.1 はりの復元力特性 はり上の一点 $\xi = 0.66$ に集中荷重 Q を作用させ， $\xi = 0.38$ におけるたわみ W を

計測した。結果を図3に示す。縦軸は無次元集中荷重 q_s 、横軸ははりの無次元たわみ w である。衝突棒との接触を伴わない $w = -2.5$ から $w = 1.5$ までの範囲では、片持ちはり線形の復元力特性を示している。はりの変位が $w = 1.5$ より大きくなると、はりと衝突棒との接触によりはりの支持条件が変化し、はりは高い剛性を示す。このように、はりは衝突棒との接触を伴うことで、区分的に線形な非線形復元力特性を有する。

4.2 周波数応答曲線 周期荷重振幅 p_d を一定として周波数掃引を行ない、周波数応答曲線を得た。図4(a)に、 $p_d = 31.3$ における周波数応答曲線の実験結果を示す。図の縦軸はたわみの実効値振幅 w_{rms} 、横軸は加振角振動数 ω である。図中の矢印は加振振動数の掃引方向を示す。図より、低振動数側から加振振動数 ω を増加させると、はりの振幅の増加に伴い $\omega = 3.15$ で衝突振動応答が発生する。加振振動数 ω の増加に伴い、はりの振幅は増加していくが、棒との衝突の影響により振幅の上昇はゆるやかである。棒との衝突によりはりの剛性が高まることで、加振振動数 ω がはりの一次モードの線形固有振動数 $\omega_1 = 3.516$ を超えても大振幅の衝突振動応答は継続する。 $\omega = 4.57$ で小振幅の非衝突周期応答へと跳躍する。一方、高振動数側から加振振動数 ω を減少させると、 $\omega = 3.85$ で小振幅の非衝突周期応答から大振幅の衝突振動応答へと跳躍し、徐々に振幅を減少させながら $\omega = 3.12$ で非衝突の周期応答となる。このように、片持ちはりは棒との衝突により、履歴現象を伴う漸硬型の復元力特性に対応した共振応答の特徴を示す。これは前節に示したはりの復元力特性に対応している。図4(a)中に、 $\omega = 3.2$ から $\omega = 3.8$ までの周波数応答曲線を拡大して示した。衝突振動領域内の多くの領域では、加振振動数の掃引とともにはり応答の実効値振幅が小刻みに変化していることから、非周期のカオス振動が生じていることが予想される。一方、 $\omega = 3.4$ 付近から $\omega = 3.7$ 付近までの領域では、実効値振幅の変化が緩慢であることから、周期的な衝突振動の発生が予想される。このことは、後に4.3節と4.4節において述べるように、最大リアプノフ指数と時系列波形により確認されている。なお、この周期的な衝突振動領域においても、加振振動数の掃引に伴う履歴現象の発生が認められる。

図4(b)(c)に、周期荷重振幅 p_d がそれぞれ $p_d = 62.6$ 、 93.9 における周波数応答曲線の実験結果を同様に示す。周期荷重振幅の増加に伴って衝突振動が生じる加振振動数の領域が広がることが確認できる。

4.3 カオス振動の発生領域 衝突振動領域内の複数の加振振動数 ω において $\xi = 0.50$ で測定したはり

変位の時系列波形に対して、最大リアプノフ指数を計算しカオス振動が発生する領域を調べた。図5に各周期荷重振幅 p_d の値について、加振振動数 ω と最大リアプノフ指数 λ_{max} との関係を示す。図より、片持ちはりの一次の線形固有振動数 $\omega_1 = 3.516$ 付近に λ_{max} が非常に小さい周期的な衝突振動の領域がある。この領域を挟み加振振動数が低い側と高い側に、最大リアプノフ指数が正となるカオス振動の領域が存在する。加振振

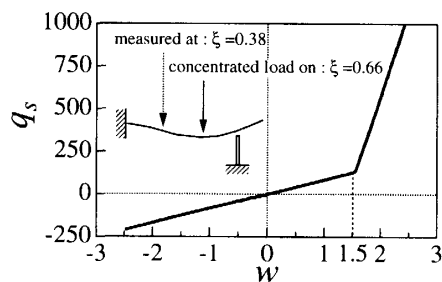


Fig.3 Static deflection of the beam under a concentrated lateral load

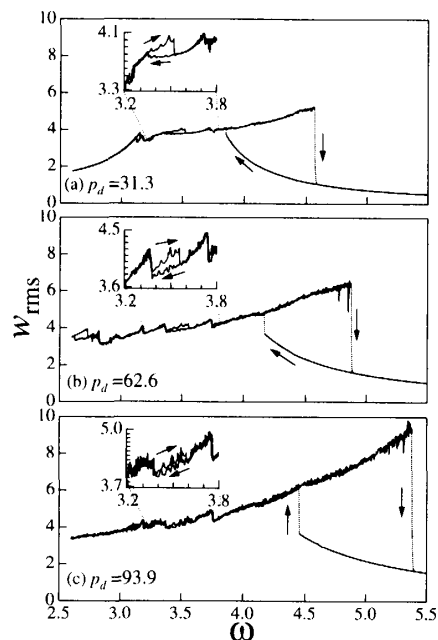


Fig.4 Frequency response curves of the beam

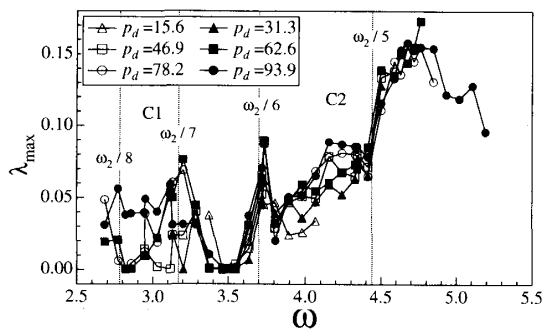


Fig.5 Maximum Lyapunov exponent related to the exciting frequency

動数が低い側 (以後 C1 領域と呼ぶことにする) では λ_{\max} が 0.05 程度, 加振振動数が高い側 (以後 C2 領域と呼ぶ) では λ_{\max} が 0.1 から 0.15 程度であり, 後者の方が最大リアプノフ指数が大きい. とくに, C2 領域では加振振動数 ω の上昇とともに λ_{\max} が増加する. これは, 衝突振動の振幅が増大し, 衝撃が増大することに対応する. また, 図中に破線で示す片持ちりの二次の線形固有振動数 ω_2 の整数分の $-\omega_2/n$ に近接する加振振動数では, λ_{\max} の値が大きい. これは, 衝突に伴い二次固有振動モードの高調波共振が誘起されたことによる.

4.4 時系列波形とその分析 衝突振動領域における特徴的な応答, すなわちカオス振動領域 C1, C2 および周期衝突振動領域について時系列波形の分析を行った. 結果を図 6 から図 8 に示す. 図 6(a) は, カオス振動領域 C1 におけるはり変位 w の時刻歴 ($\omega = 2.95, p_d = 62.6$) である. 横軸 τ/τ_e は加振周期を基準とした周期数である. 衝突が不規則に生じる応答であり, 加振周期毎には衝突が発生していない. 周波数分析結果を図 6(b) に示す. 縦軸に振幅スペクトルをデシベル値で示し, 横軸に分析周波数 ω_{sp} を対数表示した. 加振振動数 ω の成分の他に, 衝突の衝撃に起因してはりの高次振動モードが誘起され, 高次の固有振動数 $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ の成分が顕著に現れている. ポアンカレ写像図を図 6(c) に示す. 縦軸は速度, 横軸は変位であり, 加振周期ごとにサンプルされた点の集まりを示す. サンプルリングの位相角は加振力の最大振幅より 60° とした.

像が一定の範囲に分布するカオスの特徴を示している.

図 7(a) は, 一次固有振動数近傍の加振振動数における時系列波形 ($\omega = 3.37, p_d = 62.6$) である. 加振周期毎に衝突を生じている. 図 7(b) の周波数分析結果では, 加振振動数 ω 以外の振動数成分は顕著ではない. 図 7(c) のポアンカレ写像図の像は一点に集中し, この応答が加振に同期した周期応答であることを示している.

図 8(a) は, カオス振動領域 C2 の時系列波形 ($\omega = 4.63, p_d = 62.6$) である. C1 領域のカオス振動応答と比較して振幅が大きく, 加振周期毎に衝突を伴う非周期応答である. 図 8(b) の周波数分析結果より, 加振振動数 ω の成分のほか, 高次振動モードの固有振動数 $\omega_2, \omega_3, \omega_4$ の成分が顕著である. また, C1, C2 のカオス振動領域では応答の直流成分が大きい. これは, 衝突棒による非対称な拘束を受け, 振動の中心が移動するためである. 図 8(c) のポアンカレ写像図の像は, C1 領域よりも広範囲に分布し顕著なカオス状応答を示している. 以上より, はりの衝突振動応答は加振振動数の上昇に伴い, 衝突の頻度が比較的低いカオス振動領域 C1 から, 周期的な衝突振動領域を経て, 加振周期毎に衝突を伴う大振幅のカオス振動領域 C2 にいたる.

図 6 に示した領域 C1 内のカオス振動 ($\omega = 2.95, p_d = 62.6$), および図 8 に示した領域 C2 内のカオス振動 ($\omega = 4.63, p_d = 62.6$) について, 最大リアプノフ指数 λ_{\max} の計算結果を図 9 に示す. 縦軸は最大リアプノフ指数 λ_{\max} , 横軸は疑似位相空間を構成する際に仮定した埋め込み次元 e である. $\omega = 2.95$ の応答では, 埋め込み

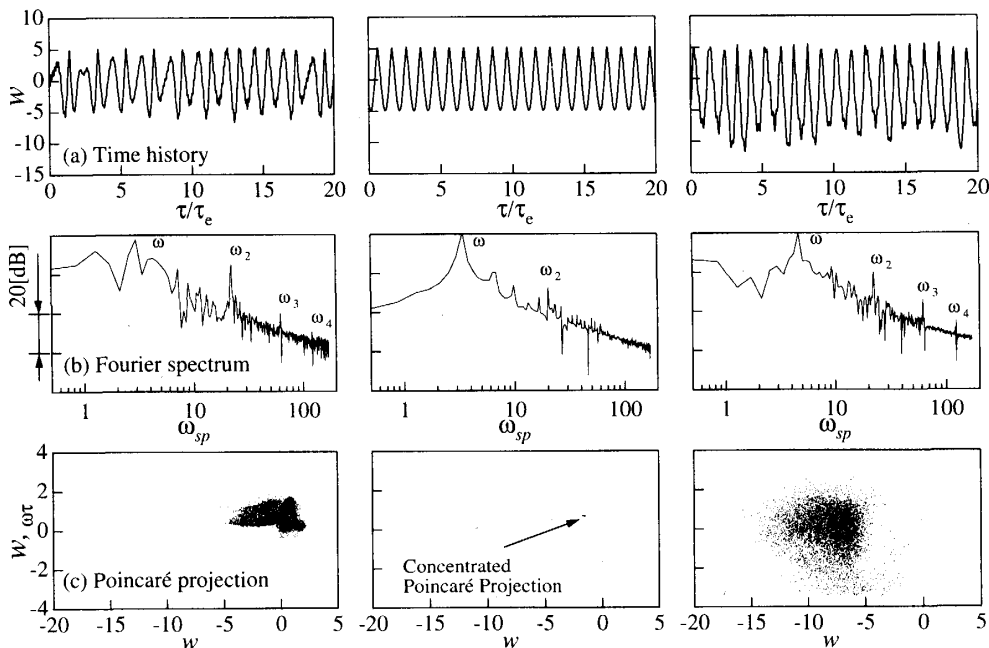


Fig.6 Chaotic response (C1), $\omega = 2.95, p_d = 62.6$

Fig.7 Periodic response, $\omega = 3.37, p_d = 62.6$

Fig.8 Chaotic response (C2), $\omega = 4.63, p_d = 62.6$

次元 $e=12$ 程度で λ_{\max} は0.01に収束していることから、このカオス振動において支配的な自由度の数は6程度である。なお、図より埋め込み次元 e が4を越えると λ_{\max} の減少が緩やかになることから、2つの振動モードがとくに顕著であることがわかる。一方、 $\omega = 4.63$ のカオス応答では、 $e=12$ 程度で λ_{\max} が0.15に収束していることから、支配的な自由度は6程度である。また、 e が6以上で λ_{\max} の減少が緩やかになることから、3つの振動モードがとくに顕著であることが分かる。

図5にも示したように、C2領域のカオス振動の最大リアプノフ指数はC1領域より大きい。これは、C2領域の応答では衝突の頻度が高いことに対応する。

4.5 主成分分析 はり上の三点($\xi = 0.17, 0.50, 0.83$)で同時測定した変位の時系列波形に対して主成分分析を適用し、衝突振動に内在する振動モードの寄与を調べた。加振加速度振幅 $p_d = 62.6$ での時系列波形に対する分析結果を図10に示す。図6,8に対応するカオス振動C1($\omega = 2.95$), C2($\omega = 4.63$) および図7に対応する周期衝突振動($\omega = 3.37$)の結果を示した。図10(a)に寄与率が最大の第1主成分に対応する空間モード Φ_1 、およびそれに続く第2、第3主成分の空間モード Φ_2, Φ_3 を示す。比較のため、片持ちはりの線形固有振動モードを点線で示した。いずれの応答においても、第1主成分の空間モードははりの一次線形固有振動モードに、第2主成分の形状は二次線形固有振動モードにほぼ一致している。第3主成分の形状は、三次線形固有振動モードに近いが、三次以降の振動モードの影響を受け、完全には一致しない。図10(b)に各主成分の寄与率 μ_i を示す。いずれの応答でも第1主成分は90%以上の大きな寄与率を占めるのに対し、第2主成分の寄与率は応答の種類によって大きく異なっている。第3主成分の寄与率は0.1%未満となり小さい。加振振動数 ω を変えて得た多点時系列波形に対し、主成分分析を行った。その結果、いずれの加振振動数においても、第1主成分と第2主成分の寄与率の和が99.9%以上を占めることがわかった。図11に、加振振動数 ω と高次振動モードの中で最も顕著な第2主成分の寄与率 μ_2 との関係を、複数の周期荷重振幅 p_d の値について示す。第2主成分の寄与率 μ_2 は、周期衝突振動領域では1%に満たない。それに対して、カオス振動領域C1では1~2%程度、また領域C2では1~5%程度に達する。これより、カオス振動領域において高次振動モードの誘起が顕著になると言える。また、カオス振動領域C2では、加振振動数 ω の上昇とともに第2主成分の寄与率 μ_2 が上昇している。これは、衝突振動の振幅が大きくなることで、衝突の衝撃が増大することに対応する。さらに、図中に破線で示す片持ちはりの二次線形固有振動数 ω_2 の整数分の ω_2/n に近接する加振振動数では、 μ_2 が大きくなる。これは、二次固有振動モードの高調波共振が誘起されたことによる。

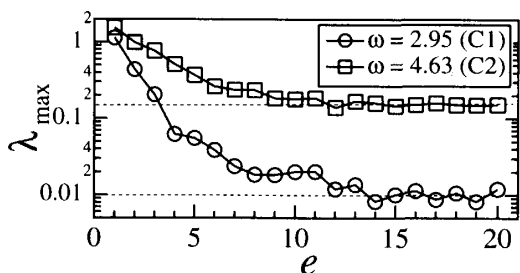


Fig.9 Lyapunov exponent of the chaotic responses, $p_d=62.6$

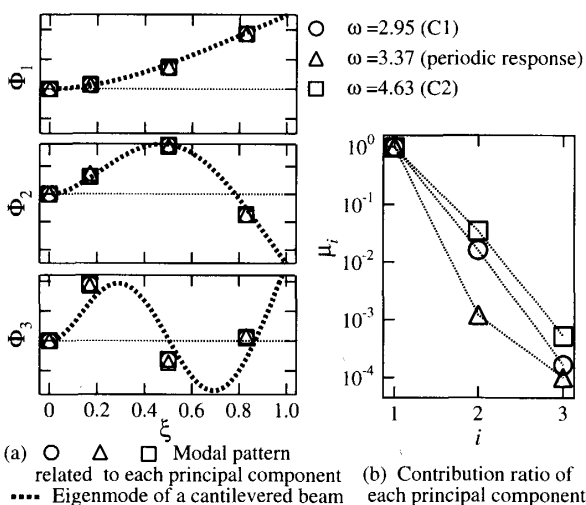


Fig.10 Results of the principal component analysis, $p_d=62.6$

ここで示した高次振動モードの寄与と加振振動数 ω との関係は、図5に示した最大リアプノフ指数 λ_{\max} と加振振動数 ω の関係と変化の傾向が類似している。これは、高次振動モードが誘起されることで、 λ_{\max} が大きい顕著なカオス振動となることを示している。

図12にカオス振動領域C2における第二主成分の寄与率 μ_2 と加振振動数 ω との関係を、複数の周期荷重振幅 p_d の値について示す。第2主成分の寄与率 μ_2 は、周期衝突振動領域では1%に満たない。それに対して、カオス振動領域C1では1~2%程度、また領域C2では1~5%程度に達する。これより、カオス振動領域において高次振動モードの誘起が顕著になると言える。また、カオス振動領域C2では、加振振動数 ω の上昇とともに第2主成分の寄与率 μ_2 が上昇している。これは、衝突振動の振幅が大きくなることで、衝突の衝撃が増大することに対応する。さらに、図中に破線で示す片持ちはりの二次線形固有振動数 ω_2 の整数分の ω_2/n に近接する加振振動数では、 μ_2 が大きくなる。これは、二次固有振動モードの高調波共振が誘起されたことによる。

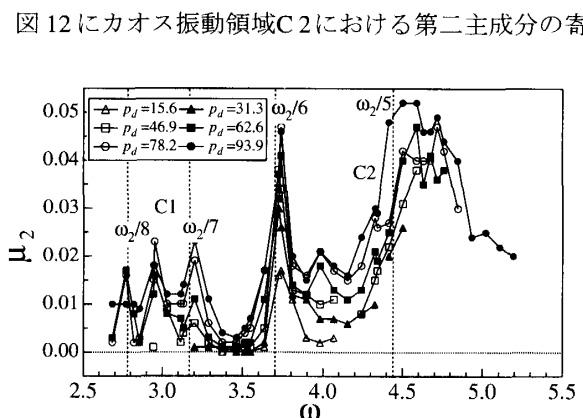


Fig.11 Contribution ratio of the 2nd principal component related to the exciting frequency

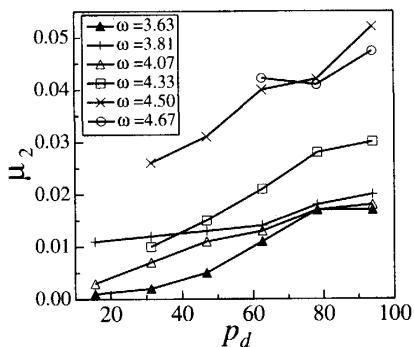


Fig.12 Contribution ratio of the 2nd principal component related to exciting amplitude

与率 μ_2 と無次元周期荷重振幅 p_d の関係を、いくつかの加振振動数 ω の値について示す。図より周期荷重振幅の上昇に伴い、二次振動モードの寄与が増加する。

5. 結 論

(1) はりの一次モードの主共振に伴い生じる衝突振動領域には、二つのカオス振動領域が存在する。高振動数側のカオス振動応答では加振周期毎に衝突が生じるのに対し、低振動数側では衝突の頻度が低い。その結果、前者のカオス振動応答では最大リアプノフ指数が0.1から0.15程度、後者では0.05程度の値をとり、前者の方が大きな値を示す。

(2) 片持ちはりの衝突振動には線形の一次モードに対応した空間モードが最低でも95%程度と最も大きな寄与を示す。高次振動モードとしては二次振動モードの寄与が最大であり、一次と二次の振動モードで99.9%の寄与率を占める。周期的な衝突振動では二次振動モードの寄与は1%に満たないのに対し、カオス振動では低振動数側の領域で1から2%程度、高振動数側の領域では1から5%程度と大きな寄与を示す。

(3) 加振振動数が上昇すると衝突振動の振幅が増加し、二次振動モードの寄与は高くなる。また、二次モードの高調波共振の発生に伴い、二次振動モードの寄与率は急激に増える。加振振動数と最大リアプノフ指数との関係にも同様の傾向が見られることから、高次振動モードが誘起されることで最大リアプノフ指数が大きい顕著なカオス振動となることが明らかになった。

本研究の遂行にあたり、内容の討論にご協力いただいたサンデン株式会社の鈴木央氏に謝意を表します。

文 献

(1) Thompson, J.M.T. and Ghaffari, R., Chaotic Dynamics of an Impact Oscillator, *Physical Review A*, Vol. 27 (1983), pp. 1741-1743.

(2) Shaw, S.W. and Holmes, P.J., A Periodically Forced Impact Oscillator with Large Dissipation, *Transaction of the ASME, Journal of Applied Mechanics*, Vol. 50 (1983), pp. 849-857.

(3) Kotera, T. and Shintani, M., Chaotic and Periodic Motions in a Vibro-Impacting System, *JSME International Journal Series C*, Vol. 46, No. 2 (2003), pp.659-665.

(4) Foale, S. and Bishop, S.R., Bifurcations in Impact Oscillations, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 6, No. 3 (1994), pp. 285-299.

(5) Moon, F.C. and Shaw, S.W., Chaotic Vibration of a Beam with Non-linear Boundary Conditions, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 18, No.6 (1983), pp. 465-477.

(6) Yoshitake, Y., Harada, A., et al., Periodic Solutions and Chaos in Impact Vibration of Beam, *Proceedings of the Dynamics and Design Conference, Japan Society of Mechanical Engineers*, No. 04-5 (2004-9), 602.

(7) Azeez, M.F.A. and Vakakis, A.F., Proper Orthogonal Decomposition (POD) of a Class of Vibroimpact Oscillations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, No. 5 (2001), pp. 859-889.

(8) Nagai, K. and Yamaguchi, T., Chaotic Vibrations of a Post-Buckled Beam Carrying a Concentrated Mass (1st Report, Experiment), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 60, No. 579 (1994), pp. 3733-3740.

(9) Nagai, K., Suzuki, H., Yamaguchi, T. and Maruyama, S., Chaotic Oscillations of a Buckled-Beam Constrained by an Axial Spring (Interaction between Dynamic Snap-Buckling and Internal Resonance), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 69, No.679 (2003), pp. 565-572.

(10) Maruyama, S., Nagai, K., Hattori, H. and Yamaguchi, T., Chaotic Vibrations of a Shallow Arch with Initial Configuration of Catenary, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 70, No.699 (2004), pp. 2993-3000.

(11) Yamaguchi, T., Nagai, K. and Maruyama, S., Identification of Spatial Modes in Chaotic Vibration Involving Dynamic Snap-through Using KL Method (Numerical Study for a Uniform Beam including Geometric Nonlinearity in a Multiple-degree-of-freedom System), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 69, No.687 (2003), pp. 2937-2942.

(12) Nagai, K., Maruyama, S., Sakaimoto, K. and Yamaguchi, T., Chaotic Oscillations of a Post-buckled Beam Constrained by an Axial Spring (Part1, Experiment), *Proceedings of IMECE 2004, 2004 ASME International Mechanical Engineering Congress and RD&D Expo*, (2004-11), 61352.

(13) Maruyama, S., Nagai, K., Yamaguchi, T. and Hoshi, K., Chaotic Oscillations of a Post-buckled Beam Constrained by an Axial Spring (Part2, Analysis), *Proceedings of IMECE 2004, 2004 ASME International Mechanical Engineering Congress and RD&D Expo*, (2004-11), 61357.

(14) Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. and Vastano, J.A., Determining Lyapunov Exponents from a Time Series, *Physica D*, Vol. 16, (1985), pp. 285-317.

(15) Takens, F., Detecting Strange Attractors in Turbulence, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol.898 (1981), pp. 366-381.

(16) Loève, M.M., *Probability Theory*, (1955), Princeton NJ: Von Nostrand.

(17) Feeny, B.F. and Kappagantu, R., On the Physical Interpretation of Proper Orthogonal Modes in Vibrations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 211, No. 4 (1998), pp. 607-616.