

中心に円孔を有する外周固定の薄肉円板のカオス振動実験*

永井 健一^{*1}, 岡田 賢二^{*2}
丸山 真一^{*3}, 山口 誉夫^{*3}

Experiments on Chaotic Vibrations of a Thin Circular Plate with Outer Clamped Edge and a Circular Center Hole

Ken-ichi NAGAI^{*4}, Kenji OKADA,
Shinichi MARUYAMA and Takao YAMAGUCHI

^{*4} Graduate School of Engineering, Gunma University,
1-5-1 Tenjin-cho, Kiryu-shi, Gunma, 376-8515 Japan

This paper presents experimental results on chaotic vibrations of a thin circular plate with a circular center hole. The plate is clamped around the outer edge by rigid rings. Asymmetric deflection of the plate is induced by initial imperfection and in-plane compressive stress due to thermal elongation of the plate. Two natural modes of vibration with one nodal diameter are generated in each natural frequency. These nodal diameters are perpendicular to each other. Under periodic excitation, a dominant chaotic response generated due to the type of one-to-two internal resonance in a specific frequency range. The chaotic response is inspected by the Fourier spectrum, the Poincaré projection and the maximum Lyapunov exponent. The principal component analysis is adapted on the chaotic response to confirm modal contributions. The multiple time responses of the plate are measured at four positions simultaneously for long-time interval. The modes of vibration without nodal diameter and the two modes with one nodal diameter contribute to the chaotic response, predominantly. Furthermore, changing the calculation of principal component with short-time interval, the chaotic response of the plate shows the motion of irregular traveling waves.

Key Words: Nonlinear Vibration, Chaos and Fractal, Vibration of Continuous System, Circular Plate, Principal Component Analysis

1. 緒言

中心に円孔を有する外周固定の円板, すなわち円孔空き円板は, オリフィスや消音器の仕切り板など, 配管系の基本要素として用いられる. 配管に流体が流れると, 円孔空き円板に変動圧力が作用し, 振動が発生する. さらに, 高温の流体が流れる場合, 管内外の温度差により円孔空き円板に面内圧縮応力が作用する. 小径の配管に円孔空き円板を用いる際, 薄肉の円孔空き円板の使用が考えられる. しかし, 薄肉化により大振幅の振動が発生し, 従来見られなかったカオス振動が誘起され, 騒音や薄肉の円孔空き円板の疲労破壊などが問題となり得る. したがって, 薄肉の円孔空き円

板における動的挙動の解明は工学上重要といえる. 過去には, 中実円板に発生する回転モードの研究⁽¹⁾, 内周固定と外周自由の回転円環板の研究⁽²⁾ならびに熱応力の影響を受ける内周固定と外周固定の円環板の研究⁽³⁾⁻⁽⁴⁾が行われている. しかし, 面内圧縮応力を受ける, 中心に円孔を有する外周固定の薄肉円板に発生するカオス振動について, 実験的に詳しく解明したものは見当たらない.

本実験では, 初期の面内圧縮応力を発生させた, 中心に円孔を有する外周固定の薄肉円板, すなわち薄肉円孔空き円板を加振し, 発生したカオス振動について詳しく調べた. まず, 薄肉円孔空き円板の基本特性として, 初期たわみの形状, 線形固有振動数と固有振動モード, さらに, 復元力特性を求めた. ついで, カオス振動実験を行った. 薄肉円孔空き円板に周期的な加振加速度を与え, 非線形動的応答の周波数応答曲線を記録した. 特定の振動数において, カオス状の動的応

* 原稿受付 2008年2月20日.

^{*1} 正員, フェロー, 群馬大学大学院工学研究科(〒371-8515 桐生市天神町1-5-1).

^{*2} 学生員, 群馬大学大学院工学研究科.

^{*3} 正員, 群馬大学大学院工学研究科.

E-mail: nagai@eng.gunma-u.ac.jp

答が現れた。カオス状の動的応答を分析するために、動的応答の時系列波形をはじめ、周波数分析結果、ポアンカレ写像図ならびに最大リャプノフ指数を求めた。さらに、カオス振動に寄与する振動モードとその寄与率を明らかにするために、薄肉円孔空き円板の各位置で時系列波形を同時に収録し、主成分分析を行った。特に、カオス振動に寄与する各振動モードの時間的変化を明らかにした。

2. 薄肉円孔空き円板および固定枠

実験に用いた薄肉円孔空き円板および固定枠を図1に示す。薄肉円孔空き円板は半径 $a=70.0$ mm, 中心の円孔の半径 $b=16.9$ mm, 板厚 $h=0.30$ mm のアルミ製である。薄肉円孔空き円板の半径に対する円孔の半径の比は, 0.24 である。以下の手順で薄肉円孔空き円板および固定枠を作製した。まず, 厚さ 0.30 mm のアルミ板から, 中心に半径 16.9 mm の円孔をもつ, 半径 100 mm の円板を切り出した。つぎに, ジュラルミン材から内半径 70.0 mm, 外半径 100 mm, 厚さ 15 mm の円環状の固定枠を一对作成した。得られた円板の外周を固定枠で挟み込み, ボルトで固定した。円板に初期の内面圧縮応力を加えるため, 固定する際に, 円板を冷却した。これより, 薄肉円孔空き円板を得た。薄肉円孔空き円板表面は, レーザー変位計によるたわみの測定精度を向上させるため, 白色のアクリル製ラッカーで塗装されている。塗装後の薄肉円孔空き円板の平均厚さは, $h=0.38$ mm であった。円板には, 切り出しにより微小な初期変形が発生している。さらに, 境界での固定と初期の内面圧縮応力により, 薄肉円孔空き円板には自重が作用した状態で, 初期たわみが発生している。後に示すが, 薄肉円孔空き円板は, 最大で板厚程度の初期たわみを有する。薄肉円孔空き円板に用いたアルミの材料特性値を, 薄肉円孔空き円板表面の白色塗装を考慮し, ヤング率 $E=67.7$ GPa, 密度 $\rho=2.66 \times 10^3$ kg/m³, ポアソン比 $\nu=0.33$ とする。ここで, 薄肉円孔空き円板

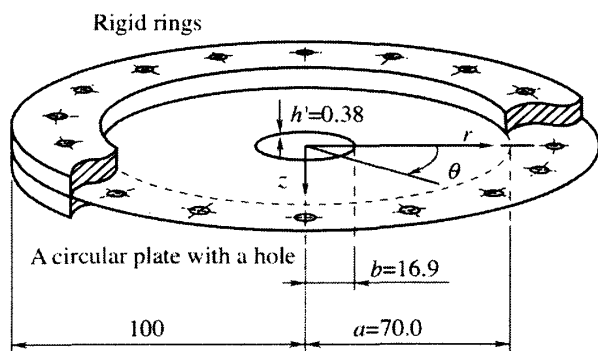


Fig. 1 A circular plate with a hole and rigid rings

に極座標系を導入する。薄肉円孔空き円板中央を原点とし, 半径方向に r 軸, 周方向に θ 軸, r - θ 面に対し鉛直下向き方向に z 軸を定める。

3. 実験装置および実験方法

3・1 基本特性の測定 薄肉円孔空き円板の基本特性として, 薄肉円孔空き円板の初期たわみの形状, 線形固有振動数と固有振動モード, さらに復元力特性を求めた。まず, 初期たわみの形状を測定した。レーザー変位計を薄肉円孔空き円板の上で動かし, 各点における初期たわみを測定し, 初期たわみの形状を得た。ついで, 線形固有振動数と固有振動モードを測定した。薄肉円孔空き円板に微小音圧を与え, 加振振動数を掃引した。共振応答での微小な動的応答をレーザー変位計で検出し, 線形固有振動数を求めた。固有振動数にて同様に加振を行い, レーザー変位計で薄肉円孔空き円板の各点での微小な動的応答を検出し, 固有振動モードを求めた。さらに, 薄肉円孔空き円板の復元力特性を, 集中荷重を加えた際の荷重と静たわみの関係から求めた。復元力特性の測定にはレーザー変位計と荷重計を用いた。荷重計で薄肉円孔空き円板に集中荷重を加えると, 薄肉円孔空き円板は自身の復元力と荷重計の集中荷重との平衡位置で静止する。このときの荷重と静たわみの関係を測定・記録した。加える荷重を逐次変化させることで, 復元力特性を得た。

3・2 カオス振動実験の概要 振動実験に用いた実験装置の概要図を図2に示す。すべての実験装置に1から17の番号を付けてある。

薄肉円孔空き円板は固定枠を通して加振される。固定枠は加振台に取り付けられる。加振は, 1から5の振動実験装置により与えられる。加振制御装置1は正弦波状の周期信号を生成する。この信号は電力増幅器2で増幅され, 電磁加振器3を駆動させる。電磁加振器は加振台4を通し周期加速度で固定枠を加振する。固定枠に取り付けられた加速度計5により, 薄肉円孔空き円板に, 実際に作用する加速度を検出する。この加速度の信号を加振制御装置に帰還させることで, 加振振動数を掃引中も一定の周期加振加速度振幅を維持する。

加振により発生した薄肉円孔空き円板の動的応答は6から9の変位検出装置で測定される。薄肉円孔空き円板の動的応答は, レーザー変位計6と7を用いて測定される。変位計6は固定枠の周期変位を検出し, 変位計7は薄肉円孔空き円板の動的応答と固定枠の周期変位の総和を検出する。変位計制御装置8は二つの信号の差をとる。この操作により, 加振による薄肉円孔

空き円板の純粋な動的応答を検出する。なお、レーザー変位計 7 は移動装置 9 に取り付けられており、薄肉円孔空き円板上の任意の点の動的応答や初期たわみを測定できる。

10 から 17 の装置は、動的応答の信号処理とデータ分析装置である。薄肉円孔空き円板の周波数応答曲線を、加振振動数を掃引することで得る。動的応答は、レーザー変位計で検出され、電圧計 10 で振幅の実効値に変換される。同時に、加振振動数は、加振制御装置から発振される加速度の周期信号から周波数カウンタ 11 を用いて測定される。得られた動的応答の振幅の実効値と加振振動数は計測用コンピュータ 12 に送られ、薄肉円孔空き円板の周波数応答曲線として記録される。なお、周波数応答曲線では、動的応答として、次節で述べる温度変化による初期たわみの応答と、加振による円孔空き円板の応答を収録した。カオス状の動的応答が確認された振動数において分析を行う。FFT 分析器 13 でカオス状の動的応答の時系列波形を収録する。ならびに、収録された時系列波形から周波数分析を行う。さらに、時系列波形をコンピュータに送り、Wolf の方法⁽⁵⁾により埋め込み次元と最大リアプノフ指数の関係を求め、カオス振動の確定と振動に寄与する振動モードの数を明らかにする。時系列波形がカオス振動であれば、埋め込み次元の増加と共に最大リアプノフ指数は正值に収束する。さらに、収束した際の、埋め込み次元の半分の数が振動に寄与する振動モードの数に対応する。実験における時系列波形には、目的とするカオス状の動的応答の他、不確かさや外乱などが含まれている。そのため、時系列波形は多くの自由度を持つものとして評価され、最大リアプノフ指数が埋め込み次元の増加と共に、一定値に収束しない場合⁽⁶⁾

がある。しかし、埋め込み次元がある値を超えると、最大リアプノフ指数の傾きの減少する割合は小さくなり、カオス振動の確定と振動に寄与する振動モードの数を判断できる。本実験では、最大リアプノフ指数の傾きの減少する割合が小さくなった埋め込み次元をもって、カオス振動の確定と振動に寄与する振動モードの数を判断した。カオス状の動的応答のポアンカレ写像図を、以下の手順で得る。まず、動的応答を微分器 14 により、速度に変換する。つぎに、位相計 15 とパルス発生器 16 により、周期加振加速度振幅の最大時に対し任意の位相角でパルス信号を生成する。薄肉円孔空き円板の動的応答と速度を、パルス信号を用いて加振周期ごとに FFT 分析器に取り込む。さらに、計測用コンピュータにポアンカレ写像図を保存する。カオス振動に寄与する振動モードとその寄与率を明らかにするため、複数のレーザー変位計で、薄肉円孔空き円板上の各位置での時系列波形を同時に測定する。多チャンネル記憶装置 17 にて、各位置の動的応答を収録する。応答をコンピュータに送り、Karhunen-Loève 法により主成分分析⁽⁷⁾を行う。さらに、分析に用いる時系列波形の時間長を短くした際の、カオス振動に寄与する振動モードの変化を明らかにするため、コンピュータにて、応答の時間長を変化させ、分析を行う。

3・3 実験環境の整備 薄肉円孔空き円板の動的応答は、基本特性の変化の影響を受ける。薄肉円孔空き円板の基本特性は、温度条件により変化する。温度条件が変化すると、薄肉円孔空き円板と固定枠は熱膨張し、薄肉円孔空き円板には、面内変位が生じる。面内変位に伴い、薄肉円孔空き円板の初期たわみは変化し、あわせて固有振動数と復元力特性も変化する。

本実験では、温度条件の変化が、実験結果に与える影響を極力小さくするために、著者らが一連の研究で使用している温度管理装置⁽⁶⁾を用い、温度を管理した。薄肉円孔空き円板の温度（薄肉円孔空き円板近傍の室温） T_r と、固定枠の温度 T_f を記録し、 T_r と T_f をそれぞれ $20.5 \pm 0.5^\circ\text{C}$ の範囲内で管理した。

上記の温度範囲内であっても、 T_r と T_f の間に温度差が生じると、初期たわみと固有振動数が敏感に変化する。固定枠は室温の変化の影響を受けにくい、薄肉円孔空き円板は薄肉であるため、敏感に室温の変化の影響を受ける。薄肉円孔空き円板と固定枠との間に温度差が生じると、面内変位は変化する。薄肉円孔空き円板は、薄肉かつ外周を固定枠で拘束されているため、面内変位のわずかな変化でも、薄肉円孔空き円板の初期たわみと固有振動数は敏感に変化する。

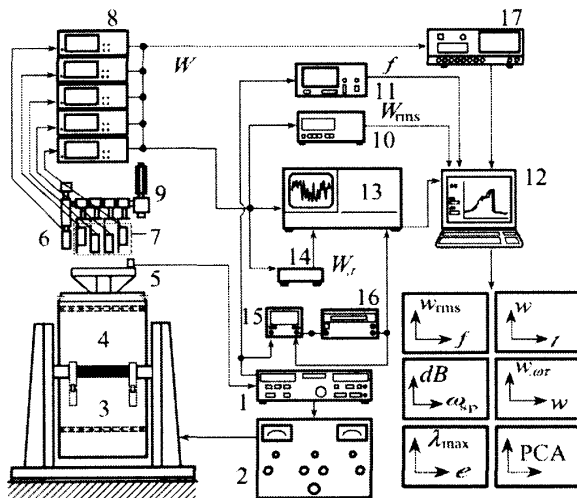


Fig. 2 Diagram of vibration test apparatus

3・4 無次元量の導入 実験結果の整理のため、以下の無次元量および諸量を導入する。

$$\xi = r/a, [w_0, w_s, \tilde{w}] = [W_0, W_s, \tilde{W}]/h$$

$$[p_s, p_d] = [g, a_d]\rho a^4/D, q_s = Q_s a^2/Dh$$

$$[\omega_{ex}, \omega_i] = [f_{ex}, f_i](2\pi/\Omega_0), \tau = \Omega_0 t$$

$$D = Eh^3/[12(1-\nu^2)], \Omega_0 = (1/a^2)\sqrt{D/(\rho h)}$$

ξ は半径方向の無次元座標であり、 w_0, w_s ならびに \tilde{w} は、それぞれ薄肉円孔空き円板の初期たわみ W_0 、静たわみ W_s 、静的な平衡位置を原点とする動的応答 \tilde{W} の無次元量である。 p_s ならびに p_d は、それぞれ重力加速度 g 、周期加振加速度振幅 a_d の無次元量である。 q_s は集中荷重 Q_s の無次元量である。さらに、 f_{ex} ならびに f_i は、加振振動数と薄肉円孔空き円板の線形固有振動数であり、 ω_{ex} ならびに ω_i は、それらの無次元量である。 τ は無次元時間である。ただし D は曲げ剛性、 Ω_0 は振動数の無次元量に関する定数である。

4. 実験結果および考察

4・1 薄肉円孔空き円板の基本特性 $T_r = T_f = 20.5^\circ\text{C}$ とした際の、薄肉円孔空き円板の初期たわみの形状を図3に示す。初期変形と、初期の面内圧縮応力に伴い、非対称な初期たわみの形状を有する。 z 軸正方向最大の初期たわみが、 $\theta = 0$ 方向の場所で板厚程度発生している。薄肉円孔空き円板が非対称な初期たわみの形状を有することにより、後に示す線形固有振動数と固有振動モードに影響を及ぼす。

$T_r = T_f = 20.5^\circ\text{C}$ のときの、薄肉円孔空き円板の線形固有振動数と対応する固有振動モードを、表1に示す。表中には、振動の次数、振動モードの概要図および無

次元固有振動数 ω_i 、有次元固有振動数 f_i [Hz]を示す。振動モードの概要図で示される破線は、節直径を示す。なお、2a次と2b次で示す振動モードでは、節直径は互いに直交し、固有振動数は比較的近接している。この差異は、薄肉円孔空き円板の非対称な初期たわみの形状の影響により、発生した。ここで、2a次モードの固有振動数 ω_{2a} は、1次モードの固有振動数 ω_1 の二倍程度の値を持つ。つまり、 $\omega_1 : \omega_{2a} \approx 1:2$ の関係を持つ。このことから、周期加振加速度を受けた際、内部共振現象の発生が予想される。

復元力特性の測定結果を図4に示す。縦軸は集中荷重 q_s であり、横軸は静たわみ w_s である。 $\xi = 0.47, \theta = 0$ にて集中荷重 q_s を与え、薄肉円孔空き円板の $\xi = 0.62$ とした、つぎの四点 $\theta = 0, \theta = \pi/2, \theta = \pi, \theta = 3\pi/2$ における静たわみ w_s を測定した。測定中の温度は、 $T_r = 20.3 \pm 0.1^\circ\text{C}, T_f = 20.4 \pm 0.2^\circ\text{C}$ である。どの測定点においても、集中荷重を z 軸の正方向に加えると漸硬形の復元力特性を示し、負方向に加えると漸軟-漸硬形の復元力特性を示す。つまり、薄肉円孔空き円板は漸軟-漸硬形の復元力特性を有する。

実験時に薄肉円孔空き円板と固定枠に温度差が発生することで、初期たわみと線形固有振動数は敏感に変化する。具体的な例として、 $T_r = T_f = 21.0^\circ\text{C}$ から、 $T_r = 20.0^\circ\text{C}, T_f = 21.0^\circ\text{C}$ とし、温度差を 1.0°C 与えた場合、 $\xi = 0.47, \theta = 0$ において、初期たわみは板厚の約5%変

Table 1 Natural frequencies and natural modes of vibration

Mode i	1	2a	2b	3
Mode Symbol				
ω_i	8.25	16.0	18.8	29.4
f_i [Hz]	124	242	284	444

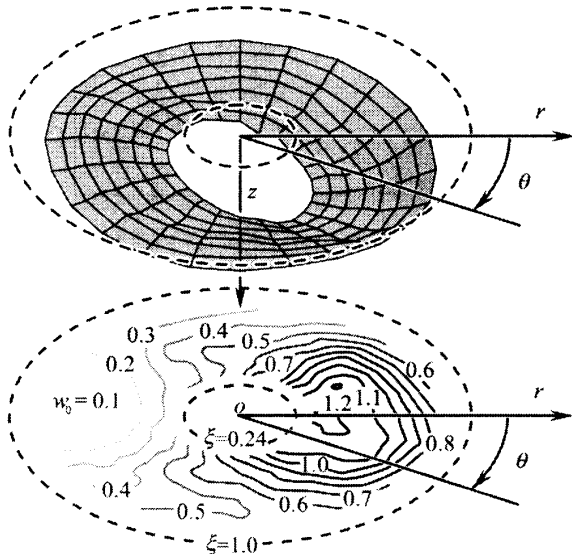


Fig. 3 The configuration of initial deflection of the plate

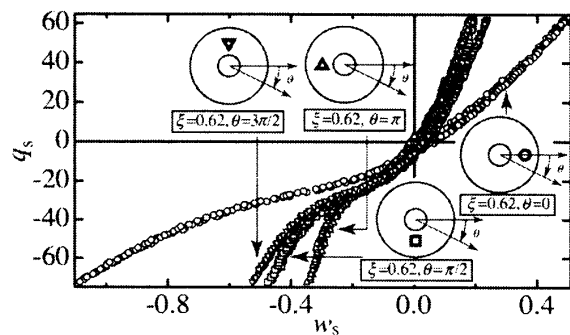


Fig. 4 Characteristics of restoring force of the plate at $\xi = 0.62, \theta = 0, \theta = \pi/2, \theta = \pi, \theta = 3\pi/2$ under a concentrate load at $\xi = 0.47, \theta = 0$

化し、1次モードの無次元固有振動数は0.55変化した。この温度変化による初期たわみと固有振動数の変化は、後に示す周波数応答曲線での、動的応答の振幅のずれの発生する原因となる。

4・2 周波数応答曲線 振動実験により得られた、周波数応答曲線を図5に示す。周期加振加速度振幅を $p_d=4.4$ で一定とし、無次元加振振動数を一秒間に 7×10^{-3} の速さで掃引した。横軸に加振振動数 ω_{ex} をとり、縦軸に動的応答の振幅の実効値 \bar{w}_{rms} をとる。測定点は $\xi=0.47$ 、 $\theta=0$ である。実験中の温度変化は $T_f=20.5 \pm 0.5^\circ\text{C}$ 、 $T_r=20.9 \pm 0.1^\circ\text{C}$ であった。図において、 ω_{ex} が10以下の振動数範囲で、大振幅応答が発生している。後に示すように、図中"C"と表記した $\omega_{ex}=9.6$ 近傍においてカオス状の動的応答の発生を確認した。図中において加振振動数を増減する際、動的応答の振幅にずれが発生している。同一振幅に対応する無次元加振振動数では、最大で0.36ほど差異が生じている。この差異は、4章1節で述べた、温度変化による初期たわみと固有振動数の変化と同程度である。温度変化の影響で初期たわみと固有振動数が変化したことにより、動的応答の振幅が大きくなる結果となった。なお、温度変化によりカオス振動の発生する振動数は変化するものの、カオス状の動的応答に大きな影響はないと確認した。

4・3 時系列波形と分析結果 周期加振加速度振幅 $p_d=4.4$ で加振し、カオス状の動的応答が確認された振動数において、時系列波形の分析を行った。図6に、測定位置 $\xi=0.47$ 、 $\theta=0$ 、加振振動数が $\omega_{ex}=9.6$ のときの(a)時系列波形、(b)周波数分析結果ならびに、(c)ポアンカレ写像図を示す。図6の(a)において、縦軸は動的応答 \bar{w} であり、横軸は加振周期 τ_c に対する時間 τ である。時系列波形の包絡線に注目する。図において、包絡線が連続的かつ非周期的に変化している。これは、内部共振形のカオス振動の特徴的な応答である。図6の(b)において、縦軸は振幅スペクトラムAをデシベル表示しており、横軸は分析周波数 ω_{sp} を対数表示してい

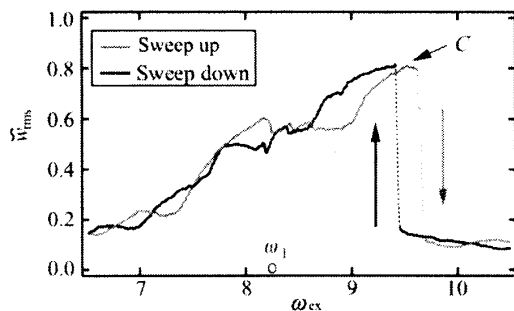


Fig. 5 Frequency response curve of the plate measured at $\xi=0.47$, $\theta=0$ ($p_d=4.4$)

る。図の振幅スペクトラムのピークの周波数成分に注目すると、特に、加振振動数 ω_{ex} に近い1次モードの固有振動数 ω_1 の近傍と、 ω_{ex} の二倍に近い2a次モードの固有振動数 ω_{2a} 近傍に、ピークが現われている。このピークを中心に、スペクトラムは比較的広い分布をしている。これは、固有振動数 ω_1 と ω_{2a} が約1:2の整数比の関係を満たし発生した、内部共振形のカオス振動であることを示す。図6の(c)において、縦軸は速度 \dot{w}_{ort} 、横軸は動的応答 \bar{w} を意味する。なお、位相角は周期加振加速度振幅の最大時に対し $\pi/3$ radである。図に示すポアンカレ写像図は、明瞭な輪郭を持つ分散した像を有し、内部共振形のカオス振動に特徴的な複雑な応答⁽⁸⁾が確認できる。

ここで、カオス振動の確定とカオス振動に寄与する振動モードの数を明らかにするため、時系列波形から最大リアプノフ指数と埋め込み次元の関係を求めた。埋め込み次元 e と最大リアプノフ指数 λ_{max} の関係を図7に示す。図より、埋め込み次元 $e=7\sim 10$ 近傍において、最大リアプノフ指数の傾きの減少する割合は小さくなり、その時の最大リアプノフ指数は0.3~0.4程度である。最大リアプノフ指数の傾きの減少する割合が、正值において小さくなっていることより、 $\omega_{ex}=9.6$ における薄肉円孔空き円板の動的応答はカオス振動であると確定される。さらに、 $e=7\sim 10$ 近傍で傾きの減少する割合が

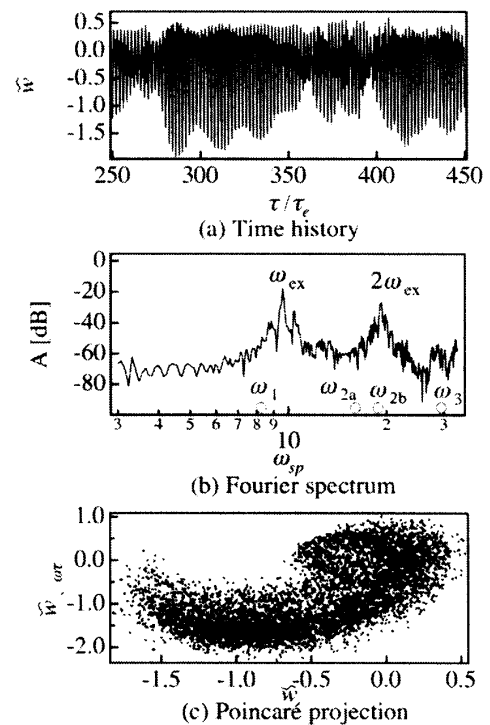


Fig. 6 Chaotic response of the plate measured at $\xi=0.47$, $\theta=0$ ($p_d=4.4$, $\omega_{ex}=9.6$)

小さくなっていることから、カオス振動に寄与する振動モードの数は4ないし5程度となる。

4.4 カオス振動に寄与する振動モード 周期加振加速度振幅 $p_f=4.4$ で加振を行い、加振振動数 $\omega_s=9.6$ にて、薄肉円孔空き円板上の $\xi=0.47$ とした $\theta=0$, $\theta=\pi/2$, $\theta=\pi$, $\theta=3\pi/2$ の四点で動的応答の時系列波形を測定した。これらの時系列波形に対して主成分分析を行った結果を図8, 図9に示す。

図8は、カオス振動に寄与する振動モードの変形パターンに寄与率を示したものである。図8の縦軸は各変形パターンの寄与率、横軸は、寄与の大きい変形パターンの順番である。なお、分析に用いた時系列波形の時間長は、加振周期 τ_c の2500倍である。薄肉円孔空き円板のカオス振動では節を持たない1次の振動モードの変形パターンが61.6%と高い寄与率を持っている。つぎに、節直径が互いに $\pi/2$ 異なる二つの2次の振動モードの変形パターンが、20.4%、13.9%と比較的高い寄与率を示している。それに比べ、3次モードの変形パターンは0.5%と非常に低い寄与率となった。つまり、この振動数のカオス振動は、1次の振動モードと二つの2次の振動モードの変形パターンが支配的であり、顕著に寄与する振動モードの数は3程度である。固有振動数 ω_1 と ω_{2a} が約1:2の整数比の関係を持つことで、内部共振形のカオス振動が発生し、2b次の振動モードが誘起された結果、顕著に寄与する振動モードの数は3程度となった。最大リアプノフ指数と埋め込み次元から得たカオス振動に寄与する振動モードの数と、比較的近い値となった。

図9は、カオス振動に寄与する振動モードの変形パターンを示したものである。図9の縦軸は固有ベクトルの成分の値 ϕ_i 、横軸は測定点の座標系 θ である。主成分分析から得られた固有ベクトルの成分の値が、測定点に対してプロットされている。さらに、カオス振動への寄与の大きい順に、変形パターンが図9の(a)から(d)に示されている。図において、黒の太線は、分析

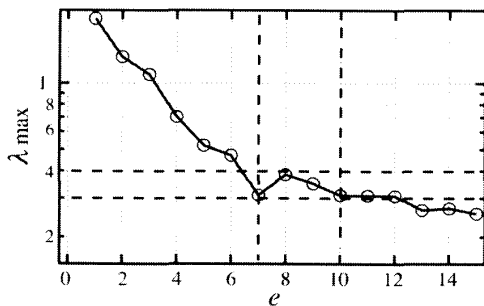


Fig. 7 Maximum Lyapunov exponent related to embedding dimension ($p_f=4.4$, $\omega_s=9.6$)

に用いた時系列波形の時間長を加振周期 τ_c の2500倍とした長時間平均の結果である。灰色の細線は、長時間平均の分析に用いた時系列波形の時間長を50等分し、それぞれの時間について分析を行った、短時間における結果である。なお、分析に用いた時間長は加振周期 τ_c の50倍である。図9において、長時間平均の結果から、カオス振動に寄与する振動モードの寄与率は大きい順に、1次、2a次、2b次、3次となった。さらに、短時間の波形を用いた分析では、時系列波形の時間帯により、変形パターンに差異が現われている。特に、

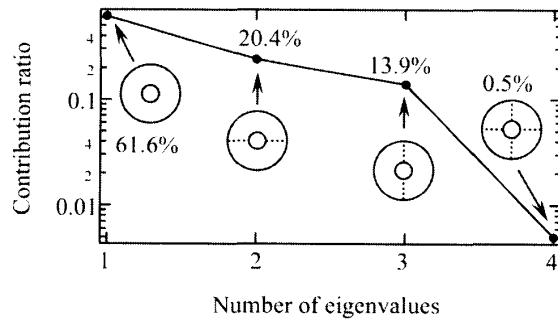


Fig. 8 Principal components obtained by Karhunen-Loève transformation (time length $2500\tau_c$)

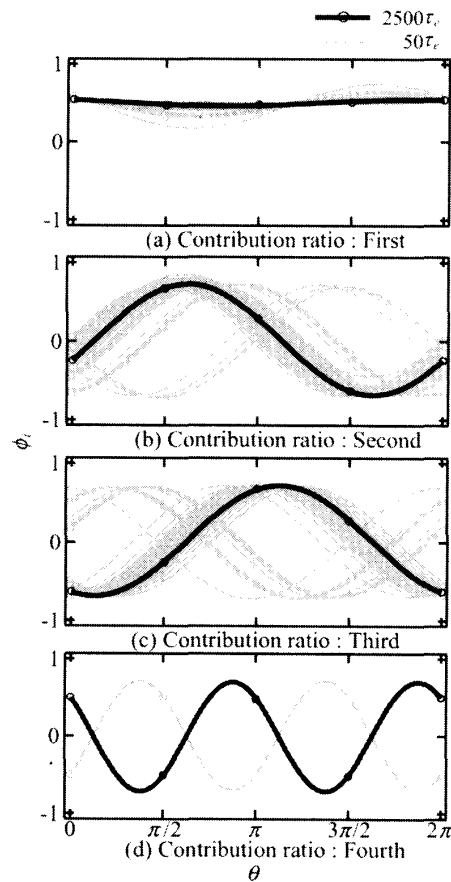


Fig. 9 Modal pattern obtained by Karhunen-Loève transformation

図9の(b)と(c)に示す, 二つの2次モードの変形パターンにおいて, 大きなずれが発生している. 固有ベクトルの性質から, 正負が逆転している変形パターンは同じと見なせるが, それ以外にも節直径の円周方向への移動が確認できる. これは, 分析に用いる時間長を短くしたことにより, 節直径の周方向への不規則な回転, つまり, 不規則な進行波の動きによるものである.

5. 結言

初期の面内圧縮応力を発生させた, 中心に円孔を有する外周固定の薄肉円板, すなわち薄肉円孔空き円板について, カオス振動実験を行った. 実験により得られた結果を以下に示す.

(1) 非対称な初期たわみの形状の影響により, 節直径を一本有する2次の振動モードにおいて, 線形固有振動が異なり, 節直径が互いに直交する二つの振動モードが確認された.

(2) 本実験の面内圧縮応力と薄肉円孔空き円板の半径に対する円孔の半径の比の条件において, 1次モードの固有振動数の主共振応答にて, カオス状の動的応答が確認された. この応答を分析した結果, 節直径を持たない1次モードと, 節直径を $\theta=0, \pi$ 方向に一本持つ2a次モードの固有振動数が約1:2の比率を有し, 内部共振形で誘起される, カオス振動であると確定した.

(3) カオス振動を主成分分析した結果, このカオス振動に顕著に寄与する振動モードの数は3程度である. その寄与率は, 1次モードが約62%, 2a次と2b次モードがそれぞれ約20%と14%であり, 1次モードのほか二つの2次モードの寄与が大きい.

(4) カオス振動の主成分分析において, 分析時間長を変化させた結果, 二つの2次の固有振動モードで不規則な節直径の回転, つまり, 不規則な進行波の動きを確認した.

文 献

- (1) Nayfeh, T.A. and Vakakis, A.F., Subharmonic traveling waves in a geometrically non-linear circular plate, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol.29, No.2, (1994), pp.233-245.
- (2) Torii, T., Yasuda, K., Toyoda, T., Nonlinear oscillation of a rotating disc excited at a fixed point in space (Combination tones near primary resonance point), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.60, No.570, (1994), pp.386-393.
- (3) Arafat, H.N., Nayfeh, A.H., Faris, W., Natural frequencies of heated annular and circular plate, *International Journal of Solids and Structures*, Vol.41, (2004), pp.3031-3051.
- (4) Arafat, H.N., Nayfeh, A.H., Modal interactions in the vibrations of a heated annular plate, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.39, (2004), pp.1671-1685.
- (5) Wolf, A., Swift, J.B., Swinney, H.L. and Vastano, J.A., Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica, D*, Vol. 16, (1985), pp. 285-317.
- (6) Nagai, K., Maruyama, S., Murata, T., Yamaguchi, T., Experiments and analysis on chaotic vibrations of a shallow cylindrical shell-panel, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.305, (2007), pp.492-520.
- (7) Azeez, M. F. and Vakakis, A. F., Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.240 No.5 (2001), pp.859-889.
- (8) Nagai, K., Yamaguchi, T., Tanifuji, K., YOH, H., Experiment on chaotic vibrations of a cantilevered beam deformed by a stretched cable, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.60, No.569, C(1994), pp.3-9.