

平成 21 年度  
修士学位論文

壁面に亀裂を有する導波管の通過特性解析

群馬大学大学院工学研究科電気電子工学専攻  
博士前期課程 2 年  
情報通信システム第一研究室  
08801609 岡部 光悦

# 目次

1.序論.....	1
2.FDTD法.....	2
2.1.FDTD法とは.....	2
2.2.差分法.....	2
2.3.差分の基礎.....	2
2.4.差分の種類.....	3
2.5.マクスウェルの方程式.....	4
2.6.一次元問題.....	5
2.6.1.電磁界の更新式.....	5
2.6.2.吸収境界条件.....	6
2.6.3.解の安定性.....	7
2.6.4.規格化.....	8
2.7.二次元問題.....	9
2.7.1.電磁界の更新式.....	9
2.7.2.吸収境界条件.....	11
2.8.三次元問題.....	20
2.8.1.電磁界の更新式.....	20
2.8.2.PML (Perfectly Matched Layer).....	22
3.導波管解析.....	28
3.1.矩形導波管理論.....	28
3.2.解析手法.....	29
3.3.亀裂を有する導波管の解析.....	31
3.4.ソフトソースの実装.....	35
3.5.応用例.....	45
4.結論及び課題.....	47

# 1. 序論

現在、原子力発電所や火力発電所等の発電設備、化学プラントにおいて金属配管が多く利用されている。しかし、金属配管は経年劣化や流体による腐食、熱による変形が起こり得るため、未然に事故を防ぐための保守点検技術が重要である。そのため保守点検技術として様々な試験方法が提案されている。しかし、そういった手法の多くは配管内にカメラを挿入し、実際に目視することにより発見する方法や細かい間隔で外部から測定する方法がある、これらの手法は精度は高いが測定に時間がかかるという欠点を持っている。そこでそれらの課題の解決策として配管を導波管とみなし、管内に電磁波を伝播させることにより通過特性及び反射特性を算出し、管内の異常を一度の測定で発見するための技術の開発を本研究の目的とした。解析には比較的アルゴリズムが簡単である点、解析モデルの作成が容易である点から Finite-Difference Time-Domain method (FDTD 法:時間領域差分法) を用いた。ただし、FDTD 法は時間領域の解析であるので、通過特性、反射特性を算出するために観測波形に対し、フーリエ変換を行う必要がある。FDTD 法ではモード毎の伝播式を波源として用いることにより単一のモードのみを解析することが可能である。実際の測定では高周波になるほど高次モードが発生してしまうため、シミュレーションでは高次モードが発生しない周波数帯で解析を行った。本論文では導波管上面と側面に様々な亀裂を持った解析モデルを用意し、それぞれに対して  $TE_{10}$  モードでの解析を行い通過特性を算出した。そして異常が無い場合の通過特性、反射特性や各解析モデルでの通過特性、反射特性との比較を行い、伝播モードと亀裂箇所、亀裂の方向との関連性を検証した。また、亀裂の大きさと影響の出る周波数との対応関係について検証を行った。

## 2. FDTD 法

### 2.1. FDTD 法とは

FDTD 法とは、マクスウェルの方程式を時間・空間領域において差分化を行い、時間領域で解析する方法である。基本的にメッシュ分割できる解析対象なら基本的にどんなものでも解析することができ、アンテナ解析などに向いていると言われている。

### 2.2. 差分法

本来連続的に切れ目なく続いている事象を解析するとき、その事象から適当な離散値をサンプリングして済ますことがある。現実と実際上の取扱いの間には、「不連続」、  
「連続」の関係が頻繁であり、実用上の問題解決には、その原則さえわかまれば十分な成果を期待できる。加減乗除しかできないコンピュータを用いて微分や積分を遂行するためにはこの「不連続」「連続」間の関係を巧みに利用する必要がある。演算の対応は数値解析では以下のようになる。

連続モデル		不連続モデル
微分	↔	差分
積分	↔	和分

### 2.3. 差分の基礎

ある連続関数  $y=f(x)$  ;  $a \leq x \leq b$  において区間  $[a, b]$  を  $n$  等分し、その間隔を

$$h = \frac{a-b}{n} \text{ とする。}$$

このとき図 1 を参照して、第一差分、第二差分は次のように表すことができる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta y_0 = y_1 - y_0 \\ \Delta y_1 = y_2 - y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1} \end{array} \right\} \text{ 第一差分} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Delta^2 y_0 = \Delta y_1 - \Delta y_0 \\ \Delta^2 y_1 = \Delta y_2 - \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta^2 y_{n-1} = \Delta y_n - \Delta y_{n-1} \end{array} \right\} \text{ 第二差分}$$

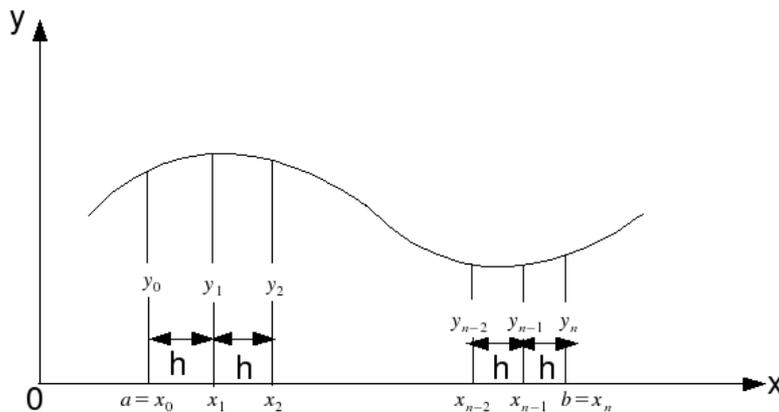


図 2.1: 関数  $y=f(x)$  の離散化

以上の関係から、さらに一般化して第  $n$  差分は次のようになる。

$$\Delta^n y_j = \Delta^{n-1} y_{j+1} - \Delta^{n-1} y_j \tag{2.1}$$

## 2.4. 差分の種類

ここではその種類と差分の方法について説明する。

- (a) 前進差分  $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$  :  $\Delta^n y_j = \Delta^{n-1} y_{j+1} - \Delta^{n-1} y_j$   
 (b) 後進差分  $\Delta y_j = y_{j+1} - y_j$  :  $\nabla^n y_{j+1} = \nabla^{n-1} y_j - \nabla^{n-1} y_{j-1}$   
 (c) 中央差分  $\delta y_{j+\frac{1}{2}} = y_{j+1} - y_j$  :  $\delta^n y_{j+\frac{1}{2}} = \delta^{n-1} y_{j+1} - \delta^{n-1} y_j$

関数  $f(x)$  が閉区間  $[a, b]$  で  $n-1$  回微分可能で、开区間  $(a, b)$  で  $n$  回微分可能なとき、次の Taylor 展開が成立する

$$f(b) = f(a) + \frac{f^{(1)}(a)}{1!}(b-a) + \frac{f^{(2)}(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \dots \quad (2.2)$$

(a) 前進差分

(2.2)式において  $b = x + \Delta x$  ,  $a = x$  とすると次式のようにになる。

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{f^{(1)}(x)}{1!}(\Delta x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(\Delta x)^3 + \dots \quad (2.3)$$

上式を変形すると

$$f^{(1)}(x) = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(\Delta x)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(\Delta x)^3 + \dots \right\} \quad (2.4)$$

(2.4)式の第二項は誤差とみなすことができる。したがって(2.5)式は以下のように近似できる。

$$f^{(1)}(x) \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (2.5)$$

(b) 後進差分

(2.2)式において  $b = x - \Delta x$  ,  $a = x$  とすると次式のようにになる。

$$f(x - \Delta x) = f(x) + \frac{f^{(1)}(x)}{1!}(-\Delta x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(-\Delta x)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(-\Delta x)^3 + \dots \quad (2.6)$$

上式を変形すると

$$f^{(1)}(x) = \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(-\Delta x)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(-\Delta x)^3 + \dots \right\} \quad (2.7)$$

(2.7)式の第二項は誤差とみなすことができる。したがって(2.7)式は以下のように近似できる。

$$f^{(1)}(x) \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.8)$$

(c) 中央差分

(2.2)式において  $b = x + \frac{1}{2}\Delta x$  ,  $a = x$  とすると次式のようにになる。

$$f\left(x + \frac{1}{2}\Delta x\right) = f(x) + \frac{f^{(1)}(x)}{1!}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}\left(\frac{1}{2}\Delta x\right)^3 + \dots \quad (2.9)$$

さらに(2.2)式において  $b = x - \frac{1}{2}\Delta x$  ,  $a = x$  とすると次式のようにになる。

$$f(x - \frac{1}{2}\Delta x) = f(x) + \frac{f^{(1)}(x)}{1!}(-\frac{1}{2}\Delta x) + \frac{f^{(2)}(x)}{2!}(-\frac{1}{2}\Delta x)^2 + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(-\frac{1}{2}\Delta x)^3 + \dots \quad (2.10)$$

(2.9)式と(2.10)式の差をとると、

$$f(x + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x - \frac{1}{2}\Delta x) = \frac{f^{(1)}(x)}{1!}(\Delta x) + \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(-\Delta x)^3 + \frac{f^{(5)}(x)}{5!}(-\Delta x)^5 + \dots \quad (2.11)$$

(2.11)式を変形すると

$$f^{(1)} = \frac{f(x + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} - \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(-\Delta x)^3 + \frac{f^{(5)}(x)}{5!}(-\Delta x)^5 + \dots \right\} \quad (2.12)$$

$$f^{(1)} = \frac{f(x + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} + \left\{ \frac{f^{(3)}(x)}{3!}(\Delta x)^2 + \frac{f^{(5)}(x)}{5!}(\Delta x)^4 + \dots \right\} \quad (2.13)$$

(2.13)式の第二項は誤差とみなすことができる。したがって(2.13)式は以下のように近似できる。

$$f^{(1)}(x) \approx \frac{f(x + \frac{1}{2}\Delta x) - f(x - \frac{1}{2}\Delta x)}{\Delta x} \quad (2.14)$$

これらの式から前進差分、後進差分の誤差は  $\Delta x$  のオーダーで与えられ、中央差分の誤差は  $(\Delta x)^2$  のオーダーで与えられることが分かる。 $\Delta x \ll 1$  であるため誤差は

$(\Delta x)^2$  のオーダーで与えられる中央差分がもっとも誤差が小さい。

以降の計算では誤差の最も小さい中央差分を用いることとする。

## 2.5. マクスウェルの方程式

電界を  $E[V/m]$ 、磁界を  $H[A/m]$ 、電束密度を  $D[C/m^2]$ 、磁束密度を  $B[T]$  とし、さらに電荷密度を  $\rho[C/m^3]$ 、電流密度を  $J[C/m^2]$  とすると微分系のマクスウェルの方程式は次式のようになる。

$$\nabla \times E(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial B(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.15)$$

$$\nabla \times H(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial D(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + J(\mathbf{r}, t) \quad (2.16)$$

$$\nabla \times D(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.17)$$

$$\nabla \times B(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.18)$$

FDTD 法においては

(2.15)式および(2.16)式のみを基本方程式として使用する。

媒質を均等、非分散性として(3.1)式と(3.2)式に構成方程式  $B(\mathbf{r}, t) = \mu H(\mathbf{r}, t)$ 、

$D(\mathbf{r}, t) = \varepsilon E(\mathbf{r}, t)$ 、 $J(\mathbf{r}, t) = \sigma E(\mathbf{r}, t)$  を適用すると次式のようになる。

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}(\nabla \times H - \sigma E) \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times E \quad (2.20)$$

ただし、 $\mu$  : 透磁率  $\varepsilon$  : 誘電率  $\sigma$  : 導電率

(2.19)式と(2.20)式を直角座標系で各成分ごとに展開すると次のようになる。

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \quad (2.21)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) \quad (2.26)$$

## 2.6. 一次元問題

### 2.6.1. 電磁界の更新式

x軸方向の一次元問題かつ無損失の場合について考える。電界がz成分のみ、磁界がy成分のみに伝搬する場合を考えると、以下のような条件が与えられる。

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (2.27)$$

$$\sigma = 0 \quad (2.28)$$

$$E_x = E_y = H_x = H_z = 0 \quad (2.29)$$

これらの条件を(2.21)式～(2.26)式に適用すると以下の式が得られる。

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (2.31)$$

ここで、(2.30)式については  $(x, t) = (i+1/2, n)$  で(2.31)式については  $(x, t) = (i, n+1/2)$  で中央差分を用いて展開し、整理すると以下の式が得られる。

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} [E_z^n(i+1) - E_z^n(i)] \quad (2.32)$$

$$E_z^{n+1}(i) = E_z^n(i) + \frac{\Delta t}{\varepsilon \Delta x} \left[ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}) \right] \quad (2.33)$$

(2.32)式、及び(2.33)式より電界  $E_z^n$  と磁界  $H_y^{n+\frac{1}{2}}$  により電界  $E_z^{n+1}$  が、電界  $E_z^n$  と磁界  $H_y^{n-\frac{1}{2}}$  に

より磁界  $H_y^{n+\frac{1}{2}}$  が求められることが分かる。

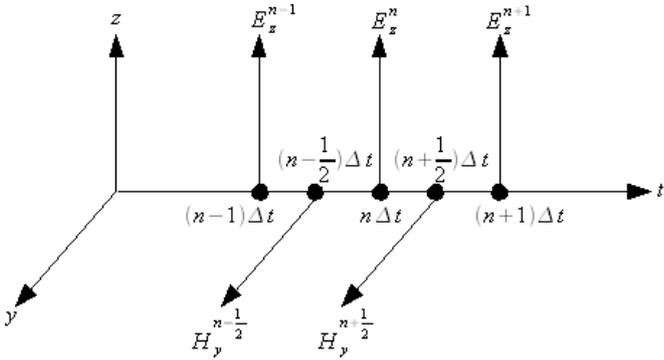


図 2.2: 電磁界の時間配置

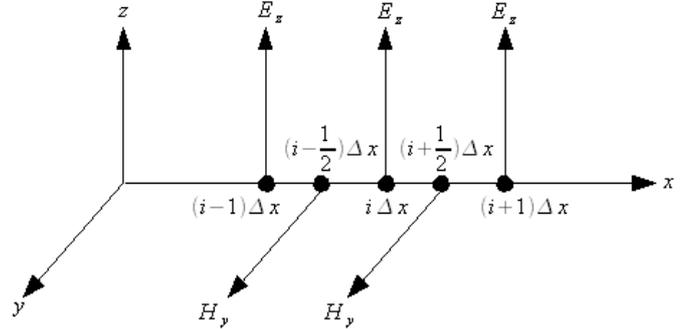


図 2.3: 電磁界の空間配置

## 2.6.2. 吸収境界条件

一般的な吸収境界条件としては PEC (Perfect Electric Conductor) と PMC (Perfect Magnetic Conductor) 条件がある。境界面が完全導体の場合、境界に平行な電界成分を 0 とすることにより達成できる。すなわち、各セルにおいて金属境界面の電界の接線成分を 0 とおけばよい。しかし、一般の解析においては自由空間や一部に誘電体が挿入された場合について取り扱うことが覆い。そこで、ここでは G.Mur の提案した吸収境界条件について説明する。(2.30) 式、(2.31) 式より一次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} \quad (2.34)$$

が得られる。

(2.34) 式の式の解は以下の 2 つの偏微分方程式によって得られる。

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0 \quad (2.35)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) E_z = 0 \quad (2.36)$$

上式のうち (2.35) 式が後進波を (2.36) 式が前進波を表している。

解析端において反射が起こらないようにするには前進波、後進波がそれぞれ以下の条件を満たせばよい。

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad (2.38)$$

(2.37) 式を差分点  $(x, t) = (i + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$  において差分化を行うと

$$\frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(i+1) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(i)}{\Delta x} = \frac{1}{c} \frac{E_z^{n+1}(i+\frac{1}{2}) - E_z^n(i+\frac{1}{2})}{\Delta t} \quad (2.39)$$

$E_z^{n+\frac{1}{2}}$  と  $E_z(i+\frac{1}{2})$  は割り当てられていないため、それぞれの前後の値の平均をとると

$$E_z^{n+\frac{1}{2}} = \frac{E_z^{n+1}(i) - E_z^n(i)}{2} \quad (2.40)$$

$$E_z(i + \frac{1}{2}) = \frac{E_z^n(i+1) - E_z^n(i)}{2} \quad (2.41)$$

となり、(2.40)式、(2.41)式を用いて(2.39)式を整理すると

$$E_z^{n+1}(i) = E_z^n(i+1) + \frac{c \Delta t - \Delta x}{c \Delta t + \Delta x} [E_z^{n+1}(i+1) - E_z^n(i)] \quad (2.42)$$

(2.38)式についても同様の整理を行うと

$$E_z^{n+1}(i) = E_z^n(i-1) + \frac{c \Delta t - \Delta x}{c \Delta t + \Delta x} [E_z^{n+1}(i-1) - E_z^n(i)] \quad (2.43)$$

(2.42)式、(2.43)式はそれぞれ後進波と前進波を表している。

したがって(2.42)式は  $i=0$  で適用し、(2.43)式は  $i=i_{max}$  で適用すると次式を得る。

$$E_z^{n+1}(0) = E_z^n(1) + \frac{c \Delta t - \Delta x}{c \Delta t + \Delta x} [E_z^{n+1}(1) - E_z^n(0)] \quad (2.44)$$

$$E_z^{n+1}(i_{max}) = E_z^n(i_{max}-1) + \frac{c \Delta t - \Delta x}{c \Delta t + \Delta x} [E_z^{n+1}(i_{max}-1) - E_z^n(i_{max})] \quad (2.45)$$

### 2.6.3. 解の安定性

(2.34)式の一次元の波動方程式を時間ステップ  $\Delta t$  を用いて  $z$  に関して差分近似を行うと次式が得られる。

$$\frac{E_z^{n+1}(i) - 2E_z^n(i) + E_z^{n-1}(i)}{(c \Delta t)^2} = \frac{E_z^n(i+1) - 2E_z^n(i) + E_z^n(i-1)}{\Delta x^2} \quad (2.46)$$

ここで解を以下のように仮定する、

$$E_z^n(i) = \xi^n e^{-jki} \Big|_{x=i\Delta x} \quad (2.47)$$

ここで、 $k=2\pi/\lambda$  は波数、 $\xi$  は振幅、 $\Delta x$  はセル寸法を表す。この場合、この解は振幅  $\xi$  の値によって発散、収束または振動することになる。

この振る舞いを考えるため、まず(2.46)式を(2.47)式に代入する。

$$e^{-jki\Delta x} \left( \frac{\xi^2 - 2\xi + 1}{(c \Delta t)^2} \right) = e^{-jki\Delta x} \left( \frac{\xi e^{-jk\Delta x} - 2\xi + \xi e^{jk\Delta x}}{(\Delta x)^2} \right) \quad (2.48)$$

上式を変形すると

$$\frac{\xi^2 - 2\xi + 1}{(c \Delta t)^2} = \frac{\xi}{(\Delta x)^2} [2\cos(k\Delta x) - 2] = \frac{\xi}{(c \Delta x)^2} \left[ 2 \left\{ 1 - 2\sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \right\} - 2 \right] \quad (2.49)$$

となり、 $\xi$  について整理すると

$$\xi^2 - 2\xi \left[ 1 - 2 \left( \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \frac{k\Delta x}{2} \right] + 1 = 0 \quad (2.50)$$

が得られる。つまり  $A = 1 - 2 \left( \frac{c \Delta t}{\Delta x} \right)^2 \sin^2 \frac{k\Delta x}{2}$  とすると、 $\xi$  についての二次方程式が次式のように得られたことになる。

$$\xi^2 - 2A\xi + 1 = 0 \quad (2.51)$$

(2.51) 式を振幅  $\xi$  について解くと

$$\xi = A \pm (A^2 - 1)^{\frac{1}{2}} \quad (2.52)$$

となり、もし  $|\xi| > 1$  ならば解は発散し、不安定となる。 $|\xi| > 1$  となるのは  $|A| > 1$  の場合だけなので、以下のような条件のとき解は不安定になる。

$$c \Delta t > \Delta x \rightarrow \text{不安定} \quad (2.53)$$

一方  $|A| \leq 1$  では収束する安定な解となり、その条件は  $c \Delta t \leq \Delta x$  であることが分かる。さらに、

$$|\xi| = \left| A + j(1 - A^2)^{\frac{1}{2}} \right| \quad (2.54)$$

は振動する解となり、一次元における安定条件は

$$c \Delta t \leq \Delta x \rightarrow \text{安定} \quad (2.55)$$

となることが分かる。

## 2.6.4. 規格化

これまで導出してきた各パラメータに対して単位つきに値を入れることによって電磁界の解析が可能となるが、コンピュータ上で各々に物理量を把握するのは困難なため規格化を行い、無次元化した比で表す。

$$\text{x軸方向の1波長あたりの分割数 } D_x \equiv \frac{\lambda_0}{\Delta x} \quad (2.56)$$

$$\text{1周期あたりの分割数 } D_t \equiv \frac{T}{\Delta t} \quad (2.57)$$

ただし、 $\lambda_0$  : 入射波の真空中での波長  $T$  : 入射波の周期  
(2.56) 式と (2.57) 式より

$$\Delta x = \frac{\lambda_0}{D_x} = \frac{cT}{D_x} = \frac{2\pi c}{\omega_0 D_x} \quad (2.58)$$

$$\Delta t = \frac{T}{D_t} = 2 \frac{\pi}{\omega_0 D_t} \quad (2.59)$$

が得られ、この2式から

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{c} \frac{D_x}{D_t} \quad (2.60)$$

さらに光速  $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  を代入すると

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \frac{D_x}{D_t} \quad (2.61)$$

$$\frac{\Delta t}{\epsilon \Delta x} = \frac{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{\epsilon_r \epsilon_0} \frac{D_x}{D_t} = \frac{1}{\epsilon_r} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \frac{D_x}{D_t} = \frac{1}{\epsilon_r} Z_0 \frac{D_x}{D_t} \quad (2.62)$$

が得られる。

ただし、 $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$  :空間のインピーダンス

また、

$$c \Delta t - \Delta x = \frac{2\pi c}{\omega_0} \left( \frac{1}{D_t} - \frac{1}{D_x} \right) \quad (2.63)$$

$$c \Delta t + \Delta x = \frac{2\pi c}{\omega_0} \left( \frac{1}{D_t} + \frac{1}{D_x} \right) \quad (2.64)$$

(2.63)式と(2.64)式から

$$\frac{c \Delta t - \Delta x}{c \Delta t + \Delta x} = \frac{D_x - D_t}{D_x + D_t} \quad (2.65)$$

が得られる。

得られた式から電磁界の式と吸収境界条件の式を書き換えると

電磁界の式

$$E_z^{n+1}(i) = E_z^n(i) + Z_0 \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{D_x}{D_t} \left[ H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}\right) - H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i-\frac{1}{2}\right) \right] \quad (2.66)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}\right) = H_y^{n-\frac{1}{2}}\left(i+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{Z_0} \frac{1}{\mu_0} \frac{D_x}{D_t} [E_z^n(i+1) - E_z^n(i)] \quad (2.67)$$

吸収境界条件

$$E_z^{n+1}(0) = E_z^n(1) + \frac{D_x - D_t}{D_x + D_t} [E_z^{n+1}(1) - E_z^n(0)] \quad (2.68)$$

$$E_z^{n+1}(i_{max}) = E_z^n(i_{max} - 1) + \frac{D_x - D_t}{D_x + D_t} [E_z^{n+1}(i_{max} - 1) - E_z^n(i_{max})] \quad (2.69)$$

## 2.7. 二次元問題

### 2.7.1. 電磁界の更新式

二次元問題においては無損失のTE波を扱う。

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0 \quad (2.70)$$

$$E_x = E_y = H_z = 0 \quad (2.71)$$

$$\sigma = 0 \quad (2.72)$$

(2.70)～(2.72)式を(2.21)～(2.26)式に適用すると次式が得られる。

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \quad (2.74)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (2.75)$$

ここで、差分点  $(x, y, t) = \left( i, j, n + \frac{1}{2} \right)$  で(2.73)式を中央差分を用いて展開する。

$$\frac{E_z^{n+1}(i, j) - E_z^n(i, j)}{\Delta t} = \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j)}{\Delta x} - \frac{H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \right] \quad (2.76)$$

上式を整理すると

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left[ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j) \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \cdot \frac{1}{\varepsilon} \left[ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}) \right] \quad (2.77)$$

同様に(2.74),(2.75)式についても差分点  $(i, j + \frac{1}{2}, n)$  ,  $(i + \frac{1}{2}, j, n)$  で差分化すると、

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) = H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - \frac{\Delta t}{\mu \Delta y} \{ E_z^n(i, j + 1) - E_z^n(i, j) \} \quad (2.78)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) = H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) + \frac{\Delta t}{\mu \Delta x} \{ E_z^n(i + 1, j) - E_z^n(i, j) \} \quad (2.79)$$

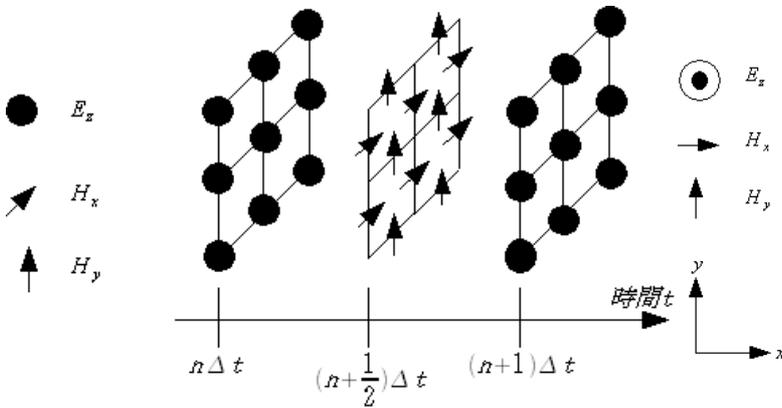


図 2.4: 電磁界の時間配置

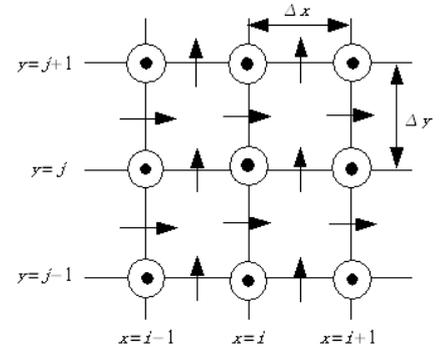


図 2.5: 電磁界の空間配置

(2.77)式～(2.79)式に規格化を行うと次式が得られる。

$$E_z^{n+1}(i, j) = E_z^n(i, j) + \frac{1}{\varepsilon_r} Z_0 \frac{D_x}{D_t} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j) \right\} - \frac{1}{\varepsilon_r} Z_0 \frac{D_y}{D_t} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}) \right\} \quad (2.80)$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2})=H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2})-\frac{1}{\mu_r} \frac{1}{Z_0} \frac{D_y}{D_t}\left\{E_z^n(i, j+1)-E_z^n(i, j)\right\} \quad (2.81)$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j)=H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j)+\frac{1}{\mu_r} \frac{1}{Z_0} \frac{D_x}{D_t}\left\{E_z^n(i+1, j)-E_z^n(i, j)\right\} \quad (2.82)$$

ただし、 $\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$  : 比誘電率     $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$  : 比透磁率     $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$  : 空間のインピーダンス

## 2.7.2. 吸収境界条件

ここでは一次元問題と同じく吸収境界条件について考える。

### 面の吸収境界条件

(2.73)～(2.75)式を整理することにより  $H_x$ 、 $H_y$  を消去し、以下の波動方程式を得る。

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = 0 \quad (2.83)$$

上式を整理すると

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) E_z = 0 \quad (2.84)$$

(2.84)式を  $\frac{\partial}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial}{\partial y}$  について解くと

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x} - \sqrt{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}} \right) E_z \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial y} + \sqrt{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right) \left( \frac{\partial}{\partial y} - \sqrt{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}} \right) E_z \end{aligned} \quad (2.85)$$

(2.85)式の右上段はx方向の前進波、後進波を表しており、下段はy方向の前進波後進波を表している。

ここで、微分演算子を  $D_x = \frac{\partial}{\partial x}$ 、 $D_y = \frac{\partial}{\partial y}$ 、 $D_t = \frac{\partial}{\partial t}$  とすると、(2.85)式は以下のように書き換えることができる。

$$\left( D_x - \sqrt{\frac{1}{c^2} D_t^2 - D_y^2} \right) E_z = 0 \quad \cdots x \text{ 方向の後進波} \quad (2.86)$$

$$\left( D_x + \sqrt{\frac{1}{c^2} D_t^2 - D_y^2} \right) E_z = 0 \quad \cdots x \text{ 方向の前進波} \quad (2.87)$$

$$\left( D_y - \sqrt{\frac{1}{c^2} D_t^2 - D_x^2} \right) E_z = 0 \quad \cdots y \text{ 方向の後進波} \quad (2.88)$$

$$\left( D_y + \sqrt{\frac{1}{c^2} D_t^2 - D_x^2} \right) E_z = 0 \quad \cdots y \text{ 方向の前進波} \quad (2.89)$$

解析領域を  $0 \leq x \leq i_{max}$ 、 $0 \leq y \leq j_{max}$  としたとき(2.86)式は  $x=0$  面での吸収境界条件、(2.87)式は  $x=i_{max}$  面での吸収境界条件、(2.88)式は  $y=0$  面の吸収境界条件、(2.89)式は  $y=j_{max}$  の吸収境界条件にそれぞれ対応している。

ここで、(2.86)式～(2.89)式を以下のように変形する。

$$\left(D_x - \frac{D_t}{c} \sqrt{1-S_y^2}\right) E_z = 0 \quad (2.90)$$

$$\left(D_x + \frac{D_t}{c} \sqrt{1-S_y^2}\right) E_z = 0 \quad (2.91)$$

$$\left(D_y - \frac{D_t}{c} \sqrt{1-S_x^2}\right) E_z = 0 \quad (2.92)$$

$$\left(D_y + \frac{D_t}{c} \sqrt{1-S_x^2}\right) E_z = 0 \quad (2.93)$$

ただし、 $S_y = c \frac{D_y}{D_t}$ 、 $S_x = c \frac{D_x}{D_t}$

ここで、(2.90)式について、つまり  $x=0$  面での吸収境界条件について考えてみる。  
まず、(2.90)式を差分化するために、テーラー展開を用いて近似する。

$$\sqrt{1-S_y^2} = 1 - \frac{1}{2} S_y^2 - \frac{1}{8} S_y^4 - \dots \quad (2.94)$$

(2.94)式の第二項までを用いて(2.90)式を近似すると次式が得られる。

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = 0 \quad (2.95)$$

同様に、(2.91)式～(2.93)式についても同様に近似すると

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = 0 \quad (2.96)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} + \frac{c}{2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0 \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial y \partial t} + \frac{1}{c} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} - \frac{c}{2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} = 0 \quad (2.98)$$

(2.95)式を中央差分することで、 $x=0$ 面の吸収境界条件の差分式を導出することができる。

差分点  $(x, y, t) = (\frac{1}{2}, j, n)$  で展開すると

### 左辺第一項

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_z^n(\frac{1}{2}, j)}{\partial x \partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, j) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, j)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(1, j) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(0, j)}{\Delta x} - \frac{E_z^{n-\frac{1}{2}}(1, j) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(0, j)}{\Delta x} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta x \Delta t} \left[ \left\{ \frac{E_z^n(1, j) + E_z^{n+1}(1, j)}{2} - \frac{E_z^n(0, j) + E_z^{n+1}(0, j)}{2} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \frac{E_z^n(1, j) + E_z^{n-1}(1, j)}{2} - \frac{E_z^n(0, j) + E_z^{n-1}(0, j)}{2} \right\} \right] \\
&= \frac{E_z^{n+1}(1, j) - E_z^{n+1}(0, j) - E_z^{n-1}(1, j) + E_z^{n-1}(0, j)}{2 \Delta x \Delta t}
\end{aligned} \tag{2.99}$$

ただし、電界の時刻  $n - \frac{1}{2}$  ,  $n + \frac{1}{2}$  では存在しないので、前後の値の平均を使用した。

### 左辺第二項

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_z^n(\frac{1}{2}, j)}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, j) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, j)}{\Delta t} \\
&= \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{E_z^{n+1}(\frac{1}{2}, j) - E_z^n(\frac{1}{2}, j)}{\Delta t} - \frac{E_z^n(\frac{1}{2}, j) - E_z^{n-1}(\frac{1}{2}, j)}{\Delta t} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta t^2} \left[ \left\{ \frac{E_z^{n+1}(0, j) + E_z^{n+1}(1, j)}{2} - \frac{E_z^n(0, j) + E_z^n(1, j)}{2} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \frac{E_z^n(0, j) + E_z^n(1, j)}{2} - \frac{E_z^{n-1}(0, j) + E_z^{n-1}(1, j)}{2} \right\} \right] \\
&= \frac{E_z^{n+1}(0, j) - 2E_z^n(0, j) + E_z^{n-1}(0, j) + E_z^{n+1}(1, j) - 2E_z^n(1, j) + E_z^{n-1}(1, j)}{2 \Delta t^2}
\end{aligned} \tag{2.100}$$

### 左辺第三項

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 E_z^n(\frac{1}{2}, j)}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{E_z^n(\frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}) - E_z^n(\frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})}{\Delta y} \\
&= \frac{1}{\Delta y} \left[ \frac{E_z^n(\frac{1}{2}, j+1) - E_z^n(\frac{1}{2}, j)}{\Delta y} - \frac{E_z^n(\frac{1}{2}, j) - E_z^n(\frac{1}{2}, j-1)}{\Delta y} \right] \\
&= \frac{1}{\Delta y^2} \left[ \left\{ \frac{E_z^n(0, j+1) + E_z^n(1, j+1)}{2} - \frac{E_z^n(0, j) + E_z^n(1, j)}{2} \right\} \right. \\
&\quad \left. - \left\{ \frac{E_z^n(0, j) + E_z^n(1, j)}{2} - \frac{E_z^n(0, j-1) + E_z^n(1, j-1)}{2} \right\} \right] \\
&= \frac{E_z^n(0, j+1) - 2E_z^n(0, j) + E_z^n(0, j-1) + E_z^n(1, j+1) - 2E_z^n(1, j) + E_z^n(1, j-1)}{2 \Delta y^2}
\end{aligned} \tag{2.101}$$

導出した(2.99)式～(2.101)式をまとめると

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2\Delta x \Delta t} \{E_z^{n+1}(1, j) - E_z^{n+1}(0, j) - E_z^{n-1}(1, j) + E_z^{n-1}(0, j)\} \\
& - \frac{1}{c} \frac{1}{2\Delta t^2} \{E_z^{n+1}(0, j) - 2E_z^n(0, j) + E_z^{n-1}(0, j) + E_z^{n+1}(1, j) - 2E_z^n(1, j) + E_z^{n-1}(1, j)\} \\
& + \frac{c}{2} \frac{1}{2\Delta y^2} \{E_z^n(0, j+1) - 2E_z^n(0, j) + E_z^n(0, j-1) + E_z^n(1, j+1) - 2E_z^n(1, j) + E_z^n(1, j-1)\}
\end{aligned} \tag{2.102}$$

上式を規格化するために整理すると

$$\begin{aligned}
0 = & c \frac{\Delta t}{\Delta x} \{E_z^{n+1}(1, j) - E_z^{n+1}(0, j) - E_z^{n-1}(1, j) + E_z^{n-1}(0, j)\} \\
& - \{E_z^{n+1}(0, j) - 2E_z^n(0, j) + E_z^{n-1}(0, j) + E_z^{n+1}(1, j) - 2E_z^n(1, j) + E_z^{n-1}(1, j)\} \\
& + \frac{c^2}{2} \frac{\Delta t^2}{\Delta y^2} \{E_z^n(0, j+1) - 2E_z^n(0, j) + E_z^n(0, j-1) + E_z^n(1, j+1) - 2E_z^n(1, j) + E_z^n(1, j-1)\}
\end{aligned} \tag{2.103}$$

以上の式を以下の3式を用いて規格化を行うと

$$D_x \equiv \frac{\lambda_0}{\Delta x} \quad \cdots x \text{ 方向の1波長あたりの分割数} \tag{2.104}$$

$$D_y \equiv \frac{\lambda_0}{\Delta y} \quad \cdots y \text{ 方向の1波長あたりの分割数} \tag{2.105}$$

$$D_t \equiv \frac{T}{\Delta t} \quad \cdots 1 \text{ 周期あたりの分割数} \tag{2.106}$$

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{D_x}{D_t} \{E_z^{n+1}(1, j) - E_z^{n+1}(0, j) - E_z^{n-1}(1, j) + E_z^{n-1}(0, j)\} \\
& - \{E_z^{n+1}(0, j) - 2E_z^n(0, j) + E_z^{n-1}(0, j) + E_z^{n+1}(1, j) - 2E_z^n(1, j) + E_z^{n-1}(1, j)\} \\
& + \frac{1}{2} \frac{D_y^2}{D_t^2} \{E_z^n(0, j+1) - 2E_z^n(0, j) + E_z^n(0, j-1) + E_z^n(1, j+1) - 2E_z^n(1, j) + E_z^n(1, j-1)\}
\end{aligned} \tag{2.107}$$

(2.104)式を  $E_z^{n+1}(0, j)$  について解くことにより、 $x=0$  面における吸収境界条件を導出することができる。

•  $x=0$  面での吸収境界条件

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(0, j) = & -E_z^{n-1}(1, j) \\
& + \frac{D_x - D_t}{D_x + D_t} \{E_z^{n+1}(1, j) + E_z^{n-1}(0, j)\} \\
& + \frac{2D_t}{D_x + D_t} \{E_z^n(1, j) + E_z^n(0, j)\} \\
& + \frac{D_y^2}{2D_t(D_x + D_y)} \{E_z^n(0, j+1) - 2E_z^n(0, j) + E_z^n(0, j-1) \\
& + E_z^n(1, j+1) - 2E_z^n(1, j) + E_z^n(1, j-1)\}
\end{aligned} \tag{2.108}$$

•  $x=i_{max}$  面での吸収境界条件

(2.97) 式を差分点  $(x, y, t)=(i_{max}-\frac{1}{2}, j, n)$  で展開して  $x=0$  面と同様に整理すると

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i_{max}, j) &= -E_z^{n-1}(i_{max}-1, j) \\
&+ \frac{D_x - D_t}{D_x + D_t} \left\{ E_z^{n+1}(i_{max}-1, j) + E_z^{n-1}(i_{max}, j) \right\} \\
&+ \frac{2D_t}{D_x + D_t} \left\{ E_z^n(i_{max}-1, j) + E_z^n(i_{max}, j) \right\} \\
&+ \frac{D_y^2}{2D_t(D_x + D_t)} \left\{ E_z^n(i_{max}, j+1) - 2E_z^n(i_{max}, j) + E_z^n(i_{max}, j-1) \right. \\
&\left. + E_z^n(i_{max}-1, j+1) - 2E_z^n(i_{max}-1, j) + E_z^n(i_{max}-1, j-1) \right\}
\end{aligned} \tag{2.109}$$

•  $y=0$  面での吸収境界条件

(2.98) 式を差分点  $(x, y, t)=(i, \frac{1}{2}, n)$  で展開し、整理すると

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i, 0) &= -E_z^{n-1}(i, 1) \\
&+ \frac{D_y - D_t}{D_y + D_t} \left\{ E_z^{n+1}(i, 1) + E_z^{n-1}(i, 0) \right\} \\
&+ \frac{2D_t}{D_y + D_t} \left\{ E_z^n(i, 1) + E_z^n(i, 0) \right\} \\
&+ \frac{D_x^2}{2D_t(D_y + D_t)} \left\{ E_z^n(i+1, 0) - 2E_z^n(i, 0) + E_z^n(i-1, 0) \right. \\
&\left. + E_z^n(i+1, 1) - 2E_z^n(i, 1) + E_z^n(i-1, 1) \right\}
\end{aligned} \tag{2.110}$$

•  $y=j_{max}$  面での吸収境界条件

(3.16) 式を差分点  $(x, y, t)=(i, j_{max}-\frac{1}{2}, n)$  で展開し、整理すると

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i, j_{max}) &= -E_z^{n-1}(i, j_{max}-1) \\
&+ \frac{D_y - D_t}{D_y + D_t} \left\{ E_z^{n+1}(i, j_{max}-1) + E_z^{n-1}(i, j_{max}) \right\} \\
&+ \frac{2D_t}{D_y + D_t} \left\{ E_z^n(i, j_{max}-1) + E_z^n(i, j_{max}) \right\} \\
&+ \frac{D_x^2}{2D_t(D_y + D_t)} \left\{ E_z^n(i+1, j_{max}) - 2E_z^n(i, j_{max}) + E_z^n(i-1, j_{max}) \right. \\
&\left. + E_z^n(i+1, j_{max}-1) - 2E_z^n(i, j_{max}-1) + E_z^n(i-1, j_{max}-1) \right\}
\end{aligned} \tag{2.111}$$

**角の吸収境界条件**

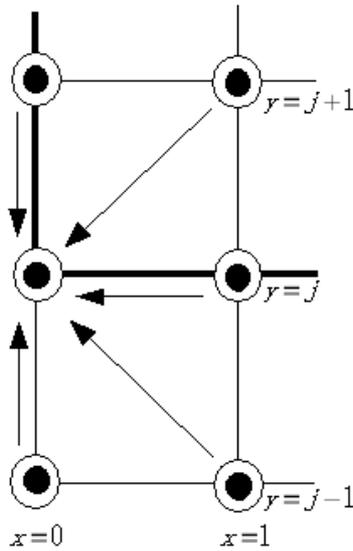


図 2.6: 吸収境界条件

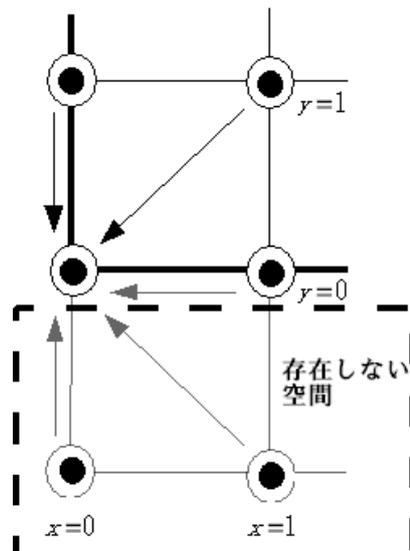


図 2.7: 角の吸収境界条件

図2.7 を見れば明らかであるように、吸収境界の角では解析領域外の電界を使用しなければならないが、解析領域外には電界が存在しないためこの考えでは角の吸収境界を導出できない。そこで、以下のように座標系を変えて導出する。

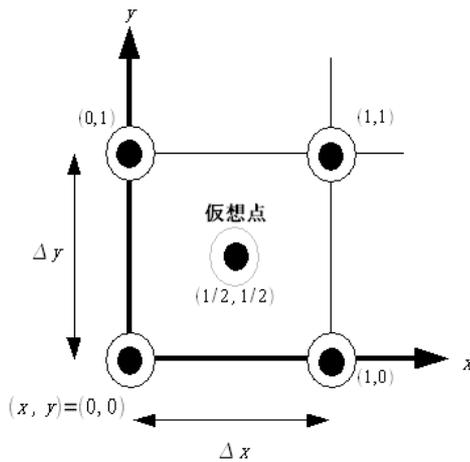


図 2.8: 座標系変換前

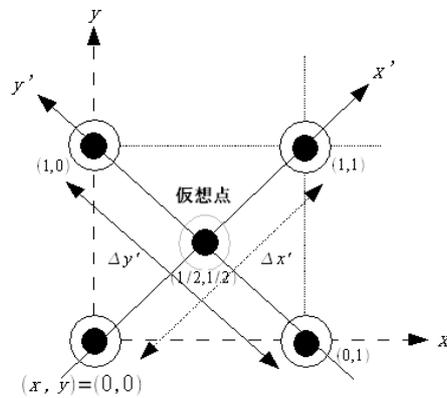


図 2.9: 座標系変換後

図 2.8、図 2.9 中の仮想点について考える。仮想点  $(1/2, 1/2)$  の電界を求めるためには周囲の座標、つまり  $(0,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,0)$ ,  $(1,1)$  の電界が分かればよいので、逆に考えると座標  $(0,0)$  の電界を求めるには、座標  $(1/2, 1/2)$ ,  $(1,0)$ ,  $(0,1)$ ,  $(1,1)$  の電界が分かればよいということが分かる。

ここで、(2.96)式を差分点  $(x, y, t) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n)$  で展開する。

**左边第一项**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E_z^n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\partial x' \partial t} &= \frac{\partial}{\partial x'} \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\Delta t} \\
 &= \left[ \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(1, 1) - E_z^{n+\frac{1}{2}}(0, 0)}{\Delta x'} - \frac{E_z^{n-\frac{1}{2}}(1, 1) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(0, 0)}{\Delta x'} \right] \\
 &= \frac{1}{\Delta x' \Delta t} \left[ \left\{ \frac{E_z^n(1, 1) + E_z^{n+1}(1, 1)}{2} - \frac{E_z^n(0, 0) + E_z^{n+1}(0, 0)}{2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \frac{E_z^n(1, 1) + E_z^{n-1}(1, 1)}{2} - \frac{E_z^n(0, 0) + E_z^{n-1}(0, 0)}{2} \right\} \right] \\
 &= \frac{E_z^{n+1}(1, 1) - E_z^{n+1}(0, 0) - E_z^{n-1}(1, 1) + E_z^{n-1}(0, 0)}{2 \Delta x' \Delta t}
 \end{aligned} \tag{2.112}$$

**左边第二项**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E_z^n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\Delta t} \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{E_z^{n+1}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - E_z^n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\Delta t} - \frac{E_z^n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - E_z^{n-1}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\Delta t} \right] \\
 &= \frac{1}{\Delta x' \Delta t} \left[ \left\{ \frac{E_z^{n+1}(0, 0) + E_z^{n+1}(1, 1)}{2} - \frac{E_z^n(0, 0) + E_z^n(1, 1)}{2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \frac{E_z^n(0, 0) + E_z^n(1, 1)}{2} - \frac{E_z^{n-1}(0, 0) + E_z^{n-1}(1, 1)}{2} \right\} \right] \\
 &= \frac{E_z^{n+1}(0, 0) - 2E_z^n(0, 0) + E_z^{n-1}(0, 0) + E_z^{n+1}(1, 1) - 2E_z^n(1, 1) + E_z^{n-1}(1, 1)}{2 \Delta t^2}
 \end{aligned} \tag{2.113}$$

**左边第二项**

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 E_z^n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{E_z^{n+\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - E_z^{n-\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\Delta t} \\
 &= \frac{1}{\Delta t} \left[ \frac{E_z^{n+1}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - E_z^n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\Delta t} - \frac{E_z^n(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) - E_z^{n-1}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\Delta t} \right] \\
 &= \frac{1}{\Delta x' \Delta t} \left[ \left\{ \frac{E_z^{n+1}(0, 0) + E_z^{n+1}(1, 1)}{2} - \frac{E_z^n(0, 0) + E_z^n(1, 1)}{2} \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ \frac{E_z^n(0, 0) + E_z^n(1, 1)}{2} - \frac{E_z^{n-1}(0, 0) + E_z^{n-1}(1, 1)}{2} \right\} \right] \\
 &= \frac{E_z^{n+1}(0, 0) - 2E_z^n(0, 0) + E_z^{n-1}(0, 0) + E_z^{n+1}(1, 1) - 2E_z^n(1, 1) + E_z^{n-1}(1, 1)}{2 \Delta t^2}
 \end{aligned} \tag{2.114}$$

左辺第三項においては、 $y'$  方向の第2差分を求める必要があるが、第2差分を求めるためには解析領域外の電界が必要になってしまうため差分範囲を  $\Delta y'/2$  として計算を行った。また仮想点  $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  には実際には電界は存在しないため、前後の値の平均を使用した。

(2.112)式～(2.114)式までをまとめると

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{1}{2 \Delta x' \Delta t} \left\{ E_z^{n+1}(1, 1) - E_z^{n+1}(0, 0) - E_z^{n-1}(1, 1) + E_z^{n-1}(0, 0) \right\} \\
& - \frac{1}{c} \frac{1}{2 \Delta t^2} \left\{ E_z^{n+1}(0, 0) - 2 E_z^n(0, 0) + E_z^{n-1}(0, 0) + E_z^{n+1}(1, 1) - 2 E_z^n(1, 1) + E_z^{n-1}(1, 1) \right\} \\
& + \frac{c}{2} \frac{4}{\Delta y'} \left\{ E_z^n(0, 1) - E_z^n(0, 0) - E_z^n(1, 1) + E_z^n(1, 0) \right\}
\end{aligned} \quad (2.115)$$

導出した(2.115)式を整理すると

$$\begin{aligned}
0 = & c \frac{\Delta t}{\Delta x'} \left\{ E_z^{n+1}(1, 1) - E_z^{n+1}(0, 0) - E_z^{n-1}(1, 1) + E_z^{n-1}(0, 0) \right\} \\
& - \left\{ E_z^{n+1}(0, 0) - 2 E_z^n(0, 0) + E_z^{n-1}(0, 0) + E_z^{n+1}(1, 1) - 2 E_z^n(1, 1) + E_z^{n-1}(1, 1) \right\} \\
& + 4 c^2 \frac{\Delta t^2}{\Delta y'} \left\{ E_z^n(0, 1) - E_z^n(0, 0) - E_z^n(1, 1) + E_z^n(1, 0) \right\}
\end{aligned} \quad (2.116)$$

ここで、図 2.9 より以下の関係がわかる。

$$\Delta y' = \Delta x' = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} \quad (2.117)$$

また、(2.104)式、(2.105)式より

$$\Delta y' = \Delta x' = \sqrt{\Delta y^2 + \Delta x^2} = \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{D_x}\right)^2 + \left(\frac{\lambda}{D_y}\right)^2} = \lambda_0 \frac{\sqrt{D_x^2 + D_y^2}}{D_x D_y} \quad (2.118)$$

(2.118)式を(2.116)式に適用すると

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{D_x D_y}{D_t \sqrt{D_x^2 + D_y^2}} \left\{ E_z^{n+1}(1, 1) - E_z^{n+1}(0, 0) - E_z^{n-1}(1, 1) + E_z^{n-1}(0, 0) \right\} \\
& - \left\{ E_z^{n+1}(0, 0) - 2 E_z^n(0, 0) + E_z^{n-1}(0, 0) + E_z^{n+1}(1, 1) - 2 E_z^n(1, 1) + E_z^{n-1}(1, 1) \right\} \\
& + 4 \frac{D_x^2 D_y^2}{D_t^2 (D_x^2 + D_y^2)} \left\{ E_z^n(0, 1) - E_z^n(0, 0) - E_z^n(1, 1) + E_z^n(1, 0) \right\}
\end{aligned} \quad (2.119)$$

導出した(2.119)式を  $E_z^{n+1}(0, 0)$  について解くことにより  $(x, y)=(0, 0)$  での吸収境界条件を求めることができる。

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(0, 0) = & - E_z^{n-1}(1, 1) \\
& + D_L \left\{ E_z^{n+1}(1, 1) + E_z^{n-1}(0, 0) \right\} \\
& + D_M \left\{ E_z^n(1, 1) + E_z^n(0, 0) \right\} \\
& + D_N \left\{ E_z^n(0, 1) - E_z^n(0, 0) - E_z^n(1, 1) + E_z^n(1, 0) \right\}
\end{aligned} \quad (2.120)$$

ただし、

$$\begin{aligned}
D_L &= \frac{D_x D_y - D_t \sqrt{D_x^2 + D_y^2}}{D_x D_y + D_t \sqrt{D_x^2 + D_y^2}} \\
D_M &= \frac{2D_t \sqrt{D_x^2 + D_y^2}}{D_x D_y + D_t \sqrt{D_x^2 + D_y^2}} \\
D_N &= \frac{4D_x^2 D_y^2}{D_x D_y D_t \sqrt{D_x^2 + D_y^2} + D_t^2 (D_x^2 + D_y^2)}
\end{aligned} \tag{2.121}$$

同様に、残りの吸収境界条件も求めていく。

•  $(x, y) = (i_{max}, 0)$  での吸収境界条件

(2.96) 式を差分点  $(x, y, t) = (i_{max} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, n)$  で展開し、 $E_z^{n+1}(i_{max}, 0)$  について解く。

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i_{max}, 0) &= -E_z^{n-1}(i_{max} - 1, 1) \\
&\quad + D_L \{ E_z^{n+1}(i_{max} - 1, 1) + E_z(i_{max}, 0) \} \\
&\quad + D_M \{ E_z^n(i_{max} - 1, 1) + E_z^n(i_{max}, 0) \} \\
&\quad + D_N \{ E_z^n(i_{max}, 1) - E_z^n(i_{max} - 1, 1) - E_z^n(i_{max}, 0) + E_z^n(i_{max} - 1, 0) \}
\end{aligned} \tag{2.122}$$

•  $(x, y) = (0, j_{max})$  での吸収境界条件

(2.97) 式を差分点  $(x, y, t) = (\frac{1}{2}, j_{max} - \frac{1}{2}, n)$  で展開し、 $E_z^{n+1}(0, j_{max})$  について解く。

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(0, j_{max}) &= -E_z^{n-1}(1, j_{max} - 1) \\
&\quad + D_L \{ E_z^{n+1}(1, j_{max} - 1) + E_z^{n-1}(0, j_{max}) \} \\
&\quad + D_M \{ E_z^n(1, j_{max} - 1) + E_z^n(0, j_{max}) \} \\
&\quad + D_N \{ E_z^n(0, j_{max} - 1) - E_z^n(1, j_{max} - 1) - E_z^n(0, j_{max}) + E_z^n(1, j_{max}) \}
\end{aligned} \tag{2.123}$$

•  $(x, y) = (i_{max}, j_{max})$  での吸収境界条件

(2.98) 式を差分点  $(x, y, t) = (i_{max} - \frac{1}{2}, j_{max} - \frac{1}{2}, n)$  で展開し、 $E_z^{n+1}(i_{max}, j_{max})$  について解く。

$$\begin{aligned}
E_z^{n+1}(i_{max}, j_{max}) &= -E_z^{n-1}(i_{max} - 1, j_{max} - 1) \\
&\quad + D_L \{ E_z^{n+1}(i_{max} - 1, j_{max} - 1) + E_z^{n-1}(i_{max}, j_{max}) \} \\
&\quad + D_M \{ E_z^n(i_{max} - 1, j_{max} - 1) + E_z^n(i_{max}, j_{max}) \} \\
&\quad + D_N \{ E_z^n(i_{max}, j_{max} - 1) - E_z^n(i_{max} - 1, j_{max} - 1) - E_z^n(i_{max}, j_{max}) + E_z^n(i_{max} - 1, j_{max}) \}
\end{aligned} \tag{2.124}$$

## 2.8. 三次元問題

### 2.8.1. 電磁界の更新式

Maxwell の方程式を無損失の場合について考えると以下の方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \quad (2.125)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \quad (2.126)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \quad (2.127)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \quad (2.128)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \quad (2.129)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \quad (2.130)$$

以上の式を差分化するにあたり各成分の Yee セル上の配置は以下のようになる。

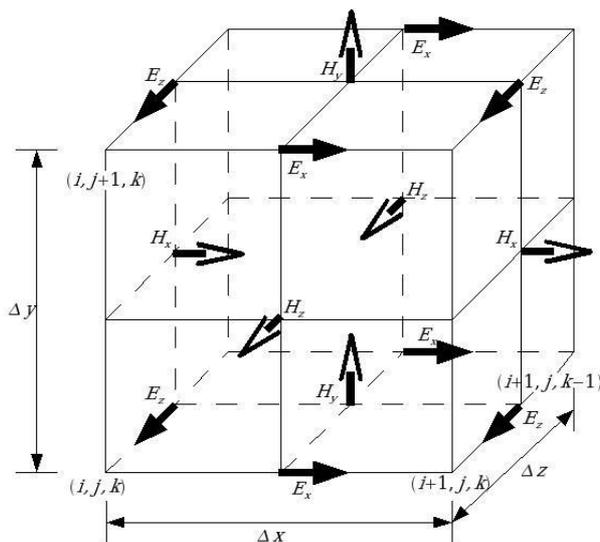


図 2.10: 三次元問題における電磁界配置

(2.125) 式を差分点  $(x, y, z, t) = (i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}, n)$  で展開すると

$$\begin{aligned} H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) &= H_x^{n-\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \\ &+ \frac{1}{Z_0} \frac{1}{\mu_r} \frac{D_z}{D_t} \left\{ E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k + 1) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \\ &- \frac{1}{Z_0} \frac{1}{\mu_r} \frac{D_y}{D_t} \left\{ E_z^n(i, j + 1, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \end{aligned} \quad (2.131)$$

(2.126) 式を差分点  $(x, y, z, t) = (i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}, n)$  で展開すると

$$\begin{aligned}
 H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) &= H_y^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \\
 &+ \frac{1}{Z_0} \frac{1}{\mu_r} \frac{D_x}{D_t} \left\{ E_z^n(i + 1, j, k + \frac{1}{2}) - E_z^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \right\} \\
 &- \frac{1}{Z_0} \frac{1}{\mu_r} \frac{D_z}{D_t} \left\{ E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k + 1) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.132}$$

(2.127) 式を差分点  $(x, y, z, t) = (i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k, n)$  で展開すると

$$\begin{aligned}
 H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) &= H_z^{n-\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \\
 &+ \frac{1}{Z_0} \frac{1}{\mu_r} \frac{D_y}{D_t} \left\{ E_x^n(i + \frac{1}{2}, j + 1, k) - E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \right\} \\
 &- \frac{1}{Z_0} \frac{1}{\mu_r} \frac{D_x}{D_t} \left\{ E_y^n(i + 1, j + \frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.133}$$

(2.128) 式を差分点  $(x, y, z, t) = (i, j, k + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$  で展開すると

$$\begin{aligned}
 E_x^{n+1}(i + \frac{1}{2}, j, k) &= E_x^n(i + \frac{1}{2}, j, k) \\
 &+ Z_0 \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{D_y}{D_t} \left\{ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k) \right\} \\
 &- Z_0 \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{D_z}{D_t} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.134}$$

(2.129) 式を差分点  $(x, y, z, t) = (i, j + \frac{1}{2}, k, n + \frac{1}{2})$  で展開すると

$$\begin{aligned}
 E_y^{n+1}(i, j + \frac{1}{2}, k) &= E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \\
 &+ Z_0 \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{D_z}{D_t} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}) \right\} \\
 &- Z_0 \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{D_x}{D_t} \left\{ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.135}$$

(2.130) 式を差分点  $(x, y, z, t) = (i, j, k + \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2})$  で展開すると

$$\begin{aligned}
 E_z^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) &= E_z^n(i, j, k + \frac{1}{2}) \\
 &+ Z_0 \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{D_x}{D_t} \left\{ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i - \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}) \right\} \\
 &- Z_0 \frac{1}{\varepsilon_r} \frac{D_y}{D_t} \left\{ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

## 2.8.2. PML (Perfectly Matched Layer)

一次元問題、二次元問題では吸収境界条件として比較的容易な Mur の吸収境界条件を使用した、精度の面で問題があるため三次元問題では PML (Perfectly Matched Layer) についての解説を行う。

Mur の吸収境界条件は所謂  $D_{abc}$  (Differential-based-absorbing boundary condition) というものでこれは吸収境界上において反射がないという近似的な微分方程式によって導かれたものである。

対して PML とは  $M_{abc}$  (Material-based absorbing boundary condition) というものでこちらは境界面に仮想的な媒質において入射波を減衰させようという発想から生まれたものである。

なお、現在一般的に使用されている吸収境界条件は以下のようなものがある。

タイプ	提案者	長所/欠点	備考
D_abc	Lindman	広角まで適用可能 複雑	あまり使われない
	Mur	精度は中程度 簡単	最もポピュラー
	Higdon	精度はMurよりもよい 簡単	よく使われる 安定化が必須
	Liao	Higdonと同程度の精度 Higdonより簡単	よく使われる 安定化が必須
M_abc	Rappaport		電波吸収体形ABC
	Berenger	精度は最良 やや複雑 必要メモリ大	PML よく使われる
	Sacks Gedney	BerengerのPMLと等価 散乱界に適用可 やや複雑	Uniaxial PML

図 2.11: 吸収境界条件一覧

一覧を見ると、PML は理論の点で多少 Mur の吸収境界条件よりも複雑ではあるが精度の面では最良であることが分かる。

次に PML の理論について述べていく。図 2.12 のように真空中から平面波が入射する場合を考える。

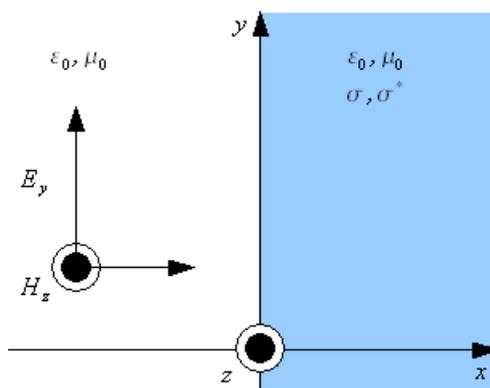


図 2.12: 損失を持つ媒質への平面波の垂直入射

波動インピーダンスを  $Z_0$ 、媒質中の波動インピーダンスを  $Z$  とするとそれぞれ

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (2.137)$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu_0 + \frac{\sigma^*}{j\omega}}{\varepsilon_0 + \frac{\sigma}{j\omega}}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \left(1 + \frac{1}{j\omega} \frac{\sigma^*}{\mu_0}\right)}{\varepsilon_0 \left(1 + \frac{1}{j\omega} \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)}} \quad (2.138)$$

で与えられるため、インピーダンスマッチング条件  $Z_0 = Z$ 、すなわち

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \quad (2.139)$$

を満たせば周波数に関わらず境界面での反射係数を0にすることができ、電磁波は反射なしで媒質へ浸透する。しかも  $\sigma, \sigma^*$  を大きくすればすぐに減衰する。したがってこのような媒質で解析領域を囲めばよいということが分かる。しかし、斜め入射の場合(2.139)式を満たしても反射係数は0にならない。そこで Berenger は新たな導電率、導磁率を導入し斜め入射に対してもマッチング条件式(2.137)式、(2.138)式が満足されるような非物理的な媒質を考案した。これをPMLという。

PMLを用いる場合、例えば  $E_z$  成分であれば

$$E_z = E_{zx} + E_{zy} \quad (2.140)$$

のように2つのサブコンポーネントに分けて計算していく。

したがって、直交座標系における全電磁界成分をサブコンポーネントに分解すると

$$\left. \begin{aligned} E_x &= E_{xy} + E_{xz} \\ E_y &= E_{yx} + E_{yz} \\ E_z &= E_{zx} + E_{zy} \end{aligned} \right\} \quad (2.141)$$

$$\left. \begin{aligned} H_x &= H_{xy} + H_{xz} \\ H_y &= H_{yx} + H_{yz} \\ H_z &= H_{zx} + H_{zy} \end{aligned} \right\}$$

損失まで含めたマクスウェルの方程式は以下のように表される。

$$\mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t} + \sigma^* H_x = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.142)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t} + \sigma^* H_y = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.143)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t} + \sigma^* H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.144)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} + \sigma E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (2.145)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} + \sigma E_y = \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.146)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} + \sigma E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (2.147)$$

以上の式を(2.141)式の考えを用いてサブコンポーネントに分解すると

$$\mu_0 \frac{\partial H_{xy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{xy} = -\frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (2.148)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{xz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{xz} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (2.149)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yz}}{\partial t} + \sigma_z^* H_{yz} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.150)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{yx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{yx} = \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (2.151)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zx}}{\partial t} + \sigma_x^* H_{zx} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (2.152)$$

$$\mu_0 \frac{\partial H_{zy}}{\partial t} + \sigma_y^* H_{zy} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (2.153)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{xy}}{\partial t} + \sigma_y E_{xy} = \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (2.154)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{xz}}{\partial t} + \sigma_z E_{xz} = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \quad (2.155)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{yz}}{\partial t} + \sigma_z E_{yz} = \frac{\partial H_x}{\partial z} \quad (2.156)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{yx}}{\partial t} + \sigma_x E_{yx} = -\frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (2.157)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zx}}{\partial t} + \sigma_x E_{zx} = \frac{\partial H_y}{\partial x} \quad (2.158)$$

$$\varepsilon_0 \frac{\partial E_{zy}}{\partial t} + \sigma_y E_{zy} = -\frac{\partial H_x}{\partial y} \quad (2.159)$$

ただし、 $E_x = E_{xy} + E_{xz}$ ,  $E_y = E_{yx} + E_{yz}$ ,  $E_z = E_{zx} + E_{zy}$

$H_x = H_{xy} + H_{xz}$ ,  $H_y = H_{yx} + H_{yz}$ ,  $H_z = H_{zx} + H_{zy}$

以上の(2.148)式～(2.159)式をFDTD法に適用するために差分する。

$$H_{xy}^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = \frac{2\mu_r\mu_0 - \sigma_y^*\Delta t}{2\mu_r\mu_0 + \sigma_y^*\Delta t} H_{xy}^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - \frac{2\Delta t}{2\mu_r\mu_0\Delta y + \sigma_y^*\Delta t\Delta y} \left[ E_z^n(i, j+1, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2}) \right] \quad (2.160)$$

$$H_{xz}^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) = \frac{2\mu_r\mu_0 - \sigma_z^*\Delta t}{2\mu_r\mu_0 + \sigma_z^*\Delta t} H_{xz}^{n-\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) + \frac{2\Delta t}{2\mu_r\mu_0\Delta z + \sigma_z^*\Delta t\Delta z} \left[ E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k+1) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k) \right] \quad (2.161)$$

$$H_{yz}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) = \frac{2\mu_r\mu_0 - \sigma_z^* \Delta t}{2\mu_r\mu_0 + \sigma_z^* \Delta t} H_{yz}^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - \frac{2\Delta t}{2\mu_r\mu_0 \Delta z + \sigma_z^* \Delta t \Delta z} \left[ E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k+1) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) \right] \quad (2.162)$$

$$H_{yx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) = \frac{2\mu_r\mu_0 - \sigma_x^* \Delta t}{2\mu_r\mu_0 + \sigma_x^* \Delta t} H_{yx}^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) + \frac{2\Delta t}{2\mu_r\mu_0 \Delta x + \sigma_x^* \Delta t \Delta x} \left[ E_z^n(i+1, j, k+\frac{1}{2}) - E_z^n(i, j, k+\frac{1}{2}) \right] \quad (2.163)$$

$$H_{zx}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) = \frac{2\mu_r\mu_0 - \sigma_x^* \Delta t}{2\mu_r\mu_0 + \sigma_x^* \Delta t} H_{zx}^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{2\Delta t}{2\mu_r\mu_0 \Delta x + \sigma_x^* \Delta t \Delta x} \left[ E_y^n(i+1, j+\frac{1}{2}, k) - E_y^n(i, j+\frac{1}{2}, k) \right] \quad (2.164)$$

$$H_{zy}^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) = \frac{2\mu_r\mu_0 - \sigma_y^* \Delta t}{2\mu_r\mu_0 + \sigma_y^* \Delta t} H_{zy}^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) + \frac{2\Delta t}{2\mu_r\mu_0 \Delta y + \sigma_y^* \Delta t \Delta y} \left[ E_x^n(i+\frac{1}{2}, j+1, k) - E_x^n(i+\frac{1}{2}, j, k) \right] \quad (2.165)$$

$$E_{xy}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) = \frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 - \sigma_y \Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 + \sigma_y \Delta t} E_{xy}^n(i+\frac{1}{2}, j, k) + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 \Delta y + \sigma_y \Delta t \Delta y} \left[ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, k) \right] \quad (2.166)$$

$$E_{xz}^{n+1}(i+\frac{1}{2}, j, k) = \frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 - \sigma_z \Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 + \sigma_z \Delta t} E_{xz}^n(i+\frac{1}{2}, j, k) - \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 \Delta z + \sigma_z \Delta t \Delta z} \left[ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}) \right] \quad (2.167)$$

$$E_{yz}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k) = \frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 - \sigma_z \Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 + \sigma_z \Delta t} E_{yz}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 \Delta z + \sigma_z \Delta t \Delta z} \left[ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}) \right] \quad (2.168)$$

$$E_{yx}^{n+1}(i, j+\frac{1}{2}, k) = \frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 - \sigma_x \Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 + \sigma_x \Delta t} E_{yx}^n(i, j+\frac{1}{2}, k) - \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 \Delta x + \sigma_x \Delta t \Delta x} \left[ H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) - H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k) \right] \quad (2.169)$$

$$E_{zx}^{n+1}(i, j, k+\frac{1}{2}) = \frac{2\varepsilon_r\varepsilon_0 - \sigma_x \Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 + \sigma_x \Delta t} E_{zx}^n(i, j, k+\frac{1}{2}) + \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_r\varepsilon_0 \Delta x + \sigma_x \Delta t \Delta x} \left[ H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) - H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}) \right] \quad (2.170)$$

$$E_{zy}^{n+1}(i, j, k + \frac{1}{2}) = \frac{2\varepsilon_r \varepsilon_0 - \sigma_y \Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 + \sigma_y \Delta t} E_{zy}^n(i, j, k + \frac{1}{2}) - \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_r \varepsilon_0 \Delta y + \sigma_y \Delta t \Delta y} \left[ H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) - H_x^{n+\frac{1}{2}}(i, j - \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}) \right] \quad (2.171)$$

以上がPML差分式となる。

次に導電率  $\sigma$ 、導磁率  $\sigma^*$  のパラメータの決定方法について述べる。

自由空間とPMLの領域の境界面においてインピーダンス整合をしないと反射が起こってしまう。また導電率、導磁率の値が十分でないとPML内で十分に減衰せずに反射を起こしてしまう。

まず(2.139)式からマッチング条件は判明しているため導磁率は導電率の値を用いて

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma^*}{\mu_0} \rightarrow \sigma_z^* = \frac{\mu_0}{\varepsilon_0} \sigma_z = Z_0^2 \sigma_z \quad (2.172)$$

であるので一方のパラメータを決定すればもう一方も簡単に求めることができる。

ここでは仮に導電率の値を決定することにする。

まず図 2.13 のように L 層の均質 PML に平面波が角度  $\phi$  で入射する場合を考える。

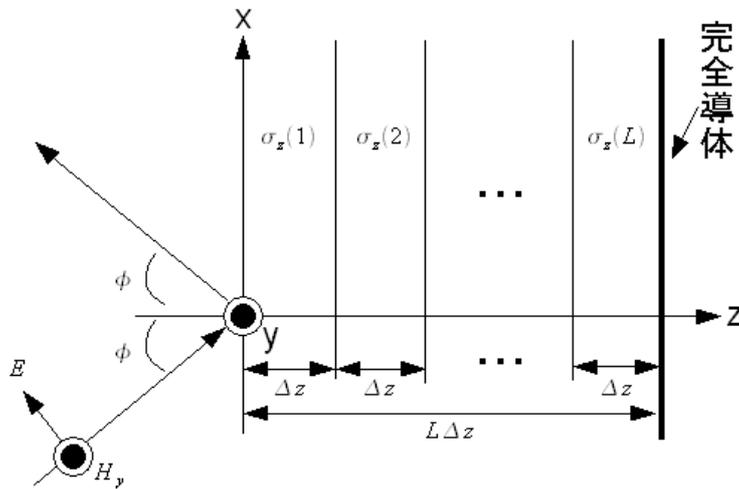


図 2.13: 多層PML媒質

Z 方向の導電率の最大値を  $\sigma_{max}$  とおくと PML 領域の導電率の分布は以下の式で表される。

$$\sigma_z = \begin{cases} \sigma_{max} \left[ \frac{L\Delta z - z}{L\Delta z} \right]^M & ; z < L\Delta z \\ 0 & ; L\Delta z < z < (Nz - L - 1)\Delta z \\ \sigma_{max} \left[ \frac{z - (Nz - L - 1)\Delta z}{L\Delta z} \right]^M & ; z > (Nz - L - 1)\Delta z \end{cases} \quad (2.173)$$

x 方向、y 方向についても同様に

$$\sigma_x = \begin{cases} \sigma_{max} \left[ \frac{L\Delta x - x}{L\Delta x} \right]^M & ; x < L\Delta x \\ 0 & ; L\Delta x < x < (Nx - L - 1)\Delta x \\ \sigma_{max} \left[ \frac{x - (Nx - L - 1)\Delta x}{L\Delta x} \right]^M & ; x > (Nx - L - 1)\Delta x \end{cases} \quad (2.174)$$

$$\sigma_y = \begin{cases} \sigma_{max} \left[ \frac{L \Delta y - y}{L \Delta y} \right]^M & ; y < L \Delta y \\ 0 & ; L \Delta y < y < (Ny - L - 1) \Delta y \\ \sigma_{max} \left[ \frac{y - (Ny - L - 1) \Delta y}{L \Delta y} \right]^M & ; y > (Ny - L - 1) \Delta y \end{cases} \quad (2.175)$$

次に(2.173)式～(2.175)式中の  $\sigma_{max}$  を決定する方法について述べる。

(2.173)式～(2.175)式ような分布の導電率分布を選んでいる場合、反射係数の大きさは以下ようになる。

$$|R(\phi)| \approx \exp \left[ -\frac{2 \sigma_{max} L \Delta z}{(M+1) \epsilon_0 c} \cos \phi \right] \quad (2.176)$$

この式を用いて  $L, M, \sigma_{max}$  を決定する。

(2.176)式を見ると式の中に入射角  $\phi$  が用いられているため任意の入射角に対してパラメータを決定できないため、入射角  $0^\circ$  を基準にパラメータを決定する。

まず減衰の次数である  $M$  は急峻すぎると計算精度の点で不都合であるため  $2 \sim 4$  程度が一般的である。また PML の層数  $L$  はあまり大きすぎるとメモリの使用量と計算時間も増加してしまう、また小さすぎると反射が大きくなってしまいうので  $4 \sim 16$  程度が一般的である。

また  $\sigma_{max}$  は、計算上要求する反射係数  $|R(0)|$  を用いて(2.176)式より

$$\sigma_{max} = -\frac{(M+1) \epsilon_0 c}{2 L \Delta z} \ln |R(0)| \quad (2.177)$$

を用いて決定する。

一般的には  $|R(0)| = -120\text{dB}$ ,  $M=4$ ,  $L=8$  程度で十分である。

ただし、単一周波数では問題ないが広帯域の解析を行う際には低域の成分に対しては PML の層が相対的に薄く見えてしまい、十分な機能しないことがあるようなので注意が必要である。

### 3. 導波管解析

#### 3.1. 矩形導波管理論

矩形導波管内の伝搬はモード毎に異なる。

以下の図 3.1 のような口径の矩形導波管の場合 TE モード、TM モードの伝搬式は以下のように表せる。

$$\begin{aligned}
 & E_x = Z_H H_y, \quad E_y = -Z_H H_x, \quad E_z = 0 \\
 \text{TE モード:} \quad & H_x = jH_0 \frac{k_z l \pi}{k_t^2 L} \sin\left(\frac{l \pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m \pi}{M} y\right) \\
 & H_y = jH_0 \frac{k_z m \pi}{k_t^2 M} \cos\left(\frac{l \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m \pi}{M} y\right)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}
 & E_x = jE_0 \frac{k_z l \pi}{k_t^2 L} \cos\left(\frac{l \pi}{L} x\right) \sin\left(\frac{m \pi}{M} y\right) \\
 \text{TM モード:} \quad & E_y = jE_0 \frac{k_z m \pi}{k_t^2 M} \sin\left(\frac{l \pi}{L} x\right) \cos\left(\frac{m \pi}{M} y\right) \\
 & H_x = Y_E E_y, \quad H_y = -Y_E E_x, \quad H_z = 0
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}
 & k_t^2 \equiv k^2 - k_z^2, \quad k \equiv \omega \sqrt{\varepsilon \mu} \\
 \text{ただし、} \quad & Z_H \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \cdot \frac{k}{k_z}, \quad Y_E \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cdot \frac{k}{k_z}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

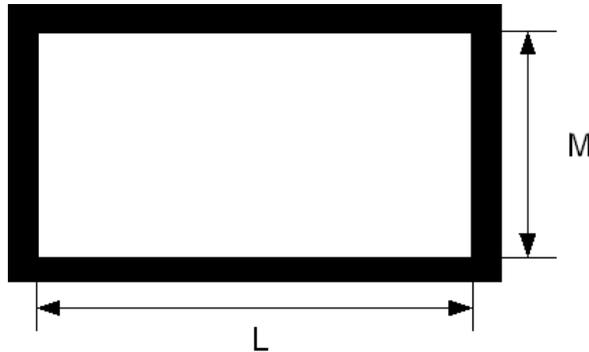


図 3.1: 矩形導波管口径

矩形導波管はある周波数以上でなければ伝送することができない。

図 3.1 のような口径の導波管であれば基本モード  $TE_{10}$  での導波管の遮断波長を  $\lambda_c$  とすると

$$\lambda_c = 2L \tag{3.4}$$

となる。

また、導波管内における群速度、位相速度、管内波長はそれぞれ次式で表される。

$$\text{群速度} \cdots v_g = c \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2L}\right)^2} \tag{3.5}$$

$$\text{位相速度} \cdots v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2L}\right)^2}} \tag{3.6}$$

$$\text{管内波長}\cdots \lambda_g = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2L}\right)^2}} \quad (3.7)$$

導波管内ではモードそのものとモード次数によってそれぞれ遮断周波数が異なり、遮断周波数以下の周波数成分は急激に減衰するため伝搬しない。

このとき遮断周波数、及び遮断波長はモード次数  $l, m$  を用いて以下の式で表される。

$$f_{lm} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2} \quad (3.8)$$

$$\lambda_{lm} = 2 / \sqrt{\left(\frac{l}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{M}\right)^2} \quad (3.9)$$

一般的に矩形導波管では  $M:L=1:2$  の比とすることで基本モードの  $TE_{10}$  モードのみを以下の範囲において伝送することが出来る。

$$2L \geq \lambda \geq L \quad (3.10)$$

そのため、一般的な導波管は上記のように  $M:L$  を  $1:2$  の比で作られたものがほとんどである。

## 3.2. 解析手法

解析手法としては FDTD 法を用いて S パラメータによる評価を行う。

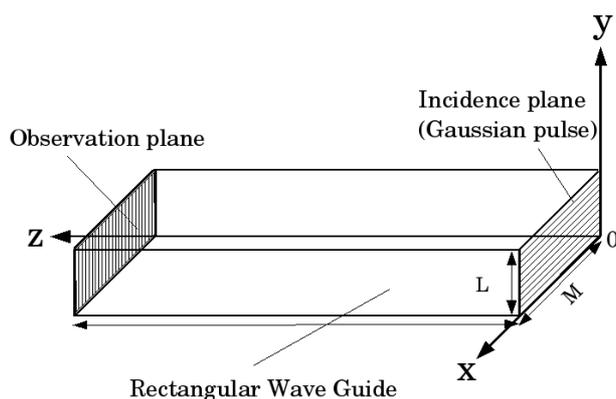


図 3.2: 解析モデル概要

図 3.2 のように導波管の一端を励振面とし、さらにもう一端を観測面とする。

このとき S パラメータを算出するために、励振面における一点の電界を入射波として観測する。

また FDTD 法における励振方法としては矩形導波管の理論において登場した、導波管内の伝搬式を用いることによりモード毎の振る舞いを解析することが可能である。

今回は最も一般的な基本モード  $TE_{10}$  モードの解析での解析を行うため、まず (3.1) 式のモード次数  $l, m$  にそれぞれ  $1, 0$  を代入する。

$$\begin{aligned} E_x &= Z_H H_y, \quad E_y = -Z_H H_x, \quad E_z = 0 \\ H_x &= jH_0 \frac{k_z \pi}{k_t^2 L} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \\ H_y &= 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

今回の解析手法においては励振面を  $z=0$  面とするが、 $z=0$  面には  $H_x$  成分が存在しないため磁界式を電界式に代

入する。

$$E_x=0, E_y=-Z_H j H_0 \frac{k_z \pi}{k_t^2 L} \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right), E_z=0 \quad (3.12)$$

(3.12)式において本来は  $E_x, E_y, E_z$  の振幅の比がモード毎の振る舞いに大きく寄与するが、 $TE_{10}$  モードにおいては  $E_y$  成分以外すべて0となるため(3.12)式の係数をすべて整理すると

$$E_y = \sin\left(\frac{\pi}{L} x\right) \quad (3.13)$$

となる。

最終的に(3.13)式に任意の時間波形を乗じたものを波源として用いることにより  $TE_{10}$  単一の解析が可能となる。そしてFDTD法における計算の終了後、観測した入射波、反射波にフーリエ変換を施し、最終的なSパラメータを算出する。

以上をフローチャートにまとめると以下のようなになる。

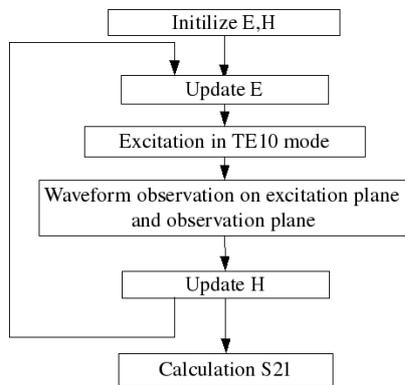


図 3.3: 解析フローチャート

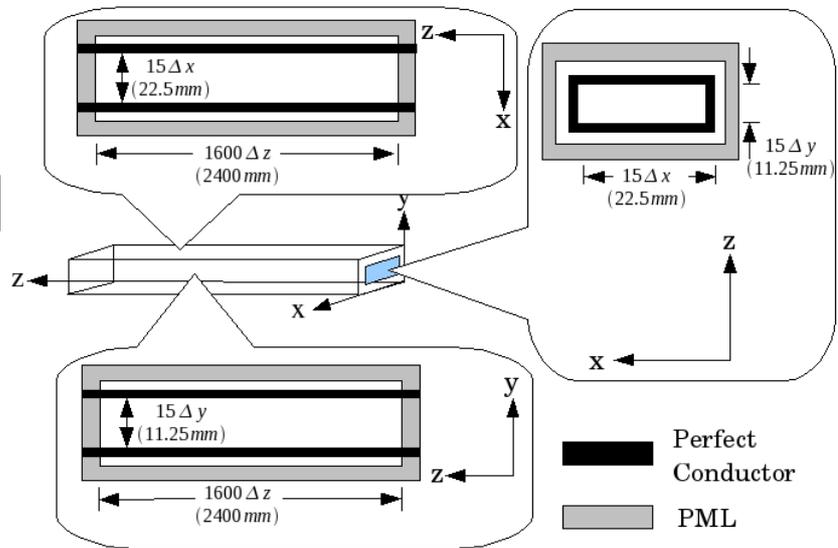


図 3.4: 解析モデル

図 3.3 のフローチャートを基に図 3.4 で示すような矩形導波管の解析を行う。

このとき、図 3.4 の解析モデルにおける  $TE_{10}$  モードにおける遮断周波数は(3.8)式を用いておよそ  $6.7[GHz]$  となる。

また、任意の時間波形として直流成分を含むガウシアンパルスを用いる。

このとき直流成分を含むガウシアンパルスは以下の式で表される。

$$y(t) = A e^{-[(\Delta t n - T)/0.29T]^2} \quad (3.14)$$

Tはガウシアンパルスの遮断周波数を用いて

$$T = 0.646 / f_0 \quad (3.15)$$

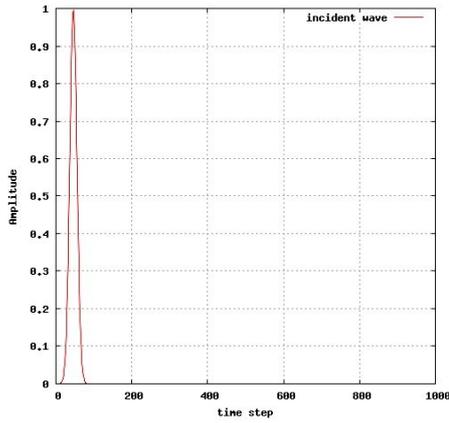


図 3.5: 入射波 (時間領域)

このとき導波管の通過特性  $S_{21}$  は以下の図のようになる。

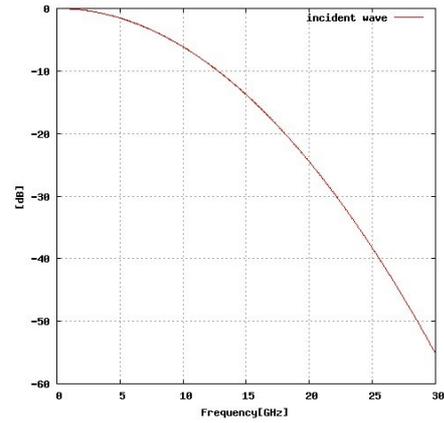


図 3.6: 入射波 (周波数波形)

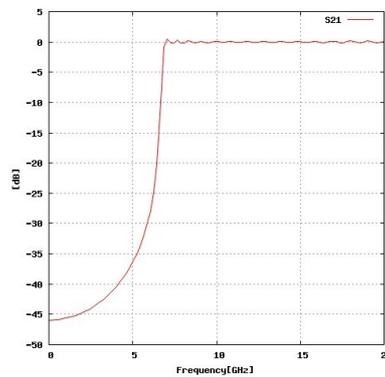


図 3.7:  $S_{21}$

図 3.7 を見ると遮断周波数が理論値とほぼ一致していることが確認できる。

### 3.3. 亀裂を有する導波管の解析

図 3.5、図 3.6 の特性を持つガウシアンパルスを用いて亀裂を有する導波管の通過特性を算出する。

解析モデルは図 3.4 の矩形導波管に亀裂をモデリングしたものとする

また解析パラメータは以下の通りである。

$\Delta x = \Delta z = 1.5 \times 10^{-3} [m]$ ,  $\Delta y = 0.75 \times 10^{-3} [m]$ ,  $\Delta t = 1.67 [ps]$  亀裂の詳細なモデルを以下に示す。

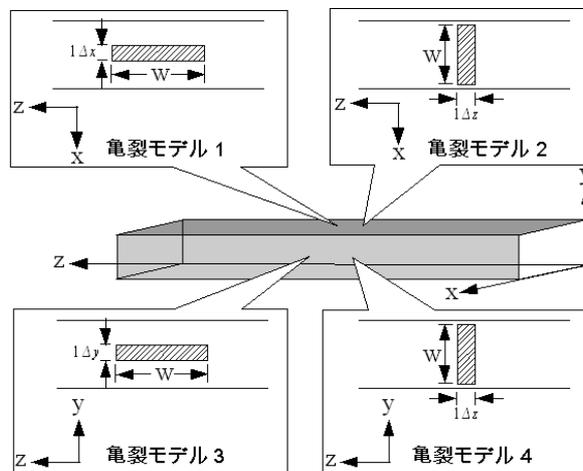


図 3.8: 亀裂モデル

以下に図 3.8 の亀裂モデル1～亀裂モデル4までを解析した結果を示す。

•亀裂モデル1

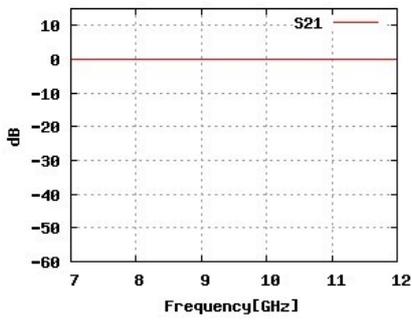


図 3.9:  $W=3.0$  [mm]

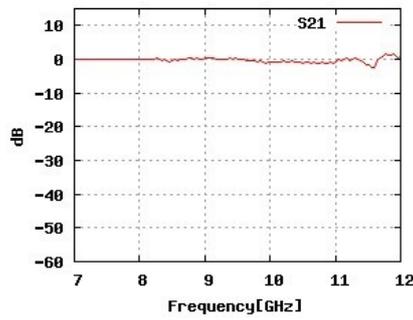


図 3.10:  $W=6.0$  [mm]

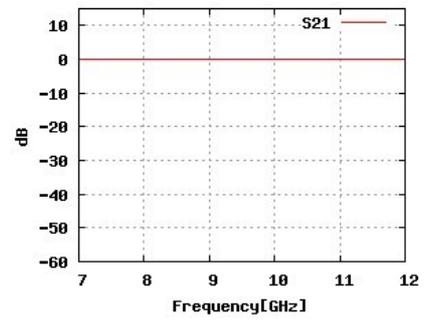


図 3.11:  $W=9.0$  [mm]

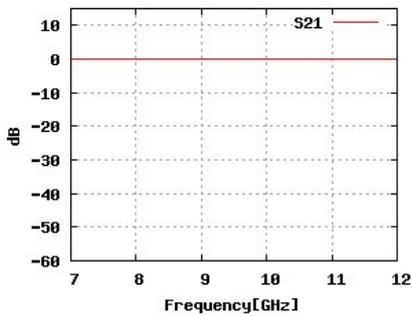


図 3.12:  $W=12.0$  [mm]

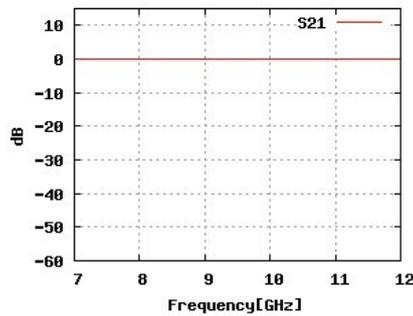


図 3.13:  $W=15.0$  [mm]

•亀裂モデル2

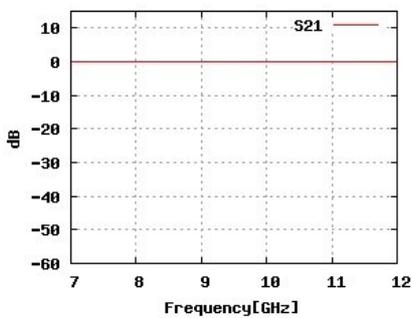


図 3.14:  $W=3.0$  [mm]

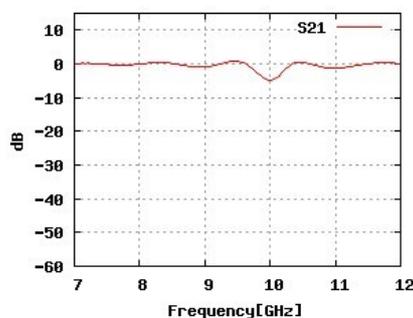


図 3.15:  $W=6.0$  [mm]

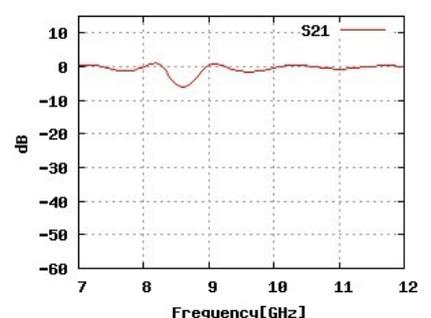


図 3.16:  $W=7.5$  [mm]

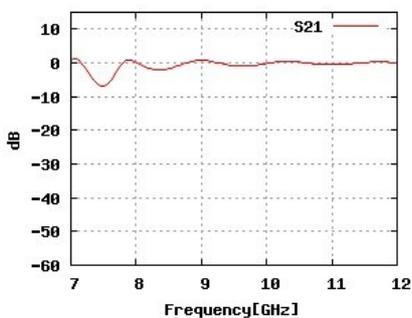


図 3.17:  $W=9.0$  [mm]

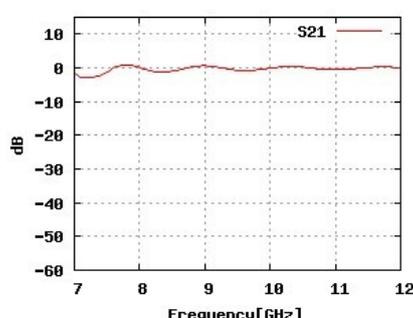


図 3.19:  $W=10.5$  [mm]

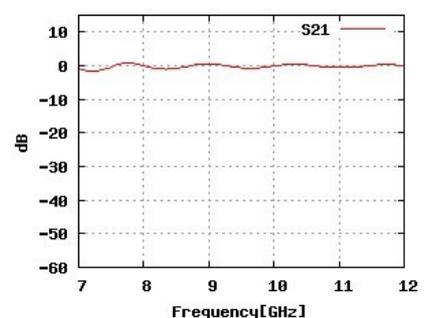


図 3.18:  $W=12.0$  [mm]

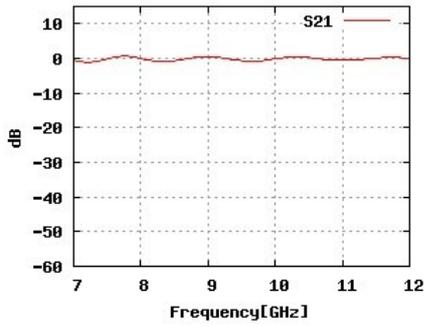


図 3.20:  $W=15.0[\text{mm}]$

•亀裂モデル3

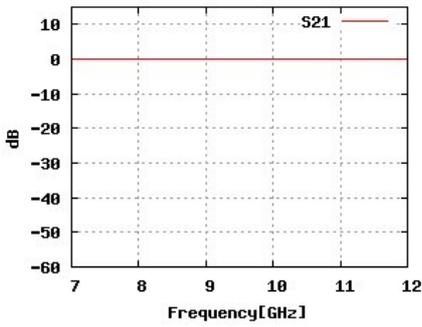


図 3.21:  $W=3.0[\text{mm}]$

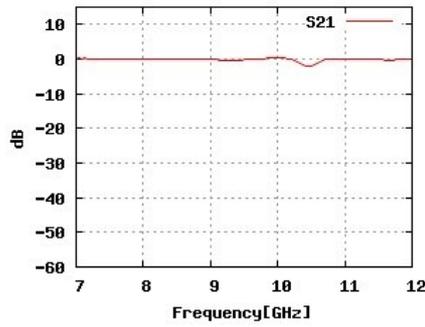


図 3.22:  $W=6.0[\text{mm}]$

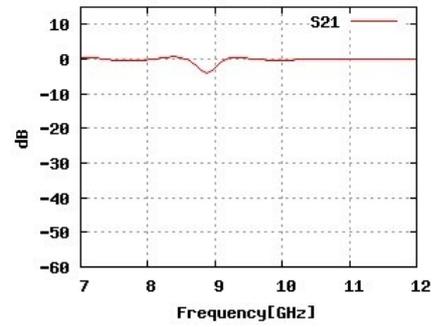


図 3.23:  $W=7.5[\text{mm}]$

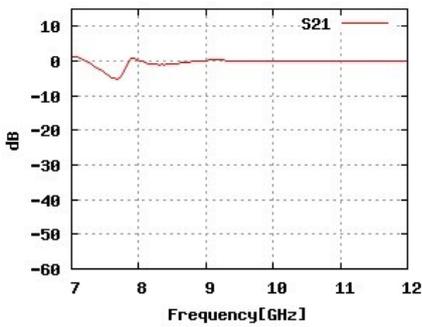


図 3.24:  $W=9.0[\text{mm}]$

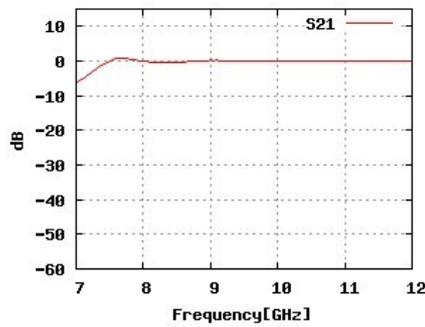


図 3.25:  $W=10.5[\text{mm}]$

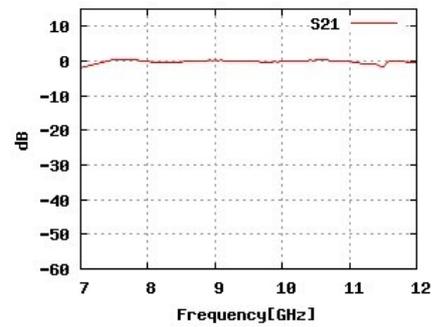


図 3.26:  $W=12.0[\text{mm}]$

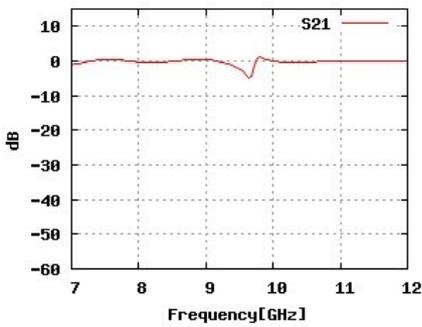


図 3.27:  $W=15.0[\text{mm}]$

•亀裂モデル4

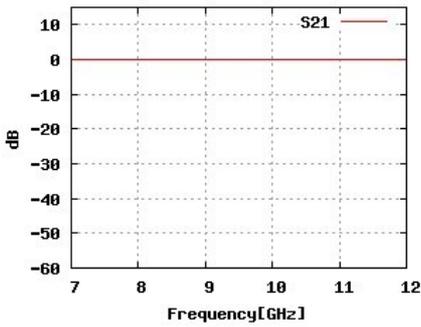


図 3.28:  $W=1.5[mm]$

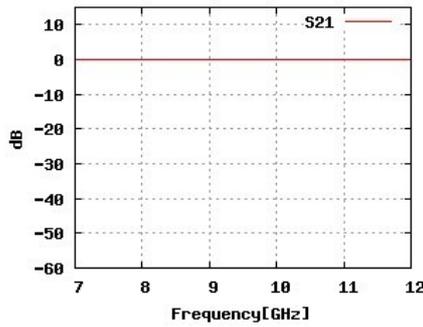


図 3.29:  $W=3.0[mm]$

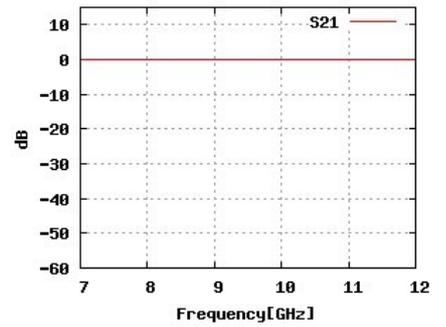


図 3.30:  $W=4.5[mm]$

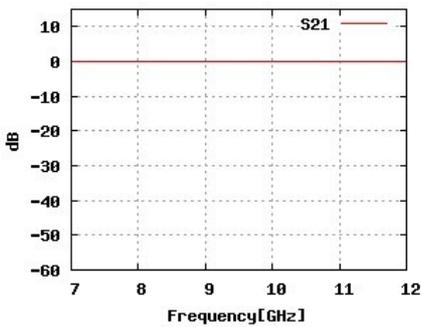


図 3.31:  $W=6.0[mm]$

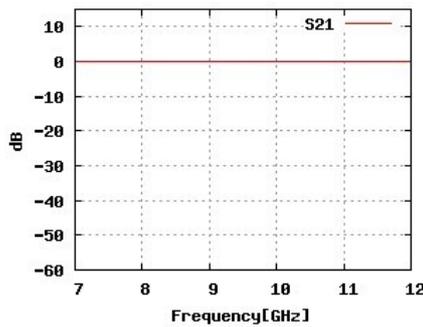


図 3.32:  $W=7.5[mm]$

•考察

結果から亀裂モデル 2、3 については特定の周波数でおよそ -5dB 程度のレベルの落ち込みが発生していることが分かる。したがって亀裂モデル 2、3 においては矩形導波管の基本モードである  $TE_{10}$  モードで検出が可能であることが分かる。

ただし、通過特性の落ち込みが外部への漏えいによって生じるものなのか、亀裂によって反射が起きたことによるものなのか判別が難しい。

•問題点1

解析結果を見ると明らかではあるが、非線形回路ではないにもかかわらず、0dB を超えている部分が確認できる。

この原因として以下の要因が挙げられる。

•波源面が外部から波に対して完全導体と同様の振る舞いをするため入射面側にて反射した波形を再度観測してしまう。これはハードソースと言われる波源の与え方を行っているために発生するものである。

ハードソース

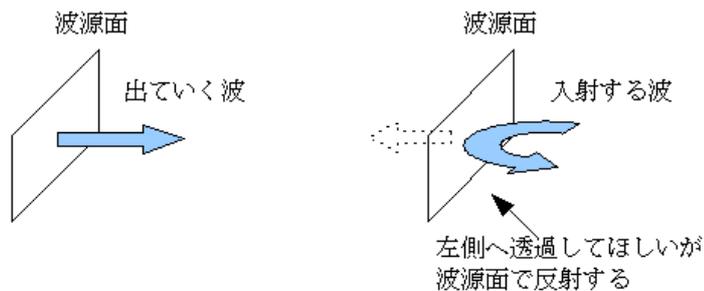


図 3.33: ハードソース

・問題点2

評価方法として通過特性 S21 だけでは不十分である。

S21 で評価を行う場合、外部への漏えいや入射面側への反射量が十分でないで内部の異常を検出出来ない。

その点 S11 を用いた評価を行う場合、非常に小さな反射波に対しても非常に感度が高い。

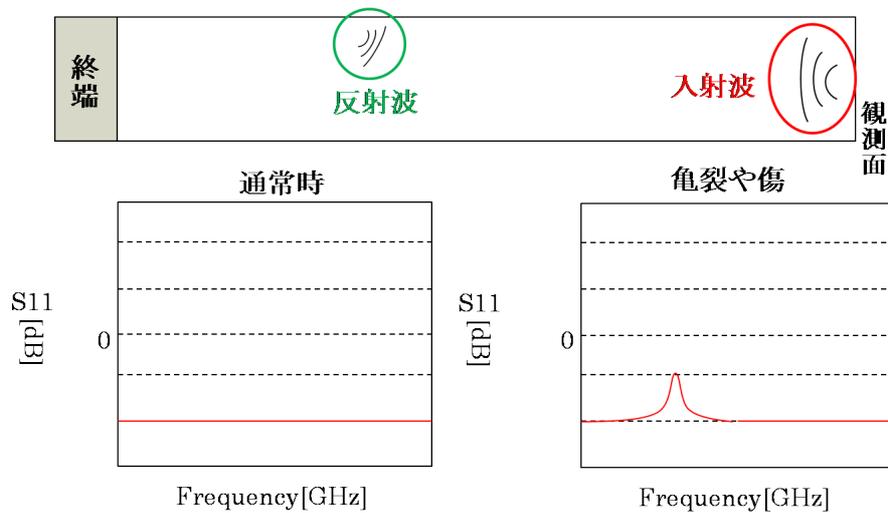


図 3.34: S11

また S11 を用いて評価を行う場合、上記の問題点 1 との共通の問題としてハードソースを用いた解析では反射波を観測することが不可能である。

また導波管が持つ周波数分散性のため、導波管内では周波数毎に伝搬速度が異なるため図のようにいつまでも尾を引いた波形が観測され入射波と反射波の分離が難しい。

このため、ハードソースの問題と合わせ S11 の算出が難しい。

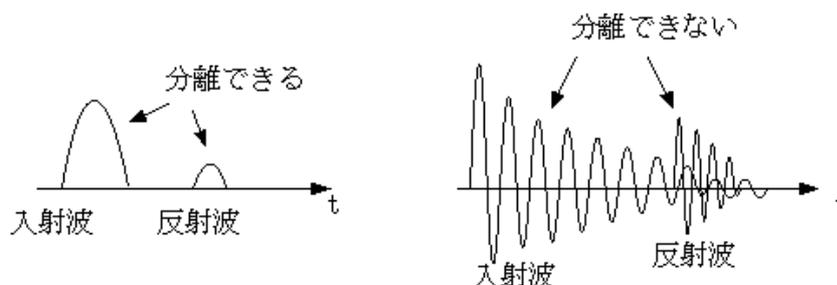


図 3.35: 入射波と反射波の分離

### 3.4. ソフトソースの実装

S11 を算出するためにソフトソースの実装を行う。

例として、入射波形を正弦波としたとき、一般的に今まで使用したハードソースは以下の式で表される。

$$E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) = \sin(2\pi f n \Delta t) \tag{3.16}$$

この式は次式と数式上同じ意味である。

$$E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) = \sin(2\pi f n \Delta t) + 0 \tag{3.17}$$

(3.17) 式の右辺第2項の0はFDTD法上では完全導体として機能する。  
 そのため、波源が置かれた箇所の電磁気的な振る舞いを考慮することが出来ない。  
 そこで、(3.17) 式を以下のように書き換えることで波源が置かれた箇所の電磁気的な振る舞いを盛り込んだ式とする。

$$E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) = \sin(2\pi f n \Delta t) + E_y^n(i, j + \frac{1}{2}, k) \quad (3.18)$$

(3.18) 式が(3.16) 式、(3.17) 式のハードソースに対してソフトソースと呼ばれるものである。  
 このソフトソースを用いて解析をすると波源が完全導体ではなく、自由空間として扱われるため、反射など外部から到来した波を透過させる。

ソフトソース

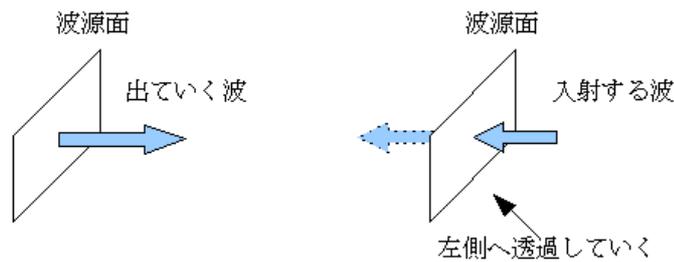


図 3.36: ソフトソース

以上のソフトソースを用いて入射波形を図 3.5 のガウシアンパルスとして図 3.4 の矩形導波管の通過特性を解析する。

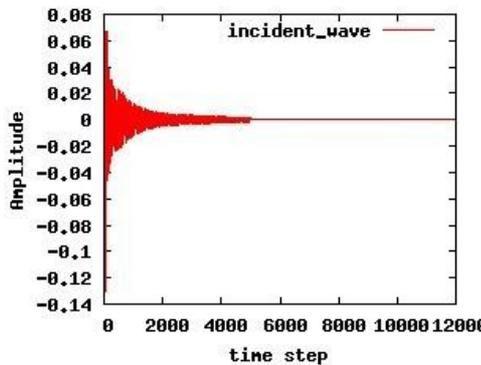


図 3.37: 入射波 (時間領域)

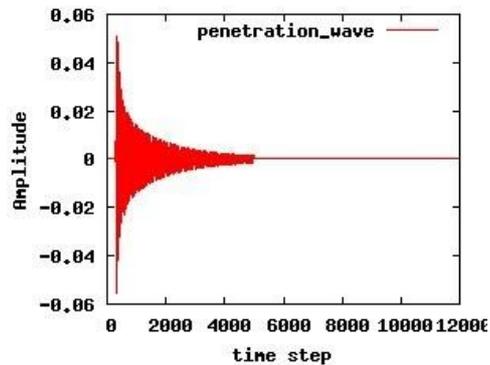


図 3.38: 通過波

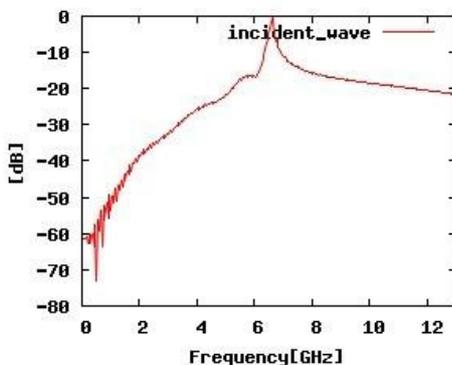


図 3.39: 入射波 (周波数領域)

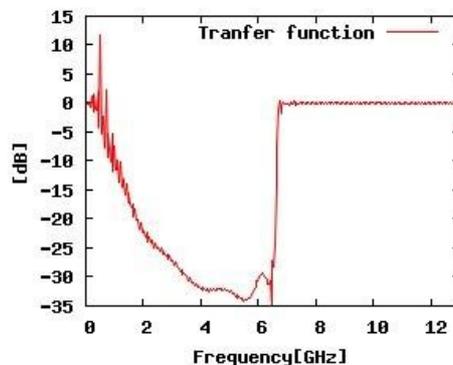


図 3.40: 通過特性 S21

通過特性 S21 に関しては通過域(6.67GHz 以上)において 0dB となりしっかりと伝搬していることが分かる。  
 しかし本来伝搬しないはずの低域の成分がかなり大きな値を示している。これは入射波、反射波が通過域外の成分をほとんど持っていないため、計算上の誤差と考えられる。

通過域における通過特性が算出できるため、使用には問題ないと考えられるため次に入射波と反射波の分離法について考える。

現状解析に用いている  $TE_{10}$  モードが単一で存在する周波数帯は 6.67 [GHz] ~ 13.3 [GHz] である。

したがってこの帯域のみの解析が出来れば問題ないため、今まで波源として用いていた、直流成分を含んだガウシアンパルスを変調することにより帯域を狭める。

Rf ガウスパルス波は

$$y(t) = A e^{-[(\Delta t n - T)/0.29T]^2} \cdot \sin(2\pi f \Delta t n) \quad (3.19)$$

で表すことが出来る。

ただし、 $T = 0.646 / B_w$

(3.19) 式中の  $f$  はキャリア周波数、 $B_w$  はバンド幅となる。

キャリア周波数を 7.5 ~ 13 [GHz] の中心に近い 10 [GHz] に設定し、バンド幅  $B_w$  を変化させ、最適な値を求める。

。

#### バンド幅 4 [GHz]

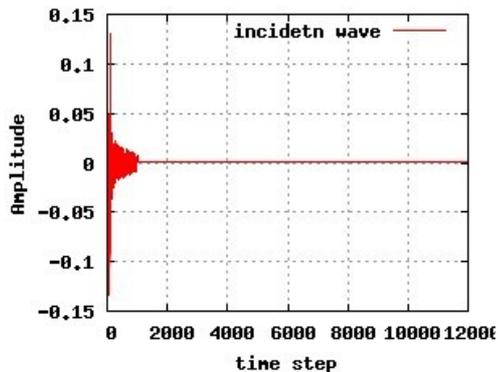


図 3.41: 入射波 (時間波形)

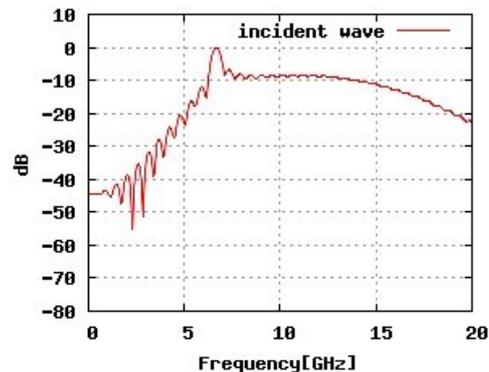


図 3.42: 入射波 (周波数波形)

#### バンド幅 3 [GHz]

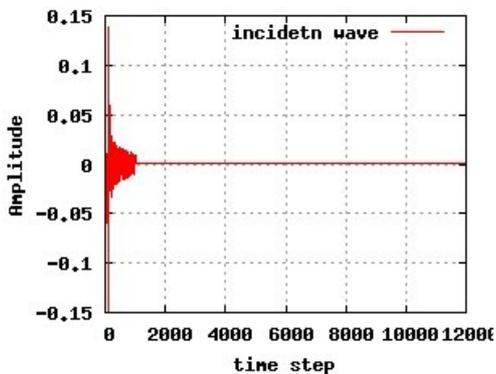


図 3.43: 入射波 (時間波形)

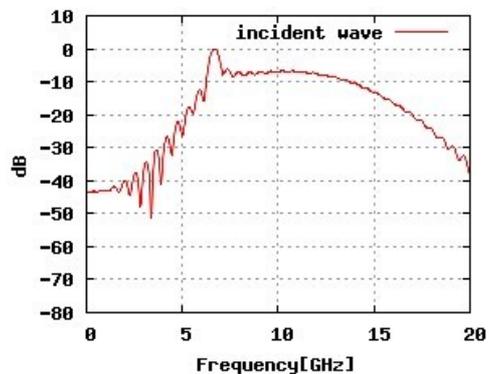


図 3.44: 入射波 (周波数波形)

**バンド幅 2 [GHz]**

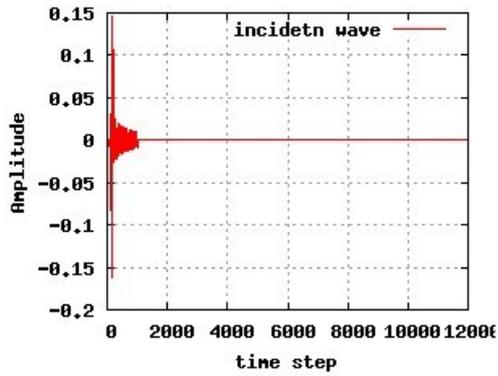


図 3.45: 入射波 (時間波形)

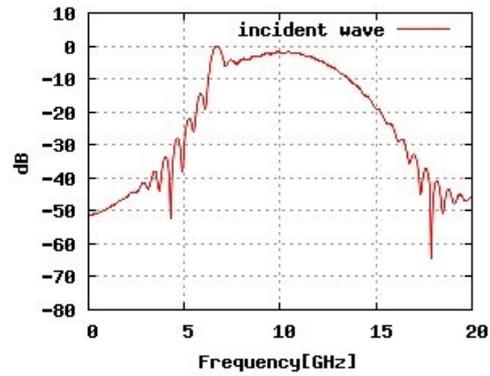


図 3.46: 入射波 (周波数波形)

**バンド幅 1 [GHz]**

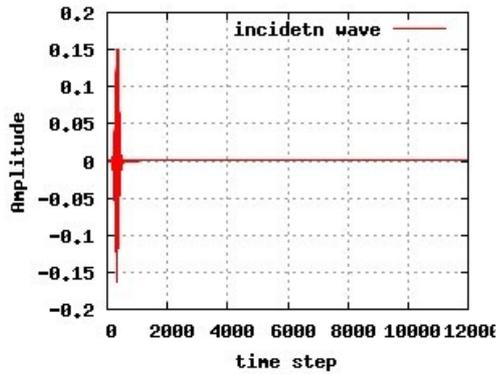


図 3.47: 入射波 (時間波形)

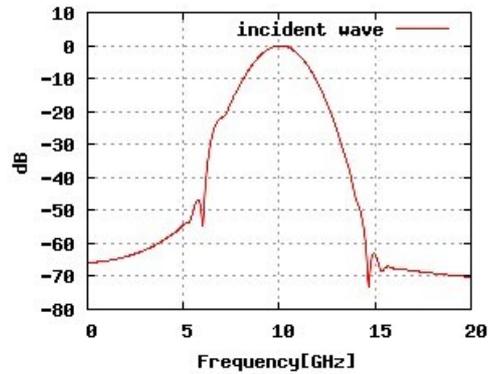


図 3.48: 入射波 (周波数波形)

以上の結果からバンド幅を 1 [GHz] にすると、入射波の収束が早く、入射波と反射波の分離が可能である考えられる。

従って以降の計算にはキャリア周波数  $f = 10 [GHz]$ 、バンド幅  $B_w = 1 [GHz]$  を使用する。

図 3.41 の矩形導波管の反射特性 S11、通過特性 S21 を算出すると以下のような結果となる。

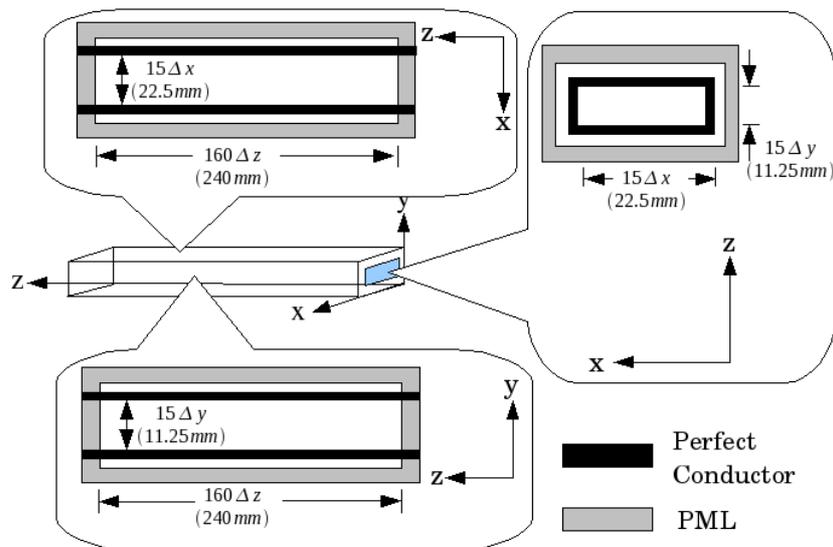


図 3.49: 解析モデル

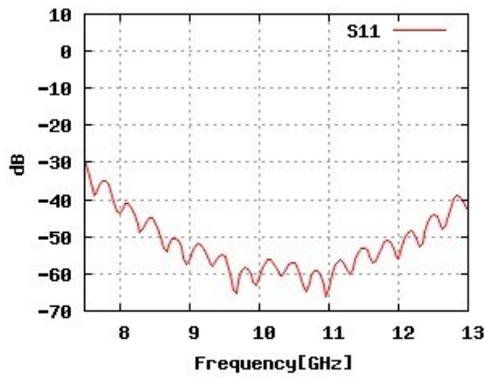


図 3.50: 反射特性  $S_{11}$

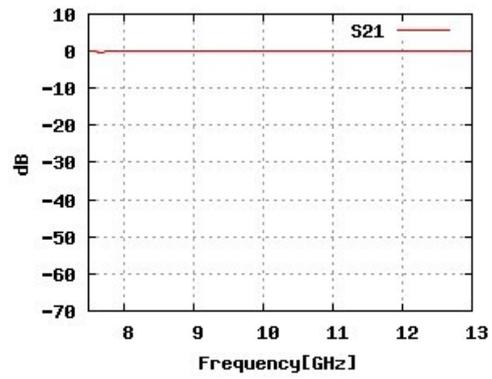


図 3.51: 通過特性  $S_{21}$

以上の結果を基に導波管内に亀裂が発生した場合の反射特性通過特性との比較を行っていく。  
亀裂の詳細は図 3.4 と同様である。

•亀裂モデル1

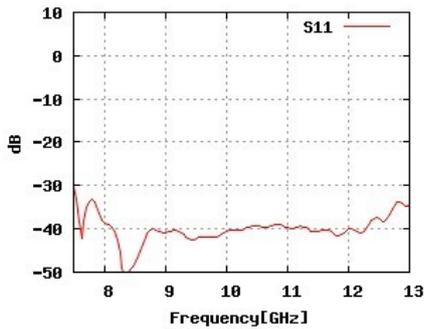


図 3.52:  $S_{11}$  ( $W=6.0$ [mm])

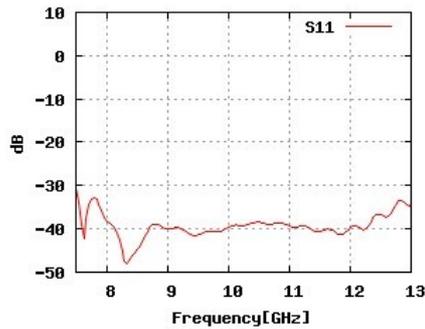


図 3.53:  $S_{11}$  ( $W=7.5$ [mm])

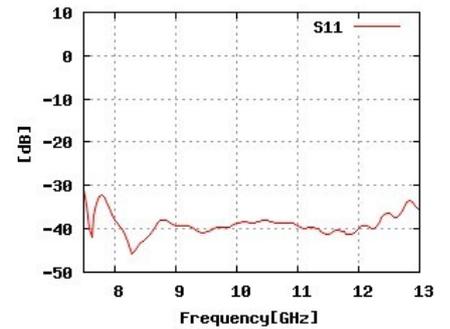


図 3.54:  $S_{11}$  ( $W=9.0$ [mm])

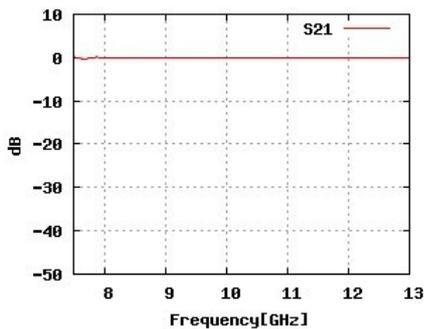


図 3.55:  $S_{21}$  ( $W=6.0$ [mm])

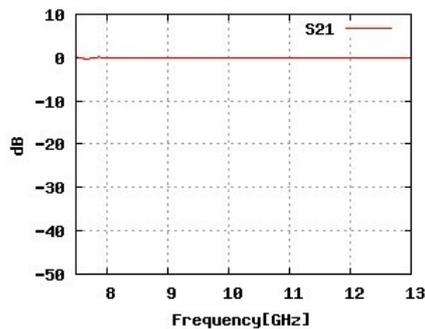


図 3.56:  $S_{21}$  ( $W=7.5$ [mm])

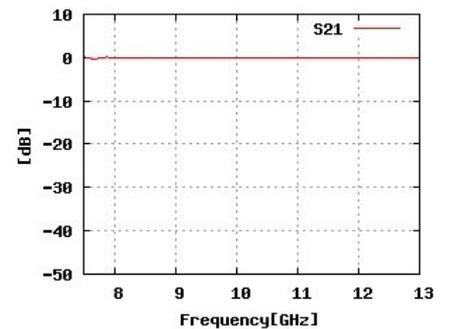


図 3.57:  $S_{21}$  ( $W=9.0$ [mm])

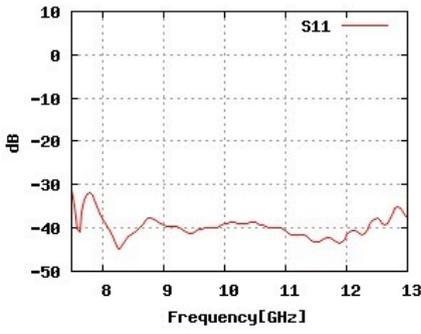


図 3.58:  $S_{11}$  ( $W=10.5$ [mm])

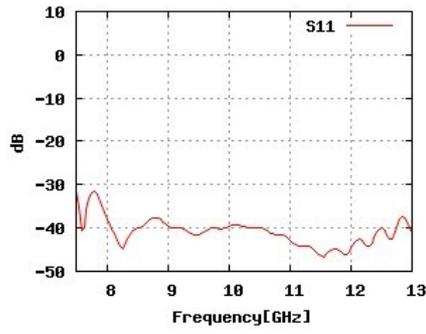


図 3.59:  $S_{11}$  ( $W=12.0$ [mm])

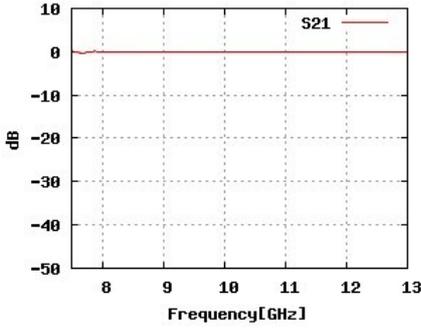


図 3.60:  $S_{21}$  ( $W=10.5$ [mm])

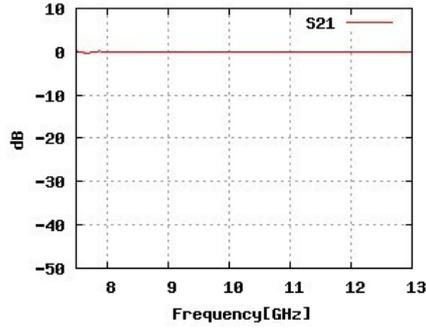


図 3.61:  $S_{21}$  ( $W=12.0$ [mm])

•亀裂モデル2

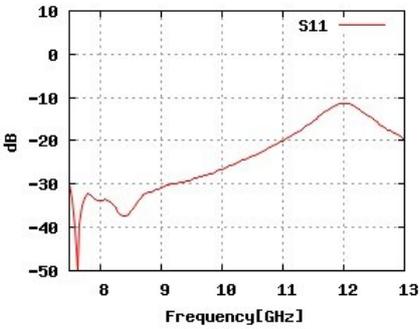


図 3.62:  $S_{11}$  ( $W=6.0$ [mm])

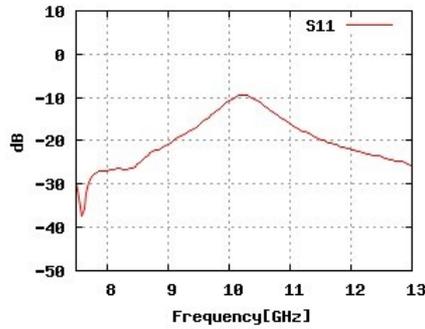


図 3.63:  $S_{11}$  ( $W=7.5$ [mm])

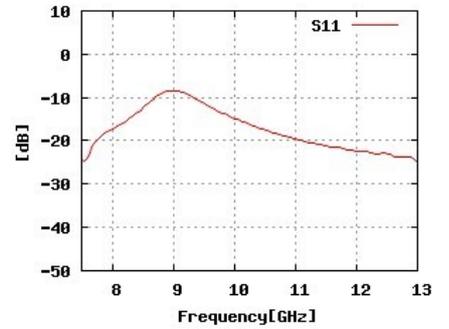


図 3.64:  $S_{11}$  ( $W=9.0$ [mm])

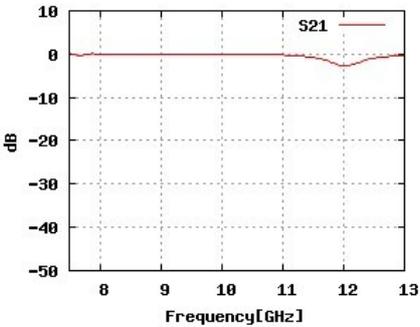


図 3.65:  $S_{21}$  ( $W=6.0$ [mm])

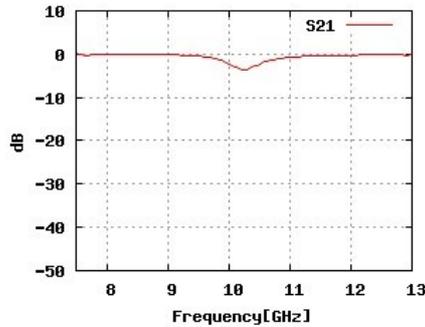


図 3.66:  $S_{21}$  ( $W=7.5$ [mm])

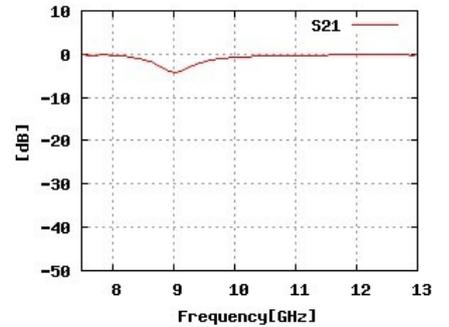


図 3.67:  $S_{21}$  ( $W=9.0$ [mm])

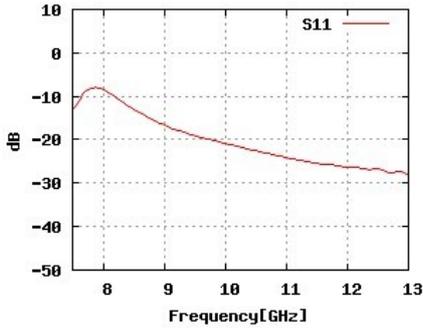


図 3.68:  $S_{11}(W=10.5[mm])$

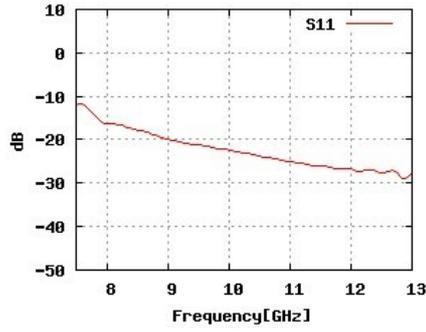


図 3.69:  $S_{11}(W=12.0[mm])$

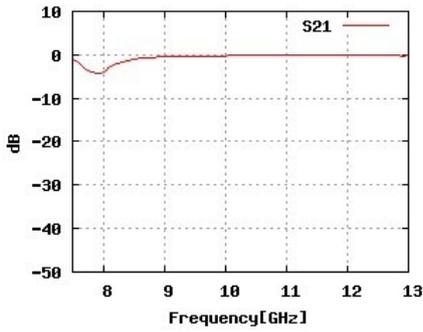


図 3.70:  $S_{21}(W=10.5[mm])$

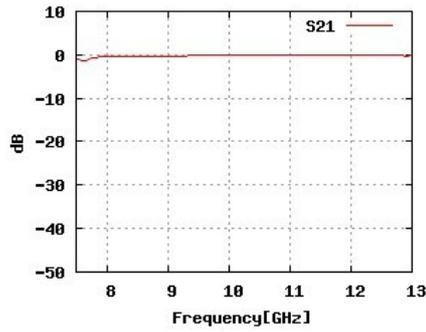


図 3.71:  $S_{21}(W=12.0[mm])$

•亀裂モデル3

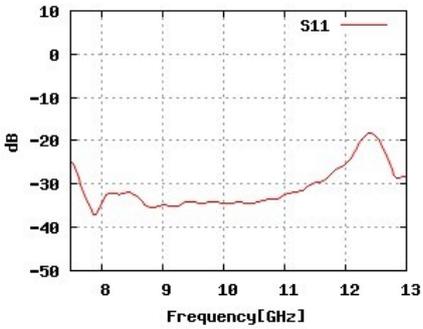


図 3.72:  $S_{11}(W=6.0[mm])$

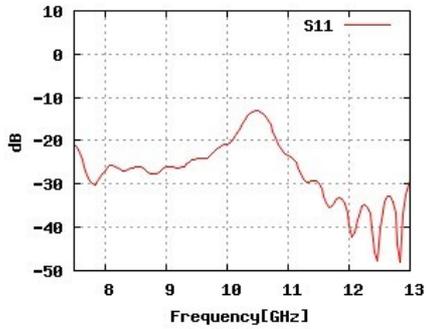


図 3.73:  $S_{11}(W=7.5[mm])$

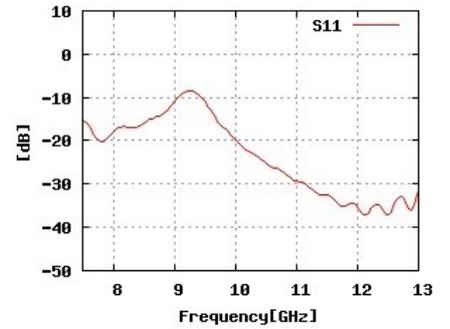


図 3.74:  $S_{11}(W=9.0[mm])$

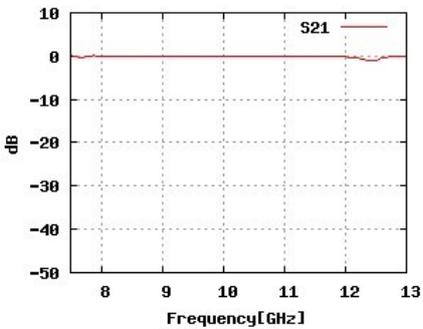


図 3.75:  $S_{21}(W=6.0[mm])$

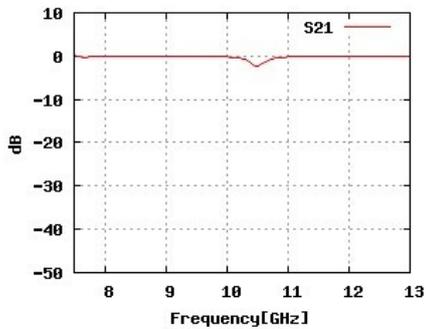


図 3.76:  $S_{21}(W=7.5[mm])$

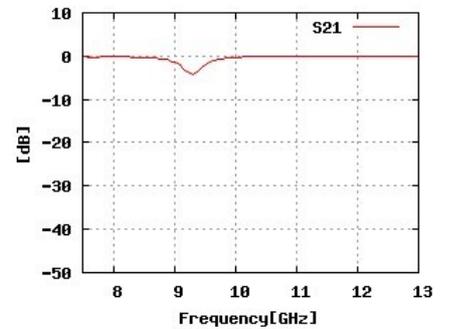


図 3.77:  $S_{21}(W=9.0[mm])$

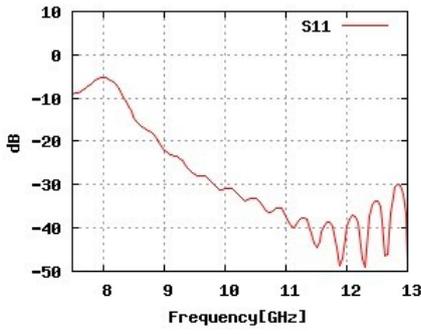


図 3.78:  $S_{11}(W=10.5[\text{mm}])$

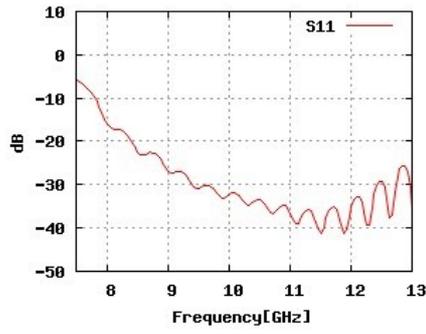


図 3.79:  $S_{11}(W=12.0[\text{mm}])$

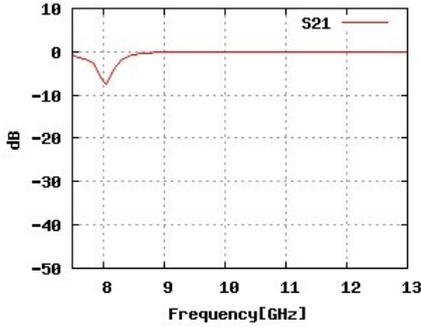


図 3.80:  $S_{21}(W=10.5[\text{mm}])$

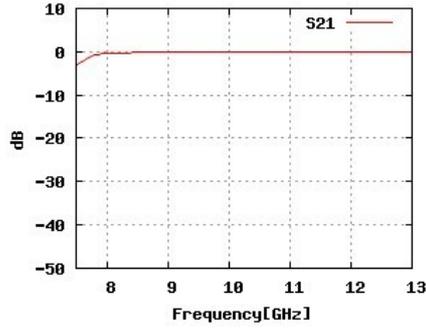


図 3.81:  $S_{21}(W=12.0[\text{mm}])$

•亀裂モデル4

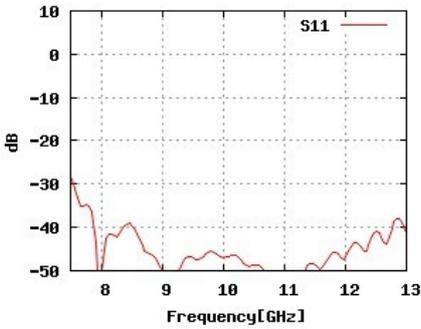


図 3.82:  $S_{11}(W=6.0[\text{mm}])$

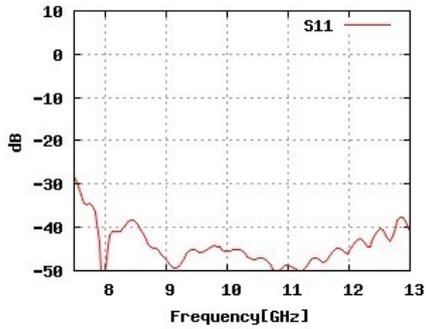


図 3.83:  $S_{11}(W=7.5[\text{mm}])$

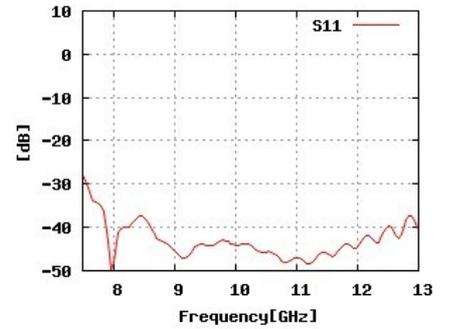


図 3.84:  $S_{11}(W=9.0[\text{mm}])$

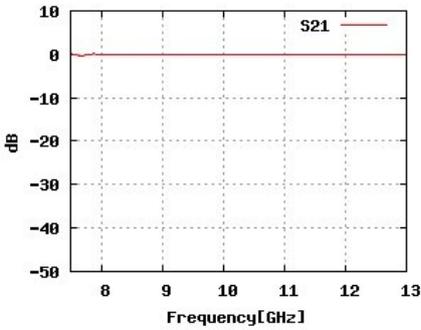


図 3.85:  $S_{21}(W=6.0[\text{mm}])$

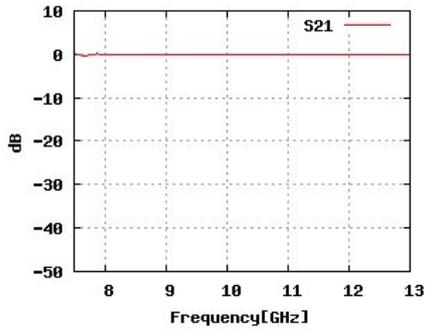


図 3.86:  $S_{21}(W=7.5[\text{mm}])$

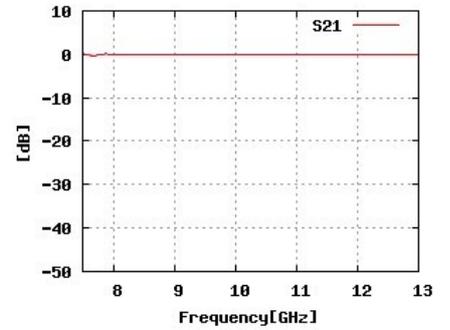


図 3.87:  $S_{21}(W=9.0[\text{mm}])$

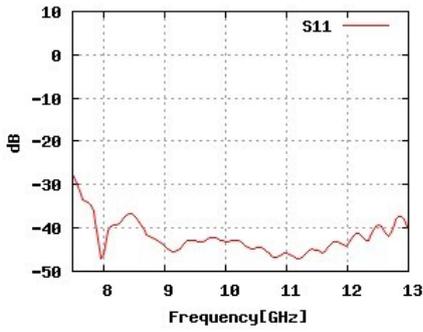


図 3.88:  $S_{11}$  ( $W=10.5$  [mm])

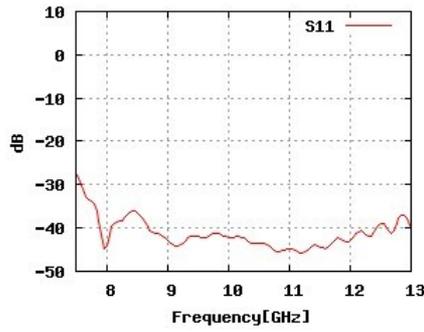


図 3.89:  $S_{11}$  ( $W=12.0$  [mm])

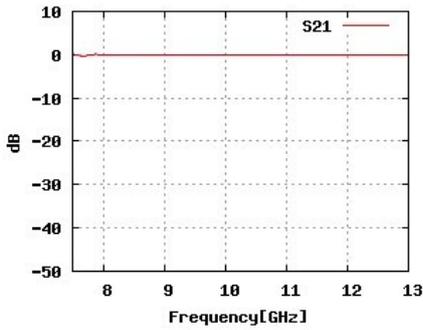


図 3.90:  $S_{21}$  ( $W=10.5$  [mm])

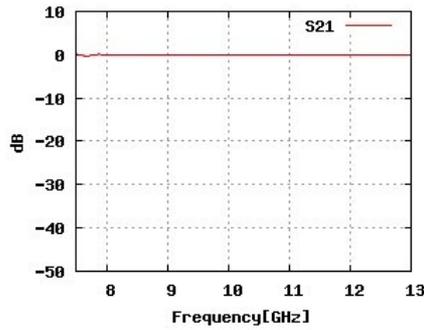


図 3.91:  $S_{21}$  ( $W=12.0$  [mm])

### ・考察

ソフトソースの実装と RF ガウスシアンパルスの使用により、反射特性の算出が可能となった。また利得が 0dB を超える問題も解決出来ている。

解析結果を見ると、亀裂モデル 2, 3 について検出が可能であるという点は以前と変わらないが、反射特性にも影響が出ていることが確認できる。これは、亀裂から電磁波の一部が導波管外部へ放出されたのではなく、反射したためである。したがって、亀裂はもちろんのこと外部からは判別不可能な異常に対しても十分に異常の検出が可能であると考えられる。

また  $S_{21}$  では変化が非常に少ない異常に対しても  $S_{11}$  を用いた評価では十分な精度で異常を検出することが出来る。

また、通過特性に落ち込みが生じた理由は亀裂がスロットアンテナのように機能したためと考えられる。

このスロットアンテナは基本的に図 3.92 の半波長ダイポールアンテナと同様の働きをする。

したがって、スロットアンテナは半波長ダイポールアンテナと同様に特定の周波数において共振することにより、外部へ電磁波を照射する。

しかし、実際には半波長ダイポールアンテナと同様の動作をするのであれば、亀裂長の  $1/2$  となる波長で共振が起こり、外部へ放射されるはずであるにも関わらず  $1/4$  波長となる周波数で共振が起こっている。

原因としては給電点が中心部からずれており、完全に半波長ダイポールアンテナと補対の関係になっていないと考えられる。

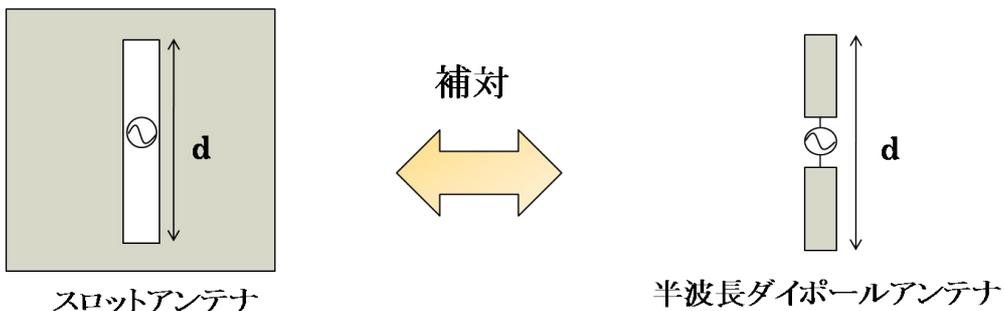


図 3.92: スロットアンテナ

また、特定の方向の亀裂のみが検出できる理由については、電流を遮断する方向に亀裂が存在する場合により多くの電磁波が外部へ放出されるためである。

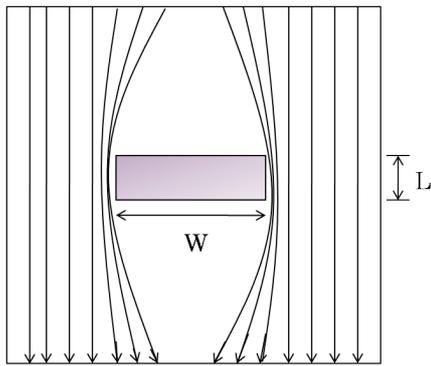


図 3.94: 電流に対して垂直方向に延びる亀裂(a)

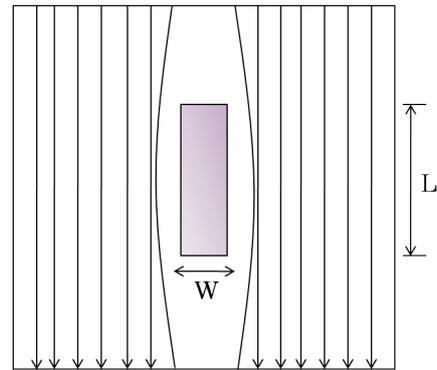


図 3.93: 電流に対して水平方向に延びる亀裂(b)

図 3.93、図 3.94 のように金属盤上にスリット部があると金属盤上を流れる誘起電流が異なった方向に流れ、その部分で元の電磁界を打ち消す効果(シールド効果)は小さくなる。電流が異なった経路になればなるほどシールド効果がなくなり、その部分からの電磁波の漏洩が増えることになる。

また外部への漏えい量は亀裂幅  $W$  のみに依存し、 $L$  には一切依存しない。

したがって、 $TE_{10}$  モードを用いた解析では下図のように電流が流れているため、2 種の亀裂を発見できると考えられる。

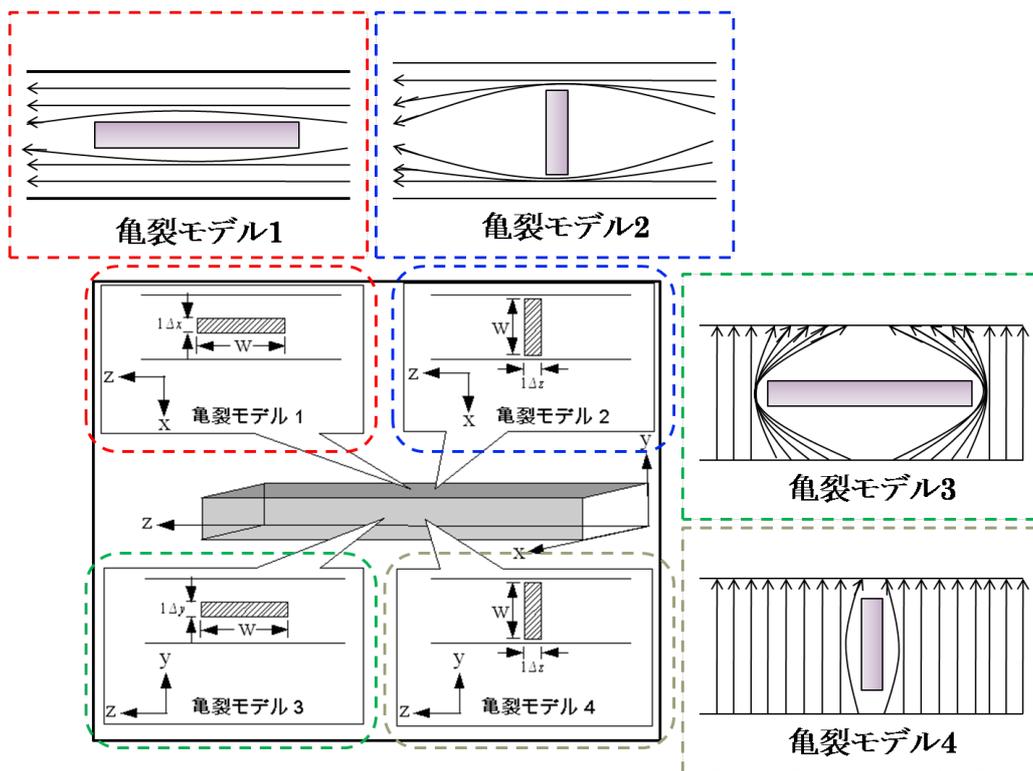


図 3.95: 亀裂の方向と電流の関連性

### 3.5. 応用例

本手法は基本的に亀裂以外の変形に対しても、解析が可能である。

そこで以下のような変形を想定し、解析を行った。

#### ・経年劣化による配管の減肉

配管内部に液体等を長年にわたり流し続けると、金属が摩耗し薄くなる。

本解析モデルはそういった変形を想定した。

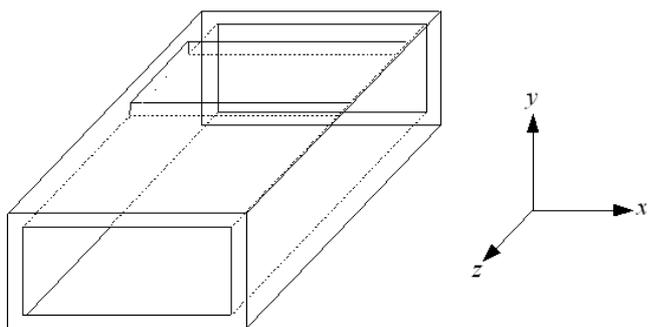


図 3.96: 上面が減肉した導波管

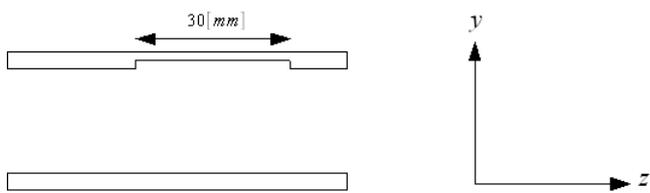


図 3.99: 上面が減肉した導波管

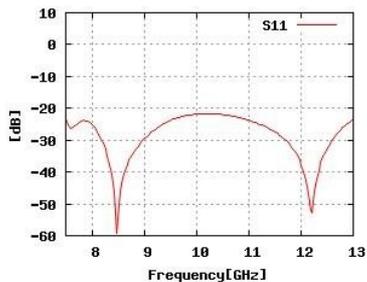


図 3.97: S11

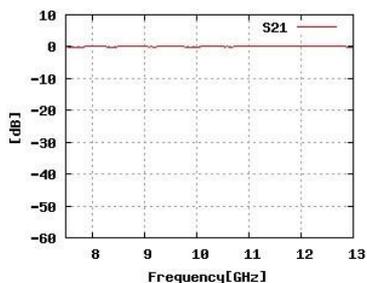


図 3.98: S21

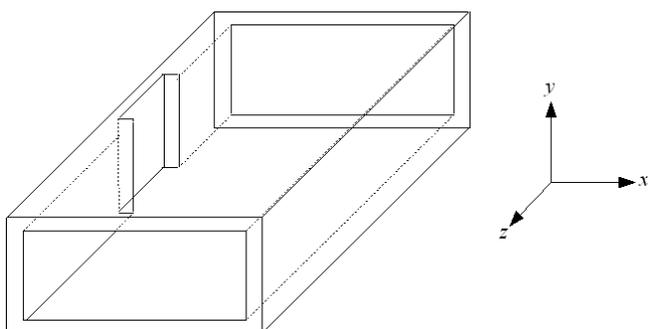


図 3.100: 側面が減肉した導波管

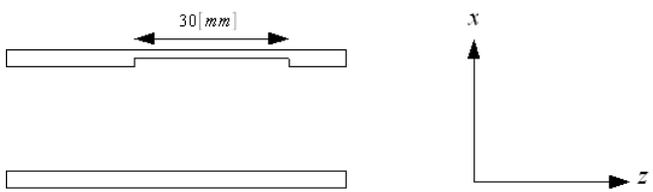


図 3.103: 側面が減肉した導波管

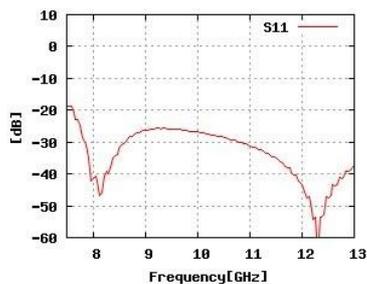


図 3.101: S11

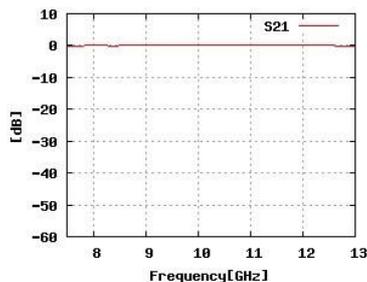


図 3.102: S21

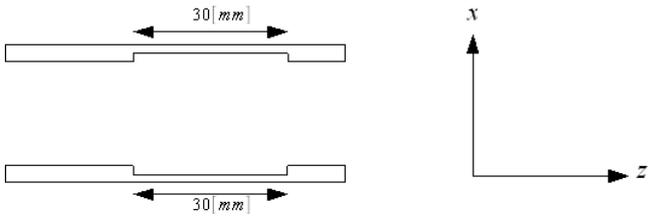


図 3.105: 側面、上底面が減肉した導波管

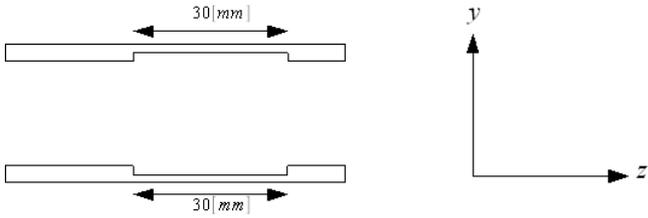


図 3.107: 側面、上底面が減肉した導波管

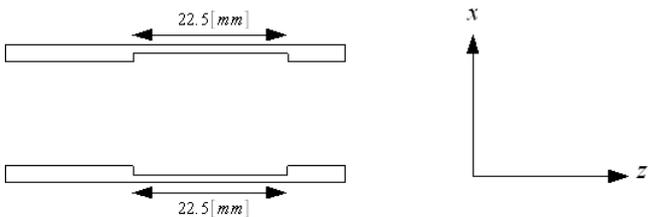


図 3.109: 側面、上底面が減肉した導波管

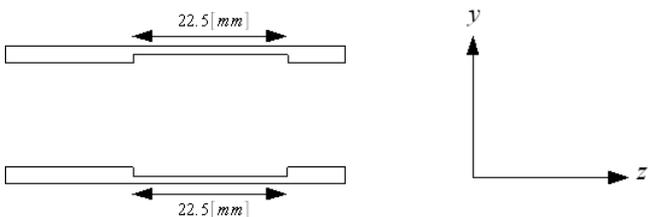


図 3.110: 側面、上底面が減肉した導波管

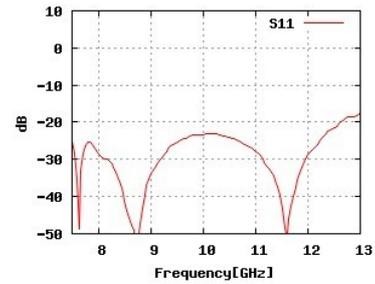


図 3.104: S11

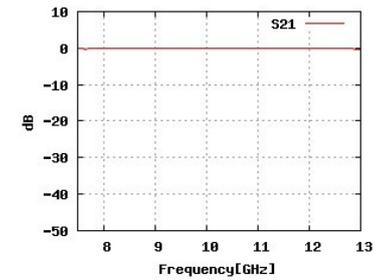


図 3.106: S21

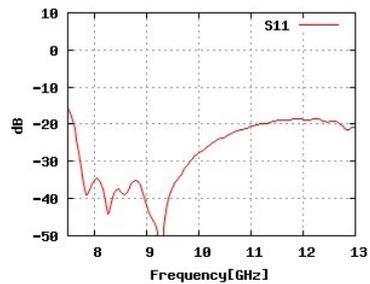


図 3.108: S11

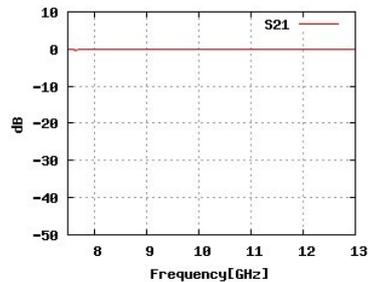


図 3.111: S21

### ・考察

導波管内の減肉(流体等による摩耗)の場合においても、亀裂と同様に検出が可能であることが分かる。

ただし、S21 側には変化がほとんど表れておらず、S11 側でのみ判断が可能である。これは亀裂の場合は外部へ放射される電磁波が大部分を占めており、減肉の場合は外部へ一切電磁波が漏えいしないため割合としてはそれほど通過波には影響を及ぼさないためと考えられる。

また S11 の山の中心の周波数における波長がちょうど減肉部の長さと一致している。おそらく減肉部で共振を起こし、反射したのだと考えられる。

## 4. 結論及び課題

第一として、電磁界解析の手法としてFDTD法の理論について述べた。第二に、矩形導波管の理論とFDTD法を用いた矩形導波管の解析手法について述べた。第三に亀裂を有する矩形導波管、内部に減肉部を有する矩形導波管の通過特性、反射特性をFDTD法を用いて解析を行った。本手法では導波管内の伝搬式を波源に適用することにより解析する伝搬モードを限定し、高次モードの影響を排除した。また従来用いられているハードソースを用いた解析からソフトソースを用いた解析に切り替えることにより、通過特性のみの評価から反射特性を含めた多面的な評価が可能となった。

本手法を用いて解析した結果以下が判明した。

- ・導波管上面、側面にモデリングした計4種の亀裂の内2種の検出が可能。
- ・通過特性、反射特性に影響の出る周波数からおおよその亀裂長を推測可能。
- ・亀裂のみならず導波管内の変形に対しても検出が可能。

ただし、幾つかの点で問題を残すことになった。

まず第一に上記の結果とからも言えることだが、4種の亀裂の内2種の亀裂が検出可能である一方、残りの2種は検出することが不可能であるという点。

第二に遮断周波数が存在するため、亀裂が大きすぎると遮断周波数以下の周波数帯に通過特性の落ち込みや反射特性の上昇が遮断周波数以下の周波数帯に埋もれるため、検出可能な種類の傷であっても検出できないものがある点。

第三に仮に亀裂が検出できた場合に、亀裂の大きさが判明しても、亀裂の位置が検出できない点。

以上の3つの問題点は以下のように研究を進めることで解決できると考えられる。

- ・伝搬モードを用いて解析を行う。今回解析に用いたモードは  $TE_{10}$  モードであるが、高次モードの  $TE_{11}$  モード、 $TM$  モードの最低次モード  $TM_{11}$  モード及びさらに高次モードを使用することにより、より多くの以上を検出可能だと考えられる。ただし、各モード毎に遮断周波数が異なるため、波源の特性などに十分注意が必要である。
- ・通過特性、反射特性以外に位相を算出することにより、反射波、通過波の遅延を算出し、亀裂位置を算出可能であると考えられる。

## 謝辞

本研究を遂行するにあたり、学部4年から修士2年までの3年間御指導頂いた本島邦行准教授に感謝の意を表すと共に、厚く御礼申し上げます。また、修士学位論文の副査を引き受けて下さった山越芳樹教授、弓仲康史准教授に厚くお礼申し上げます。

数値計算を遂行するにあたり、三次元吸収境界条件ライブラリを提供して頂いた植松由美氏、PML 吸収境界条件の仕様書を提供して頂いた阿部真也氏にお礼申し上げます。

本島研究室の発展と研究生並びに卒業された方々のご多幸を祈り、御礼の言葉とさせていただきます。

## 文献

- [1] 宇野亨, “FDTD 法による電磁界およびアンテナ解析,” コロナ社,1998.
- [2] 上崎 省吾 「電波工学 第2版」
- [3] A. Taflove,S.C. Hagness, “Computational Electrodynamics,The Finite-Difference Time-Domain Method,third edition,” Artech House,2005.
- [4] J.P. Berenger, ”A perfectly matched layer for absorbingofelectromagneticwaves”  
.,J.Comput.Phys.,vol114,no.2,pp.185-200,1994.
- [5] J.P. Berenger, ”Perfect matched layer for the FDTDsolution of wave-structure interaction problem” ,IEEE Trans.Antennas&Propag.,vol.AP-44,no.1,pp.110-117,1996.
- [6] 植松由美, ”PC クラスタを用いた3次元 FD-TD 法シミュレータ開発,” 平成 14 年度 学士学位論文