

円環板および円形境界を含む薄肉構造の
非線形振動に関する研究

平成29年度
2018年3月

群馬大学大学院 工学研究科
工学専攻 先端生産システム工学領域

岡田賢二

目次

第1章 序論	1
1.1 研究背景	1
1.2 研究目的	2
1.3 研究概要	3
参考文献	6
第2章 外周自由と内周固定の円環板の非線形振動	9
2.1 緒言	9
2.2 実験要領	10
2.2.1 外周自由と内周固定の円環板	10
2.2.2 板の基本特性の測定	10
2.2.3 非線形振動応答の測定	12
2.3 解析要領	13
2.3.1 解析モデルと運動方程式	13
2.3.2 支配方程式の無次元化	18
2.3.3 変数変換	20
2.3.4 たわみの関数の決定	21
2.3.5 応力関数の決定	22
2.3.6 多自由度系への変換	41
2.3.7 解析条件	52
2.3.8 初期たわみと境界における面内変位の決定方法	52
2.4 カオス振動の評価	54
2.5 結果および検討	54
2.5.1 基本特性	54
2.5.2 周波数応答曲線	56
2.5.3 カオス振動	59
2.5.4 主成分分析	61
2.6 結言	66

参考文献	67
第3章 外周固定と内周自由の円環板の非線形振動実験	69
3.1 緒言	69
3.2 外周固定と内周自由の円環板	70
3.3 実験要領	71
3.3.1 無次元の導入	71
3.3.2 温度管理	71
3.4 結果および考察	72
3.4.1 板の基本特性	72
3.4.2 周波数応答曲線	73
3.4.3 時系列波形, 周波数分析結果, ポアンカレ写像図	74
3.4.4 短時間間隔の周波数分析結果	76
3.4.5 最大リャプノフ指数	76
3.4.6 カオス振動に寄与する振動モード	77
3.5 結言	80
参考文献	82
第4章 はりと円板の結合要素の非線形振動実験	84
4.1 緒言	84
4.2 はりと円板の結合要素	85
4.3 無次元化	87
4.4 実験要領	87
4.5 結果及び考察	88
4.5.1 結合要素の基本特性	88
4.5.2 周波数応答曲線	90
4.5.3 非周期応答	91
4.6 結言	95
参考文献	96
第5章 結論	98
謝辞	100
関連論文	101

第1章 序論

1.1 研究背景

近年、Micro Electro Mechanical Systems (MEMS) 技術の発達により、センサやアクチュエータなど機械要素の小型化や軽量化が進んでいる。それに伴い、機械要素には薄肉の構造要素が用いられる。薄肉の構造要素には、円環板やはり円板を結合した要素など円形境界を有する薄肉板がある。薄肉の円環板はセンサのダイヤフラム等に用いられる。薄肉のはり円板を結合した要素はMEMS スキャナ等に用いられる。薄肉板に周期的な外力が作用し大振幅応答が発生すると、たわみと面内変位の連成により非線形振動が発生する。非線形振動では、線形の振動応答に比べ幅広い振動数領域で共振応答を示す。さらに、特定の条件下ではカオス振動の発生も予想される。カオス振動は加振振動数以外に様々な振動数成分を含む。非線形振動やカオス振動の発生は機械要素のセンサーとしての計測精度や耐久性に影響を及ぼし、その信頼性の低下につながり得る。従来では、板の厚肉化による剛性の向上により非線形振動への対策が可能であった。しかし、近年のMEMS 構造系の微細化に伴い、その対策が困難な場合もある。そこで、薄肉板の動的な振動挙動を予め考慮した設計、すなわち動的設計が必要となる。

薄肉板の動的設計をするためには、非線形振動やカオス振動に関する基礎資料が求められる。基礎資料として、カオス振動の発生を避けるためにカオス振動の発生する条件の解明が必要である。さらに、カオス振動が発生した際に薄肉板にどのような影響があるか予見するため、カオス振動がどのような応答の特徴を有するか解明する必要がある。一般に、板に発生するカオス振動ではモード間の連成による場合が多い。この場合、カオス振動応答では複数の振動モードが同時に誘起される。カオス振動は非周期的な応答であるため、誘起された振動モードの不規則な変動が予想される。以上より、動的設計の基礎資料としてカオス振動の発生する条件とカオス振動に寄与する振動モードの時間変化の解明が工学上重要となる。

1.2 研究目的

薄肉板に発生する非線形振動は板の形状や境界条件に対し敏感に影響を受ける。そのため、板の形状や境界条件ごとに、発生する非線形振動やカオス振動の動的挙動を詳細に調べる必要がある。動的挙動を調べる方法として、実験と解析がある。実験では、現象の詳細な分析を行い特徴的な現象の把握が可能である。解析では、パラメータを変化させた際の現象の変化を明らかにできる。

円板や円環板の非線形性を考慮した振動問題に関して、多くの報告がされている。Efstathiades[1]は初期たわみを有する円板の非線形解析をガラーキソ法を用いて行った。境界条件が自由の円板において境界条件を満足するたわみと応力関数を解析的に示した。Sridharらは文献[2]において一様加振を受ける円板の非線形振動について軸対称モードのみを考慮した解析をおこなった。ついで文献[3]にて、軸対称モードと非対称モードを考慮した解析を行った。軸対称モードと非対称モードを考慮した解析では、多重尺度法と摂動法を用いて非線形の支配方程式を解いた。その結果、内部共振応答における定在波だけでなく進行波の存在の可能性を示した。Yeoら[4]はSridharら[3]の研究を修正し、定常応答が定在波だけでなく進行波を含む可能性を示した。Yamakiら[5, 6]は外周固定の円板について解析と実験を行った。解析では、軸対称モードのみを考慮した。座標関数としてべき関数を用い、適合条件式を満足する応力関数を示した。板の境界では半径方向の面内変位を導入している。解析と実験より、面内圧縮変位を受ける円板の非線形振動特性を詳細に明らかにした。Hadianら[7]は調和外力を受ける外周固定の円板の非線形振動解析を多重尺度法を用いて行った。解析では対称モードのみを考慮している。安定性について検討を行い、カオス振動を導く周期倍加分岐の存在を示した。Touzéら[8, 9]は外周辺自由の円板の非対称モードの解析と実験を行い、縮退モードにおける解の安定性について示した。Abdel-Rahmanら[10]は、静的荷重が作用した円環板の軸対称モードの固有振動数を非線形項を考慮してシューティング法により計算した。その結果、静的変形は固有振動数には大きな影響を示すが振動モードへの影響は小さいことを示した。さらに、面内応力の存在が固有振動数に大きな影響を持つと示した。Camier[11]らは、外周自由の円板に関して初期不正が固有振動数と振動モードに与える影響を調べた。さらに、周波数応答曲線において不安定領域を調べた。Arafatら[12]は軸対称モードのみを考慮し、熱荷重により最低次と二次の振動モードの固有振動数比が1:3となる内部共振条件を満たす円環板の非線形強制振動の解析を行った。Maruyamaら[13]は、外周辺が単純支持された円板の非線形振動実験を行い、カオス振動応答における応答振幅の増減に対する振動モードの寄与の変動を示した。回転する円環板についても、非線形振動に関する報告[14]-[17]がある。

多くの研究はカオス振動の発生に注目しており，円環板のカオス振動に寄与する振動モードの時間変化を実験的に調べた報告は見受けられない。

はりと板を組み合わせた要素の研究では，複数の研究者により報告がされている。Ataman ら [18] は櫛歯型ねじりマイクロスキナの係数励振における動的挙動の解析を行った。駆動周波数に対する応答の不安定領域を示すとともに，減衰が応答に与える影響を示した。Zhao ら [19] は MEMS スキャナモデルの動特性の非線形解析を行った。ルンゲクッタ法を用いて定常周期応答を計算し，非線形の応答曲線の発生を確認した。解析ではミラー部を剛体と仮定しモデル化を行い，有限要素法によりモデル化の妥当性を検証した。Daqaq[20] らは直流電圧を印加した MEMS スキャナモデルの曲げとねじりモードの共振応答について解析を行い，2:1 の内部共振における解の不安定性を示した。Khatami ら [21] は静電力と機械的な衝撃を受けるマイクロミラーの動特性の非線形解析を行い，衝撃荷重と静電力駆動との相互の影響が応答の不安定性のしきい値に与える影響を示した。Shabani ら [22] はプルイン条件近傍の MEMS スキャナモデルの解析を行った。調和加振の振幅を増加させ，カオス状応答の発生を示した。これらの研究では，解析モデルをばねと剛体板の組み合わせで仮定しており，実験におけるねじり振動モードと曲げ振動モードの非線形連成振動については十分解明されたとはいえない。

本研究では，円環板とはりと板を組み合わせた形状の薄肉要素について振動実験を行い，カオス振動における特徴的な現象としてカオス振動に寄与する振動モードとその寄与率の時間変化を詳細に分析することを目的とする。特に，カオス振動の応答波形に主成分分析を適応し，カオス振動に寄与する振動モードとその寄与率の時間変化に注目し詳細な分析を行う。

1.3 研究概要

本研究では円環板と，はりと円板を組み合わせた形状の結合要素について非線形振動実験を行った。円環板のたわみ方向の境界条件として，外周自由・内周固定と外周固定・内周自由の場合を考えた。結合要素では軸方向に引張荷重を与えた状態で実験を行った。実験ではまず，板の基本特性として自重下での変形形状，線形固有振動数と固有振動モード，ならびに復元力特性を測定した。復元力特性は集中荷重による静たわみから得た。さらに，板に横方向の様な周期加振加速度を与え，振動実験を行った。非線形の周波数応答曲線を収録したのち，カオス振動の発生した周波数領域において応答波形の解析を行った。分析には周波数分析，ポアンカレ写像図，最大リャプノフ指数ならびに主成分分析を用いた。特に主成分分析に用いる時系列波形の時間的な等

分割による分析を行い，カオス振動に寄与する振動モードとその寄与率の時間変化に注目した．実験に加え，円環板の解析方法を示す．解析では初期たわみと境界における面内変位を与えられる．さらに，軸対称モードと非対称モードを考慮できる．実験における外周自由と内周固定の円環板の結果を解析と比較した．

以下，各章の概要を述べる．

第1章は本論文の緒言である．

第2章では，外周自由と内周固定の円環板の非線形振動の実験と解析結果を示す．円環板は初期たわみを有する．実験では，板の基本特性として自重下での変形形状，線形固有振動数と固有振動モードならびに復元力特性として集中荷重による静たわみを測定した．板に横方向周期加振加速度を与え，加振実験を行った．加振振動数を掃引して周波数応答曲線を得た．周波数応答曲線において，カオス状応答が発生した振動数で応答の時系列波形とポアンカレ写像図を収録した．時系列波形の分析には，周波数分析，最大リャプノフ指数と埋め込み次元の関係，主成分分析を用いた．特に，特に節直径をもたない0モードと節直径を一本有する1bモードの線形固有振動数近傍で発生したカオス振動について詳細な分析を行った．解析では，まずハミルトンの原理を用いて基礎式を得る．座標関数として半径方向はべき級数，周方向は正弦関数と余弦関数を用いた．適合条件式から応力関数を決定する．応力関数の同次解は解析的に決定される．同次解を用いて定数変化法により非同次解は決定される．面内方向の境界条件により同次解に含まれる未知数は決定される．面内方向の境界条件として，固定辺において面内変位を与えた．ガラーキソ法を用いて基礎式を有限多自由度系へ変換し，非線形連立常微分方程式を得る．たわみを静たわみと静的平衡位置を基準とした動的応答の和で表現する．静たわみに関する非線形連立方程式から自重下での変形形状と復元力特性を得る．外力と非線形項を省略した動的応答についての非線形連立常微分方程式から線形固有振動数と固有振動モードを得る．得られた固有振動モードに基づき非線形連立常微分方程式を基準座標系へと変換する．Runge-Kutta-Gill法による直接数値積分により周波数応答曲線と応答の時系列波形を得た．得られた実験結果と解析結果を比較した．

第3章では，外周固定と内周自由の円環板の非線形振動実験の結果を示す．円環板は，実験時の温度条件で面内方向の圧縮応力が作用するように固定された．まず，板の基本特性を測定した．基本特性として，板の自重下での形状，線形固有振動数と固

有振動モードならびに復元力特性を測定した。ついで、板に横方向加振加速度を与え、加振実験を行った。加振振動数の掃引は、最低次固有振動モードの固有振動モード近傍で行った。最低次振動モードの主共振応答で発生したカオス状応答を収録し分析を行った。特に、主成分分析によりカオス振動に寄与する振動モードの変動と、その寄与率の時間変化を詳細に調べた。

第4章では、はりと円板を組み合わせた結合要素についての非線形振動実験の結果を示す。結合要素に軸力を加え、最低次曲げ振動モードとねじり振動モードの固有振動数の変化を測定した。その後、複数の軸力の下で、自重下での変形形状と復元力特性を測定した。結合要素に代表的な軸引張力を与えた状態で加振実験を行った。加振実験では、結合要素に一樣な横方向周期加振加速度を与えた。加振振動数の掃引は、最低次の曲げ振動モードの固有振動数近傍で行った。代表的な加振振動数において、カオス状応答の時系列波形とポアンカレ写像図を収録し、分析を行った。時系列波形の分析には、周波数分析、最大リャプノフ指数ならびに主成分分析を用いた。特に、短時間間隔に分割した時系列波形に主成分分析を適用し、最低次曲げ振動モードとねじり振動モードの寄与率の時間変化を詳細に調べた。

第5章は本論文の結言である。

参考文献

- [1] G. J. Efstathiades, A new approach to the large-deflection vibrations of imperfect circular disks using Galerkin's procedure, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 16, Issue 2, (1971), pp. 231-253.
- [2] S. Sridhar, D. T. Mook, A. H. Nayfeh, Non-linear resonances in the forced responses of plates, part 1: Symmetric responses of circular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Volume 41, Issue 3, (1975), pp. 359-373.
- [3] S. Sridhar, D. T. Mook, A. H. Nayfeh, Non-linear resonances in the forced responses of plates, part II: Asymmetric responses of circular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, Issue 2, (1978), pp. 159-170.
- [4] M. H. Yeo, W. K. Lee, Corrected solvability conditions for non-linear asymmetric vibrations of a circular plate, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, Issue 4, (2002), pp. 653-665.
- [5] N. Yamaki, K. Otomo, M.Chiba, Non-linear vibrations of a clamped circular plate with initial deflection and initial edge displacement, part I: Theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 79, Issue 1, (1981), pp. 23-42.
- [6] N. Yamaki, K. Otomo, M.Chiba, Non-linear vibrations of a clamped circular plate with initial deflection and initial edge displacement, part II: Experiment, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 79, Issue 1, (1981), pp. 43-59.
- [7] J. Hadian, A. H. Nayfeh, Modal interaction in circular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, Issue 2, (1990), pp. 279-292.
- [8] C. Touzé, O.Thomas, A. Chaigne, Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part 1: Theory *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 258, Issue 4, (2002), pp. 649-676.
- [9] O. Thomas, C. Touzé, A. Chaigne, Asymmetric non-linear forced vibrations of free-edge circular plates. Part II: Experiments *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 265, Issue 5, (2003), pp. 1075-1101.

- [10] E. M. Abdel-Rahman, W. F. Faris, A. H. Nayfeh, Axisymmetric natural frequencies of statically loaded annular plates, *Shock and Vibration*, Vol. 10 (2003) pp. 301-312.
- [11] C. Camier, C. Touzé, O. Thomas, Non-linear vibrations of imperfect free-edge circular plates and shells, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, Vol. 28, Issue 3, (2009), pp. 500-515.
- [12] H. N. Arafat, A. H. Nayfeh, Modal interactions in the vibrations of a heated annular plate, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol.39, (2004), pp. 1671-1685.
- [13] S. Maruyama, K. Nagai, Y. Hayashi, T. Yamaguchi, Experiments on chaotic Vibrations of a simply supported circular plate with initial deformation, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.75, No.753, (2009), pp.1258-1263.
- [14] T. Torii, K. Yasuda, T. Toyoda, Nonlinear oscillation of a rotating disc excited at a fixed point in space (combination tones near primary resonance point), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol.60, No.570, (1994), pp.386-393.
- [15] A. Raman, C. D. Mote Jr, Non-linear oscillations of circular plates near a critical speed resonance, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 34, Issue 1, (1999), pp. 139-157.
- [16] A. Ramana, C. D. Mote, Effects of imperfection on the non-linear oscillations of circular plates spinning near critical speed, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 36, Issue 2, (2001), pp. 261-289.
- [17] A. Jana, A. Raman, Nonlinear dynamics of a flexible spinning disc coupled to a precompressed spring, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 40, Issue 1, (2005), pp. 1-20.
- [18] C. Ataman, O. Kaya, H. Urey, Analysis of parametric resonances in comb-driven microscanner, *Proceedings of the SPIE*, Vol. 5455, (2004), pp. 128-136.
- [19] J. P. Zhao, H. L. Chen, J. M. Huang, A. Q. Liu, A study of dynamic characteristics and simulation of MEMS torsional micromirrors, *Sensors and Actuators A: Physical*, Vol. 120, Issue 1, (2005) , pp. 199-210.

- [20] M. F. Daqaq, E. M. Abdel-Rahman, A. H. Nayfeh, Two-to-one internal resonance in microscanners, *Nonlinear Dynamics*, Vo. 57, (2009), pp.231-251.
- [21] F. Khatami, G. Rezazadeh, Dynamic response of a torsional micromirror to electrostatic force and mechanical shock, *Microsystem Technologies*, Vol.15, Issue 4, (2009), pp. 535-545.
- [22] R. Shabani, S. Tariverdilo, G. Rezazadeh, A. P. Agdam, Nonlinear vibrations and chaos in electrostatic torsional actuators, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 12, Issue 6, (2011), pp. 3572-3584.

第2章 外周自由と内周固定の円環板の非線形振動

2.1 緒言

円板や円環板など円柱座標系を導入した板の線形解析は Leissa[1] により詳細にまとめられている。板の幾何学的非線形性を考慮した非線形振動の解析方法は、Nayfeh[2] によりまとめられている。幾何学的非線形性を考慮した円環板の研究では、主に回転円環板について多くの報告がされてる [3]-[6]。一方、非回転の円環板では固有振動数と固有振動モードに関する研究 [7, 8] が報告されている。しかし、円環板の非線形振動では、境界で温度変化を与えた際の非線形振動特性についての研究 [9] はあるものの、カオス振動における振動モードの寄与や挙動に注目した研究は見当たらない。

本章ではたわみ方向の境界条件が外周自由と内周固定の円環板のカオス振動についての実験と解析を行った。実験では、まず板の基本特性として自重下での変形形状、線形固有振動数と固有振動モードならびに復元力特性を得た。ついで、板に横方向周期加振加速度を与え、非線形振動実験を行った。加振加速度振幅を一定とし、加振振動数を掃引し周波数応答曲線を得た。カオス状応答を示す代表的な加振振動数において時系列波形とポアンカレ写像図を収録した。時系列波形の分析には周波数分析、最大リャプノフ指数ならびに主成分分析を用いた。カオス振動に寄与する振動モードの時間変化を調べるため、主成分分析に用いる時系列波形を短時間間隔に分割し分析を行った。解析については、文献 [2] の方法では同じ数の節直径を有する振動モードの連成のみ考慮されているため、カオス振動で多くの振動モードが同時に誘起される場合には適用できない。そこで、円環板の軸対称モードと非対称モードを考慮可能な解析を行った。板の座標関数として半径方向は、べき級数を用い、周方向は正弦関数と余弦関数を用いた。応力関数の同次解は解析的に決定される。応力関数の非同次解は同次解を用いて定数変化法により決定した。基礎式にガラキン法を適用し、無限自由度系から有限多自由度系へ変換する。これより、たわみに関する非線形連立常微分方程式を得る。たわみを静たわみと静的平衡位置を基準とした動的応答の和で表現する。静たわみに関する非線形連立方程式から自重下での変形形状と復元力特性を得る。外力と非線形項を省略した動的応答についての非線形連立常微分方程式から線形固有振動数と固有振動モードを得る。得られた固有振動モードに基づき非線形連立常微分方程式を基準

座標系へと変換する。Runge-Kutta-Gill法による直接数値積分により応答の時系列波形を得た。解析では板の固定や温度変化による影響を考慮し、板の固定境界において面内変位を与える。面内変位は実験で得られた板の基本特性をもとに決定した。

2.2 実験要領

2.2.1 外周自由と内周固定の円環板

実験における外周自由と内周固定の円環板を図2.1に示す。円環板中央に原点をとり、円柱座標系を導入する。半径方向に r 軸，周方向に θ 軸， $r-\theta$ 面に対し垂直方向に z 軸を定める。ただし角度 θ は弧度法により表記する。円環板の内半径は $r_1 = 11.4\text{ mm}$ ，外半径は $r_2 = 57.0\text{ mm}$ である。円環板の外半径に対する内半径の比は $r_1/r_2 = 0.20$ である。円環板は板厚 $h = 0.20\text{ mm}$ のリン青銅板から切り出した。リン青銅板のヤング率は $E = 107\text{ GPa}$ ，密度は $\rho' = 8.7 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ であり，ポアソン比は $\nu = 0.33$ とする。

外周自由と内周固定の円環板は以下の手順で作製した。まず，円環板をリン青銅板から切り出した。ついで，円環板を固定するための段付き支柱と円筒形ブロックを作製した。段付き支柱は異なる直径を有する円柱を組み合わせた形状である。円環板の中央の円孔に段付き支柱を差し込み，円筒形ブロックで挟む。円筒形ブロックの上部はナットで固定される。これより，外周自由と内周固定の境界条件は得られる。なお，段付き支柱中心から円環板中央の偏心量は，最大で板の外直径に対して 1×10^{-3} 倍程度と小さい。円環板の表面はレーザー変位計によるたわみの測定精度を向上させるため，アクリル製ラッカーにより白色塗装されている。塗装後の平均板厚は $h' = 0.27\text{ mm}$ であり，白色塗装を考慮した板の密度は $\rho = 6.9 \times 10^3\text{ kg/m}^3$ である。

2.2.2 板の基本特性の測定

板の基本特性として，自重下での変形形状，線形固有振動数と固有振動モードならびに復元力特性を以下のように得た。基本特性を得る際に使用する円環板近傍の計測装置を図2.2に示す。装置に1から3の番号を付加した。まず，板の自重下での変形形状を測定する。板上方の計測用スライダ1にレーザー変位計2を設置する。計測用スライダを用いてレーザー変位計を面内方向へ移動し，板の各点のたわみ分布を測定した。ついで，線形固有振動数と固有振動モードを測定した。発信器から正弦波波形を生成し，アンプにより増幅する。増幅された信号によりスピーカー3を駆動し，微小音圧を発生させる。微小音圧により生ずる板の微小な共振応答を，レーザー変位計を用いて計測する。レーザー変位計で計測された微小応答を電圧計に入力し，その振幅値を測定する。加振振動数を変化させた際の応答振幅の増加から，線形固有振動数を得

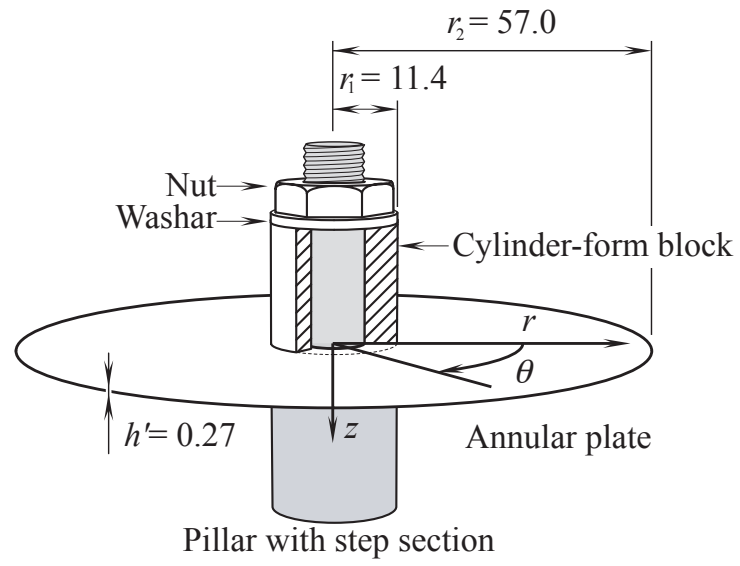


Fig 2.1: Annular plate.

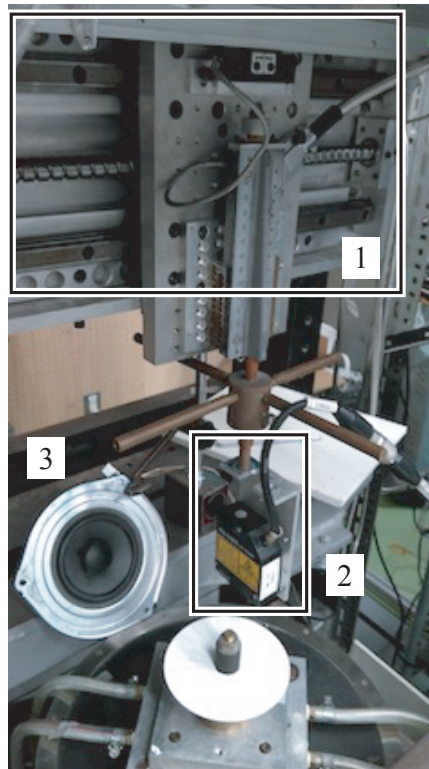


Fig 2.2: Experimental apparatus to measure fundamental properties of the plate.

た．線形固有振動数近傍にて板を微小音圧で加振し，固有振動モードを得る．固有振動モードを特定するために，固有振動モードの節線では振幅が減少し，節線を境に発信器から生成される加振正弦波波形と板の微小な共振応答の位相が反転することを利用した．最後に復元力特性として，静的集中荷重が作用した際の板の静たわみを測定した．図 2.3 に示す二重片持ちはり構造を有するロードセルを用いて板の一点に集中荷重を加える．板は自身の復元力と集中荷重により平衡位置で静止する．この際の，静たわみと集中荷重を記録する．逐次集中荷重を変化させ，復元力特性を得る．

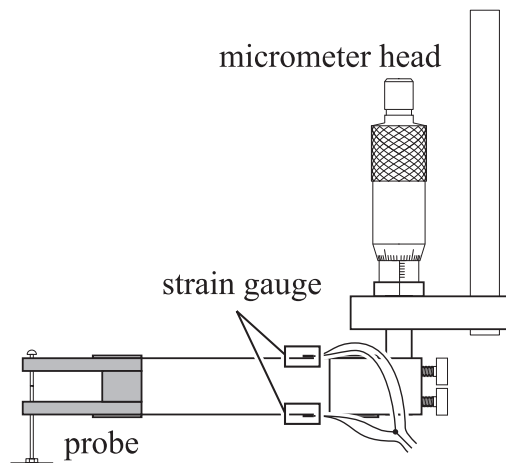


Fig 2.3: Load cell with the double cantilever beam.

2.2.3 非線形振動応答の測定

加振実験に用いる実験装置群を図 2.4 に示す．すべての装置には 1 から 16 の番号を付している．円環板への加振は 1 から 5 の装置を用いる．加振制御装置 1 により正弦波信号が生成される．信号は電力増幅器 2 により増幅される．増幅された信号により，電磁式加振器 3 は加振台 4 を駆動する．板は予め加振台に固定フレームを介して取り付けしておく．板には固定フレームを介して横方向周期加振加速度が作用する．加速度計 5 を固定フレームに取り付け，板に作用する加速度を測定する．測定された加速度を加振制御装置に帰還させ，加振振動数を掃引中も一定の加振加速度振幅を維持する．

板の動的応答の測定には 6 から 8 の装置を用いる．レーザー変位計 6 は加振台の周期変位を測定する．レーザー変位計 7 は板の動的応答と加振台の周期変位の和を測定する．レーザー変位計コントローラ 8 を用いて，レーザー変位計 7 の信号から 6 の信号の差をとる．この操作により，板の動的応答が得られる．なお，レーザー変位計は試験片上方に設置された計測用スライダ 9 に取り付けられており，板上の移動が可能である．

計測装置 10 から 16 を用いて波形の収録ならびに分析を行う．周波数応答曲線は加振

振動数の掃引により得られる。レーザー変位計により得られた動的応答は電圧計 10 により実行値振幅に変換される。板に作用する加速度の加振振動数は、加振制御装置から発信される周期信号を周波数カウンタ 11 に入力し計測される。動的応答の実効値振幅と加振振動数をコンピュータ 12 で逐次記録し、非線形の周波数応答曲線は得られる。動的応答の収録には、スペクトルアナライザ 13 を用いた。得られた動的応答の時系列波形をコンピュータに転送し、周波数分析結果、最大リアプノフ指数ならびに主成分分析結果を得る。ポアンカレ写像図は以下の手順で収録した。動的応答は微分器 14 により、速度に変換される。動的応答と速度は加振周期に同期して逐次収録される。加振周期と同期するための信号は、位相計 15 とパルス発生器 16 を用いて生成した。加振制御装置から発信させる周期信号を位相計に入力し、入力波形の最大振幅を検出する。その最大振幅をもとに、任意の位相角のパルス波形をパルス発生器で生成する。得られたたわみと速度をコンピュータに転送し、ポアンカレ写像図は得られる。

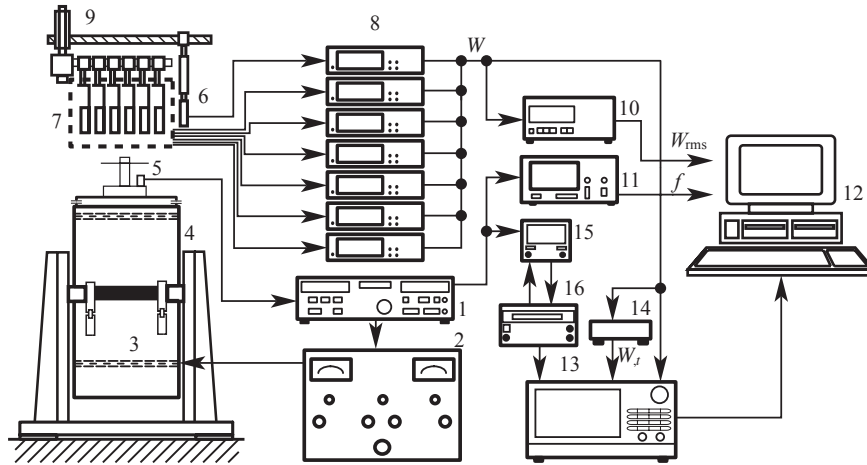


Fig 2.4: Diagram of vibration test apparatus.

2.3 解析要領

2.3.1 解析モデルと運動方程式

円環板の解析モデルを図 2.5 に示す。板に円柱座標系を導入する。円環板中央に原点 o をとり、半径方向に r 軸、周方向に θ 軸、 $r - \theta$ 面に直交する方向に z 軸をとる。板の寸法は、原点から内周辺までの半径を r_1 、外周辺までの半径を r_2 、板厚を h とする。板の諸量として、密度 ρ 、ヤング率 E 、ポアソン比 ν とする。板の横方向には、加速度 a が一様に作用する。加速度 a は一定加速度 a_s と周期加速度 $a_d \cos \Omega t$ の和で表される。ここで、 a_d は周期加振加速度振幅、 Ω は加振角振動数、 t は時間である。加速度により

生じる半径方向と周方向への面内変位をそれぞれ U , V とし、たわみを W とする。板が有する初期たわみは W_0 とする。

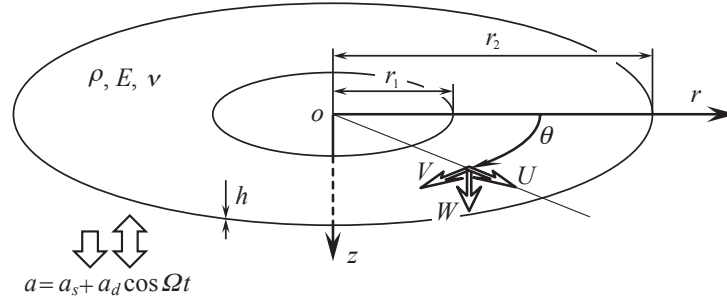


Fig 2.5: Annular plate.

薄肉円環板の非線形振動解析を行う上で、つぎの仮定を導入する。

1. 面内ひずみが支配的で、その大きさは十分小さい。面内応力が支配的で、中央面に垂直な応力は面内応力より十分小さく省略できる。ひずみと応力の関係はフックの法則に従う。
2. 円環板の板厚 h は板の代表長さである板の外半径 r_2 に比べ十分小さい。
3. 面内変位 U , V の絶対値は板厚 h に比べ十分小さく、代表長さに対する面内変位 U , V の比率は面内ひずみと同程度である。たわみ W は板厚 h と同程度とする。
4. 円環板の曲げ変形に関して、Kirchhoff-Love の仮説が成立する。即ち、中央面に垂直な断面は変形後においても中央面に垂直で平面を保つ。
5. たわみ W による板の傾斜の大きさは 1 に比べて十分小さい。しかし、傾斜の二乗や相乗積は面内ひずみの大きさと同程度とする。一方、面内ひずみの二乗、たわみの高階微分の二乗や相乗積は高次の微小量として省略する。
6. たわみ方向の慣性力が主であり、面内方向の慣性力や断面の回転慣性力は省略する。

円環板に生じる r , θ 方向の垂直ひずみ ε_r , ε_θ とせん断ひずみ $\gamma_{r\theta}$ は次式で表される。なお、式中のカンマの後の添字はその文字の偏微分を表す。

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r0} - z (W_{,rr} - W_{0,rr}) \quad (2.1a)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_{\theta 0} - z \left\{ \frac{1}{r} (W_{,r} - W_{0,r}) + \frac{1}{r^2} (W_{,\theta\theta} - W_{0,\theta\theta}) \right\} \quad (2.1b)$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{r\theta 0} - 2z \left\{ \frac{1}{r} (W_{,r\theta} - W_{0,r\theta}) - \frac{1}{r^2} (W_{,\theta} - W_{0,\theta}) \right\} \quad (2.1c)$$

ここで, ε_{r0} , $\varepsilon_{\theta 0}$, $\gamma_{r\theta 0}$ は板中央面のひずみであり, 次式で示される.

$$\varepsilon_{r0} = U_{,r} + \frac{1}{2} (W_{,r}^2 - W_{0,r}^2) \quad (2.2a)$$

$$\varepsilon_{\theta 0} = \frac{1}{r} (U + V_{,\theta}) + \frac{1}{2r^2} (W_{,\theta}^2 - W_{0,\theta}^2) \quad (2.2b)$$

$$\gamma_{r\theta 0} = \frac{1}{r} U_{,\theta} + V_{,r} - \frac{V}{r} + \frac{1}{r} (W_{,r} W_{,\theta} - W_{0,r} W_{0,\theta}) \quad (2.2c)$$

ハミルトンの原理を用いて板の運動方程式と境界条件を得る. ハミルトンの原理は次式で示される.

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L} dt = 0 \quad (2.3)$$

ただし, 上式において t_0 , t_1 は時間の境界である. \tilde{L} はラグランジアンであり次式で示される.

$$\tilde{L} = \tilde{T} - \tilde{U} - \tilde{V} \quad (2.4)$$

ここで, \tilde{T} は運動エネルギー, \tilde{U} はひずみエネルギー, \tilde{V} は外力によるポテンシャルエネルギーである.

運動エネルギー \tilde{T} は次式で示される.

$$\tilde{T} = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \rho h (U_{,t}^2 + V_{,t}^2 + W_{,t}^2) r dr d\theta \quad (2.5)$$

ひずみエネルギーは次式で示される.

$$\tilde{U} = \tilde{U}_p + \tilde{U}_b \quad (2.6)$$

\tilde{U}_p , \tilde{U}_b はそれぞれ, 面内伸縮によるひずみエネルギーと曲げによるひずみエネルギーであり次式で示される.

$$\tilde{U}_p = \frac{1}{2} E_p \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \left(\varepsilon_{r0}^2 + \varepsilon_{\theta 0}^2 + 2\nu \varepsilon_{r0} \varepsilon_{\theta 0} + \frac{1-\nu}{2} \gamma_{r\theta 0}^2 \right) r dr d\theta \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{U}_b = \frac{1}{2} D \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} & \left[(W_{,rr} - W_{0,rr})^2 + \left\{ \frac{1}{r} (W_{,r} - W_{0,r}) + \frac{1}{r^2} (W_{,\theta\theta} - W_{0,\theta\theta}) \right\}^2 \right. \\ & + 2\nu (W_{,rr} - W_{0,rr}) \left\{ \frac{1}{r} (W_{,r} - W_{0,r}) + \frac{1}{r^2} (W_{,\theta\theta} - W_{0,\theta\theta}) \right\} \\ & \left. + 2(1-\nu) \left\{ \frac{1}{r} (W_{,r\theta} - W_{0,r\theta}) - \frac{1}{r^2} (W_{,\theta} - W_{0,\theta}) \right\}^2 \right] r dr d\theta \quad (2.7b) \end{aligned}$$

ここで E_p と D はそれぞれ, 面内伸縮剛性と曲げ剛性であり次式で示される.

$$E_p = \frac{Eh}{1-\nu^2} \quad (2.8a)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.8b)$$

外力によるポテンシャルエネルギー \tilde{V} は次式で示される。

$$\tilde{V} = - \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \{ \rho h (a_s + a_d \cos \Omega t) + Q_s \delta(r - r_{qs}) \delta(\theta - \theta_{qs}) \} W r dr d\theta \quad (2.9)$$

ここで、 Q_s は板の座標 $(r, \theta) = (r_{qs}, \theta_{qs})$ に作用する集中荷重である。なお、 $\delta(r - r_{qs})$ ならびに $\delta(\theta - \theta_{qs})$ はディラックのデルタ関数である。

式 (2.5) から (2.9) を式 (2.4) に代入して、ラグランジアン \tilde{L} を得る。式 (2.3) にラグランジアン \tilde{L} を代入すると次式を得る。

$$- \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} [G_1(U, V, W) \delta U + G_2(U, V, W) \delta V + G_3(U, V, W) \delta W] r dr d\theta + B_1(U, V, W) + B_2(U, V, W) \right\} dt = 0 \quad (2.10)$$

上式が成り立つためには、仮想変位 δU , δV ならびに δW の係数 $G_1(U, V, W)$, $G_2(U, V, W)$ ならびに $G_3(U, V, W)$ はそれぞれ 0 であり、つぎの条件式が得られる。

$$G_1(U, V, W) = \rho h U_{,tt} - \left\{ N_{r,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta,\theta} + \frac{1}{r} (N_r - N_\theta) \right\} = 0 \quad (2.11a)$$

$$G_2(U, V, W) = \rho h V_{,tt} - \left\{ N_{r\theta,r} + \frac{1}{r} N_{\theta,\theta} + \frac{2}{r} N_{r\theta} \right\} = 0 \quad (2.11b)$$

$$G_3(U, V, W) = \rho h W_{,tt} + D \nabla^4 (W - W_0) - \left\{ \left(N_r W_{,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta} W_{,\theta} \right)_{,r} + \frac{1}{r} \left(N_r W_{,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta} W_{,\theta} \right) + \left(\frac{1}{r} N_{r\theta} W_{,r} + \frac{1}{r^2} N_\theta W_{,\theta} \right)_{,\theta} \right\} - \rho h (a_s + a_d \cos \Omega t) - Q_s \delta(r - r_{qs}) \delta(\theta - \theta_{qs}) = 0 \quad (2.11c)$$

ここで、式 (2.11a) から (2.11c) はそれぞれ、 r , θ ならびに z 方向の運動方程式である。ただし、式 (2.11c) において $\nabla^4 = \nabla^2 \nabla^2$ であり、ラプラスの微分演算子 ∇^2 はつぎの通りである。

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.12)$$

式 (2.10) の $B_1(U, V, W)$, $B_2(U, V, W)$ はそれぞれ境界における面内力と面外力の仮想仕事であり、次式で示される。

$$B_1(U, V, W) = \left[\int_0^{2\pi} (N_r \delta U + N_{r\theta} \delta V) r d\theta \right]_{r=r_1}^{r=r_2} \quad (2.13a)$$

$$B_2(U, V, W) = \left[\int_0^{2\pi} \left\{ \left(N_r W_{,r} + \frac{1}{r} N_{r\theta} W_{,\theta} + V_r \right) \delta W - M_r \delta W_{,r} \right\} r d\theta \right]_{r=r_1}^{r=r_2}$$

(2.13b)

上式は境界条件に対応し、境界条件を満足する関数を仮定することで、 $B_1(U, V, W)$ と $B_2(U, V, W)$ はそれぞれ 0 となる。なお、運動方程式 (2.11a) から (2.11c)、境界条件 (2.13a), (2.13b) において、 N_r , N_θ は r , θ 方向への面内力であり、 $N_{r\theta}$ は面内のせん断力である。 M_r , M_θ は曲げモーメントであり、 $M_{r\theta}$ はねじりモーメントである。 V_r は等価せん断力である。それぞれ、以下の式で示される。

$$N_r = E_p (\varepsilon_{r0} + \nu \varepsilon_{\theta 0}) \quad (2.14a)$$

$$N_\theta = E_p (\varepsilon_{\theta 0} + \nu \varepsilon_{r0}) \quad (2.14b)$$

$$N_{r\theta} = \frac{1}{2} (1 - \nu) E_p \gamma_{r\theta 0} \quad (2.14c)$$

$$M_r = -D \left[W_{,rr} - W_{0,rr} + \nu \left\{ \frac{1}{r} (W_{,r} - W_{0,r}) + \frac{1}{r^2} (W_{,\theta\theta} - W_{0,\theta\theta}) \right\} \right] \quad (2.14d)$$

$$M_\theta = -D \left\{ \frac{1}{r} (W_{,r} - W_{0,r}) + \frac{1}{r^2} (W_{,\theta\theta} - W_{0,\theta\theta}) + \nu (W_{,rr} - W_{0,rr}) \right\} \quad (2.14e)$$

$$M_{r\theta} = -(1 - \nu) D \left\{ \frac{1}{r} (W_{,r\theta} - W_{0,r\theta}) - \frac{1}{r^2} (W_{,\theta} - W_{0,\theta}) \right\} \quad (2.14f)$$

$$V_r = -D \left\{ \nabla^2 (W - W_0) \right\}_{,r} + \frac{1}{r} M_{r\theta, \theta} \quad (2.14g)$$

円環板の非線形振動挙動を明らかにするために、たわみ W について解く必要がある。運動方程式 (2.11a) から (2.11c) の従属変数は U , V , W の 3 つであり、たわみ W を得るためには、式 (2.11a) から (2.11c) について、三元連立偏微分方程式を解かなければならない。ただし、薄肉板では面内方向の固有振動数はたわみ方向に比べて十分高いため、面内方向の慣性力は省略できる。さらに応力関数 F の導入により、以下に示すように従属変数はたわみ W と応力関数 F の 2 つとなる。

慣性力を省略した式 (2.11a), (2.11b) を恒等的に満足する形で面内力 N_r , N_θ ならびに $N_{r\theta}$ を応力関数 F でつぎのように表現する。

$$N_r = \frac{1}{r} F_{,r} + \frac{1}{r^2} F_{,\theta\theta} \quad (2.15a)$$

$$N_\theta = F_{,rr} \quad (2.15b)$$

$$N_{r\theta} = - \left(\frac{1}{r} F_{,r\theta} - \frac{1}{r^2} F_{,\theta} \right) \quad (2.15c)$$

たわみ方向の運動方程式 (2.11c) に式 (2.15a) から (2.15c) を代入し整理すると、たわみ

W と応力関数 F を従属変数する運動方程式として次式を得る.

$$\begin{aligned}
G_3(W, F) = & \rho h W_{,tt} + D \nabla^4 (W - W_0) \\
& - \left\{ \frac{1}{r} F_{,rr} W_{,r} + 2 \left(\frac{1}{r^3} F_{,r\theta} - \frac{1}{r^4} F_{,\theta} \right) W_{,\theta} + \left(\frac{1}{r} F_{,r} + \frac{1}{r^2} F_{,\theta\theta} \right) W_{,rr} \right. \\
& \quad \left. - 2 \left(\frac{1}{r^2} F_{,r\theta} - \frac{1}{r^3} F_{,\theta} \right) W_{,r\theta} + \frac{1}{r^2} F_{,rr} W_{,\theta\theta} \right\} \\
& - \rho h (a_s + a_d \cos \Omega t) - Q_s \delta(r - r_{qs}) \delta(\theta - \theta_{qs}) = 0 \quad (2.16)
\end{aligned}$$

応力関数 F により面内変位 U ならびに V が一意に定まるために, 適合条件式を求め
る. 面内力と中央面におけるひずみの関係式 (2.14a) から (2.14c) に中央面におけるひ
ずみと変位の関係式 (2.2a) から (2.2c) を代入し, 面内力と変位の関係式を得る. 得ら
れた面内力と変位の関係式を, 面内力と応力関数の関係式 (2.15a) から (2.15c) に代入
し, 面内変位 U と V を消去すると適合条件式として次式が得られる.

$$\begin{aligned}
\nabla^4 F = & Eh \left[\left(\frac{1}{r} W_{,r\theta} - \frac{1}{r^2} W_{,\theta} \right)^2 - \left(\frac{1}{r} W_{0,r\theta} - \frac{1}{r^2} W_{0,\theta} \right)^2 \right. \\
& \quad \left. - W_{,rr} \left(\frac{1}{r} W_{,r} + \frac{1}{r^2} W_{,\theta\theta} \right) + W_{0,rr} \left(\frac{1}{r} W_{0,r} + \frac{1}{r^2} W_{0,\theta\theta} \right) \right] \quad (2.17)
\end{aligned}$$

たわみ W と応力関数 F を従属変数とする二元連立偏微分方程式として, z 方向の運動
方程式 (2.16) と適合条件式 (2.17) を解き, たわみ W は得られる.

2.3.2 支配方程式の無次元化

以下の無次元量を導入し, 運動方程式 (2.16), 適合条件式 (2.17) ならびに境界におけ
る仮想仕事の式 (2.13a), (2.13b) を無次元化する. 時間 t と加振角振動数 Ω を無次元化

するために角振動数に関する定数 $\Omega_0 = 1/r_2^2 \sqrt{D/(\rho h)}$ を導入した.

$$\xi = \frac{r}{r_2} \quad (2.18a)$$

$$[u, v] = \frac{r_2}{h^2} [U, V] \quad (2.18b)$$

$$[w, w_0] = \frac{1}{h} [W, W_0] \quad (2.18c)$$

$$[n_r, n_\theta, n_{r\theta}] = \frac{r_2^2}{D} [N_r, N_\theta, N_{r\theta}] \quad (2.18d)$$

$$f = \frac{F}{D} \quad (2.18e)$$

$$[p_s, p_d] = \frac{\rho r_2^4}{D} [a_s, a_d] \quad (2.18f)$$

$$q_s = \frac{r_2^2}{Dh} Q_s \quad (2.18g)$$

$$\tau = \Omega_0 t \quad (2.18h)$$

$$\omega = \frac{\Omega}{\Omega_0} \quad (2.18i)$$

ξ は半径方向の無次元座標である. u, v は面内変位 U, V の無次元量である. w と w_0 はそれぞれ, たわみ W と初期たわみ W_0 の無次元量である. n_r, n_θ ならびに $n_{r\theta}$ は面内力 N_r, N_θ ならびに $N_{r\theta}$ の無次元量である. f は応力関数 F の無次元量である. p_s, p_d は一定加速度 a_s と周期加振加速度振幅 a_d の無次元量である. q_s は無次元の集中荷重である. τ は無次元時間であり, ω は無次元の加振振動数である.

以上の無次元量を導入すると z 方向の運動方程式 (2.16) と適合条件式 (2.17) は次式となる.

$$\begin{aligned} L(w, f) = & w_{,\tau\tau} + \nabla^4(w - w_0) \\ & - \left\{ \frac{1}{\xi} f_{,\xi\xi} w_{,\xi} + 2 \left(\frac{1}{\xi^3} f_{,\xi\theta} - \frac{1}{\xi^4} f_{,\theta} \right) w_{,\theta} + \left(\frac{1}{\xi} f_{,\xi} + \frac{1}{\xi^2} f_{,\theta\theta} \right) w_{,\xi\xi} \right. \\ & \quad \left. - 2 \left(\frac{1}{\xi^2} f_{,\xi\theta} - \frac{1}{\xi^3} f_{,\theta} \right) w_{,\xi\theta} + \frac{1}{\xi^2} f_{,\xi\xi} w_{,\theta\theta} \right\} \\ & - (p_s + p_d \cos \omega\tau) - q_s \delta(\xi - \xi_{qs}) \delta(\theta - \theta_{qs}) = 0 \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 f = & c \left[\left(\frac{1}{\xi} w_{,\xi\theta} - \frac{1}{\xi^2} w_{,\theta} \right)^2 - \left(\frac{1}{\xi} w_{0,\xi\theta} - \frac{1}{\xi^2} w_{0,\theta} \right)^2 \right. \\ & \left. - w_{,\xi\xi} \left(\frac{1}{\xi} w_{,\xi} + \frac{1}{\xi^2} w_{,\theta\theta} \right) + w_{0,\xi\xi} \left(\frac{1}{\xi} w_{0,\xi} + \frac{1}{\xi^2} w_{0,\theta\theta} \right) \right] \quad (2.20) \end{aligned}$$

ただし, 適合条件式 (2.20) において c は $c = 12(1 - \nu^2)$ である. ラプラスの微分演算子 ∇^2 はつぎの通りである.

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{1}{\xi^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.21)$$

無次元化した境界における面内力と面外力による仮想仕事の式 (2.13a), (2.13b) は次式となる. なお, 式中の u と v は後述の式 (2.52) と式 (2.53) のように, たわみ w と応力関数 f により記述できる.

$$B_1(w, f) = \left[\int_0^{2\pi} (n_r \delta u + n_{r\theta} \delta v) \xi d\theta \right]_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} \quad (2.22a)$$

$$B_2(w, f) = \left[\int_0^{2\pi} \{(n_r w_{,\xi} + n_{r\theta} w_{,\theta} + v_r) \delta w - m_r \delta w_{,\xi}\} \xi d\theta \right]_{\xi=\xi_1}^{\xi=\xi_2} \quad (2.22b)$$

ただし, ξ_1 と ξ_2 はそれぞれ無次元の内半径と外半径である.

2.3.3 変数変換

z 方向の運動方程式 (2.19) と適合条件式 (2.20) から, たわみ w と応力関数 f を得る上で取り扱いを簡単にするため, 半径方向の座標 ξ を $\xi = e^\eta$ と変数変換する. たわみの運動方程式, 適合条件式は次式となる.

$$\begin{aligned} L(w, f) = & w_{,\tau\tau} + \nabla^4(w - w_0) - e^{-4\eta} \{ (f_{,\eta\eta} - 2f_{,\eta} - f_{,\theta\theta}) w_{,\eta} + (f_{,\eta} + f_{,\theta\theta}) w_{,\eta\eta} \\ & + (f_{,\eta\eta} - f_{,\eta}) w_{,\eta} + 2(f_{,\eta\theta} - f_{,\theta}) (w_{,\theta} - w_{,\eta\theta}) \} \\ & - (p_s + p_d \cos \Omega\tau) - q_s \delta(\xi - \xi_{qs}) \delta(\theta - \theta_{qs}) = 0 \quad (2.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^4 f = & c e^{-4\eta} \left[(w_{,\eta\theta} - w_{,\theta})^2 - (w_{0,\eta\theta} - w_{0,\theta})^2 \right. \\ & \left. - (w_{,\eta\eta} - w_{,\eta}) (w_{,\eta} + w_{,\theta\theta}) + (w_{0,\eta\eta} - w_{0,\eta}) (w_{0,\eta} + w_{0,\theta\theta}) \right] \quad (2.24) \end{aligned}$$

ただし, ラプラスの微分演算子はずぎのとおりである.

$$\nabla^2 = e^{-2\eta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \quad (2.25)$$

変数変換後の境界における面内力と面外力による仮想仕事の式は次式となる.

$$B_1(w, f) = \left[\int_0^{2\pi} (n_r \delta u + n_{r\theta} \delta v) e^\eta d\theta \right]_{\eta=\eta_1}^{\eta=\eta_2} \quad (2.26a)$$

$$B_2(w, f) = \left[\int_0^{2\pi} \{ (e^{-\eta} n_r w_{,\eta} + n_{r\theta} w_{,\theta} + v_r) \delta w - e^{-\eta} m_r \delta w_{,\eta} \} e^\eta d\theta \right]_{\eta=\eta_1}^{\eta=\eta_2} \quad (2.26b)$$

ただし, 変数変換後の内半径と外半径はそれぞれ $\eta_1 = \ln \xi_1$ と $\eta_2 = \ln \xi_2$ である.

2.3.4 たわみの関数の決定

たわみ w と初期たわみ w_0 をつぎのように仮定する.

$$[w, w_0] = \sum_j \sum_N \hat{\zeta}_{jN}(\eta) ([\hat{c}_{jN}(\tau), \bar{c}_{jN}] \cos N\theta + [\hat{s}_{jN}(\tau)\delta_{N0}, \bar{s}_{jN}\delta_{N0}] \sin N\theta) \quad (j = 0, 1, 2, \dots, j_{\max}, N = 0, 1, 2, \dots, N_{\max}) \quad (2.27)$$

ここで、解析で考慮する節円の数 j の最大値は j_{\max} とし、節直径の数 N の最大値は N_{\max} とする. $\hat{c}_{jN}(\tau)$ ならびに $\hat{s}_{jN}(\tau)$ は未知時間関数であり、 \bar{c}_{jN} ならびに \bar{s}_{jN} は初期たわみの係数である. 半径方向の座標関数 $\hat{\zeta}_{jN}(\eta)$ をつぎのように仮定する.

$$\hat{\zeta}_{jN}(\eta) = \sum_k c_{jkN} e^{(k+\delta_{k4})\eta} \quad (k = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (2.28)$$

上式の $e^{(k+\delta_{k4})\eta}$ は変数変換前の座標 ξ では、べき級数 $\xi^{k+\delta_{k4}j}$ に対応する. ここで c_{jkN} は面外方向の境界条件により決定される係数である. δ_{k4} はクロネッカーのデルタ関数であり、つぎの値をとる.

$$\delta_{k4} = \begin{cases} 1 & (k = 4) \\ 0 & (k \neq 4) \end{cases} \quad (2.29)$$

面外方向の境界条件よりたわみの関数を決定する. 面外方向の境界条件が固定, 単純支持, 自由の場合に満たすべき条件式は式 (2.26b) よりつぎの通りである.

$$\text{固定} : w = w_{,\eta} = 0 \quad (2.30a)$$

$$\text{単純支持} : w = m_r = 0 \quad (2.30b)$$

$$\text{自由} : m_r = (e^{-\eta}n_r w_{,\eta} + n_{r\theta} w_{,\theta} + v_r) = 0 \quad (2.30c)$$

面外方向の境界条件が自由のとき、一般的に面内方向の境界条件も自由である. このとき、後に示す式 (2.50b) から $n_r = n_{r\theta} = 0$ となり、式 (2.30c) における2つ目の条件では等価せん断力 v_r のみとなる. 境界条件により、未定係数 c_{jkN} を得るための条件式を得る. 半径方向の座標関数 $\hat{\zeta}_{jN}(\eta)$ の η に関する m 階微分を次式のようにおく.

$$\zeta_{jN}^{(m)}(\eta) = \sum_k d_{mjkN} e^{(k+\delta_{k4})\eta} \quad (2.31)$$

ただし、上式の d_{mjkN} は $d_{mjkN} = c_{jkN} (k + \delta_{k4}j)^m$ である.

$w = 0$, $w_{,\eta} = 0$, $m_r = 0$, $v_r = 0$ に対応する条件式は各々つぎの通りである.

$$w : \sum_k d_{0jkN} e^{(k+\delta_{k4j})\eta} = 0 \quad (2.32a)$$

$$w_{,\eta} : \sum_k d_{1jkN} e^{(k+\delta_{k4j})\eta} = 0 \quad (2.32b)$$

$$m_r : \sum_k [d_{2jkN} - (1 - \nu) d_{1jkN} - \nu N^2 d_{0jkN}] e^{(k+\delta_{k4j})\eta} = 0 \quad (2.32c)$$

$$v_r : \sum_k [d_{3jkN} - 2d_{2jkN} - (2 - \nu) N^2 d_{1jkN} + (3 - \nu) N^2 d_{0jkN}] e^{(k+\delta_{k4j})\eta} = 0 \quad (2.32d)$$

内周辺と外周辺における面外方向の境界条件から, 未定係数 c_{jkN} を定めるための4つの条件式が得られる. $c_{j4N} = 1$ として c_{j0N} から c_{j3N} についての連立方程式を解き, 半径方向の座標関数 $\hat{\zeta}_{jN}$ は決定される.

2.3.5 応力関数の決定

適合条件式の非同次項にたわみ w と初期たわみ w_0 を代入し整理する. 非同次項はたわみ w と初期たわみ w_0 の η や θ による微分の自乗項や相乗項で構成される. これより, 三角関数の積が存在する. 掛け合わされるたわみと初期たわみの周方向の波数を $N, S (N, S = 0 \sim N_{\max})$ とすると, 右辺には三角関数の積から $\cos(N \pm S)\theta$, $\sin(N \pm S)\theta$ を持つ項が含まれる. 波数 $N \pm S$ を波数 $M (M = 0 \sim 2N_{\max})$ で表記すると, 三角関数の積はつぎのように整理される.

$$\begin{aligned} \cos N\theta \cos S\theta = \frac{1}{2} \left\{ \delta_{M,N+S} + \delta_{M,N-S} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{M,0} \right) \right. \\ \left. + \delta_{M,-N+S} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{M,0} \right) \right\} \cos M\theta \quad (2.33a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin N\theta \sin S\theta = \frac{1}{2} \left\{ -\delta_{M,N+S} + \delta_{M,N-S} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{M,0} \right) \right. \\ \left. + \delta_{M,-N+S} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{M,0} \right) \right\} \cos M\theta \quad (2.33b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos N\theta \sin S\theta = \frac{1}{2} \left\{ \delta_{M,N+S} - \delta_{M,N-S} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{M,0} \right) \right. \\ \left. + \delta_{M,-N+S} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{M,0} \right) \right\} \sin M\theta \quad (2.33c) \end{aligned}$$

$$\sin N\theta \cos S\theta = \frac{1}{2} \left\{ \delta_{M,N+S} + \delta_{M,N-S} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{M,0} \right) - \delta_{M,-N+S} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{M,0} \right) \right\} \sin M\theta \quad (2.33d)$$

ここで、クロネッカーのデルタ関数の和をつぎのようにおく。

$$\delta_{MNS}^{[q]} = \frac{1}{2} \left\{ \pm^{[1]} \delta_{M,N+S} \pm^{[2]} \delta_{M,N-S} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{M,0} \right) \pm^{[3]} \delta_{M,-N+S} \left(1 - \frac{1}{2} \delta_{M,0} \right) \right\} \quad (2.34)$$

ただし、 $\pm^{[i]}$ ($i = 1 \sim 3$) は $\delta_{MNS}^{[q]}$ の q の値に対応して、 $+$ と $-$ が表 2.1 の通り変化する。これらの関係を用いると適合条件式は次式の通りに整理される。

Table 2.1: The combinations among $\pm^{[i]}$ ($i = 1 \sim 3$) corresponding to q of $\delta_{MNS}^{[q]}$

q	$\pm^{[1]}$	$\pm^{[2]}$	$\pm^{[3]}$
1	+	+	+
2	-	+	+
3	+	-	+
4	+	+	-

$$\nabla^4 f = c e^{-4\eta} \sum_M \left(e_M^{[c]}(\eta, \tau) \cos M\theta + e_M^{[s]}(\eta, \tau) \sin M\theta \right) \quad (2.35)$$

上式において、 $e_M^{[c]}$ ならびに $e_M^{[s]}$ は次式で示される。

$$e_M^{[c]}(\eta, \tau) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S e^{p_{ijkl}\eta} \left\{ \Phi_{ijklMNS}^{[cc]} (\hat{c}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{c}_{iS}) + \Phi_{ijklMNS}^{[ss]} (\hat{s}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{N0} \delta_{S0} \right\} \quad (2.36a)$$

$$e_M^{[s]}(\eta, \tau) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S e^{p_{ijkl}\eta} \left\{ \Phi_{ijklMNS}^{[cs]} (\hat{c}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{S0} + \Phi_{ijklMNS}^{[sc]} (\hat{s}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{c}_{iS}) \delta_{N0} \right\} \delta_{M0} \quad (2.36b)$$

上式の p_{ijkl} は $p_{ijkl} = i + j + \delta_{k4j} + \delta_{l4i}$ である。 $\Phi_{ijklMNS}^{[\alpha]}$ ($\alpha = cc, ss, cs, sc$) は次式の通りである。

$$\Phi_{ijklMNS}^{[\alpha]} = -\frac{1}{2} \left[(p_{ijkl} - 2 + M^2) d_{1jkN} d_{1iLS} \delta_{MNS}^{[q_1]} \pm^{[1]} (p_{ijkl} - 1) (p_{ijkl} - 2) N S d_{0jkN} d_{0iLS} \delta_{MNS}^{[q_2]} \pm^{[2]} (p_{ijkl} - 1) M \left(S d_{1jkN} d_{0iLS} \delta_{MNS}^{[q_3]} \pm^{[3]} N d_{0jkN} d_{1iLS} \delta_{MNS}^{[q_4]} \right) \right] \quad (2.37)$$

ただし、式 (2.37) 中で α に対応して $q_i (i = 1 \sim 4)$ と記号 $\pm^{[i]} (i = 1 \sim 3)$ は表 2.2 に示す組み合わせをとる。

Table 2.2: The combinations among $q_i (i = 1 \sim 4)$ and $\pm^{[i]} (i = 1 \sim 3)$ corresponding to α of $\Phi_{ijklMNS}^{[\alpha]}$

α	q_1	q_2	q_3	q_4	$\pm^{[1]}$	$\pm^{[2]}$	$\pm^{[3]}$
cc	1	2	3	4	-	-	+
ss	2	1	4	3	-	+	+
cs	3	4	1	2	+	-	-
sc	4	3	2	1	+	+	-

適合条件式を満足する応力関数 f を得る。適合条件式は応力関数 f について非同次の線形偏微分方程式であるため、応力関数は同次解 $f^{[h]}$ と非同次解 $f^{[p]}$ の重ね合わせにより、次式の通り表現される。

$$f = f^{[h]} + f^{[p]} \quad (2.38)$$

応力関数の同次解 $f^{[h]}$ と非同次解 $f^{[p]}$ を得るための方程式は次式の通りである。

$$\nabla^4 f^{[h]} = 0 \quad (2.39)$$

$$\nabla^4 f^{[p]} = c e^{-4\eta} \sum_M \left(e_M^{[c]}(\eta, \tau) \cos M\theta + e_M^{[s]}(\eta, \tau) \sin M\theta \right) \quad (2.40)$$

同次方程式 (2.39) を満足する関数 $f^{[h]}$ は Michell[10] により示されている。

$$f^{[h]} = c \left(f^{[h][c]}(\eta, \theta) + f^{[h][s]}(\eta, \theta) \right) \quad (2.41)$$

ただし、 $f_M^{[h][c]}$ と $f_M^{[h][s]}$ は次式の通りである。

$$f^{[h][c]}(\eta, \theta) = \sum_M \phi_M^{[h][c]}(\eta) \cos M\theta + C_{51}^{[h]} e^{\eta\theta} \sin \theta \quad (2.42a)$$

$$f^{[h][s]}(\eta, \theta) = \sum_M \phi_M^{[h][s]}(\eta) \sin M\theta + S_{10}^{[h]} \theta - S_{51}^{[h]} e^{\eta\theta} \cos \theta \quad (2.42b)$$

上式において $C_{51}^{[h]}$, $S_{10}^{[h]}$ ならびに $S_{51}^{[h]}$ は面内の境界条件から決定される未定係数である。 $\phi_M^{[h][c]}$ と $\phi_M^{[h][s]}$ は次式の通りである。

$$\phi_M^{[h][c]}(\eta) = \begin{cases} C_{10}^{[h]} + C_{20}^{[h]} \eta + C_{30}^{[h]} e^{2\eta} + C_{40}^{[h]} \eta e^{2\eta} & (M = 0) \\ C_{11}^{[h]} e^{\eta} + C_{21}^{[h]} e^{-\eta} + C_{31}^{[h]} e^{3\eta} + C_{41}^{[h]} \eta e^{\eta} & (M = 1) \\ C_{1M}^{[h]} e^{M\eta} + C_{2M}^{[h]} e^{-M\eta} + C_{3M}^{[h]} e^{(2+M)\eta} + C_{4M}^{[h]} e^{(2-M)\eta} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.43a)$$

$$\phi_M^{[h][s]}(\eta) = \begin{cases} 0 & (M = 0) \\ S_{11}^{[h]} e^\eta + S_{21}^{[h]} e^{-\eta} + S_{31}^{[h]} e^{3\eta} + S_{41}^{[h]} \eta e^\eta & (M = 1) \\ S_{1M}^{[h]} e^{M\eta} + S_{2M}^{[h]} e^{-M\eta} + S_{3M}^{[h]} e^{(2+M)\eta} + S_{4M}^{[h]} e^{(2-M)\eta} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.43b)$$

ここで (2.43a) と (2.43b) に含まれる $C_{qM}^{[h]} (q = 1 \sim 4, M = 0 \sim 2N_{\max})$, $S_{qM}^{[h]} (q = 1 \sim 4, M = 1 \sim 2N_{\max})$ は面内の境界条件により決定される未定係数である。

式 (2.40) を満足する関数 $f^{[p]}$ を定数変化法により決定する。式 (2.40) の右辺において角度 θ に比例する項は存在しない。これより、 $f^{[h]}$ の角度 θ に比例しない項のみを考慮して、つぎのように $f^{[p]}$ を仮定する。

$$f^{[p]}(\eta, \theta) = c \sum_M \left(\phi_M^{[p][c]}(\eta) \cos M\theta + \phi_M^{[p][s]}(\eta) \sin M\theta \right) \quad (2.44)$$

ただし、 $\phi_M^{[p][c]}$ と $\phi_M^{[p][s]}$ はつぎの通りである。

$$\phi_M^{[p][c]}(\eta) = \begin{cases} C_{10}^{[p]}(\eta) + C_{20}^{[p]}(\eta)\eta + C_{30}^{[p]}(\eta)e^{2\eta} + C_{40}^{[p]}(\eta)\eta e^{2\eta} & (M = 0) \\ C_{11}^{[p]}(\eta)e^\eta + C_{21}^{[p]}(\eta)e^{-\eta} + C_{31}^{[p]}(\eta)e^{3\eta} + C_{41}^{[p]}(\eta)\eta e^\eta & (M = 1) \\ C_{1M}^{[p]}(\eta)e^{M\eta} + C_{2M}^{[p]}(\eta)e^{-M\eta} \\ \quad + C_{3M}^{[p]}(\eta)e^{(2+M)\eta} + C_{4M}^{[p]}(\eta)e^{(2-M)\eta} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.45a)$$

$$\phi_M^{[p][s]}(\eta) = \begin{cases} 0 & (M = 0) \\ S_{11}^{[p]}(\eta)e^\eta + S_{21}^{[p]}(\eta)e^{-\eta} + S_{31}^{[p]}(\eta)e^{3\eta} + S_{41}^{[p]}(\eta)\eta e^\eta & (M = 1) \\ S_{1M}^{[p]}(\eta)e^{M\eta} + S_{2M}^{[p]}(\eta)e^{-M\eta} \\ \quad + S_{3M}^{[p]}(\eta)e^{(2+M)\eta} + S_{4M}^{[p]}(\eta)e^{(2-M)\eta} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.45b)$$

ここで、 $C_{qM}^{[p]}(\eta) (q = 1 \sim 4, M = 0 \sim 2N_{\max})$, $S_{qM}^{[p]}(\eta) (q = 1 \sim 4, M = 1 \sim 2N_{\max})$ は η に関する未知関数である。

式 (2.44) を式 (2.40) の左辺に代入すると次式となる.

$$\begin{aligned}
ce^{-4\eta} \sum_M & \left[\left\{ \phi_{M,\eta\eta\eta\eta}^{[p][c]} - 4\phi_{M,\eta\eta\eta}^{[p][c]} + 2(2-M^2)\phi_{M,\eta\eta}^{[p][c]} + 4M^2\phi_{M,\eta}^{[p][c]} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - M^2(4-M^2)\phi_M^{[p][c]} \right\} \cos M\theta \right. \\
& \quad \left. + \left\{ \phi_{M,\eta\eta\eta\eta}^{[p][s]} - 4\phi_{M,\eta\eta\eta}^{[p][s]} + 2(2-M^2)\phi_{M,\eta\eta}^{[p][s]} + 4M^2\phi_{M,\eta}^{[p][s]} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - M^2(4-M^2)\phi_M^{[p][s]} \right\} \sin M\theta \right] \\
& = ce^{-4\eta} \sum_M \left(e_M^{[c]}(\eta, \tau) \cos M\theta + e_M^{[s]}(\eta, \tau) \sin M\theta \right) \quad (2.46)
\end{aligned}$$

両辺を比較し, $\cos M\theta$, $\sin M\theta$ の係数が等しくなる条件からつぎの条件式が得られる.

$$\phi_{M,\eta\eta\eta\eta}^{[p][c]} - 4\phi_{M,\eta\eta\eta}^{[p][c]} + 2(2-M^2)\phi_{M,\eta\eta}^{[p][c]} + 4M^2\phi_{M,\eta}^{[p][c]} - M^2(4-M^2)\phi_M^{[p][c]} = e_M^{[c]}(\eta, \tau) \quad (2.47a)$$

$$\phi_{M,\eta\eta\eta\eta}^{[p][s]} - 4\phi_{M,\eta\eta\eta}^{[p][s]} + 2(2-M^2)\phi_{M,\eta\eta}^{[p][s]} + 4M^2\phi_{M,\eta}^{[p][s]} - M^2(4-M^2)\phi_M^{[p][s]} = e_M^{[s]}(\eta, \tau) \quad (2.47b)$$

上式に定数変化法を適用すると, η に関する未知関数 $C_{qM}^{[p]}(\eta)$ ($q = 1 \sim 4, M = 0 \sim 2N_{\max}$), $S_{qM}^{[p]}(\eta)$ ($q = 1 \sim 4, M = 1 \sim 2N_{\max}$) は次式のように求められる.

$$\begin{aligned}
C_{qM}^{[p]}(\eta) & = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S \phi_{qijklM}(\eta) \\
& \quad \left\{ \Phi_{ijklMNS}^{[cc]} (\hat{c}_{jN}\hat{c}_{iS} - \bar{c}_{jN}\bar{c}_{iS}) + \Phi_{ijklMNS}^{[ss]} (\hat{s}_{jN}\hat{s}_{iS} - \bar{s}_{jN}\bar{s}_{iS}) \delta_{N0}\delta_{S0} \right\} \quad (2.48a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{qM}^{[p]}(\eta) & = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S \phi_{qijklM}(\eta) \\
& \quad \left\{ \Phi_{ijklMNS}^{[cs]} (\hat{c}_{jN}\hat{s}_{iS} - \bar{c}_{jN}\bar{s}_{iS}) \delta_{S0} + \Phi_{ijklMNS}^{[sc]} (\hat{s}_{jN}\hat{c}_{iS} - \bar{s}_{jN}\bar{c}_{iS}) \delta_{N0} \right\} \delta_{M0} \quad (2.48b)
\end{aligned}$$

ただし, $\phi_{qijklM}(\eta)$ ($q = 1, 2, 3, 4$) は次式の通りである.

$$\phi_{1ijklM}(\eta) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \int (\eta - 1) e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M = 0) \\ \frac{1}{4} \int \eta e^{-\eta} e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M = 1) \\ \frac{1}{8} \frac{1}{M(1-M)} \int e^{-M\eta} e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.49a)$$

$$\phi_{2ijklM}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{4} \int e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M = 0) \\ -\frac{1}{16} \int e^{\eta} e^{p_{ijkl}\eta} dt & (M = 1) \\ -\frac{1}{8} \frac{1}{M(1+M)} \int e^{M\eta} e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.49b)$$

$$\phi_{3ijklM}(\eta) = \begin{cases} -\frac{1}{4} \int (\eta + 1) e^{-2\eta} e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M = 0) \\ \frac{1}{16} \int e^{-3\eta} e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M = 1) \\ \frac{1}{8} \frac{1}{M(1+M)} \int e^{-(2+M)\eta} e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.49c)$$

$$\phi_{4ijklM}(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{4} \int e^{-2\eta} e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M = 0) \\ -\frac{1}{4} \int e^{-\eta} e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M = 1) \\ -\frac{1}{8} \frac{1}{M(1-M)} \int e^{(-2+M)\eta} e^{p_{ijkl}\eta} d\eta & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.49d)$$

定数変化法では不定積分を行い未知関数を求めるため、式(2.49a)から(2.49d)には本来、積分定数が含まれる。しかし、積分定数から得られる $f^{[p]}$ の項は $\phi^{[h][c]}$ と $\phi^{[h][s]}$ の未定係数を積分定数とした項となるため省略した。

得られた応力関数の同次解 $f^{[h]}$ の未定係数を面内の境界条件から決定する。面内の境界条件は式(2.26a)より、固定と自由の場合はそれぞれ次式となる。

$$\text{固定} : \delta u = \delta v = 0 \quad (2.50a)$$

$$\text{自由} : n_r = n_{r\theta} = 0 \quad (2.50b)$$

面内の境界条件が固定の場合、面内変位の変分が0となる条件から境界における面内変位が既知関数であればよい。面内の境界条件が自由の場合、境界における面内力 n_r と $n_{r\theta}$ が共に0であればよい。

面内変位 u , v と面内力 n_r , $n_{r\theta}$ をたわみと応力関数で表現する。面内変位 u と v は以下の通り得られる。板中央面のひずみの式(2.2a)から(2.2c), 板中央面のひずみと面内力の関係式(2.14a)から(2.14c)ならびに面内力と応力関数の関係式(2.15a)から(2.15c)を用いて板中央面のひずみと応力関数の関係式を導き、無次元化と変数変換を行うと次式が得られる。

$$e^{-\eta} u_{,\eta} + \frac{1}{2} e^{-2\eta} (w_{,\eta}^2 - w_{0,\eta}^2) = \frac{1}{c} e^{-2\eta} \{ (f_{,\eta} + f_{,\theta\theta}) - \nu (f_{,\eta\eta} - f_{,\eta}) \} \quad (2.51a)$$

$$e^{-\eta} (u + v_{,\theta}) + \frac{1}{2} e^{-2\eta} (w_{,\theta}^2 - w_{0,\theta}^2) = \frac{1}{c} e^{-2\eta} \{ (f_{,\eta\eta} - f_{,\eta}) - \nu (f_{,\eta} + f_{,\theta\theta}) \} \quad (2.51b)$$

$$e^{-\eta} (u_{,\theta} + v_{,\eta} - v) + e^{-2\eta} (w_{,\eta} w_{,\theta} - w_{0,\eta} w_{0,\theta}) = \frac{1}{c} 2(1 + \nu) e^{-2\eta} \{ - (f_{,\eta\theta} - f_{,\theta}) \} \quad (2.51c)$$

ここで式(2.51a)の η に関する積分から u が得られ、式(2.51b)の θ に関する積分から v は得られる。 u ならびに v は次式の通りとなる。

$$u = \frac{1}{c} \int e^{-\eta} (f_{,\eta} + f_{,\theta\theta}) d\eta - \frac{1}{c} \nu e^{-\eta} f_{,\eta} - \frac{1}{2} \int e^{-\eta} (w_{,\eta}^2 - w_{0,\eta}^2) d\eta + g(\theta) \quad (2.52)$$

$$v = \frac{1}{c} \int e^{-\eta} \{f_{,\eta\eta} - (1+\nu)f_{,\eta}\} d\theta - \frac{1}{c} \nu e^{-\eta} f_{,\theta} - \int u d\theta - \frac{1}{2} \int e^{-\eta} (w_{,\theta^2} - w_{0,\theta^2}) d\theta + h(\eta) \quad (2.53)$$

ここで $g(\theta)$ と $h(\eta)$ は積分定数である。

$g(\theta)$ と $h(\eta)$ を決定するために u ならびに v を式 (2.51c) に代入すると次式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \int e^{-\eta} (f_{,\eta\theta} + f_{,\theta\theta}) d\eta + \frac{1}{c} \int e^{-\eta} (f_{,\eta\eta} - 3f_{,\eta\eta} + f_{,\eta} - f_{,\theta\theta}) d\theta \\ & + \frac{1}{c} \int \int e^{-\eta} (f_{,\eta} + f_{,\theta\theta}) d\eta d\theta + \frac{2}{c} (e^{-\eta} f_{,\theta})_{,\eta} - \frac{1}{2} \int e^{-\eta} (w_{,\eta^2} - w_{0,\eta^2})_{,\theta} d\eta \\ & + \frac{1}{2} \int e^{-\eta} \{ (w_{,\eta^2} - w_{0,\eta^2}) + 2(w_{,\theta^2} - w_{0,\theta^2}) - (w_{,\theta^2} - w_{0,\theta^2})_{,\eta} \} d\theta \\ & - \frac{1}{2} \int \int e^{-\eta} (w_{,\eta^2} - w_{0,\eta^2}) d\eta d\theta + e^{-\eta} (w_{,\eta} w_{,\theta} - w_{0,\eta} w_{0,\theta}) \\ & + g(\theta)_{,\theta} + \int g(\theta) d\theta + h(\eta)_{,\eta} - h(\eta) = 0 \quad (2.54) \end{aligned}$$

上式に応力関数 f とたわみ w を代入すると次式が得られる。

$$P_0(\eta) + \sum_M Q_M(\theta) + g(\theta)_{,\theta} + \int g(\theta) d\theta + h(\eta)_{,\eta} - h(\eta) = 0 \quad (M = 0, 1, 2, \dots, 2N_{\max}) \quad (2.55)$$

ただし、 P_0 と Q_M はつぎのとおりである。

$$P_0(\eta) = -2S_{10}^{[h]} e^{-\eta} + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S P_{ijkl0NS}^{[s]} e^{(p_{ijkl}-1)\eta} \quad (2.56a)$$

$$Q_M(\theta) = \begin{cases} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S Q_{ijklMNS}^{[c]} \theta & (M = 0) \\ (-4C_{41}^{[h]} - 2C_{51}^{[h]}) \\ \quad + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S Q_{ijklMNS}^{[c]} \sin \theta \\ -(-4S_{41}^{[h]} - 2S_{51}^{[h]}) \\ \quad + \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S Q_{ijklMNS}^{[s]} \cos \theta & (M = 1) \\ \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S (Q_{ijklMNS}^{[c]} \sin M\theta \\ \quad - Q_{ijklMNS}^{[s]} \cos M\theta) & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.56b)$$

$$(i, j = 0, 1, 2, \dots, j_{\max}, k, l = 0, 1, 2, 3, 4, N, S = 0, 1, 2, \dots, N_{\max})$$

$P_{ijkl0NS}^{[s]}$, $Q_{ijklMNS}^{[c]}$ ならびに $Q_{ijklMNS}^{[s]}$ はつぎのとおりである.

$$P_{ijkl0NS}^{[s]} = P_{ijkl0NS}^{[cs]} (\hat{c}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{S0} + P_{ijkl0NS}^{[sc]} (\hat{s}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{c}_{iS}) \delta_{N0} \quad (2.57a)$$

$$Q_{ijklMNS}^{[c]} = Q_{ijklMNS}^{[cc]} (\hat{c}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{c}_{iS}) + Q_{ijklMNS}^{[ss]} (\hat{s}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{N0} \delta_{S0} \quad (2.57b)$$

$$Q_{ijklMNS}^{[s]} = Q_{ijklMNS}^{[cs]} (\hat{c}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{S0} + Q_{ijklMNS}^{[sc]} (\hat{s}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{c}_{iS}) \delta_{N0} \quad (2.57c)$$

上式において $P_{ijkl0NS}^{[cs]}$, $P_{ijkl0NS}^{[sc]}$, $Q_{ijklMNS}^{[cc]}$, $Q_{ijklMNS}^{[ss]}$, $Q_{ijklMNS}^{[cs]}$ ならびに $Q_{ijklMNS}^{[sc]}$ は定数であり次式で示される.

$$P_{ijkl0NS}^{[cs]} = \frac{1}{2} \Pi_{ijkl0NS}^{[3]} \quad (2.58a)$$

$$P_{ijkl0NS}^{[sc]} = -\frac{1}{2} \Pi_{ijkl0NS}^{[4]} \quad (2.58b)$$

$$Q_{ijklMNS}^{[cc]} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Theta_{ijklMNS}^{[1]} \delta_{p_{ijkl},1} & (M=0) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} \Theta_{ijklMNS}^{[1]} - \Pi_{ijklMNS}^{[1]} \right) \delta_{p_{ijkl},1} & (M \geq 1) \end{cases} \quad (2.58c)$$

$$Q_{ijklMNS}^{[ss]} = \begin{cases} \frac{1}{2} \Theta_{ijklMNS}^{[2]} \delta_{p_{ijkl},1} & (M=0) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} \Theta_{ijklMNS}^{[2]} + \Pi_{ijklMNS}^{[2]} \right) \delta_{p_{ijkl},1} & (M \geq 1) \end{cases} \quad (2.58d)$$

$$Q_{ijklMNS}^{[cs]} = \begin{cases} 0 & (M=0) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} \Theta_{ijklMNS}^{[3]} - \Pi_{ijklMNS}^{[3]} \right) \delta_{p_{ijkl},1} & (M \geq 1) \end{cases} \quad (2.58e)$$

$$Q_{ijklMNS}^{[sc]} = \begin{cases} 0 & (M=0) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{M} \Theta_{ijklMNS}^{[4]} + \Pi_{ijklMNS}^{[4]} \right) \delta_{p_{ijkl},1} & (M \geq 1) \end{cases} \quad (2.58f)$$

ただし, $\Pi_{ijklMNS}^{[q]}$ と $\Theta_{ijklMNS}^{[q]}$ ($q=1, 2, 3, 4$) は次式の通りである.

$$\Pi_{ijklMNS}^{[q]} = S d_{1jkN} d_{0iLS} \delta_{MNS}^{[q_1]} \pm N d_{0jkN} d_{1iLS} \delta_{MNS}^{[q_2]} \quad (2.59a)$$

$$\Theta_{ijklMNS}^{[q]} = d_{1jkN} d_{1iLS} \delta_{MNS}^{[q_1]} \pm N S d_{0jkN} d_{0iLS} \delta_{MNS}^{[q_2]} \quad (2.59b)$$

ここで式 (2.59a), (2.59b) における q に対する q_1, q_2 と \pm の組み合わせは表 2.3, 2.4 に示す通りである.

Table 2.3: The combinations among q_1, q_2 and "±" corresponding to q of $\Pi_{ijklMNS}^{[q]}$

q	q_1	q_2	±
1	3	4	+
2	4	3	+
3	1	2	-
4	2	1	-

Table 2.4: The combinations among q_1, q_2 and "±" corresponding to q of $\Theta_{ijklMNS}^{[q]}$

q	q_1	q_2	±
1	1	2	+
2	2	1	+
3	3	4	-
4	4	3	-

式 (2.55) において η と θ の関数を左右の辺に分離すると、次式となる。

$$P_0(\eta) + h(\eta)_{,\eta} - h(\eta) = - \left[\sum_M Q_M(\theta) + g(\theta)_{,\theta} + \int g(\theta) d\theta \right] = \bar{C} \quad (2.60)$$

ただし、 \bar{C} は η と θ に対して任意の定数である。式 (2.60) から、つぎに示す $h(\eta)$ と $g(\theta)$ についての 2 つの方程式が得られる。

$$h(\eta)_{,\eta} - h(\eta) = -P_0(\eta) + \bar{C} \quad (2.61a)$$

$$g(\theta)_{,\theta} + \int g(\theta) d\theta = - \sum_M Q_M(\theta) - \bar{C} \quad (2.61b)$$

式 (2.61a) と式 (2.61b) を解くと、 $h(t)$ と $g(\theta)$ は次式となる。

$$h(\eta) = B e^\eta - S_{10}^{[h]} - \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S P_{ijkl0NS}^{[s]} e^\eta \int e^{(p_{ijkl}-2)\eta} dt - \bar{C} \quad (2.62)$$

$$g(\theta) = \sum_M g_M(\theta) \quad (2.63)$$

ただし, $g_M(\theta)$ はつぎの通りである.

$$g_M(\theta) = \begin{cases} -\left\{ \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S Q_{ijkl0NS}^{[c]} \theta + \bar{C} \right\}_{,\theta} & (M=0) \\ \left\{ A^{[c]} \sin \theta - A^{[s]} \cos \theta \right. \\ \quad + (4C_{41}^{[h]} + 2C_{51}^{[h]} - \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S Q_{ijkl1NS}^{[c]}) \\ \quad \quad \quad \left. \frac{1}{4} (3 \sin \theta - 2\theta \cos \theta) \right. \\ \quad - (4S_{41}^{[h]} + 2S_{51}^{[h]} - \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S Q_{ijkl1NS}^{[s]}) \\ \quad \quad \quad \left. \frac{1}{4} (3 \cos \theta + 2\theta \sin \theta) \right\}_{,\theta} & (M=1) \\ -\left\{ \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sum_N \sum_S \frac{1}{1-M^2} (Q_{ijklMNS}^{[c]} \sin M\theta \right. \\ \quad \quad \quad \left. - Q_{ijklMNS}^{[s]} \cos M\theta) \right\}_{,\theta} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.64)$$

ここで $A^{[c]}$ ならびに $A^{[s]}$ は板の剛体並進を表す未定定数であり, B は板の剛体回転を表す未定定数である.

面内変位 u , v と面内力 n_r , $n_{r\theta}$ にたわみ w と応力関数 f を代入し, 整理すると次式となる.

$$u(\eta, \theta, \tau) = \sum_M u_M(\eta, \theta, \tau) \quad (2.65a)$$

$$v(\eta, \theta, \tau) = \sum_M v_M(\eta, \theta, \tau) \quad (2.65b)$$

$$n_r(\eta, \theta, \tau) = \sum_M n_{rM}(\eta, \theta, \tau) \quad (2.65c)$$

$$n_{r\theta}(\eta, \theta, \tau) = \sum_M n_{r\theta M}(\eta, \theta, \tau) \quad (2.65d)$$

ここで u_M , v_M , n_{rM} , $n_{r\theta M}$ は, それぞれ周方向の波数 M のときの u , v , n_r , $n_{r\theta}$ であり, 次式で示される.

$$u_M = \begin{cases} u_0^{[c]} & (M=0) \\ u_1^{[c]} \cos \theta + u_1^{[s]} \sin \theta + u_1^{[c']} \theta \sin \theta - u_1^{[s']} \theta \cos \theta & (M=1) \\ u_M^{[c]} \cos M\theta + u_M^{[s]} \sin M\theta & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.66a)$$

$$v_M = \begin{cases} v_0^{[c]}\theta + v_0^{[s]} & (M = 0) \\ v_1^{[c]}\sin\theta - v_1^{[s]}\cos\theta + u_1^{[c']}\theta\cos\theta + u_1^{[s']}\theta\sin\theta & (M = 1) \\ v_M^{[c]}\sin M\theta - v_M^{[s]}\cos M\theta & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.66b)$$

$$n_{rM} = \begin{cases} n_{r0}^{[c]} & (M = 0) \\ n_{rM}^{[c]}\cos M\theta + n_{rM}^{[s]}\sin M\theta & (M \geq 1) \end{cases} \quad (2.66c)$$

$$n_{r\theta M} = \begin{cases} n_{r\theta 0}^{[s]} & (M = 0) \\ n_{r\theta M}^{[c]}\sin M\theta - n_{r\theta M}^{[s]}\cos M\theta & (M \geq 1) \end{cases} \quad (2.66d)$$

ただし、式 (2.66a) から (2.66d) に含まれる各項はつぎの通りである。

$$u_M^{[c]}(\eta, \tau) = \begin{cases} \begin{cases} -(1+\nu)C_{20}^{[h]}e^{-\eta} + 2(1-\nu)C_{30}^{[h]}e^{\eta} \\ -\{(1+\nu) - 2(1-\nu)\eta\}C_{40}^{[h]}e^{\eta} + B_0^{[1][c]} \end{cases} & (M = 0) \\ \begin{cases} -\nu C_{11}^{[h]} + (1+\nu)C_{21}^{[h]}e^{-2\eta} + (1-3\nu)C_{31}^{[h]}e^{2\eta} \\ + (1-\nu)(1+\eta)C_{41}^{[h]} + 2(\eta + \frac{1}{4})C_{51}^{[h]} + B_1^{[1][c]} + A^{[c]} \end{cases} & (M = 1) \\ \begin{cases} -(1+\nu)MC_{1M}^{[h]}e^{-(1-M)\eta} + (1+\nu)MC_{2M}^{[h]}e^{-(1+M)\eta} \\ + \{2(1-\nu) - M(1+\nu)\}C_{3M}^{[h]}e^{(1+M)\eta} \\ + \{2(1-\nu) + M(1+\nu)\}C_{4M}^{[h]}e^{(1-M)\eta} + B_M^{[1][c]} \end{cases} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.67a)$$

$$u_M^{[s]}(\eta, \tau) = \begin{cases} \begin{cases} -\nu S_{11}^{[h]} + (1+\nu)S_{21}^{[h]}e^{-2\eta} + (1-3\nu)S_{31}^{[h]}e^{2\eta} \\ + (1-\nu)(1+\eta)S_{41}^{[h]} + 2(\eta + \frac{1}{4})S_{51}^{[h]} + B_1^{[1][s]} + A^{[s]} \end{cases} & (M = 1) \\ \begin{cases} -(1+\nu)MS_{1M}^{[h]}e^{-(1-M)\eta} + (1+\nu)MS_{2M}^{[h]}e^{-(1+M)\eta} \\ + \{2(1-\nu) - M(1+\nu)\}S_{3M}^{[h]}e^{(1+M)\eta} \\ + \{2(1-\nu) + M(1+\nu)\}S_{4M}^{[h]}e^{(1-M)\eta} + B_M^{[1][s]} \end{cases} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.68a)$$

$$v_M^{[c]}(\eta, \tau) = \begin{cases} 4C_{40}^{[h]}e^\eta + B_0^{[2][c]} & (M = 0) \\ \nu C_{11}^{[h]} + (1 + \nu) C_{21}^{[h]}e^{-2\eta} + (5 + \nu) C_{31}^{[h]}e^{2\eta} \\ \quad - \{2 + (1 - \nu)t\} C_{41}^{[h]} - \{2(\eta + \frac{3}{4}) + \nu\} C_{51}^{[h]} \\ \quad - A^{[c]} + B_1^{[2][c]} & (M = 1) \\ \left[(1 + \nu) M^2 C_{1M}^{[h]}e^{-(1-M)\eta} + (1 + \nu) M^2 C_{2M}^{[h]}e^{-(1+M)\eta} \right. \\ \quad + M \{(1 + \nu) M + 4\} C_{3M}^{[h]}e^{(1+M)\eta} \\ \quad \left. + M \{(1 + \nu) M - 4\} C_{4M}^{[h]}e^{(1-M)\eta} + B_M^{[2][c]} \right] \frac{1}{M} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.69a)$$

$$v_M^{[s]}(\eta, \tau) = \begin{cases} -(1 + \nu) S_{10}^{[h]}e^{-\eta} + B_0^{[2][B]} & (M = 0) \\ \nu S_{11}^{[h]} + (1 + \nu) S_{21}^{[h]}e^{-2\eta} + (5 + \nu) S_{31}^{[h]}e^{2\eta} \\ \quad - \{2 + (1 - \nu)\eta\} S_{41}^{[h]} - \{2(\eta + \frac{3}{4}) + \nu\} S_{51}^{[h]} \\ \quad - A^{[s]} + B_1^{[2][s]} & (M = 1) \\ \left[(1 + \nu) M^2 S_{1M}^{[h]}e^{-(1-M)\eta} + (1 + \nu) M^2 S_{2M}^{[h]}e^{-(1+M)\eta} \right. \\ \quad + M \{(1 + \nu) M + 4\} S_{3M}^{[h]}e^{(1+M)\eta} \\ \quad \left. + M \{(1 + \nu) M - 4\} S_{4M}^{[h]}e^{(1-M)\eta} + B_M^{[2][s]} \right] \frac{1}{M} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.70a)$$

$$u_1^{[c']}(\tau) = 2 \left\{ C_{41}^{[h]} + \frac{1}{2} (1 - \nu) C_{51}^{[h]} - B_1^{[5][c]} \right\} \quad (2.71a)$$

$$u_1^{[s']}(\tau) = 2 \left\{ S_{41}^{[h]} + \frac{1}{2} (1 - \nu) S_{51}^{[h]} - B_1^{[5][s]} \right\} \quad (2.71b)$$

$$n_{rM}^{[c]} = \begin{cases} c \left\{ C_{20}^{[h]}e^{-2\eta} + 2C_{30}^{[h]} + (1 + 2\eta) C_{40}^{[h]} + B_0^{[3][c]} \right\} & (M = 0) \\ c \left(-2C_{21}^{[h]}e^{-3\eta} + 2C_{31}^{[h]}e^\eta + C_{41}^{[h]}e^{-\eta} + 2C_{51}^{[h]}e^{-\eta} + B_1^{[3][c]} \right) & (M = 1) \\ c \left\{ M(1 - M) C_{1M}^{[h]}e^{-(2-M)\eta} - M(1 + M) C_{2M}^{[h]}e^{-(2+M)\eta} \right. \\ \quad + (2 - M)(1 + M) C_{3M}^{[h]}e^{M\eta} \\ \quad \left. + (2 + M)(1 - M) C_{4M}^{[h]}e^{-M\eta} + B_M^{[3][c]} \right\} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.72a)$$

$$n_{rM}^{[s]} = \begin{cases} c \left(-2S_{21}^{[h]} e^{-3\eta} + 2S_{31}^{[h]} e^{\eta} + S_{41}^{[h]} e^{-\eta} + 2S_{51}^{[h]} e^{-\eta} + B_1^{[3][s]} \right) & (M = 1) \\ c \left\{ M(1-M) S_{1M}^{[h]} e^{-(2-M)\eta} - M(1+M) S_{2M}^{[h]} e^{-(2+M)\eta} \right. \\ \quad + (2-M)(1+M) S_{3M}^{[h]} e^{M\eta} \\ \quad \left. + (2+M)(1-M) S_{4M}^{[h]} e^{-M\eta} + B_M^{[3][s]} \right\} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.73a)$$

$$n_{r\theta M}^{[c]} = \begin{cases} c \left(-2C_{21}^{[h]} e^{-3\eta} + 2C_{31}^{[h]} e^{\eta} + C_{41}^{[h]} e^{-\eta} + B_1^{[4][c]} \right) & (M = 1) \\ c \left\{ -(1-M) C_{1M}^{[h]} e^{-(2-M)\eta} - (1+M) C_{2M}^{[h]} e^{-(2+M)\eta} \right. \\ \quad \left. + (1+M) C_{3M}^{[h]} e^{M\eta} + (1-M) C_{4M}^{[h]} e^{-M\eta} + B_M^{[4][c]} \right\} M & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.74a)$$

$$n_{r\theta M}^{[s]} = \begin{cases} c S_{10}^{[h]} e^{-2\eta} & (M = 0) \\ c \left(-2S_{21}^{[h]} e^{-3\eta} + 2S_{31}^{[h]} e^{\eta} + S_{41}^{[h]} e^{-\eta} + B_1^{[4][s]} \right) & (M = 1) \\ c \left\{ -(1-M) S_{1M}^{[h]} e^{-(2-M)\eta} - (1+M) S_{2M}^{[h]} e^{-(2+M)\eta} \right. \\ \quad \left. + (1+M) S_{3M}^{[h]} e^{M\eta} + (1-M) S_{4M}^{[h]} e^{-M\eta} + B_M^{[4][s]} \right\} M & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.75a)$$

ただし、 $B_M^{[1][c]} \sim B_M^{[5][c]}$, $B_M^{[1][s]} \sim B_M^{[5][s]}$ ならびに $B_0^{[2][B]}$ は、応力関数の非同次解 $f^{[p]}$, たわみ w , 初期たわみ w_0 ならびに積分定数 $g(\theta)$, $h(\eta)$ から得られる項であり、つぎの通りである。

$$B_M^{[q][c]}(\eta, \tau) = \sum_i \sum_j \sum_N \sum_S \left\{ B_{ijMNS}^{[q][cc]}(\eta) (\hat{c}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{c}_{iS}) \right. \\ \left. + B_{ijMNS}^{[q][ss]}(\eta) (\hat{s}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{N0} \delta_{S0} \right\} \quad (2.76a)$$

$$B_M^{[q][s]}(\eta, \tau) = \sum_i \sum_j \sum_N \sum_S \left\{ B_{ijMNS}^{[q][cs]}(\eta) (\hat{c}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{S0} \right. \\ \left. + B_{ijMNS}^{[q][sc]}(\eta) (\hat{s}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{c}_{iS}) \delta_{N0} \right\} \quad (2.76b)$$

$$B_0^{[2][B]}(\eta, \tau) = \sum_i \sum_j \sum_N \sum_S \left\{ B_{ij0NS}^{[2][B][cs]}(\eta) (\hat{c}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{S0} \right. \\ \left. + B_{ij0NS}^{[2][B][sc]}(\eta) (\hat{s}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{c}_{iS}) \delta_{N0} \right\} \quad (2.76c)$$

ただし、式 (2.76a) と (2.76b) における $B_{ijMNS}^{[q][\alpha]}$, ($q = 1, 2, 3, 4, 5$, $\alpha = cc, ss, cs, sc$) はつぎの通りである。

$$B_{ijMNS}^{[1][\alpha]} = \sum_k \sum_l \left(\beta_{ijklM}^{[1][f]} \Phi_{ijklMNS}^{[\alpha]} + \beta_{ijklMNS}^{[1][w][\alpha]} - Q_{ijklMNS}^{[1][\alpha]} \right) \quad (2.77a)$$

$$B_{ijMNS}^{[2][\alpha]} = \sum_k \sum_l \left(\beta_{ijklM}^{[2][f]} \Phi_{ijklMNS}^{[\alpha]} + \beta_{ijklMNS}^{[2][w][\alpha]} + Q_{ijklMNS}^{[2][\alpha]} \right) \quad (2.77b)$$

$$B_{ijMNS}^{[3][\alpha]} = \sum_k \sum_l \beta_{ijklM}^{[3][f]} \Phi_{ijklMNS}^{[\alpha]} \quad (2.77c)$$

$$B_{ijMNS}^{[4][\alpha]} = \sum_k \sum_l \beta_{ijklM}^{[4][f]} \Phi_{ijklMNS}^{[\alpha]} \quad (2.77d)$$

$$B_{ijMNS}^{[5][\alpha]} = \sum_k \sum_l Q_{ijklMNS}^{[1][\alpha]} \quad (2.77e)$$

式 (2.76c) における $B_{ij0NS}^{[2][B][cs]}$ と $B_{ij0NS}^{[2][B][sc]}$ は次式で示される。

$$B_{ij0NS}^{[2][B][cs]} = \sum_k \sum_l \frac{1}{2} \Pi_{ijkl0NS}^{[3]} e^{\eta} \mu_{ijkl,-2}^{[2]} \quad (2.78a)$$

$$B_{ij0NS}^{[2][B][sc]} = - \sum_k \sum_l \frac{1}{2} \Pi_{ijkl0NS}^{[4]} e^{\eta} \mu_{ijkl,-2}^{[2]} \quad (2.78b)$$

式 (2.77a) から (2.77d) における $\beta_{ijklM}^{[1][f]}$, $\beta_{ijklM}^{[2][f]}$, $\beta_{ijklM}^{[3][f]}$ ならびに $\beta_{ijklM}^{[4][f]}$ は、それぞれつぎの通りである。

$$\beta_{ijklM}^{[1][f]} = \begin{cases} -\frac{1}{4} (1 + \nu) e^{-\eta} \mu_{ijkl,0}^{[2]} - \frac{1}{2} (1 - \nu) e^{\eta} \mu_{ijkl,-2}^{[1]} \\ \quad - \frac{1}{4} \{ (3 - \nu) - 2(1 - \nu) \eta \} e^{\eta} \mu_{ijkl,-2}^{[2]} + \mu_{ijkl,-1}^{[2]} & (M = 0) \\ \frac{1}{4} (1 - \nu) \mu_{ijkl,-1}^{[1]} - \frac{1}{16} (1 + \nu) e^{-2\eta} \mu_{ijkl,1}^{[2]} \\ \quad + \frac{1}{16} (1 - 3\nu) e^{2\eta} \mu_{ijkl,-3}^{[2]} - \frac{1}{4} \{ -\nu + (1 - \nu) \eta \} \mu_{ijkl,-1}^{[2]} & (M = 1) \\ -\frac{1}{8} (1 + \nu) \frac{1}{1-M} e^{-(1-M)\eta} \mu_{ijkl,-M}^{[2]} \\ \quad - \frac{1}{8} (1 + \nu) \frac{1}{1+M} e^{-(1+M)\eta} \mu_{ijkl,M}^{[2]} \\ \quad + \frac{1}{8} \{ 2(1 - \nu) - M(1 + \nu) \} \frac{1}{M(1+M)} e^{(1+M)\eta} \mu_{ijkl,-(2+M)}^{[2]} \\ \quad - \frac{1}{8} \{ 2(1 - \nu) + M(1 + \nu) \} \frac{1}{M(1-M)} e^{(1-M)\eta} \mu_{ijkl,-2+M}^{[2]} \\ \quad + \frac{1}{1-M^2} \mu_{ijkl,-1}^{[2]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.79a)$$

$$\beta_{ijklM}^{[2][f]} = \begin{cases} e^\eta \mu_{ijkl,-2}^{[2]} - \mu_{ijkl,-1}^{[2]} & (M=0) \\ -\frac{1}{4}(1-\nu)\mu_{ijkl,-1}^{[1]} - \frac{1}{16}(1+\nu)e^{-2\eta}\mu_{ijkl,1}^{[2]} \\ \quad + \frac{1}{16}(5-\nu)e^{2\eta}\mu_{ijkl,-3}^{[2]} + \frac{1}{4}\{-1+(1-\nu)\eta\}\mu_{ijkl,-1}^{[2]} & (M=1) \\ \frac{1}{8}(1+\nu)\frac{M}{1-M}e^{-(1-M)\eta}\mu_{ijkl,-M}^{[2]} \\ \quad - \frac{1}{8}(1+\nu)\frac{M}{1+M}e^{-(1+M)\eta}\mu_{ijkl,M}^{[2]} \\ \quad + \frac{1}{8}\{(1+\nu)M+4\}\frac{1}{1+M}e^{(1+M)\eta}\mu_{ijkl,-(2+M)}^{[2]} \\ \quad - \frac{1}{8}\{(1+\nu)M-4\}\frac{1}{1-M}e^{(1-M)\eta}\mu_{ijkl,-2+M}^{[2]} \\ \quad - \frac{1}{1-M^2}\mu_{ijkl,-1}^{[2]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.79b)$$

$$\beta_{ijklM}^{[3][f]} = \begin{cases} \frac{1}{4}e^{-2\eta}\mu_{ijkl,0}^{[2]} - \frac{1}{2}\mu_{ijkl,-2}^{[1]} - \frac{1}{4}(1-2\eta)\mu_{ijkl,-2}^{[2]} & (M=0) \\ \frac{1}{8}e^{-3\eta}\mu_{ijkl,1}^{[2]} + \frac{1}{8}e^\eta\mu_{ijkl,-3}^{[2]} - \frac{1}{4}e^{-\eta}\mu_{ijkl,-1}^{[2]} & (M=1) \\ \frac{1}{8}e^{-(2-M)\eta}\mu_{ijkl,-M}^{[2]} + \frac{1}{8}e^{-(2+M)\eta}\mu_{ijkl,M}^{[2]} \\ \quad + \frac{1}{8}\frac{2-M}{M}e^{M\eta}\mu_{ijkl,-(2+M)}^{[2]} \\ \quad - \frac{1}{8}\frac{2+M}{M}e^{-M\eta}\mu_{ijkl,-2+M}^{[2]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.79c)$$

$$\beta_{ijklM}^{[4][f]} = \begin{cases} 0 & (M=0) \\ \frac{1}{8}e^{-3\eta}\mu_{ijkl,1}^{[2]} + \frac{1}{8}e^\eta\mu_{ijkl,-3}^{[2]} - \frac{1}{4}\mu_{ijkl,-1}^{[2]} & (M=1) \\ \left[-\frac{1}{8}e^{-(2-M)\eta}\mu_{ijkl,-M}^{[2]} + \frac{1}{8}e^{-(2+M)\eta}\mu_{ijkl,M}^{[2]} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{8}e^{M\eta}\mu_{ijkl,-(2+M)}^{[2]} - \frac{1}{8}e^{-M\eta}\mu_{ijkl,-2+M}^{[2]} \right] \frac{1}{M} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.79d)$$

ここで $\mu_{ijkl,p}^{[1]}$ ならびに $\mu_{ijkl,p}^{[2]}$ は不定積分を表し、つぎの通りである。

$$\mu_{ijkl,p}^{[1]} = \int \eta e^{p_{ijk}\eta} e^{p\eta} d\eta \quad (2.80a)$$

$$\mu_{ijkl,p}^{[2]} = \int e^{p_{ijk}\eta} e^{p\eta} d\eta \quad (2.80b)$$

式(2.77a), (2.77b)において $\beta_{ijklM}^{[1][w][\alpha]}$, $\beta_{ijklM}^{[2][w][\alpha]}$ は、それぞれつぎの通りである。

$$\beta_{ijklMNS}^{[1][w][\alpha]} = -\frac{1}{2}\mu_{ijkl,-1}^{[2]} d_{1jkN} d_{1iLS} \delta_{MNS}^{[q]} \quad (2.81a)$$

$$\beta_{ijklMNS}^{[2][w][\alpha]} = \pm \frac{1}{2} \left(e^{(p_{ijk}-1)\eta} d_{0jkN} d_{0iLS} NS \delta_{MNS}^{[q_1]} \pm \mu_{ijkl,-1}^{[2]} d_{1jkN} d_{1iLS} \delta_{MNS}^{[q_2]} \right) \quad (2.81b)$$

Table 2.5: The value of q corresponding to α of $\beta_{ijklM}^{[1][w][\alpha]}$

α	q
cc	1
ss	2
cs	3
sc	4

Table 2.6: The combinations among q_1, q_2 and "±" corresponding to α of $\beta_{ijklM}^{[2][w][\alpha]}$

α	q_1	q_2	±
cc	2	1	−
ss	1	2	−
cs	4	3	+
sc	3	4	+

ただし $\beta_{ijklM}^{[1][w][\alpha]}$ における α に対する q の値は表 2.5 の通りである。 $\beta_{ijklM}^{[2][w][\alpha]}$ における α に対する q の値と ± の符号は表 2.6 の通りである。

また、式 (2.77a), (2.77b), (2.77e) における $Q_{ijklMNS}^{[1][\alpha]}$ ならびに $Q_{ijklMNS}^{[2][\alpha]}$ はそれぞれ次式の通りである。

$$Q_{ijklMNS}^{[1][\alpha]} = \begin{cases} Q_{ijklMNS}^{[\alpha]} & (M = 0) \\ \frac{1}{4} Q_{ijklMNS}^{[\alpha]} & (M = 1) \\ \frac{M}{1-M^2} Q_{ijklMNS}^{[\alpha]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.82a)$$

$$Q_{ijklMNS}^{[2][\alpha]} = \begin{cases} Q_{ijklMNS}^{[\alpha]} & (M = 0) \\ \frac{3}{4} Q_{ijklMNS}^{[\alpha]} & (M = 1) \\ \frac{M}{1-M^2} Q_{ijklMNS}^{[\alpha]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.82b)$$

なお、 $Q_{ijklMNS}^{[\alpha]}$ は式 (2.58c) から (2.58f) に示す通りである。

境界における面内変位の仮定

円環板の境界において面内変位を与えた場合を考える。面内変位を周方向の波数 M ($M = 0, 1, 2, \dots, 2N_{\max}$) ごとに整理し、境界における半径方向と周方向の面内変位 u_i と v_i をつぎのように仮定する。

$$u_i = u_{i0}^{[c]} + \sum_M \left(u_{iM}^{[c]} \cos M\theta + u_{iM}^{[s]} \sin M\theta \right) \quad (2.83a)$$

$$v_i = - \sum_M \left(v_{iM}^{[c]} \sin M\theta - v_{iM}^{[s]} \cos M\theta \right) \quad (2.83b)$$

ただし, $u_{iM}^{[c]}$, $u_{iM}^{[s]}$, $v_{iM}^{[c]}$, $v_{iM}^{[s]}$ はそれぞれ任意定数であり, それぞれ独立して与えられる.

面内の境界条件による未知数の決定

円環板の面内の境界条件として内周辺 $\eta = \eta_1$ で半径方向と周方向にそれぞれ面内変位 u_i と v_i を与え外周辺 $\eta = \eta_2$ で自由の場合に, 応力関数の同次解の未知数が一意に決定できることを確認する. 条件式は次の通りである.

$$\begin{cases} u(\eta_1) = u_i \\ v(\eta_1) = v_i \\ n_r(\eta_2) = 0 \\ n_{r\theta}(\eta_2) = 0 \end{cases} \quad (2.84)$$

ここで, 周方向の波数 M を $M = 0, 1$ ならびに 2 以上に分けた条件式は, 式 (2.66a) から (2.66d) と式 (2.83a) ならびに (2.83b) より, それぞれ以下に示す通りである.

$$\begin{cases} u_0^{[c]}(\eta_1) = u_{i0}^{[c]} \\ v_0^{[c]}(\eta_1)\theta + v_0^{[s]}(\eta_1) = 0 \\ n_{r0}^{[c]}(\eta_2) = 0 \\ n_{r\theta 0}^{[s]}(\eta_2) = 0 \end{cases} \quad (M = 0) \quad (2.85a)$$

$$\begin{cases} u_1^{[c]}(\eta_1)\cos\theta + u_1^{[s]}(\eta_1)\sin\theta + u_1^{[c']}\theta\sin\theta - u_1^{[s']}\theta\cos\theta = u_{i1}^{[c]}\cos\theta + u_{i1}^{[s]}\sin\theta \\ v_1^{[c]}(\eta_1)\sin\theta - v_1^{[s]}(\eta_1)\cos\theta + u_1^{[c']}\theta\cos\theta + u_1^{[s']}\theta\sin\theta = -v_{i1}^{[c]}\sin\theta + v_{i1}^{[s]}\cos\theta \\ n_{r1}^{[c]}(\eta_2)\cos\theta + n_{r1}^{[s]}(\eta_2)\sin\theta = 0 \\ n_{r\theta 1}^{[c]}(\eta_2)\sin\theta - n_{r\theta 1}^{[s]}(\eta_2)\cos\theta = 0 \end{cases} \quad (M = 1) \quad (2.85b)$$

$$\begin{cases} u_M^{[c]}(\eta_1)\cos M\theta + u_M^{[s]}(\eta_1)\sin M\theta = u_{iM}^{[c]}\cos M\theta + u_{iM}^{[s]}\sin M\theta \\ v_M^{[c]}(\eta_1)\sin M\theta - v_M^{[s]}(\eta_1)\cos M\theta = -v_{iM}^{[c]}\sin M\theta + v_{iM}^{[s]}\cos M\theta \\ n_{rM}^{[c]}(\eta_2)\cos M\theta + n_{rM}^{[s]}(\eta_2)\sin M\theta = 0 \\ n_{r\theta M}^{[c]}(\eta_2)\sin M\theta - n_{r\theta M}^{[s]}(\eta_2)\cos M\theta = 0 \end{cases} \quad (M \geq 2) \quad (2.85c)$$

ここで、各条件式の θ に関する項で係数比較をすると次の条件式が得られる。 $M = 0, 1$ ならびに 2 以上の条件式はそれぞれ、式 (2.86a), (2.86b) ならびに (2.86c) となる。

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0^{[c]}(\eta_1) = u_{i_0}^{[c]} \\ v_0^{[c]}(\eta_1) = 0 \\ v_0^{[s]}(\eta_1) = 0 \\ n_{r_0}^{[c]}(\eta_2) = 0 \\ n_{r_{\theta 0}}^{[s]}(\eta_2) = 0 \end{array} \right. \quad (M = 0) \quad (2.86a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1^{[c]}(\eta_1) = u_{i_1}^{[c]} \\ u_1^{[s]}(\eta_1) = u_{i_1}^{[s]} \\ v_1^{[c]}(\eta_1) = -v_{i_1}^{[c]} \\ v_1^{[s]}(\eta_1) = -v_{i_1}^{[s]} \\ u_1^{[c']} = 0 \\ u_1^{[s']} = 0 \\ n_{r_1}^{[c]}(\eta_2) = 0 \\ n_{r_1}^{[s]}(\eta_2) = 0 \\ n_{r_{\theta 1}}^{[c]}(\eta_2) = 0 \\ n_{r_{\theta 1}}^{[s]}(\eta_2) = 0 \end{array} \right. \quad (M = 1) \quad (2.86b)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_M^{[c]}(\eta_1) = u_{i_M}^{[c]} \\ u_M^{[s]}(\eta_1) = u_{i_M}^{[s]} \\ v_M^{[c]}(\eta_1) = -v_{i_M}^{[c]} \\ v_M^{[s]}(\eta_1) = -v_{i_M}^{[s]} \\ n_{r_M}^{[c]}(\eta_2) = 0 \\ n_{r_M}^{[s]}(\eta_2) = 0 \\ n_{r_{\theta M}}^{[c]}(\eta_2) = 0 \\ n_{r_{\theta M}}^{[s]}(\eta_2) = 0 \end{array} \right. \quad (M \geq 2) \quad (2.86c)$$

ここで、各波数における条件式の数と条件式に含まれる未知数の個数を確認し、未知係数を一意に決定できるか確認する。 $M = 0$ の時の条件式の個数は 5 であり、含まれる未知数は $C_{20}^{[h]}$, $C_{30}^{[h]}$, $C_{40}^{[h]}$, $S_{10}^{[h]}$, B の 5 つである。条件式の数と未知係数の数が一

致することから、未知係数は一意に決定される。 $M = 1$ の時の条件式の個数は 10 である。含まれる未知数は $C_{11}^{[h]}, C_{21}^{[h]}, C_{31}^{[h]}, C_{41}^{[h]}, C_{51}^{[h]}, S_{11}^{[h]}, S_{21}^{[h]}, S_{31}^{[h]}, S_{41}^{[h]}, S_{51}^{[h]}, A^{[c]}, A^{[s]}$ の 12 個であり、未知数の数が条件式の数よりも多い。ただし、 $C_{11}^{[h]}$ と $S_{11}^{[h]}$ に関する項はどちらも面内変位の式のみに含まれ、座標 η に依存しない定数項である。即ち、剛体並進に関する未知数である $C_{11}^{[h]}$ と $S_{11}^{[h]}$ をそれぞれ、面内変位の積分定数から導かれる剛体並進に関する未知数 $A^{[c]}, A^{[s]}$ に含めることができる。これより、条件式の数と未知係数の数が一致し未知係数は一意に決定される。 $M \geq 2$ の時の条件式は 8 つである。含まれる未知数は $C_{1M}^{[h]}, C_{2M}^{[h]}, C_{3M}^{[h]}, C_{4M}^{[h]}, S_{1M}^{[h]}, S_{2M}^{[h]}, S_{3M}^{[h]}, S_{4M}^{[h]}$ の 8 個であり、条件式の数と未知係数の数が一致し、未知係数は一意に決定される。

以上の連立方程式からでは応力関数の未定係数の中に一意に決定されない係数が以下に述べるように存在する。しかし、これらはたわみ方向の運動方程式には影響を及ぼさない。 $M = 0$ のとき $C_{10}^{[h]}$ は決定されない。しかし、 $C_{10}^{[h]}$ の項は座標 η と θ に依存しない定数である。面内力は応力関数の η や θ の微分で表現されるため、面内力の式に $C_{10}^{[h]}$ の項は存在しない。また、 $M = 1$ における $C_{11}^{[h]}, S_{11}^{[h]}$ をそれぞれ $A^{[c]}, A^{[s]}$ に含めると、 $C_{11}^{[h]}, S_{11}^{[h]}$ は一意に決定されない。しかし、面内力と応力関数の関係式に仮定した応力関数を代入すると $C_{11}^{[h]}$ と $S_{11}^{[h]}$ に関する項は消去され、存在しない。これより、 $C_{11}^{[h]}$ と $S_{11}^{[h]}$ は任意の定数で構わない。以上より、面内力の式に $C_{10}^{[h]}, C_{11}^{[h]}$ ならびに $S_{11}^{[h]}$ の項は含まれないため、これらの項が一意に決定されなくてもたわみ方向の運動方程式への影響はない。

連立方程式を解くと応力関数の同次解の係数は次のように得られる。

$$C_{qM}^{[h]} = d_{qM}^{[c]} + \sum_i \sum_j \sum_N \sum_S \left[d_{qijMNS}^{[cc]} (\hat{c}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{c}_{iS}) + d_{qijMNS}^{[ss]} (\hat{s}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{N0} \delta_{S0} \right] \quad (2.87a)$$

$$S_{qM}^{[h]} = d_{qM}^{[s]} + \sum_i \sum_j \sum_N \sum_S \left[d_{qijMNS}^{[cs]} (\hat{c}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{S0} + d_{qijMNS}^{[sc]} (\hat{s}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{c}_{iS}) \delta_{N0} \right] \quad (2.87b)$$

$$\begin{aligned}
A^{[c]} = d_{A1}^{[c]} + \sum_i \sum_j \sum_N \sum_S \left[d_{Aij1NS}^{[cc]} (\hat{c}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{c}_{iS}) \right. \\
\left. + d_{Aij1NS}^{[ss]} (\hat{s}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{N0} \delta_{S0} \right]
\end{aligned} \tag{2.87c}$$

$$\begin{aligned}
A^{[s]} = d_{A1}^{[s]} + \sum_i \sum_j \sum_N \sum_S \left[d_{Aij1NS}^{[cs]} (\hat{c}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{S0} \right. \\
\left. + d_{Aij1NS}^{[sc]} (\hat{s}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{c}_{iS}) \delta_{N0} \right]
\end{aligned} \tag{2.87d}$$

$$\begin{aligned}
B = d_{B0}^{[s]} + \sum_i \sum_j \sum_N \sum_S \left[d_{Bij0NS}^{[cs]} (\hat{c}_{jN} \hat{s}_{iS} - \bar{c}_{jN} \bar{s}_{iS}) \delta_{S0} \right. \\
\left. + d_{Bij0NS}^{[sc]} (\hat{s}_{jN} \hat{c}_{iS} - \bar{s}_{jN} \bar{c}_{iS}) \delta_{N0} \right]
\end{aligned} \tag{2.87e}$$

ここで, $d_{qM}^{[c]}$, $d_{qM}^{[s]}$, $d_{A1}^{[c]}$, $d_{A1}^{[s]}$, $d_{B0}^{[s]}$, $d_{qijMNS}^{[s]}$, $d_{AijMNS}^{[\alpha]}$, $d_{BijMNS}^{[cs]}$ ならびに $d_{BijMNS}^{[sc]}$ ($\alpha = cc, ss, cs, sc$) は面内の境界条件から決定される定数である. 以上より, 応力関数は決定される.

2.3.6 多自由度系への変換

無限自由度を有する薄肉円環板の運動方程式を, ガラーキン法を用いて有限多自由度系に変換する. 面内慣性力を無視し無次元化と変数変換をした式 (2.10) に面外の境界条件を満足するたわみ w , 初期たわみ w_0 ならびに面内の境界条件を満足する応力関数 f を代入すると, 次式を得る.

$$-\int_{\tau_0}^{\tau_1} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_0^{2\pi} L(w, f) e^{2\eta} \delta w d\eta d\theta d\tau = 0 \tag{2.88}$$

上式の積分を実行すると有限多自由度の運動方程式として, つぎの非線形連立常微分方程式を得る.

$$\begin{aligned}
& \sum_j \sum_N \hat{B}_{gjNQ}^{[c][c]} \hat{c}_{jN, \tau\tau} + \sum_j \sum_N \left(\hat{c}_{gjNQ}^{[c][c]} \hat{c}_{jN} + \hat{c}_{gjNQ}^{[c][s]} \hat{s}_{jN} \delta_{N0} \right) \\
& + \sum_h \sum_i \sum_j \sum_N \sum_S \sum_P \left(\hat{E}_{ghijNSPQ}^{[c][ccc]} \hat{c}_{jN} \hat{c}_{iS} \hat{c}_{hP} + \hat{E}_{ghijNSPQ}^{[c][css]} \hat{c}_{jN} \hat{s}_{iS} \hat{s}_{hP} \delta_{S0} \delta_{P0} \right) \\
& - \hat{F}_{gQ}^{[c]} - \hat{G}_{gQ}^{[c]} (p_s + p_d \cos \omega\tau) - \hat{H}_{gQ}^{[c]} q_s = 0 \tag{2.89a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_j \sum_N \hat{B}_{gjNQ}^{[s][s]} \hat{s}_{jN, \tau\tau} \delta_{N0} + \sum_j \sum_N \left(\hat{C}_{gjNQ}^{[s][c]} \hat{c}_{jN} + \hat{C}_{gjNQ}^{[s][s]} \hat{s}_{jN} \delta_{N0} \right) \\
& + \sum_h \sum_i \sum_j \sum_N \sum_S \sum_P \left(\hat{E}_{ghijN\text{SP}Q}^{[s][sss]} \hat{s}_{jN} \hat{s}_i \hat{s}_S \hat{s}_h P \delta_{N0} \delta_{S0} \delta_{P0} + \hat{E}_{ghijN\text{SP}Q}^{[s][css]} \hat{c}_{jN} \hat{c}_i \hat{s}_h P \delta_{P0} \right) \\
& - \hat{F}_{gQ}^{[s]} - \hat{G}_{gQ}^{[s]} (p_s + p_d \cos \omega\tau) - \hat{H}_{gQ}^{[s]} q_s = 0 \quad (2.89b)
\end{aligned}$$

$$(g, h, i, j = 0, 1, 2, \dots, j_{\max}, \quad N, S, P, Q = 0, 1, 2, \dots, N_{\max})$$

ただし、 $\hat{B}_{gjNQ}^{[c][c]}$, $\hat{B}_{gjNQ}^{[s][s]}$ は慣性力項の係数である。 $\hat{C}_{gjNQ}^{[c][c]}$, $\hat{C}_{gjNQ}^{[c][s]}$, $\hat{C}_{gjNQ}^{[s][c]}$ ならびに $\hat{C}_{gjNQ}^{[s][s]}$ は線形の復元力項の係数である。 $\hat{E}_{ghijN\text{SP}Q}^{[c][ccc]}$, $\hat{E}_{ghijN\text{SP}Q}^{[c][css]}$, $\hat{E}_{ghijN\text{SP}Q}^{[s][sss]}$ ならびに $\hat{E}_{ghijN\text{SP}Q}^{[s][ccs]}$ は三次の非線形項の係数である。 $\hat{F}_{gQ}^{[c]}$ と $\hat{F}_{gQ}^{[s]}$ は初期たわみより得られる定数項である。 $\hat{G}_{gQ}^{[c]}$ と $\hat{G}_{gQ}^{[s]}$ は一様な外力項の係数であり、 $\hat{H}_{gQ}^{[c]}$ と $\hat{H}_{gQ}^{[s]}$ は集中荷重項の係数である。各項の係数はつぎの通りである。

$$\hat{B}_{gjNQ}^{[c][c]} = \sum_k \sum_n d_{0jkN} d_{0gnQ} \bar{\mu}_{gjkN,2}^{[2]} \delta_{NQ}^{[c]} \quad (2.90a)$$

$$\hat{B}_{gjNQ}^{[s][s]} = \sum_k \sum_n d_{0jkN} d_{0gnQ} \bar{\mu}_{gjkN,2}^{[2]} \delta_{NQ}^{[s]} \quad (2.90b)$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{gjNQ}^{[c][c]} &= \bar{C}_{gjNQ} \delta_{NQ}^{[c]} \\
& + c \sum_h \sum_i \sum_S \sum_P \left(\bar{\psi}_{ghijN\text{SP}Q}^{[c][ccc]} \bar{c}_i \bar{c}_h P + \bar{\psi}_{ghijN\text{SP}Q}^{[c][css]} \bar{s}_i \bar{s}_h P \delta_{S0} \delta_{P0} \right) - c \bar{\psi}_{gjNQ}^{[c][c1]}
\end{aligned} \quad (2.90c)$$

$$\hat{C}_{gjNQ}^{[c][s]} = c \sum_h \sum_i \sum_S \sum_P \left(\bar{\psi}_{ghijN\text{SP}Q}^{[c][scs]} \bar{c}_i \bar{s}_h P \delta_{P0} + \bar{\psi}_{ghijN\text{SP}Q}^{[c][ssc]} \bar{s}_i \bar{c}_h P \delta_{S0} \right) - c \bar{\psi}_{gjNQ}^{[c][s1]} \quad (2.90d)$$

$$\hat{C}_{gjNQ}^{[s][c]} = c \sum_h \sum_i \sum_S \sum_P \left(\bar{\psi}_{ghijN\text{SP}Q}^{[s][ccs]} \bar{c}_i \bar{s}_h P \delta_{P0} + \bar{\psi}_{ghijN\text{SP}Q}^{[s][csc]} \bar{s}_i \bar{c}_h P \delta_{S0} \right) - c \bar{\psi}_{gjNQ}^{[s][c2]} \quad (2.90e)$$

$$\begin{aligned}
\hat{C}_{gjNQ}^{[s][s]} &= \bar{C}_{gjNQ} \delta_{NQ}^{[s]} \\
& + c \sum_h \sum_i \sum_S \sum_P \left(\bar{\psi}_{ghijN\text{SP}Q}^{[s][scs]} \bar{c}_i \bar{c}_h P + \bar{\psi}_{ghijN\text{SP}Q}^{[s][sss]} \bar{s}_i \bar{s}_h P \delta_{S0} \delta_{P0} \right) - c \bar{\psi}_{gjNQ}^{[s][s2]}
\end{aligned} \quad (2.90f)$$

$$\hat{E}_{ghijN\text{SP}Q}^{[c][ccc]} = -c \bar{\psi}_{ghijN\text{SP}Q}^{[c][ccc]} \quad (2.90g)$$

$$\hat{E}_{ghijN\text{SP}Q}^{[c][css]} = -c \left(\bar{\psi}_{ghijN\text{SP}Q}^{[c][css]} + \bar{\psi}_{gijhPNSQ}^{[c][scs]} + \bar{\psi}_{gjhiSPNQ}^{[c][ssc]} \right) \quad (2.90h)$$

$$\hat{E}_{ghijNSPQ}^{[s][sss]} = -c \bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[s][sss]} \quad (2.90i)$$

$$\hat{E}_{ghijNSPQ}^{[s][ccs]} = -c \left(\bar{\psi}_{gijhPNSQ}^{[s][scc]} + \bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[s][ccs]} + \bar{\psi}_{gghisPNQ}^{[s][csc]} \right) \quad (2.90j)$$

$$\hat{F}_{gQ}^{[c]} = \sum_j \sum_N \bar{C}_{gjNQ} \delta_{NQ}^{[c]} \bar{c}_{jN} \quad (2.90k)$$

$$\hat{F}_{gQ}^{[c]} = \sum_j \sum_N \bar{C}_{gjNQ} \delta_{NQ}^{[s]} \bar{s}_{jN} \delta_{N0} \quad (2.90l)$$

$$\hat{G}_{gQ}^{[c]} = \sum_n d_{0gnQ} \bar{\mu}_{gn,2}^{[2]} 2\pi \delta_{Q0} \quad (2.90m)$$

$$\hat{G}_{gQ}^{[s]} = 0 \quad (2.90n)$$

$$\hat{H}_{gQ}^{[c]} = \sum_n d_{0gnQ} e^{2\eta_{qs}} e^{(n+\delta_{n4g})\eta_{qs}} \cos Q \theta_{qs} \quad (2.90o)$$

$$\hat{H}_{gQ}^{[s]} = \sum_n d_{0gnQ} e^{2\eta_{qs}} e^{(n+\delta_{n4g})\eta_{qs}} \sin Q \theta_{qs} \quad (2.90p)$$

ただし、上式において $\delta_{NQ}^{[c]}$ と $\delta_{NQ}^{[s]}$ は θ に関する定積分から導かれる項であり、次式に示す通りである。

$$\delta_{NQ}^{[c]} = \pi (\delta_{NQ} + \delta_{N0} \delta_{Q0}) \quad (2.91a)$$

$$\delta_{NQ}^{[s]} = \pi (\delta_{NQ} - \delta_{N0} \delta_{Q0}) \quad (2.91b)$$

η に関する定積分から導かれる項を整理する上で、 η の定積分を次のようにおいた。

$$\bar{\mu}_{gn,p}^{[2]} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{p\eta} e^{(n+\delta_{n4g})\eta} d\eta \quad (2.92a)$$

$$\bar{\mu}_{gjkN,p}^{[1]} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta e^{p\eta} e^{p_{gjkN}\eta} d\eta \quad (2.92b)$$

$$\bar{\mu}_{gjkN,p}^{[2]} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{p\eta} e^{p_{gjkN}\eta} d\eta \quad (2.92c)$$

$$\bar{\mu}_{ghijklmn,p-2}^{[1][2]} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{-2\eta} e^{p\eta} e^{p_{gjkN}\eta} \mu_{hilm,-p}^{[1]} d\eta \quad (2.92d)$$

$$\bar{\mu}_{ghijklmn,p-2}^{[2][1]} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \eta e^{-2\eta} e^{p\eta} e^{p_{gjkN}\eta} \mu_{hilm,-p}^{[2]} d\eta \quad (2.92e)$$

$$\bar{\mu}_{ghijklmn,p-2}^{[2][2]} = \int_{\eta_1}^{\eta_2} e^{-2\eta} e^{p\eta} e^{p_{gjkN}\eta} \mu_{hilm,-p}^{[2]} d\eta \quad (2.92f)$$

式(2.90c), (2.90f), (2.90k)ならびに(2.90l)に含まれる \bar{C}_{gjNQ} は次式に示す通りである。

$$\begin{aligned} \bar{C}_{gjNQ} = \sum_k \sum_n \{ & d_{4jkN} - 4d_{3jkN} + 2(2 - N^2) d_{2jkN} + 4N^2 d_{1jkN} \\ & + (N^4 - 4N^2) d_{0jkN} \} d_{0gnQ} \bar{\mu}_{gjkN,-2}^{[2]} \quad (2.93) \end{aligned}$$

式 (2.90c) から (2.90f) において $\bar{\psi}_{gjNQ}^{[c][c1]}$, $\bar{\psi}_{gjNQ}^{[c][s1]}$, $\bar{\psi}_{gjNQ}^{[s][c2]}$, $\bar{\psi}_{gjNQ}^{[s][s2]}$ はつぎの通りである.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{gjNQ}^{[\alpha_1][\alpha_2]} = & \sum_k \sum_n \sum_M \sum_R \left\{ \left(\bar{\psi}_{gjk n M}^{[\alpha_3][1]} d_{1jkN} + \bar{\psi}_{gjk n M}^{[\alpha_3][2]} d_{2jkN} \right. \right. \\ & \left. \left. - N^2 \bar{\psi}_{gjk n M}^{[\alpha_3][3]} d_{0jkN} \right) \delta_{RMN}^{[q_1]} \right. \\ & \left. \pm 2N \bar{\psi}_{gjk n M}^{[\alpha_3][4]} (d_{0jkN} - d_{1jkN}) \delta_{RMN}^{[q_2]} \right\} d_{0gnQ} \delta_{RQ}^{[\alpha_1]} \\ & (k, n = 0, 1, 2, 3, 4. M = 0, 1, 2, \dots, 2N_{\max}. R = 0, 1, 2, \dots, 3N_{\max}.) \quad (2.94) \end{aligned}$$

ただし, 上式の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, q_1, q_2$ ならびに符号 "±" の対応関係は表 2.7 に示す通りである. ここで, 上式に含まれる $\bar{\psi}_{gjk n M}^{[\alpha_3][q]}$, ($q = 1 \sim 4$) は以下に示す通りである.

Table 2.7: Combinations among α_3, q_1, q_2 and "±" corresponding to α_1 and α_2 of $\bar{\psi}_{gjNS}^{[\alpha_1][\alpha_2]}$

α_1	α_2	α_3	q_1	q_2	±
c	c ₁	c	1	2	−
c	s ₁	s	2	1	−
s	s ₂	c	3	4	+
s	c ₂	s	4	3	+

$$\bar{\psi}_{gjk n M}^{[\alpha][1]} = \begin{cases} -2d_{20}^{[\alpha]-[2]} \bar{\mu}_{gjk n, -2}^{[2]} + 2d_{40}^{[\alpha]-[2]} \bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[2]} & (\alpha = c, M = 0) \\ 0 & (\alpha = s, M = 0) \\ 4d_{21}^{[\alpha]-[2]} \bar{\mu}_{gjk n, -3}^{[2]} + 4d_{31}^{[\alpha]-[2]} \bar{\mu}_{gjk n, 1}^{[2]} - 2d_{51}^{[\alpha]-[2]} \bar{\mu}_{gjk n, -1}^{[2]} & (M = 1) \\ 2M(M-1) d_{1M}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -2+M}^{[2]} \\ \quad + 2M(M+1) d_{2M}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -(2+M)}^{[2]} \\ \quad + 2M(M+1) d_{3M}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, M}^{[2]} \\ \quad + 2M(M-1) d_{4M}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -M}^{[2]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.95a)$$

$$\bar{\psi}_{gjk n M}^{[\alpha][2]} = \begin{cases} d_{20}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -2} + 2d_{30}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, 0} \\ \quad + d_{40}^{[\alpha]} \left(\bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[2]} + 2\bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[1]} \right) & (\alpha = c, M = 0) \\ 0 & (\alpha = s, M = 0) \\ -2d_{21}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -3} + 2d_{31}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, 1} \\ \quad + d_{41}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -1} + 2d_{51}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -1} & (M = 1) \\ M(1 - M) d_{1M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -2+M} \\ \quad - M(1 + M) d_{2M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -(2+M)} \\ \quad + (2 - M)(1 + M) d_{3M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, M} \\ \quad + (2 + M)(1 - M) d_{4M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -M} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.95b)$$

$$\bar{\psi}_{gjk n M}^{[\alpha][3]} = \begin{cases} -d_{20}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -2} + 2d_{30}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, 0} \\ \quad + d_{40}^{[\alpha]} \left(3\bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[2]} + 2\bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[1]} \right) & (\alpha = c, M = 0) \\ 0 & (\alpha = s, M = 0) \\ 2d_{21}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -3} + 6d_{31}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, 1} + d_{41}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -1} & (M = 1) \\ M(M - 1) d_{1M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -2+M} \\ \quad + M(M + 1) d_{2M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -(2+M)} \\ \quad + (2 + M)(1 + M) d_{3M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, M} \\ \quad + (2 - M)(1 - M) d_{4M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -M} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.95c)$$

$$\bar{\psi}_{gjk n M}^{[h][\alpha][4]} = \begin{cases} 0 & (\alpha = c, M = 0) \\ d_{10}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -2} & (\alpha = s, M = 0) \\ 2d_{21}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -3} - 2d_{31}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, 1} - d_{41}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -1} & (M = 1) \\ -\{ (M - 1) d_{1M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -2+M} \\ \quad - (M + 1) d_{2M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -(2+M)} \\ \quad + (1 + M) d_{3M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, M} \\ \quad + (1 - M) d_{4M}^{[\alpha] \bar{[2]}} \bar{\mu}_{gjk n, -M} \} M & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.95d)$$

式(2.90c)から(2.90j)において $\bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[c][ccc]}$, $\bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[c][css]}$, $\bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[c][scs]}$, $\bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[c][ssc]}$, $\bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[s][scs]}$,

$\bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[s][sss]}$, $\bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[s][ccs]}$, $\bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[s][csc]}$ はつぎの通りである.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_{ghijNSPQ}^{[\alpha_1][\alpha_2]} = \sum_k \sum_n \sum_M \sum_R \left\{ \right. & \left. \left(\bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[\alpha_3][1]} d_{1jkN} + \bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[\alpha_3][2]} d_{2jkN} \right. \right. \\ & \left. \left. - N^2 \bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[\alpha_3][3]} d_{0jkN} \right) \delta_{RMN}^{[q_1]} \right. \\ & \left. \pm 2N \bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[\alpha_3][4]} (d_{0jkN} - d_{1jkN}) \delta_{RMN}^{[q_2]} \right\} d_{0gnQ} \delta_{RQ}^{[\alpha_1]} \end{aligned}$$

($k, n = 0, 1, 2, 3, 4. M = 0, 1, 2, \dots, 2N_{\max}. R = 0, 1, 2, \dots, 3N_{\max}.$) (2.96)

ただし, 上式の $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, q_1, q_2$ ならびに符号 ” \pm ” の対応関係は表 2.8 に示す通りである.

Table 2.8: The combinations among α_3, q_1, q_2 and ” \pm ” corresponding to α_1 and α_2 of $\bar{\psi}_{ghijknNSPQ}^{[\alpha_1][\alpha_2]}$

α_1	α_2	α_3	q_1	q_2	\pm
c	ccc	cc	1	2	-
c	css	ss	1	2	-
c	scs	cs	2	1	-
c	ssc	sc	2	1	-
s	scc	cc	3	4	+
s	sss	ss	3	4	+
s	ccs	cs	4	3	+
s	csc	sc	4	3	+

式 (2.96) の $\bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[\alpha_3][q]}$ ($\alpha_3 = cc, ss, cs, sc, q = 1, 2, 3, 4$) は次式で示される.

$$\bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[\alpha][q]} = \bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[h][\alpha][q]} + \bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[p][\alpha][q]} \quad (2.97)$$

上式において $\bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[h][\alpha][q]}$ は q に対して次式で示される.

$$\bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[h][\alpha][1]} = \begin{cases} \begin{cases} -2d_{2hi0SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkN,-2}^{[2]} + 2d_{4hi0SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkN,0}^{[2]} & (\alpha = cc, ss, M = 0) \\ 0 & (\alpha = cs, sc, M = 0) \end{cases} \\ \begin{cases} 4d_{2hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkN,-3}^{[2]} + 4d_{3hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkN,1}^{[2]} \\ -2d_{5hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkN,-1}^{[2]} & (M = 1) \end{cases} \\ \begin{cases} 2M(M-1) d_{1hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkN,-2+M}^{[2]} \\ +2M(M+1) d_{2hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkN,-(2+M)}^{[2]} \\ +2M(M+1) d_{3hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkN,M}^{[2]} \\ +2M(M-1) d_{4hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkN,-M}^{[2]} & (M \geq 2) \end{cases} \end{cases} \quad (2.98a)$$

$$\bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[h][\alpha][2]} = \begin{cases} d_{2hi0SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -2}^{[2]} + 2d_{3hi0SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[2]} \\ \quad + d_{4hi0SP}^{[\alpha]} \left(\bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[2]} + 2\bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[1]} \right) & (\alpha = cc, ss, M = 0) \\ 0 & (\alpha = cs, sc, M = 0) \\ -2d_{2hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -3}^{[2]} + 2d_{3hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, 1}^{[2]} \\ \quad + d_{4hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -1}^{[2]} + 2d_{5hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -1}^{[2]} & (M = 1) \\ M(1-M) d_{1hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -2+M}^{[2]} \\ \quad - M(1+M) d_{2hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -(2+M)}^{[2]} \\ \quad + (2-M)(1+M) d_{3hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, M}^{[2]} \\ \quad + (2+M)(1-M) d_{4hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -M}^{[2]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.98b)$$

$$\bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[h][\alpha][3]} = \begin{cases} -d_{2hi0SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -2}^{[2]} + 2d_{3hi0SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[2]} \\ \quad + d_{4hi0SP}^{[\alpha]} \left(3\bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[2]} + 2\bar{\mu}_{gjk n, 0}^{[1]} \right) & (\alpha = cc, ss, M = 0) \\ 0 & (\alpha = cs, sc, M = 0) \\ 2d_{2hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -3}^{[2]} + 6d_{3hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, 1}^{[2]} \\ \quad + d_{4hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -1}^{[2]} & (M = 1) \\ M(M-1) d_{1hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -2+M}^{[2]} \\ \quad + M(M+1) d_{2hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -(2+M)}^{[2]} \\ \quad + (2+M)(1+M) d_{3hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, M}^{[2]} \\ \quad + (2-M)(1-M) d_{4hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjk n, -M}^{[2]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.98c)$$

$$\bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[h][\alpha][4]} = \begin{cases} 0 & (\alpha = cc, ss, M = 0) \\ d_{1hi0SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkcn,-2}^{[2]} & (\alpha = cs, sc, M = 0) \\ 2d_{2hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkcn,-3}^{[2]} - 2d_{3hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkcn,1}^{[2]} \\ \quad - d_{4hi1SP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkcn,-1}^{[2]} & (M = 1) \\ -\{ (M-1) d_{1hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkcn,-2+M}^{[2]} \\ \quad - (M+1) d_{2hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkcn,-(2+M)}^{[2]} \\ \quad + (1+M) d_{3hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkcn,M}^{[2]} \\ \quad + (1-M) d_{4hiMSP}^{[\alpha]} \bar{\mu}_{gjkcn,-M}^{[2]} \} M & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.98d)$$

また、式 (2.97) において $\bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[p][\alpha][q]}$ ($\alpha = cc, ss, cs, sc, q = 1, 2, 3, 4$) はつぎの通りである。

$$\bar{\psi}_{ghijknMSP}^{[p][\alpha][q]} = \sum_l \sum_m \Psi_{ghijklmn}^{[\alpha][q]} \Phi_{hilmMSP}^{[\alpha]} \quad (2.99)$$

ここで、上式の $\Psi_{ghijklmn}^{[\alpha][q]}$ は次式に示す通りである。

$$\Psi_{ghijklmn}^{[\alpha][1]} = \begin{cases} -\frac{1}{2} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2}^{[2][2]} + \frac{1}{2} \bar{\mu}_{ghijklmn,0}^{[2][2]} & (\alpha = cc, ss, M = 0) \\ 0 & (\alpha = cs, sc, M = 0) \\ -\frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,-3}^{[2][2]} + \frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,1}^{[2][2]} & (M = 1) \\ -\frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2+M}^{[2][2]} - \frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2-M}^{[2][2]} \\ \quad + \frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,M}^{[2][2]} + \frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,-M}^{[2][2]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.100a)$$

$$\Psi_{ghijklmn}^{[\alpha][2]} = \begin{cases} \frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2}^{[2][2]} - \frac{1}{2} \left(\bar{\mu}_{ghijklmn,0}^{[1][2]} + \bar{\mu}_{ghijklmn,0}^{[2][2]} \right) \\ \quad + \frac{1}{4} \left(\bar{\mu}_{ghijklmn,0}^{[2][2]} + 2\bar{\mu}_{ghijklmn,0}^{[2][1]} \right) & (\alpha = cc, ss, M = 0) \\ 0 & (\alpha = cs, sc, M = 0) \\ \frac{1}{8} \bar{\mu}_{ghijklmn,-3}^{[2][2]} + \frac{1}{8} \bar{\mu}_{ghijklmn,1}^{[2][2]} - \frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,-1}^{[2][2]} & (M = 1) \\ \frac{1}{8} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2+M}^{[2][2]} + \frac{1}{8} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2-M}^{[2][2]} \\ \quad + \frac{1}{8} \frac{2-M}{M} \bar{\mu}_{ghijklmn,M}^{[2][2]} - \frac{1}{8} \frac{2+M}{M} \bar{\mu}_{ghijklmn,-M}^{[2][2]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.100b)$$

$$\Psi_{ghijklmn}^{[\alpha][3]} = \begin{cases} -\frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2}^{[2][2]} - \frac{1}{2} \left(\bar{\mu}_{ghijklmn,0}^{[1][2]} + \bar{\mu}_{ghijklmn,0}^{[2][2]} \right) \\ \quad + \frac{1}{4} \left(3\bar{\mu}_{ghijklmn,0}^{[2][2]} + 2\bar{\mu}_{ghijklmn,0}^{[2][1]} \right) & (\alpha = cc, ss, M = 0) \\ 0 & (\alpha = cs, sc, M = 0) \\ -\frac{1}{8} \bar{\mu}_{ghijklmn,-3}^{[2][2]} + \frac{3}{8} \bar{\mu}_{ghijklmn,1}^{[2][2]} - \frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,-1}^{[2][2]} & (M = 1) \\ -\frac{1}{8} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2+M}^{[2][2]} - \frac{1}{8} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2-M}^{[2][2]} \\ \quad + \frac{1}{8} \frac{2+M}{M} \bar{\mu}_{ghijklmn,M}^{[2][2]} - \frac{1}{8} \frac{2-M}{M} \bar{\mu}_{ghijklmn,-M}^{[2][2]} & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.100c)$$

$$\Psi_{ghijklmn}^{[\alpha][4]} = \begin{cases} 0 & (M = 0) \\ -\frac{1}{8} \bar{\mu}_{ghijklmn,-3}^{[2][2]} - \frac{1}{8} \bar{\mu}_{ghijklmn,1}^{[2][2]} + \frac{1}{4} \bar{\mu}_{ghijklmn,-1}^{[2][2]} & (M = 1) \\ -\left(-\frac{1}{8} \frac{1}{M} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2+M}^{[2][2]} + \frac{1}{8} \frac{1}{M} \bar{\mu}_{ghijklmn,-2-M}^{[2][2]} \right. \\ \quad \left. + \frac{1}{8} \frac{1}{M} \bar{\mu}_{ghijklmn,M}^{[2][2]} - \frac{1}{8} \frac{1}{M} \bar{\mu}_{ghijklmn,-M}^{[2][2]} \right) M & (M \geq 2) \end{cases} \quad (2.100d)$$

これまでは未知時間関数を \hat{c}_{jN} や \hat{s}_{jN} のように周方向の座標関数の種類，半径方向の座標関数の次数 j ならびに周方向の座標関数の波数 N で定義した．式 (2.89a) と (2.89b) で得られた非線形常微分方程式をさらに整理するため，周方向の座標関数の種類によらず未知時間関数を \hat{b}_i とおき，対応する半径方向と周方向の座標関数の積を ζ_i とおく．式 (2.27) で仮定したたわみ w を未知時間関数 \hat{b}_i と座標関数 ζ_i を用いると次式の通り書き換えられる．

$$w(\eta, \theta, \tau) = \sum_i \hat{b}_i(\tau) \zeta_i(\eta, \theta) \quad (2.101)$$

次数 j ， N から i への変換では，未知時間関数 \hat{c}_{jN} ， \hat{s}_{jN} に応じて以下のように場合分けを行う．ただし周方向の座標関数が正弦関数かつその波数が 0 の場合の未知時間関数は除外する．

$$i = \begin{cases} j + 1 + (N - 1)(j_{\max} + 1) & (\text{if the unknown function is } \hat{s}_{jN}.) \\ j + 1 + (N + N_{\max})(j_{\max} + 1) & (\text{if the unknown function is } \hat{c}_{jN}.) \end{cases} \quad (2.102)$$

これより，次数 i は 1 から始まり最大 $i_{\max} = (j_{\max} + 1)(2N_{\max} + 1)$ となる．一例として， $j = 0 \sim 1$ ， $N = 0 \sim 1$ の場合に次数 j, N から i への変換をすると， \hat{s}_{01} ， \hat{s}_{11} ， \hat{c}_{00} ， \hat{c}_{10} ， \hat{c}_{01} ， \hat{c}_{11} はそれぞれ， $\hat{b}_1 \sim \hat{b}_6$ に対応する．

以上より，式 (2.89a) と (2.89b) で示した非線形常微分方程式はつぎのように整理さ

れる。

$$\begin{aligned}
& - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\sum_j \hat{B}_{ij} \hat{b}_{j,\tau\tau} + \sum_j \hat{C}_{ij} \hat{b}_j + \sum_j \sum_k \sum_l \hat{E}_{ijkl} \hat{b}_j \hat{b}_k \hat{b}_l \right. \\
& \quad \left. - \hat{F}_i - \hat{G}_i(p_s + p_d \cos \omega\tau) - \hat{H}_i q_s \right] \delta \hat{b} d\tau = 0 \\
& \quad (i, j, k, l = 1, 2, \dots, i_{\max}) \quad (2.103)
\end{aligned}$$

上式を静的変形と静的平衡位置を基準とした動的応答の方程式に分離する。たわみ $w(\eta, \theta, \tau)$ を静荷重によるたわみである静たわみ $\check{w}(\eta, \theta)$ と静的平衡位置からの動的応答 $\tilde{w}(\eta, \theta, \tau)$ の和でつぎのように示す。

$$w(\eta, \theta, \tau) = \check{w}(\eta, \theta) + \tilde{w}(\eta, \theta, \tau) \quad (2.104)$$

静たわみ \check{w} と動的応答 \tilde{w} は、たわみ w と同様の座標関数を用いて次のように定義する。

$$[\check{w}(\eta, \theta, \cdot), \tilde{w}(\eta, \theta, \tau)] = \sum_j [\check{b}_j, \tilde{b}_j(\tau)] \zeta_j(\eta, \theta) \quad (2.105)$$

上式の \check{b} は静たわみの未知定数であり、 \tilde{b} は未知時間関数である。これより、たわみ w の未知時間関数 \hat{b}_j はつぎのように表される。

$$\hat{b}_j(\tau) = \check{b}_j + \tilde{b}_j(\tau) \quad (2.106)$$

上式を式 (2.103) に代入し、静的な項と動的な項に分離すると次式となる

$$\begin{aligned}
& - \int_{\tau_0}^{\tau_1} \left[\sum_j \hat{C}_{ij} \check{b}_j + \sum_j \sum_k \sum_l \hat{E}_{ijk} \check{b}_j \check{b}_k \check{b}_l - \hat{F}_i - \hat{G}_i p_s - \hat{H}_i q_s \right. \\
& \quad + \sum_j \hat{B}_{ij} \tilde{b}_{j,\tau\tau} + \sum_j \hat{C}_{ij} \tilde{b}_j + \sum_j \sum_k \tilde{D}_{ijk} \tilde{b}_j \tilde{b}_k + \sum_j \sum_k \sum_l \hat{E}_{ijkl} \tilde{b}_j \tilde{b}_k \tilde{b}_l \\
& \quad \left. - \hat{G}_i p_d \cos \omega\tau \right] \delta(\check{b} + \tilde{b}) d\tau = 0 \quad (2.107)
\end{aligned}$$

ただし、 \tilde{C}_{ij} 、 \tilde{D}_{ijk} はつぎに示すとおりである。

$$\tilde{C}_{ij} = \hat{C}_{ij} + \sum_k \sum_l \left(\hat{E}_{ijkl} + \hat{E}_{iklj} + \hat{E}_{iljk} \right) \check{b}_k \check{b}_l \quad (2.108a)$$

$$\tilde{D}_{ijk} = \sum_l \left(\hat{E}_{ijkl} + \hat{E}_{iklj} + \hat{E}_{iljk} \right) \check{b}_l \quad (2.108b)$$

式 (2.107) が恒等的に 0 となるためには、次に示す静荷重に対するつり合い式と静的平衡位置を基準とした運動方程式がそれぞれ 0 となる必要がある。

$$\sum_j \hat{C}_{ij} \check{b}_j + \sum_j \sum_k \sum_l \hat{E}_{ijk} \check{b}_j \check{b}_k \check{b}_l - \hat{F}_i - \hat{G}_i p_s - \hat{H}_i q_s = 0 \quad (2.109a)$$

$$\sum_j \hat{B}_{ij} \tilde{b}_{j,\tau\tau} + \sum_j \tilde{C}_{ij} \tilde{b}_j + \sum_j \sum_k \tilde{D}_{ijk} \tilde{b}_j \tilde{b}_k + \sum_j \sum_k \sum_l \hat{E}_{ijkl} \tilde{b}_j \tilde{b}_k \tilde{b}_l - \hat{G}_i p_d \cos \omega \tau = 0 \quad (2.109b)$$

まず、式(2.109a)より、静荷重に対する \tilde{b} は決定される。得られた \tilde{b} を用いて式(2.109b)の線形と二次の非線形の復元力項の係数 \tilde{C}_{ij} と \tilde{D}_{ijk} は得られる。

ついで、線形の固有振動数と固有振動モードを決定するために、式(2.109b)の非線形の復元力項と外力項を省略すると、次式を得る。

$$\sum_j \hat{B}_{ij} \tilde{b}_{j,\tau\tau} + \sum_j \tilde{C}_{ij} \tilde{b}_j = 0 \quad (2.110)$$

ここで $\tilde{b}_j = \tilde{B}_j \cos \omega \tau$ と仮定し、上式に代入する。固有値問題を解き、線形固有振動数と対応する固有ベクトルが得られる。 i 次の固有振動数 ω_i に対応する固有ベクトルの成分を ϕ_{ip} ($p = 1, 2, \dots, i_{\max}$)とする。ここで、運動方程式を固有振動モードに基づく基準座標で表現したときに慣性力項の係数を1とするため、固有ベクトルの成分 ϕ_{ip} をつぎのように基準化し ψ_{ip} とおく。

$$\psi_{ip} = \frac{\phi_{ip}}{\sqrt{\sum_m \sum_n \phi_{im} \hat{B}_{mn} \phi_{in}}} \quad (m, n = 1, 2, \dots, i_{\max}) \quad (2.111)$$

基準化した固有ベクトルをもとに、線形固有振動モード $\tilde{\zeta}_i$ を次のように定める。

$$\tilde{\zeta}_i = \frac{1}{n_i} \sum_p \psi_{ip} \zeta_p \quad (2.112)$$

ただし、 n_i は i 次振動モードの最大振幅を単位長さにするための定数である。ここで、動的応答 \tilde{w} を固有振動モード $\tilde{\zeta}_j$ と固有振動モードに基づく基準座標 b_j で表現すると次式となる。

$$\tilde{w} = \sum_j \tilde{\zeta}_j b_j \quad (2.113)$$

上式と動的応答を座標関数と未知時間関数の積で表現した式(2.105)と比較すると、未知時間関数 \tilde{b}_q は基準座標 b_j を用いるとつぎのように表される。

$$\tilde{b}_q = \sum_j \frac{1}{n_j} \psi_{jq} b_j \quad (2.114)$$

この結果を用いて基準座標に変換した運動方程式と各係数はつぎの通りである。

$$b_{i,\tau\tau} + 2\varepsilon_i \omega_i b_{i,\tau} + \omega_i^2 b_i + \sum_j \sum_k D_{ijk} b_j b_k + \sum_j \sum_k \sum_l E_{ijkl} b_j b_k b_l - G_i p_d \cos \omega \tau = 0 \quad (i, j, k, l = 1, 2, \dots, i_{\max}) \quad (2.115)$$

ただし、上式における各項の係数は以下に示す通りである。

$$D_{ijk} = \frac{n_i}{n_j n_k} \sum_p \sum_q \sum_r \tilde{D}_{pqr} \psi_{ip} \psi_{jq} \psi_{kr} \quad (2.116a)$$

$$E_{ijkl} = \frac{n_i}{n_j n_k n_l} \sum_p \sum_q \sum_r \sum_s \hat{E}_{pqrs} \psi_{ip} \psi_{jq} \psi_{kr} \psi_{ls} \quad (2.116b)$$

$$G_i = n_i \sum_p \hat{G}_p \psi_{ip} \quad (p, q, r, s = 1, 2, \dots, i_{\max}) \quad (2.116c)$$

運動方程式では新たに線形減衰の項を導入している。 ε_i は i 次振動モードの減衰比を表す。

2.3.7 解析条件

解析では、たわみ方向の境界条件を内周辺は固定、外周辺は自由とする。面内の境界条件として、内周辺では半径方向と周方向へ面内変位を与え、外周辺は自由とする。たわみ方向の境界条件を満足するたわみの座標関数を決定する。考慮する半径方向の座標関数の次数は $j = 0 \sim 2$ とし、周方向には $N = 0 \sim 6$ とする。これより、軸対称モードに加え非対称モードも考慮できる。近似項数は 39 項である。得られたたわみの座標関数を用いて面内の境界条件を満足する応力関数を決定する。たわみと応力関数を支配方程式に代入する。ガラーキソ法を用いて無限自由度の運動方程式を有限多自由度系へ変換する。たわみを静たわみと動的応答の和で表し、静たわみに関する非線形連立方程式と動的応答についての非線形連立常微分方程式が得られる。静たわみに関する連立方程式から静的変形、復元力特性が得られる。動的応答についての非線形連立常微分方程式から線形固有振動数と固有振動モードが得られる。得られた固有振動モードを用いて動的応答についての常微分方程式を固有振動モードに基づく基準座標へ変換する。近似モード数を 8 とし、Runge-Kutta-Gill 法による直接数値積分から周波数応答曲線、時系列波形を得る。各振動モードの減衰比 ε_i は、実験をもとに表 2.9 示す値を用いた。

2.3.8 初期たわみと境界における面内変位の決定方法

実験では、板の切り出しと内周辺での固定ならびに実験時の温度条件により発生する境界での面内変位の影響を受け、板は初期たわみを有する。実験において境界での面内変位と初期たわみの精密な測定は非常に困難である。そこで本研究では、実験における自重下での変形形状、線形固有振動数ならびに復元力特性を基にして、境界での面内変位と初期たわみを以下のように決定した。式 (2.109a) で示した静たわみの非

Table 2.9: Damping ratio ε_i corresponding to i th vibration mode.

i	ε_i
1	0.0022
2	0.0017
3	0.0012
4	0.0011
5	0.0009
6	0.0011
7	0.0011
8	0.0010

線形連立方程式において、未知数は初期たわみの未定係数 \bar{b} と境界での面内変位 u_i, v_i である。まず、初期値として面内変位 u_i, v_i を選ぶ。実験における自重下での変形形状を座標関数の線形結合を用いて近似し、静たわみに関する定数 \check{b} を決定する。初期値として与えた境界での面内変位 u_i, v_i と静たわみに関する定数 \check{b} を式(2.109a)に代入し、非線形の連立方程式を解くと初期たわみに関する未知数 \bar{b} が決定される。ついで、境界での面内変位を決定するために実験における線形固有振動数と復元力特性を用いた。実験と解析における復元力特性において、集中荷重が等しい際の静たわみの差をとる。同様に、実験と解析の固有振動数の差をとる。ただし、静たわみと固有振動数はそれぞれ実験における値で基準化した。複数の集中荷重における静たわみと複数の線形固有振動数の差が数値的に最小となる条件から、境界における面内変位を決定した。

後述の2.5.1項に示す復元力特性と線形固有振動数の実験結果から境界での面内変位を決定した。境界での面内変位を決定する計算では、図2.8中の1から8に示す集中荷重での静たわみを選び、表2.10の最低次から5番目の固有振動数を選んだ。まず、境界において波数 $M(M = 0, 1, 2, \dots, 6)$ の半径方向と周方向の面内変位を与え、それぞれの波数が線形固有振動数に与える影響を調べた。その結果、線形固有振動数は波数 $M = 0, 2, 4$ の場合に比較的大きな変化した。これより、本研究では境界での面内変位で考慮する波数を $M = 0, 2, 4$ とした。計算により得られた境界における半径方向と周方向の面内変位を図2.6示す。図の横軸は周方向の座標 θ [rad]であり、縦軸は面内変位である。図中における実線と破線はそれぞれ、境界における半径方向と周方向の面内変位 u_i, v_i である。境界での半径方向と周方向の面内変位の絶対値の最大は、それぞれ15と33である。これらを有次元で表すとそれぞれ、 11×10^{-3} mmと 23×10^{-3} mmである。

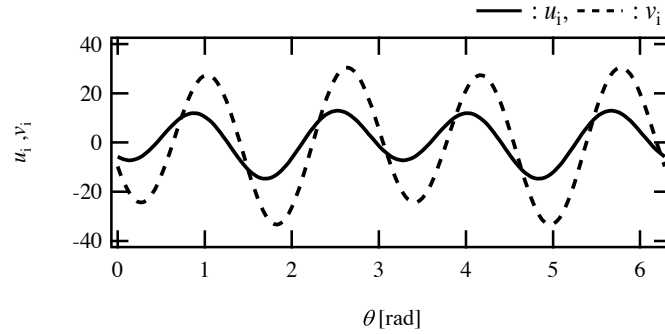


Fig 2.6: Identified in-plane displacement at the clamped boundary in the radial and the circumferential direction.

2.4 カオス振動の評価

カオス振動を複数の方法で評価した。カオス振動の時系列波形には不規則な振幅の変化がみられる。周波数分析結果ではカオス振動に寄与する振動モードの固有振動数近傍で顕著なスペクトルのピークが確認できる。さらに幅広い振動数範囲で振動数成分が誘起される。ポアンカレ写像図では、写像点が広範囲に分散する。

カオス振動を確定するために、最大リャプノフ指数と埋め込み次元の関係を調べる。本研究では、Wolf[11]の方法により時系列波形から埋め込み次元 e と最大リャプノフ指数 λ_{\max} を計算した。埋め込み次元の増加に対する最大リャプノフ指数の正值への収束からカオス振動の確定ができる。最大リャプノフ指数が収束した際の埋め込み次元の半分の数カオス振動に寄与する振動モード数に対応する。

カオス振動に寄与する振動モードとその寄与率を調べるため、主成分分析 [12] を用いた。多点同時計測されたたわみの時系列波形から分散共分散行列を計算する。得られた行列の固有値と固有ベクトルを計算する。固有ベクトルからカオス振動に寄与する振動モードに対応する変形パターンが得られる。すべての固有値の和に対する i 番目の固有値の比から i 番目の変形パターンに対応する寄与率が得られる。さらに本研究では、主成分分析に用いる時系列波形の時間長を短時間間隔に分割しそれぞれの区間ごとに分析を行い、カオス振動に寄与する振動モードと寄与率の時間変化を検討した。

2.5 結果および検討

2.5.1 基本特性

図 2.7(a) に実験における円環板の自重下での変形形状を等高線で示す。図中の破線は内周辺と外周辺に対応する。図中に示した数値は無次元の変形量である。変形量の基準

座標は $(\xi, \theta) = (0.28, 0)$ とした．図より，板は $\theta = 0, \pi \text{ rad}$ 方向で z 軸正方向へ大きな変形を示し， $\theta = \pi/2 \text{ rad}$ では z 軸負方向への変形を示す．板の最大の変形は $\theta = \pi \text{ rad}$ 近傍で板厚の2倍程度発生している．外半径と内半径の寸法差に対する変形の最大値は 0.9×10^{-3} 倍と小さい．解析により得られた初期たわみの形状を等高線で図 2.7(b) に示す．初期たわみの形状は実験における自重下の変形形状に近い．角度 $\theta = \pi/2 \text{ rad}$ 近傍では z 軸負方向への初期たわみが生じている．板の最大の初期たわみは座標 $\theta = \pi \text{ rad}$ 近傍で板厚程度発生している．

(a)experiment

(b)analysis

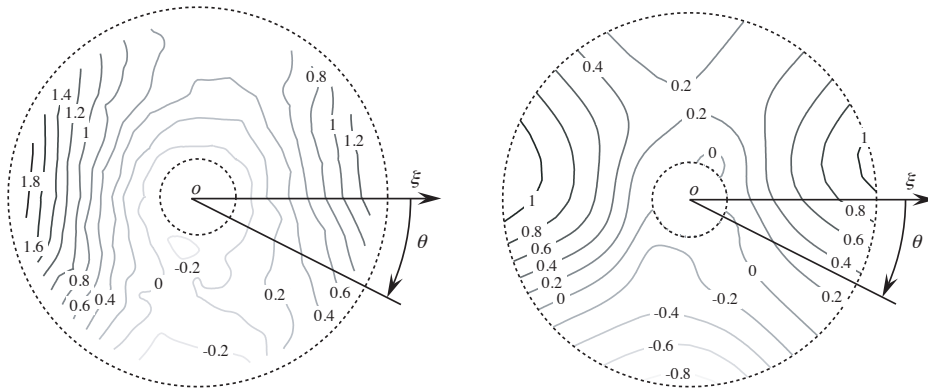


Fig 2.7: Configuration of the plate: (a)deformed configuration under the gravity in the experiment, (b)initial deflection in the analysis.

円環板の線形固有振動数と固有振動モードを表 2.10 に示す．表 2.10(a), (b) はそれぞれ実験と解析結果である．それぞれ表において，上段から節直径の数に対応した次数 i ，振動モードの概形，各固有振動モードの無次元の線形固有振動数である．振動モードの概形において，破線は振動モードの節線を示す．節直径の数が等しく異なる線形固有振動数を示す振動モードを区別するため，固有振動数が低い振動モードでは a を固有振動数が高い振動モードでは b を次数 i に付け加えた．実験では，節直径を 1, 2, ならびに 3 本有する振動モードにおいて節直径の数が等しい振動モードを二つずつ確認した．これらの固有振動モードの固有振動数は異なり，節直径は周方向へ約 $1/4$ 波長ずらした関係にある．線形固有振動数に注目すると 0 モードと 1a モードの固有振動数が非常に近接している．解析における固有振動数は実験結果と比較的近い値を示した．固有振動モードにおける節直径の位置に注目すると，節直径を 1, 2 ならびに 3 本有する振動モードでは比較的实验と近い位置に節直径を有する．しかし解析では，実験の 0 モードに対応する振動モードで他の領域とは位相の異なる狭い領域が存在する．位相の異なる部分の振幅は，振動モードの最大振幅に比べ $1/10$ 程度と比較的小さいため，次数 i は便宜上 0 とする．

Table 2.10: Linear natural frequencies and corresponding modes of vibration.

(a)Experiment							
i	1a	0	1b	2a	2b	3a	3b
Modal pattern							
ω_i	3.01	4.81	4.88	6.35	7.80	12.0	12.3
(b)Analysis							
i	1a	0	1b	2a	2b	3a	3b
Modal pattern							
ω_i	3.55	4.76	5.35	6.17	7.93	12.8	13.1

円環板の復元力特性を図 2.8 に示す. 図の横軸は静的平衡位置からの静たわみ w_s であり, 縦軸は集中荷重 q_s である. 板の自由辺近傍の $(\xi, \theta) = (0.92, 0)$ に集中荷重を加えた際の, 測定点 $(\xi, \theta) = (0.52, 0)$ と $(0.60, \pi)$ の静たわみを示す. 実験における測定点 $(\xi, \theta) = (0.52, 0)$ と $(0.60, \pi)$ での静たわみをそれぞれ灰色の丸印と三角印で示す. 測定点 $(0.52, 0)$ では, 集中荷重を静的平衡位置から正方向に増加させると漸硬型の復元力特性を示す. 一方, 負方向へ増加させるとわずかな漸軟型を示した後, 漸硬型の復元力特性を示す. これより実験における円環板は集中荷重に対して漸軟-漸硬型の復元力特性を有する. 板の中心に対して反対側の測定点 $(0.60, \pi)$ では荷重の増加に対して測定点 $(0.52, 0)$ とは逆方向に静たわみが増加した. 解析における測定点 $(\xi, \theta) = (0.52, 0)$ と $(0.60, \pi)$ での静たわみをそれぞれ黒色の実線と破線で示す. 測定点 $(0.52, 0)$ では解析においても漸軟-漸硬型の復元力特性を示し, 測定点 $(0.60, \pi)$ では荷重に対して $(0.52, 0)$ とは逆方向に静たわみが増加する. 実験と解析の結果を比較すると, どちらも集中荷重に対して漸軟-漸硬型の復元力特性を示し, 集中荷重に対する静たわみも良好に一致している.

2.5.2 周波数応答曲線

図 2.9(a), (b) に実験と解析により得られた周波数応答曲線を示す. 上段からそれぞれ無次元加振加速度振幅 p_d が $p_d = 2.7, 4.5, 5.4$ における周波数応答曲線である. 各図の縦軸は座標 $(\xi, \theta) = (0.92, 0)$ での応答の実効値振幅であり, 横軸は加振振動数である. 横軸上に, 丸印で線形固有振動数を示した. 図中において (i, p) は i モードの p 次共振応答を意味する.

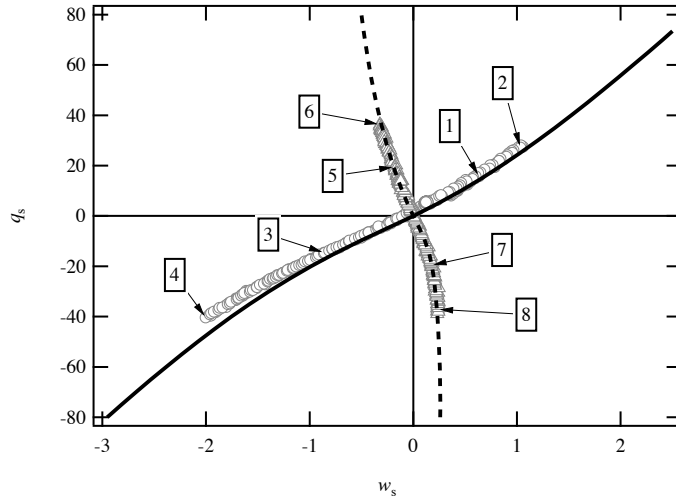
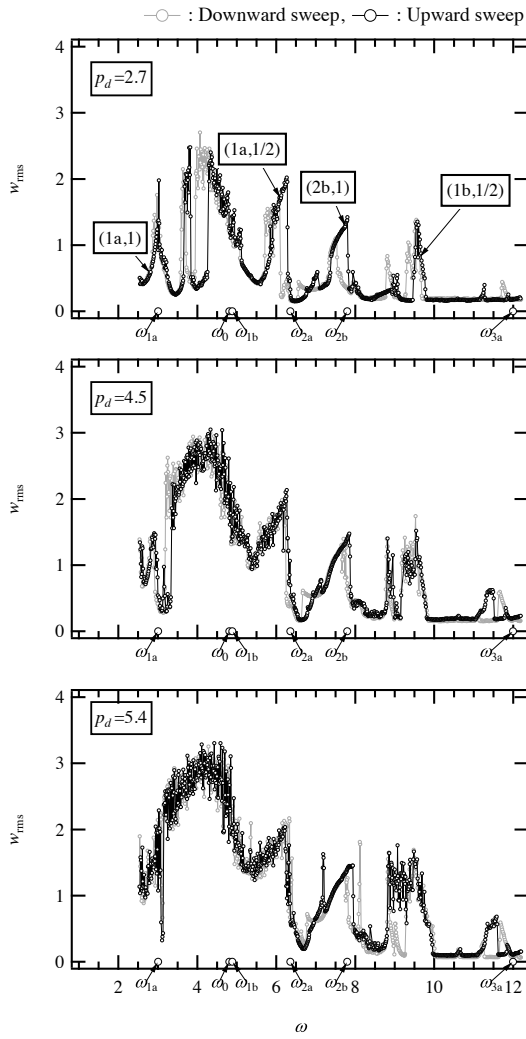


Fig 2.8: Characteristics of restoring force of the palate: experimental results, \circ measured at $(\xi, \theta) = (0.52, 0)$, \triangle measured at $(\xi, \theta) = (0.60, \pi)$. Analytical results, $-$ measured at $(\xi, \theta) = (0.52, 0)$, $-$ measured at $(\xi, \theta) = (0.60, \pi)$.

実験における加振加速度振幅が $p_d = 2.7$ の場合は、 $\omega = 2.8$ 近傍で 1a モードの主共振応答 (1a, 1) が発生し、 $\omega = 3.7$ では 0 モードと 1a モードの結合型共振応答が発生した。0 と 1b モードの固有振動数近傍の $\omega = 4.0$ から 5.1 では加振振動数の減少に対して応答振幅が増加する非周期の共振応答が確認できる。 $\omega = 6.1$ 近傍では 1a モードの 1/2 次分数次調波共振応答 (1a, 1/2) が発生し、 $w_{\text{rms}} = 1.5$ 程度で板は漸軟型の復元力特性に対応する応答を示した。 $\omega = 9.6$ では漸軟型の復元力特性に対応した 1b モードの 1/2 次分数次調波共振応答 (1b, 1/2) が発生した。解析では、1a, 0, 1b, 2b モードに関して顕著な共振応答が確認された。実験では漸軟型の復元力特性に対応した共振応答を示した 1b モードの 1/2 次分数次調波共振応答は、解析では漸硬型の復元力特性に対応した共振応答を示した。実験と同様に 0 と 1b モードの固有振動数近傍では非周期応答の発生を確認できるが、加振振動数の増加に対して応答振幅が増加する応答を示している。加振加速度振幅を増加させると実験と解析において 0 モードと 1b モードの固有振動数近傍の非周期応答を示す振動数範囲が拡大する。加振加速度振幅が $p_d = 5.4$ の場合では、実験において $\omega = 3.1$ 近傍の非共振応答を除く低振動数範囲において、非周期応答が確認できる。解析では、実験に比べ非周期応答を示す振動数範囲は狭くなるものの、0 モードと 1b モードの固有振動数近傍の共振応答において非周期応答が確認された。本研究では、加振加速度振幅 $p_d = 5.4$ で加振した際の実験と解析において共に発生した 0 モードと 1b モードの固有振動数近傍の非周期応答について分析を行い結果を比較する。

(a) Experimental results



(b) Analytical results

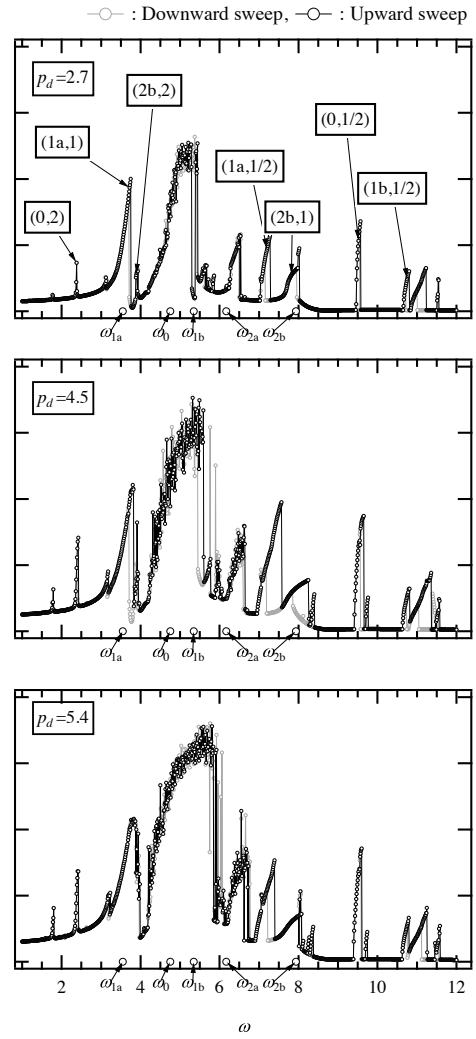


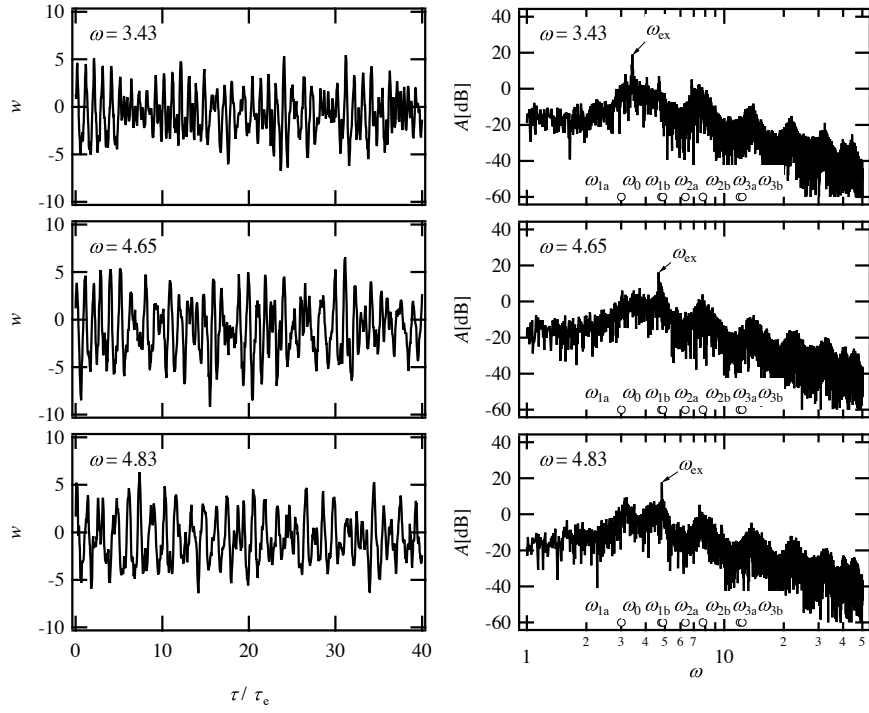
Fig 2.9: Frequency response curves: (a) experimental results, (b) analytical results.

2.5.3 カオス振動

0モードと1bモードの固有振動数近傍で発生した非周期応答について、実験と解析のたわみとその周波数分析結果を比較する。座標 $(\xi, \theta) = (0.92, 0)$ で収録した実験と解析におけるたわみの時系列波形と周波数分析結果を図2.10(a), (b)に示す。図の左右に時系列波形と周波数分析結果を示す。時系列波形の横軸は加振周期を基準とした周期数であり、縦軸はたわみである。周波数分析の横軸は周波数であり、縦軸は振幅スペクトルをデシベル値で示している。図2.10(a)は実験より得られた加振振動数 $\omega = 3.43, 4.65, 4.83$ の結果である。動的応答の時系列波形では、いずれの加振振動数でもスパイク状の非周期的な応答を示している。周波数分析結果では、加振振動数に振幅スペクトルの顕著なピークを確認できる。さらに幅広い周波数範囲にわたり振動数成分の誘起が確認できる。解析により得られた時系列波形と周波数分析結果を図2.10(b)に示す。図2.10(b)は加振振動数 $\omega = 4.60, 5.30, 5.60$ の結果である。時系列波形は実験で得られた結果と同様にスパイク状の非周期的な応答を確認できる。周波数分析結果では、実験と同様に幅広い周波数範囲における振動数成分が誘起されている。図2.11に実験と解析におけるポアンカレ写像図を示す。実験における加振振動数は $\omega = 4.65$ であり、解析における加振振動数は $\omega = 5.30$ である。実験では加振制御装置からの発信信号の最大振幅を基準に位相角を決定しており、解析では加振加速度波形の最大振幅を基準とした。図の上段と下段は位相角をそれぞれ $0, 2\pi/3$ とした結果である。実験と解析においてどちらも広範囲に写像点が分散した像を示した。位相の変化に対する写像の分散に変化は小さい。以上より、0モードと1bモードの線形固有振動数近傍で発生した非周期応答は実験と解析で同様の特徴を有している。

非周期応答をカオス振動応答と確定するために、時系列波形より最大リャプノフ指数を計算した。計算に用いた時系列波形は座標 $(\xi, \theta) = (0.92, 0)$ で収録した。図2.12(a), (b)に実験と解析により得られた最大リャプノフ指数と埋め込み次元の関係を示す。図の横軸は埋め込み次元 e であり縦軸は最大リャプノフ指数 λ_{\max} である。図2.12(a)では埋め込み次元 $e = 10 \sim 12$ 程度で最大リャプノフ指数 λ_{\max} が0.15程度に収束している。一方、図2.12(b)に示す解析結果から計算した最大リャプノフ指数と埋め込み次元の関係では、埋め込み次元が $e = 8$ 程度で最大リャプノフ指数が収束している。収束した際の最大リャプノフ指数は $\omega = 4.60$ では、 $\lambda_{\max} = 0.15 \sim 0.2$ 程度であり、 $\omega = 5.30, 5.60$ では $\lambda_{\max} = 0.3$ 程度である。以上より、実験と解析において埋め込み次元の増加に対し最大リャプノフ指数は正值へ収束した。これより、非周期応答はカオス振動応答であると確定された。

(a) Experimental results



(b) Analytical results

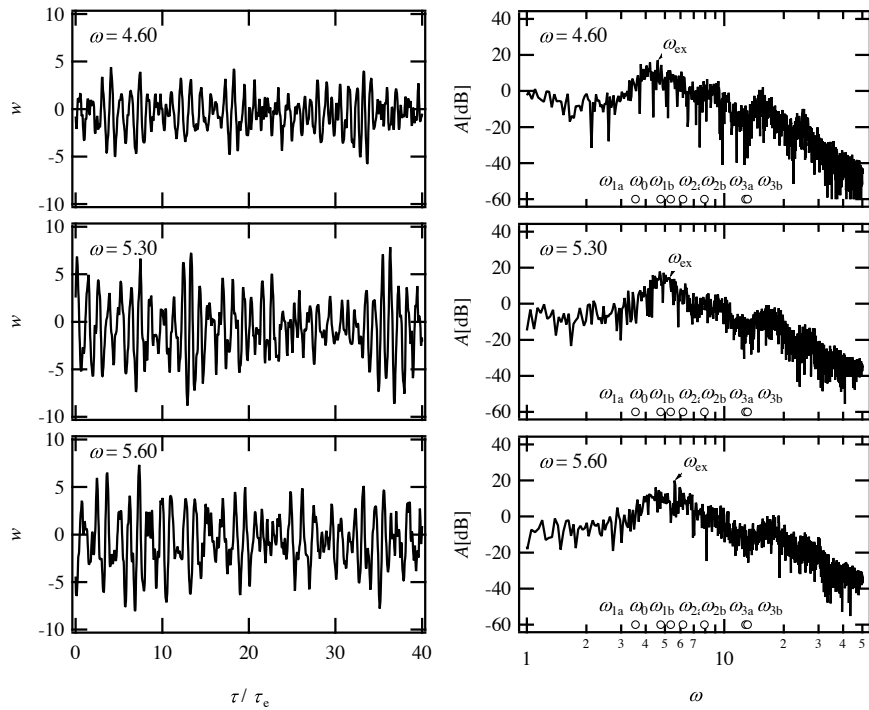


Fig 2.10: Time histories and the Fourier spectra: (a)experimental results, (b)analytical results.

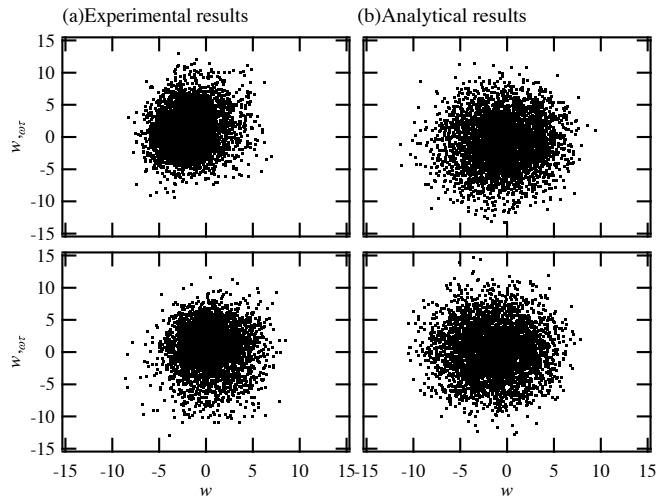


Fig 2.11: Poincaré projection: (a)experimental results($\omega = 4.65$), (b)analytical results($\omega = 5.30$).

2.5.4 主成分分析

加振加速度振幅 $p_d = 5.4$ における 0 モードと 1b モードの固有振動数近傍で発生したカオス振動応答に主成分分析を適用し、カオス振動応答に寄与する振動モードとその寄与率を調べる。実験では測定点 $(\xi, \theta) = (0.92, 0), (0.92, \pi/3), (0.92, 2\pi/3), (0.92, \pi), (0.92, 4\pi/3), (0.92, 5\pi/3)$ の 6 点において時系列波形を収録した。解析では半径 $\xi = 0.92$ において角度 $\theta = 0$ から $\pi/12$ rad ごとの 24 点における時系列波形を主成分分析に用いた。実験と解析で得られた加振振動数に対する各振動モードの寄与率を図 2.13(a), (b) 示す。各図の横軸は加振振動数であり、縦軸は各振動モードに対応する変形パターンの寄与率である。図 2.13(a) の実験から得られた時系列波形を用いた分析結果から、0 モードと 1b モードの固有振動数近傍で発生したカオス振動では 1a モードと 0 モードが広い周波数範囲で顕著に寄与している。1b モードの固有振動数近傍の $\omega = 4.83$ では、1b モードの寄与率の増加が確認できる。図 2.13(b) に示す解析結果では、実験と同様に 1a モードと 0 モードが広い振動数範囲での高い寄与を示した。一方、実験では固有振動数近傍で寄与の増加を示した 1b モードが広い振動数範囲で寄与している。

カオス振動における各振動モードの寄与率の時間変化を調べるために、主成分分析に用いる時系列波形を時間領域で等分割し、それぞれの時系列波形に対して分析を行う。分析に用いる時系列波形は、実験では 1a モード、0 モードに加えて 1b モードの寄与が大きい加振振動数 $\omega = 4.65$ とし、解析では $\omega = 5.30$ とする。分析に用いる時系列波形は加振周期 τ_e の 540 倍とし、その時系列波形を 18 等分し加振周期の 30 倍ごとに分析を行った。図 2.14(a), (b) に実験と解析における主成分分析から得られた変形

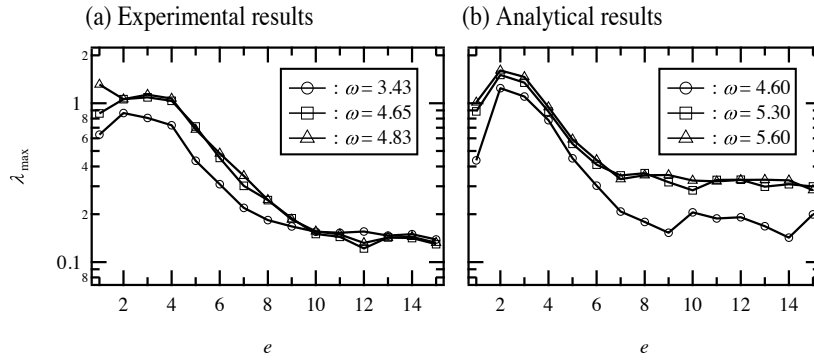


Fig 2.12: The maximum Lyapunov exponent corresponding to the embedded dimension: (a) experimental results (b) analytical results.

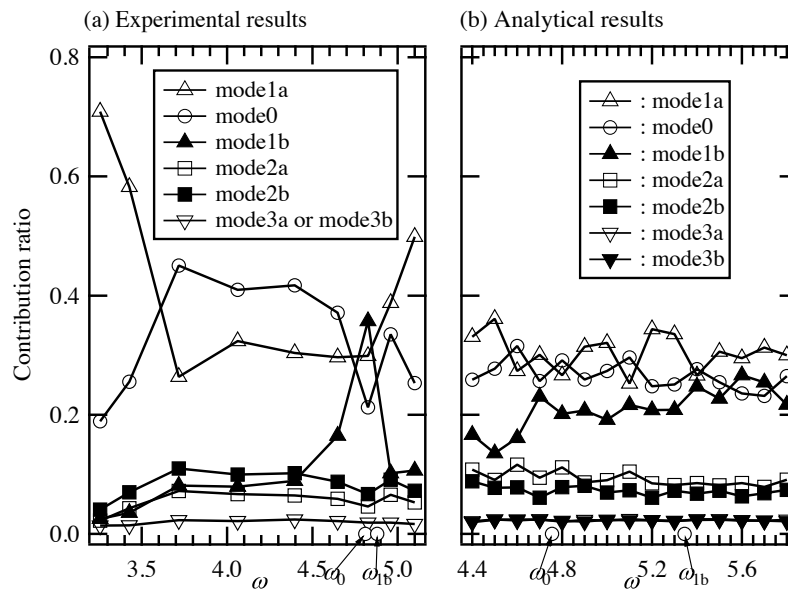


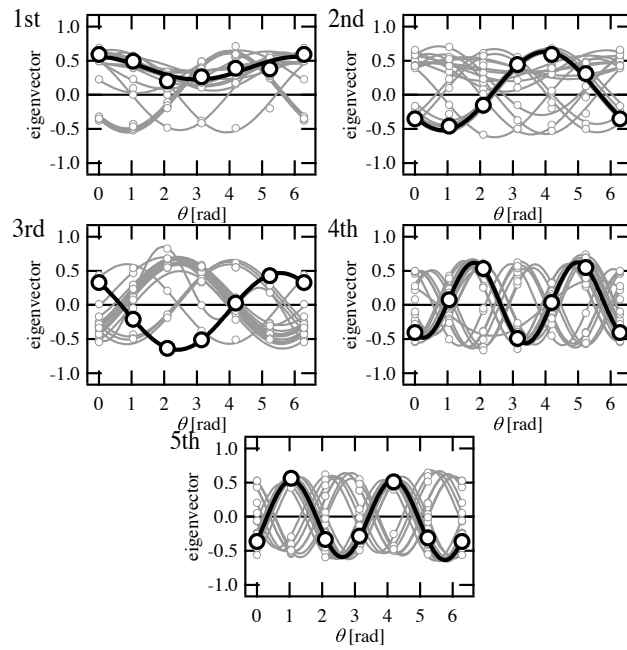
Fig 2.13: Contribution ratio corresponding to the excitation frequencies obtained from principal component analysis: (a) experimental results, (b) analytical results.

パターンをそれぞれ示す。各図の横軸は角度 θ [rad] であり、縦軸は固有ベクトルの大きさである。実験から得られた結果を示す図 2.14(a) 中の丸印は測定点に対する固有ベクトルであり、実線はフーリエ級数を用いて最小二乗法により計算した近似曲線である。黒色は分析時間長を $540\tau_e$ とした結果であり、灰色は分析時間長を $30\tau_e$ とした結果である。分析時間長を $540\tau_e$ とした場合には、1 番目から 5 番目の寄与率を示す変形パターンがそれぞれ 0, 1a, 1b, 2b, 2a モードを示している。なお、実験における測定点の点数では変形パターンを特定できない節直径を 3 本有する変形パターンは省略してある。分析時間長を短くすると 1 番目から 3 番目の寄与率を示す変形パターンにおいて、長時間分析とは異なる変形パターンを多く確認できる。1 番目ならびに 2 番目の寄与率を示す変形パターンでは、0, 1a ならびに 1b モードが存在し、3 番目の寄与率を示す変形パターンでは、主に 1a と 1b モードが存在する。0 モードの変形パターンは微小な振幅変化を示し、1a, 1b モードの変形パターンは周方向へのわずかな変動を示す。4 番目と 5 番目の寄与率を示す短時間の分析結果では、長時間の分析結果で得られた変形パターンの周方向への不規則な移動が発生している。つまり 2a と 2b モードで節直径の周方向への不規則な移動が発生している。

図 2.14(b) に解析により得られた時系列波形を分割して主成分分析を行った変形パターンを示す。図中では各測定点に対する固有ベクトルを直線でつなげている。黒色の太線と灰色の細線はそれぞれ、分析時間長を $540\tau_e$ と $30\tau_e$ とした結果である。1 番目から 7 番目の寄与率を示す変形パターンはそれぞれ、1a, 0, 1b, 2a, 2b, 3b, 3a を示す。1 番目から 3 番目の寄与率を示す変形パターンでは 0, 1a ならびに 1b モードが混在している。1a, 1b モードの変形パターンは周方向へのわずかな変動が確認できる。4 番目と 5 番目の寄与率を示す変形パターンは 2a もしくは 2b モードであり、6 番目と 7 番目の寄与率を示す振動モードは 3a もしくは 3b モードである。節直径を 2 本有する 2a ならびに 2b モードの変形パターンでは周方向への不規則な変動が発生している。節直径を 3 本有する 3a ならびに 3b モードの変形パターンでは周方向への不規則な移動が発生している。

先に示した分析時間長を短くした際の各変形パターンに対応する寄与率の時間変化を図 2.15(a), (b) に示す。各図の横軸は加振周期を基準とした周期数 τ/τ_e であり、縦軸に寄与率を示す。各寄与率を分析に用いた時間間隔の中央の時間にプロットした。図 2.15(a) に示す実験で得られた寄与率の時間変化では、0, 1a ならびに 1b モードに対応する変形パターンの寄与率は不規則に変動している。さらに、寄与率の順番が不規則に入れ替わる。一方、2a モードと 2b モードに対応する変形パターンの寄与率の和と 3a モードもしくは 3b モードに対応する変形パターンの寄与率の時間変動は小さい。図 2.15(b) の解析における主成分分析の結果では、実験で不規則な変動を示した 0, 1a な

(a) Experimental results



(b) Analytical results

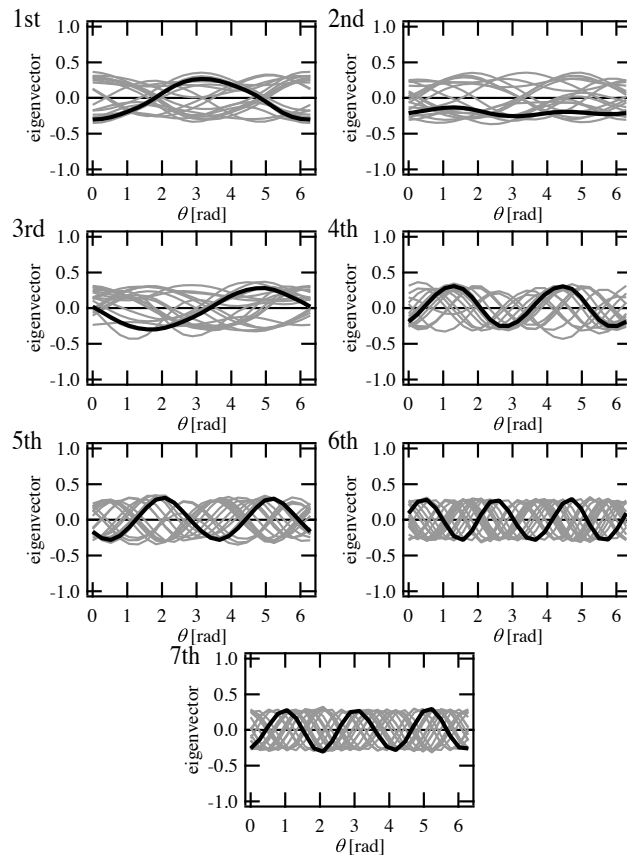


Fig 2.14: Principal components obtained from principal component analysis: (a) experimental results, (b) analytical results.

らびに 1b モードに対応する変形パターンに加え、2a モードと 2b モードに対応する変形パターンの寄与率の和も不規則な変動を示し、寄与率の順番が不規則に入れ替わる。

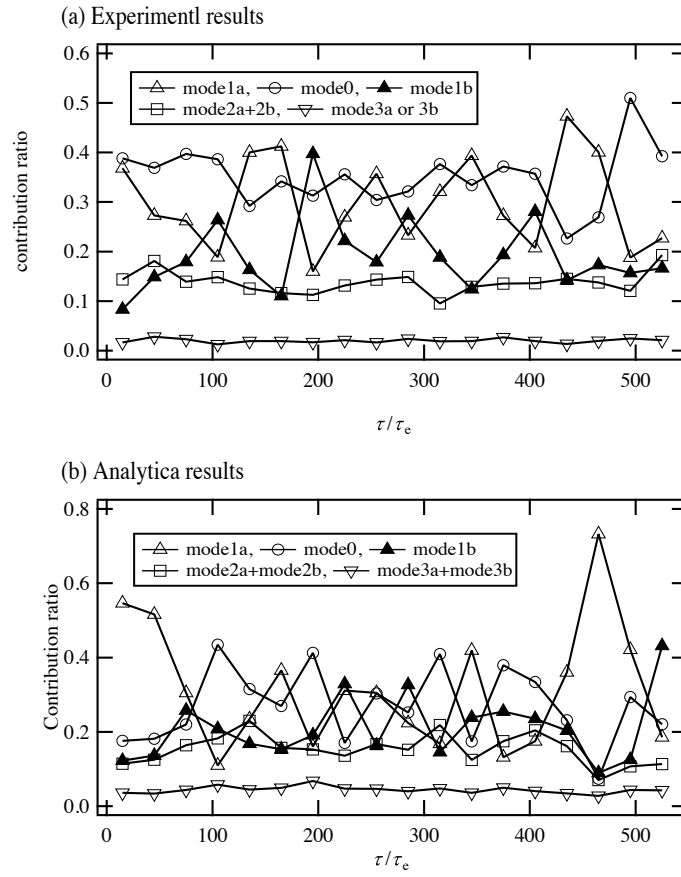


Fig 2.15: Time histories of contribution ratio: (a) experimental results, (b) analytical results.

2.6 結言

外周自由と内周固定の円環板の非線形振動について実験と解析を行った。板に横方向周期加振加速度を与え、発生した代表的なカオス振動について分析を行った。得られた結果は以下の通りである。

1. 実験において節直径を 1, 2 ならびに 3 本有する振動モードにおいて、節直径の数が等しく線形固有振動数の異なる振動モードの発生を確認した。解析において、実験における自重下での変形形状、復元力特性ならびに線形固有振動数から固定境界における面内変位を決定した結果、実験と比較的近い振動モードを得た。
2. 実験と解析において、節直径を持たない 0 モードと節直径を 1 本有する 1b モードの線形固有振動数近傍において、カオス振動が発生した。主成分分析の結果から、この領域におけるカオス振動は節直径を 1 本有する 1a モードと 0 モードが顕著な寄与を示す。
3. 主成分分析に用いるたわみの時系列波形を等間隔に分割し、それぞれの区間について分析を行った。分析時間長を短時間とした際の変形パターンでは、実験において 0 モードでは振幅の変動が確認され、1a ならびに 1b モードに対応する変形パターンでは周方向へのわずかな変動が確認された。2a ならびに 2b モードに対応する変形パターンでは周方向への移動が確認された。解析においても実験同様の特徴が確認された。さらに、3a ならびに 3b モードに対応する変形パターンにおいて節直径の周方向への移動を確認した。分析時間長を短時間とした際の寄与率の時間変化では、実験において寄与率の高い 0, 1a ならびに 1b モードに対応する変形パターンで寄与率の不規則な変化が確認された。解析では 0, 1a ならびに 1b モードに加え、節直径を 2 本有する 2a モードと 2b モードの寄与率の和についても不規則な時間変化が確認された。実験と解析ともに、複数の振動モードの寄与率が不規則に変動し、寄与率の順番が不規則に入れ替わる結果を示した。

参考文献

- [1] A. W. Leissa, Vibration of plates, *NASA SP-160*, (1969).
- [2] A. H. Nayfeh, Nonlinear interactions: analytical, computational, and experimental methods, *Wiley*, New York, (2000).
- [3] T. Torii, K. Yasuda, T. Toyoda, Nonlinear oscillation of a rotating disc excited at a fixed point in space (combination tones near primary resonance point), *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 60, No.570, (1994), pp.386-393.
- [4] A. Raman, C. D. Mote Jr, Non-linear oscillations of circular plates near a critical speed resonance, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 34, Issue 1, (1999), pp. 139-157.
- [5] A. Ramana, C. D. Mote, Effects of imperfection on the non-linear oscillations of circular plates spinning near critical speed, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, Vol. 36, Issue 2, (2001), pp. 261-289.
- [6] A. Jana, A. Raman, Nonlinear dynamics of a flexible spinning disc coupled to a precompressed spring, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 40, Issue 1, (2005), pp. 1-20.
- [7] E. M. Abdel-Rahman, W. F. Faris, A. H. Nayfeh, Axisymmetric natural frequencies of statically loaded annular plates, *Shock and Vibration*, Vol. 10, Issue 5-6, (2003), pp. 301-312.
- [8] B. Lhoucine , E. B. Khalid , B. Rhali, Geometrically non-linear axisymmetric free vibrations of thin isotropic annular plates, *Proceedings of the 9th International Conference on Structural Dynamics, EURODDN 2014* , pp. 1859-1866.
- [9] H. N. Arafat, A. H. Nayfeh, Modal interactions in the vibrations of a heated annular plate, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 39, (2004), pp. 1671-1685.

- [10] J. H. Michell, On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates, *Proceedings of the London Mathematical Society*, Vol. s1-31, Issue 1, (1899), pp. 100-124.
- [11] A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, Vol. 16, Issue 3, (1985), pp. 285-317.
- [12] M. F. A. Azeez, A. F. Vakakis, Proper orthogonal decomposition (POD) of a class of vibroimpact oscillations, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 240, Issue 5, (2001), pp. 859-889.

第3章 外周固定と内周自由の円環板の非線形振動実験

3.1 緒言

第2章では、外周自由と内周固定の円環板に発生するカオス振動応答について、実験と解析から振動モードの寄与率と変形パターンの時間変化を調べた。薄肉板の非線形振動は境界条件の影響を敏感に受ける。そこで本章では、第2章で分析を行った円環板の内周辺と外周辺の境界条件を入れ替えた外周固定と内周自由の円環板について、非線形振動実験を行った結果を示す。

境界を固定された薄肉板では、周囲の温度変化により境界で面内力が容易に発生する。境界での面内力は、面内変位として板に作用する。板が薄肉である場合、板に作用する荷重に対して発生するたわみは面内変位と連成する。その結果、板は非線形の復元力特性を示す。板が横方向周期加速度を受けると、非線形振動応答が共振に伴い発生する。さらに、特定の振動数領域において、非周期的な応答であるカオス振動応答がモード連成により発生する可能性がある。固定境界を有する円板の非線形振動に関する研究は複数報告されている [1]-[4]。境界で面内変位や面内力を受ける円板や円環板の振動に関する研究では、Ramaiah[5]は複数の境界条件における一様な面内圧縮を受ける円環板の座屈荷重と固有振動数を詳細に示した。Yamakiら [6, 7]は初期たわみを有し、境界で面内変位を受ける固定円板の非線形振動の研究を詳細に行った。Afaratら [8, 9]は熱応力を受ける円環板の固有振動数や非線形振動の研究を行った。しかし、著者の知る限り面内圧縮を受ける外周固定と内周自由の円環板のカオス振動における、振動モードの寄与率と変形パターンの時間変化に注目した報告は見当たらない。

本実験では、外周固定と内周自由の円環板に発生するカオス振動の分析を行った。板は初期不整を有し固定境界で面内圧縮力を受ける。まず、板の基本特性として自重下での変形形状、線形固有振動数と固有振動モードならびに復元力特性を測定した。復元力特性は集中荷重に対する静たわみの関係から得た。ついで、板に横方向周期加振加速度を与えた。最低次固有振動数近傍で加振振動数を掃引し、非線形の周波数応答曲線を得た。特定の振動数領域で非周期応答の発生を確認しした。板の動的応答の時系列波形を多点同時計測した。非周期応答の分析には、周波数分析、ポアンカレ写像図、最大リャプノフ指数ならびに主成分分析を用いた。さらに、カオス振動に寄与す

る振動モードとその寄与率の時間変化を調べるため、主成分分析に用いるたわみの時系列波形を等間隔に分割し、それぞれの区間において分析を行った。

3.2 外周固定と内周自由の円環板

外周固定と内周自由の円環板を図 3.1 に示す。円環板の外周辺は固定枠により挟まれている。板中央に円孔を有しており、内周には自由辺を有する。板の寸法は内半径 $r_1 = 16.9 \text{ mm}$ 、外半径 $r_2 = 70.0 \text{ mm}$ 、板厚 $h = 0.30 \text{ mm}$ である。外半径 r_2 に対する内半径 r_1 の割合は 0.24 である。板はアルミ製であり、その物性値はヤング率 $E = 67.7 \text{ GPa}$ 、密度 $\rho = 2.66 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ 、ポアソン比 $\nu = 0.33$ とする。板に円柱座標系を導入する。半径方向に r 軸、周方向に θ 軸、 $r - \theta$ 面と垂直方向に z 軸をとる。角度 θ は弧度法により表記する。

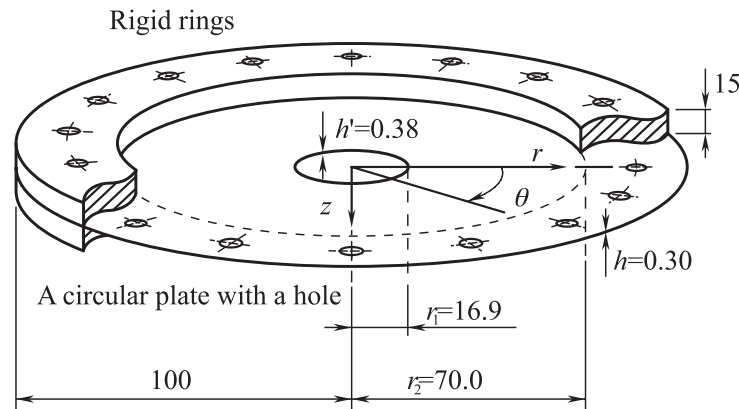


Fig 3.1: Annular plate with outer-clamped and inner-free edge.

外周固定と内周自由の円環板を以下の手順により得た。まず、アルミ板から中央に円孔を有する円環板を切り出した。円環板の外半径は 100mm であり、円孔の半径は 19.6mm である。アルミ板からの切り出しにより、円環板は初期不整を有する。ついで、一对の固定枠をジュラルミンを用いて作製した。固定枠の外半径は 100mm、内半径は 70mm であり、その板厚は 15mm である。最後に、円環板を固定枠で挟み込みボルトで固定した。これより、外周固定と内周自由の境界条件は得られる。板を固定する際、氷を用いて板の温度を実験における温度より低く保った。この操作により、実験中に板は自身の熱膨張により、面内圧縮応力を受ける。板はたわみの測定精度を上昇させるため、表面をアクリル塗装により白色とする。塗装後の板厚は $h' = 0.38 \text{ mm}$ である。

以上の組み立てにより板は重力下で初期変形を有している。初期変形の大きさは板と固定枠の温度の変化により影響を受ける。実験における温度条件については 3.3.2 項で説明する。

3.3 実験要領

実験では、まず板の基本特性として初期変形形状、線形固有振動数と固有振動モードならびに復元力特性として集中荷重に対する静たわみを測定した。ついで、板に横方向周期加振加速度を与え、一定の加振加速度振幅のもと周波数応答曲線を収録した。特徴的な動的応答を示した振動数領域において時系列波形を収録し、分析を行った。分析には周波数分析、ポアンカレ写像図、最大リャプノフ指数ならびに主成分分析を用いた。本実験では埋め込み次元の増加に対する最大リャプノフ指数の傾きの減少から、カオス振動を確定した。主成分分析に用いる時系列波形の時間長を長時間とした結果と、長時間の時系列波形を等間隔に分割し、それぞれの区間について分析を行った結果を比較する。

3.3.1 無次元量の導入

実験結果を整理する上で、以下の無次元量を導入する。

$$\xi = r/r_2 \quad (3.1a)$$

$$[w_0, w_s, w] = [W_0, W_s, W]/h \quad (3.1b)$$

$$[p_s, p_d] = [g, a_d]\rho r_2^4/D \quad (3.1c)$$

$$q_s = Q_s r_2^2/Dh, \quad (3.1d)$$

$$[\omega_{\text{ex}}, \omega_i] = [f_{\text{ex}}, f_i](2\pi/\Omega_0), \quad (3.1e)$$

$$\tau = \Omega_0 t. \quad (3.1f)$$

ただし、角振動数に関する定数 $\Omega_0 = (1/r_2^2)\sqrt{D/(\rho h)}$ を導入した。ここで、 D は曲げ剛性であり $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ で示される。 ξ は半径方向座標 r の無次元量である。 w_0 , w_s ならびに w はそれぞれ、初期変形 W_0 , 集中荷重により静的変形 W_s ならびに動的応答 W の無次元量である。 p_s と p_d はそれぞれ重力加速度 g と周期加振加速度振幅 a_d の無次元量である。集中荷重 Q_s の無次元量を q_s で示す。 ω_{ex} と ω_i はそれぞれ、加振振動数 f_{ex} と固有振動数 f_i の無次元量である。 τ は無次元時間である。

3.3.2 温度管理

板の基本特性や動的応答は固定枠と板の温度に影響を受ける。温度変化による基本特性や動的応答の変化を避けるため、固定枠と板近傍の温度を管理した。固定フレームの温度を T_f , 板近傍の温度を T_r とする。

実験装置を緩衝材で囲まれた空間内に設置する。空間内の温度はエアコンディショナーと電気式ヒーターにより制御する。これより、試験片近傍の温度を安定させる。加振中の固定フレームは、加振台を通して電磁式加振器から発生する熱により温められる。熱の伝導を避けるため固定フレームと加振台の間に冷却板を挿入した。冷却板には水を流すための穴があり、穴に流す水温を変化させ、固定フレームの温度を安定させる。

3.4 結果および考察

3.4.1 板の基本特性

板の初期変形は、試験片の切り出しによる初期不整、試験片を固定する際の冷却による初期面内応力ならびに自重の影響により生じる。板の初期変形形状と変形量の等高線を図3.2の上下に示す。板近傍の温度 T_r と固定フレームの温度 T_f を $T_r = T_f = 20.5^\circ\text{C}$ とした。板の初期変形は $(\xi, \theta) = (0.32, 0)$ で板厚の1.2倍を示し、固定端に向かい小さくなる。板の変形形状は非対称である。この非対称な変形形状は線形固有振動数と固有振動モードに影響を与える。

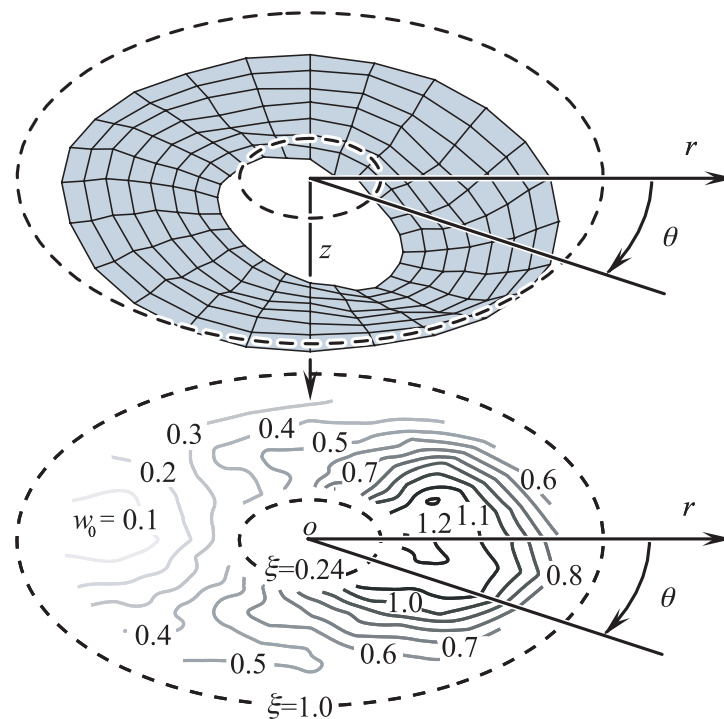


Fig 3.2: The configuration of the plate under gravity.

表 3.1 に温度を $T_r = T_f = 20.5^\circ\text{C}$ とした際の、節直径の数に対応した次数 i 、固有振

動モード，無次元と有次元の線形固有振動数を示す．振動モードの図中における破線は節直径を意味する．最低次振動モードは節直径を持たない対称モードを示した．二次モードと三次モードはそれぞれ節直径を一本有する振動モードであり，それぞれの節直径は周方向に $\pi/2$ rad ずれている．さらに，線形固有振動数は異なる．これは，先に示した非対称な初期変形形状の影響である．二つの固有振動モードを区別するためにそれぞれ 1a モードと 1b モードとする．固有振動数比に注目すると，0 モードと 1a モードの固有振動数比は約 1 : 2 となる．このことから，0 モードと 1a モードで内部共振の条件がほぼ満足される．

Table 3.1: Natural frequencies and natural modes of vibration.

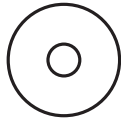
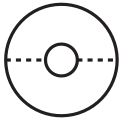
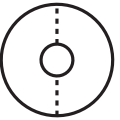
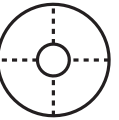
Mode i	0	1a	1b	2
Modal pattern				
ω_i	8.25	16.0	18.8	29.4
f_i [Hz]	124	242	284	444

図 3.3 に板の復元力特性を示す．集中荷重を q_s を $(\xi, \theta) = (0.47, 0)$ に作用させた際の，静たわみ w_s を測定した．静たわみは自重による静的平衡位置を基準とする．静たわみの測定点は $(\xi, \theta) = (0.62, 0), (0.62, \pi/2), (0.62, \pi)$ ならびに $(0.62, 3\pi/2)$ の 4 点とする．復元力特性の測定中の板近傍の温度と固定枠の温度はそれぞれ $T_r = 20.3 \pm 0.1^\circ\text{C}$ と $T_f = 20.4 \pm 0.2^\circ\text{C}$ である．集中荷重を負方向に増加させると，初期変形の影響により復元力特性の勾配は小さくなる．これは，漸軟型の復元力特性に対応する．さらに集中荷重を増加させると復元力特性の勾配は大きくなり，漸硬型の復元力特性を示す．この結果から板は漸軟-漸硬型の復元力特性を有する．

初期変形形状と線形固有振動数はそれぞれ，温度 T_r と T_f の変化に影響を受ける．一例として，温度を $T_r = T_f = 21.0^\circ\text{C}$ から $T_r = 20.0^\circ\text{C}$ と $T_f = 21.0^\circ\text{C}$ に変化させた場合，座標 $(\xi, \theta) = (0.47, 0)$ での初期変形は板厚の 5 パーセント減少し，無次元の最低次固有振動数は 0.55 上昇する．これらの変化が動的応答の振幅に影響を及ぼす．

3.4.2 周波数応答曲線

加振加速度振幅 $p_d = 4.4$ のもと，周波数応答曲線を収録した．加振振動数の掃引は 0 モードの固有振動数近傍である $\omega_{\text{ex}} = 6.2$ から 10.5 とした．周波数を掃引中は温度 T_r

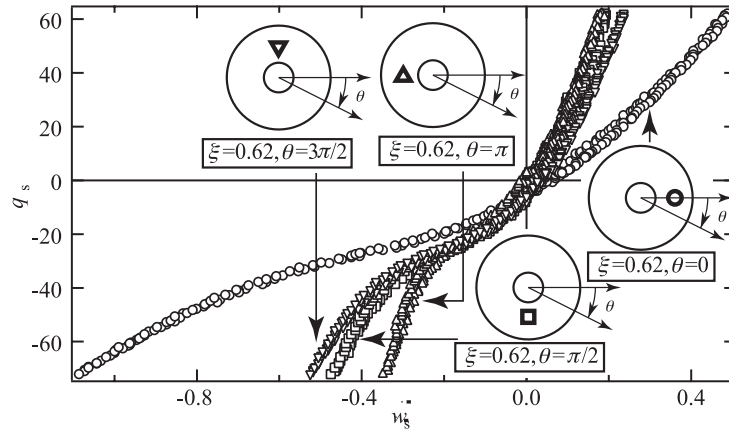


Fig 3.3: Characteristics of restoring force of the plate: \circ measured at $\xi = 0.62, \theta = 0$, \square measured at $\xi = 0.62, \theta = \pi/2$, \triangle measured at $\xi = 0.62, \theta = \pi$, ∇ measured at $\xi = 0.62, \theta = 3\pi/2$.

ならびに T_f をそれぞれ $T_r = 20.5 \pm 0.5^\circ\text{C}$ と $T_f = 20.9 \pm 0.1^\circ\text{C}$ の範囲とした．図 3.4 に周波数応答曲線を示す．測定点は $(\xi, \theta) = (0.47, 0)$ である．縦軸は動的応答の無次元振幅の実効値であり，横軸は無次元加振振動数である．0 モードの線形固有振動数を横軸上に加えている．応答曲線は 0 モードの大振幅共振応答を示しており，その応答は漸硬型の復元力特性に対応する．加振振動数が 1b モードの固有振動数の半分に近い $\omega_{\text{ex}} = 9.6$ (図中 C) 近傍で加振された際，非周期応答が確認された．この応答は包絡線の非周期的な変調を有する．のちに示す分析によりこの非周期振動応答はカオス振動であると確認された．

周波数応答曲線の収録において，加振振動数を上昇させた場合と下降させた場合で応答振幅に差異が生じている．応答振幅が $w_{\text{rms}} = 0.61$ のとき，応答曲線の振動数の差は 0.37 である．この差は主に 3.4.1 項で示した試験片近傍の温度 T_r と固定装置の温度 T_f の変動により生じる．温度 T_r と T_f の変化は非常に遅い．しかし，周波数応答曲線の収録には長時間かかるため，温度変化による履歴が応答曲線上に生じる．一方，動的応答の時系列波形の収録は温度変化の速さに比べ短く，温度の変化による影響は小さい．

3.4.3 時系列波形，周波数分析結果，ポアンカレ写像図

加振加速度振幅 $p_d = 4.4$ のもと，動的応答の時系列波形，周波数分析結果ならびにポアンカレ写像図を得た．加振周波数は $\omega_{\text{ex}} = 9.59$ であり，動的応答の収録点は $(\xi, \theta) = (0.47, 0)$ である．図 3.5(a) は動的応答の時系列波形である．図の横軸は加振周期を基準とした周期数であり，縦軸は無次元たわみである．図より，時系列波形の包絡線が不規則に変化している．

図 3.5(b) は周波数分析結果である．横軸は周波数であり，縦軸は振幅をデシベル値

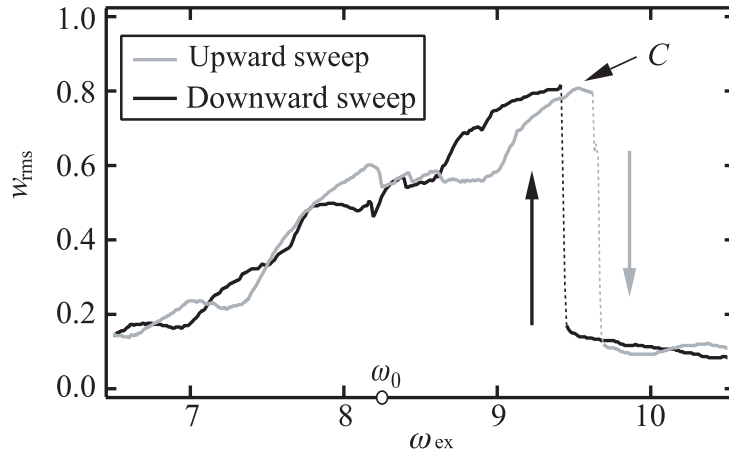


Fig 3.4: Frequency response curve of the plate ($p_d = 4.4$, measured at $\xi = 0.47$, $\theta = 0$).

で示している．広帯域の振動成分の励起が確認できる．顕著な振動成分は加振振動数と加振振動数の2倍に確認でき，その近傍に0，1aならびに1bモードが存在する．

ポアンカレ写像図を図 3.5(c) に示す．図の横軸はたわみであり，縦軸は速度を示す．位相角 $\pi/3$ において収録した，たわみと速度をプロットする．写像点は広範囲に分散している．文献 [10] で示された内部共振から生じたカオス振動のポアンカレ写像図と比較すると，同様の特徴を有している．

以上の特徴は，この非周期応答が1:2の内部共振から生じたカオス振動であると示している．3.4.6項の主成分分析の結果から，この応答は0と1aモードの連成した内部共振から生じたカオス振動である．

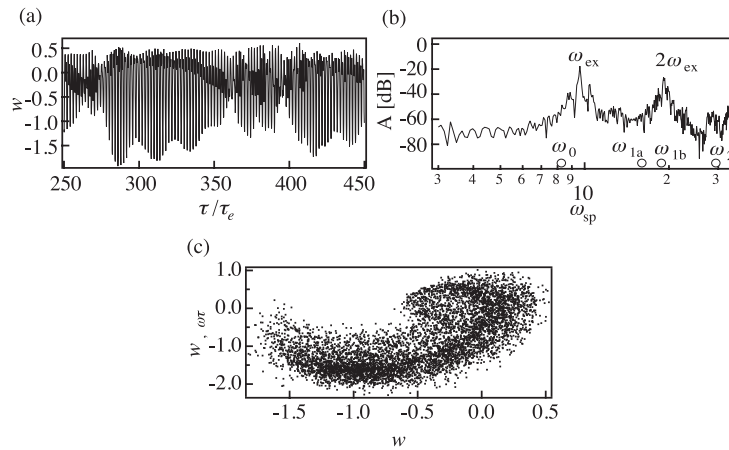


Fig 3.5: Chaotic response of the plate ($\omega_{ex} = 9.59$, $p_d = 4.4$, measured at $\xi = 0.47$, $\theta = 0$): (a) time history; (b) Fourier spectrum; (c) Poincaré projection.

3.4.4 短時間間隔の周波数分析結果

カオス振動応答は振幅の変調を有している。振幅変調に関連する周波数成分を調べるため、時系列波形を短時間間隔に分割し周波数分析を行った。加振加速度振幅 $p_d = 4.4$ において、座標 $(\xi, \theta) = (0.47, 0)$ で動的応答の時系列波形を収録した。加振振動数は $\omega_{\text{ex}} = 9.59$ とする。図 3.6(a) に動的応答の時系列波形を示す。さらに、図 3.6(a) の時系列波形を $18.5\tau_e$ ごとに分割し、それぞれの区間において動的応答の実効値を計算した結果を図 3.6(b) に示す。図 3.6(b) より、振幅の不規則な変調を確認できる。短時間に分割した動的応答の時系列波形を用いて周波数分析を行った。比較的小さい振幅を示す時間間隔 $\tau/\tau_e = 2148.5$ から 2167.0 の時系列波形を用いた周波数分析結果を図 3.7(a) に示す。顕著な周波数成分として加振振動数と加振振動数の 2 倍に確認できる。さらに 1a モード近傍まで周波数成分が分布している。図 3.7(b) に、大きい応答振幅を示す時間間隔 $\tau/\tau_e = 2222.6$ から 2241.1 の周波数分析結果を示す。顕著な周波数成分は、比較的小さい振幅を示す時間間隔と同様に、加振振動数と加振振動数の 2 倍である。しかし、1a モードの固有振動数近くの周波数成分の分布は見られない。これより、応答振幅の変調には 1a モードが関連している。

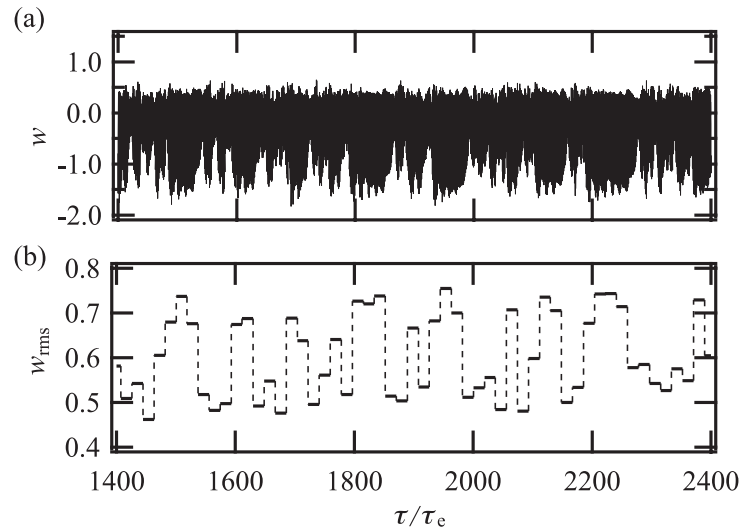


Fig 3.6: The time history of the deflection and the amplitude in short time intervals ($\omega_{\text{ex}} = 9.59$, $p_d = 4.4$, measured at $\xi = 0.47$, $\theta = 0$): (a) time history of the dynamic deflection; (b) time history of the amplitude.

3.4.5 最大リャプノフ指数

非周期応答がカオス振動であると確定するために、埋め込み次元に対する最大リャプノフ指数を計算した。計算に用いた時系列波形は加振加速度振幅 $p_d = 4.4$ のもと加振

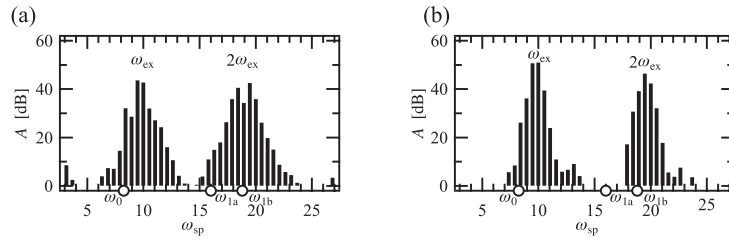


Fig 3.7: The Fourier spectra in short time intervals ($\omega_{\text{ex}} = 9.59$, $p_d = 4.4$, measured at $\xi = 0.47$, $\theta = 0$): (a) $\tau/\tau_e = 2148.5$ to 2167.0 ; (b) $\tau/\tau_e = 2222.6$ to 2241.1 .

振動数 $\omega_{\text{ex}} = 9.59$ で収録した．時系列波形を収録した座標は $(\xi, \theta) = (0.47, 0)$ である．図 3.8 に埋め込み次元に対する最大リアプノフ指数を示す．埋め込み次元が $e = 7$ から 10 に増加すると，埋め込み次元に対する最大リアプノフ指数の勾配は減少し，最大リアプノフ指数は $\lambda_{\text{max}} = 0.3$ から 0.4 程度となる．勾配が変化した際の最大リアプノフ指数が正值であるため，カオス状応答がカオスであると確定された．さらに，最大リアプノフ指数の勾配が埋め込み次元 $e = 7$ から 10 で変化した，カオス振動に寄与する振動モードの数は 4 から 5 であると分かる．

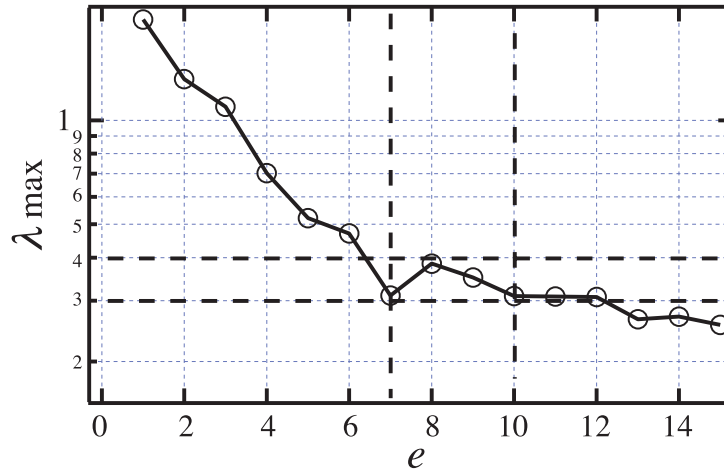


Fig 3.8: The maximum Lyapunov exponents related to embedding dimension ($\omega_{\text{ex}} = 9.59$, $p_d = 4.4$, measured at $\xi = 0.47$, $\theta = 0$).

3.4.6 カオス振動に寄与する振動モード

多点同時計測したカオス振動の時系列波形に主成分分析を適用し，カオス振動に寄与する振動モードとその寄与率を得る．時系列波形を収録した座標は $(\xi, \theta) = (0.47, 0)$ ， $(0.47, \pi/2)$ ， $(0.47, \pi)$ ならびに $(0.47, 3\pi/2)$ の 4 点である．時系列波形の収録は加振加

速度振幅 $p_d = 4.4$, 加振振動数 $\omega_{ex} = 9.59$ とした. 時系列波形の収録時間長は加振周期に対して長時間の $2500\tau_e$ とする.

図 3.9 はカオス振動に寄与する変形パターンの寄与率を示す. 図の横軸は寄与率の順番 i であり, 縦軸は寄与率 μ_i である. 図中に, 各寄与率を示す変形パターンに対応する振動モードの概形を示す. 0 モードに対応する第一主成分は 61.6% の顕著な寄与を示した. 1a モードと 1b モードに対応する第二, 第三主成分はそれぞれ, 24.0% と 13.9% の寄与率を示す. 2 モードに対応する第四主成分の寄与率は 0.5% と小さい. これより, カオス振動応答には 0 モード, 1a モードならびに 1b モードが主に寄与している.

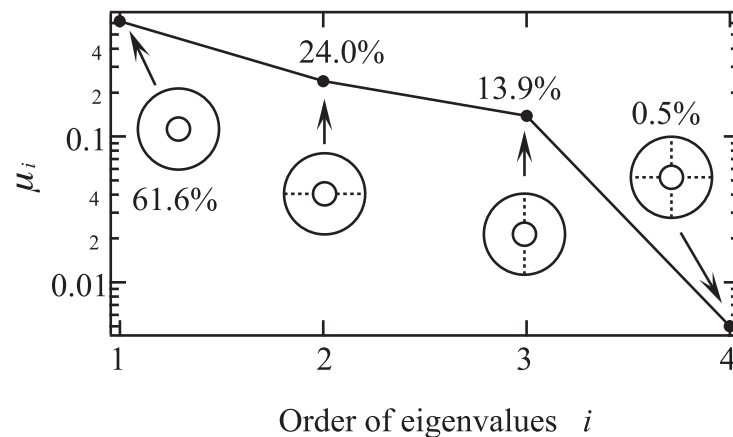


Fig 3.9: Contribution ratio corresponding to principal components ($\omega_{ex} = 9.59$, $p_d = 4.4$).

カオス振動における振動モードの時間変化を明らかにするために, 先の主成分分析に用いた長時間の時系列波形を短時間間隔に分割し, それぞれの区間において主成分分析を行った. 短時間間隔は $50\tau_e$ とする.

図 3.10 に短時間間隔における動的応答の振幅の実効値を示す. 図 3.10 の (a), (b), (c) ならびに (d) はそれぞれ, 測定点 $(\xi, \theta) = (0.47, 0)$, $(0.47, \pi/2)$, $(0.47, \pi)$ ならびに $(0.47, 3\pi/2)$ の動的応答に対応する. 図 3.10 から各測定点とも応答振幅が不規則に変動している. ただし, 4 つの測定点で振幅の変動の大きさに差異がみられる. 座標 $(0.47, 0)$ と $(0.47, \pi)$ における変動は大きい, 座標 $(0.47, \pi/2)$ と $(0.47, 3\pi/2)$ では小さい. 座標 $(0.47, 0)$ と $(0.47, \pi)$ は, 振幅変調に関係する 1a モードの節直径近傍に位置する. 座標 $(0.47, 0)$ と $(0.47, \pi)$ における振幅の大きい変動は, 次に示す短時間間隔の 0 モードの寄与率の変化に関連する.

図 3.11 は寄与率の順番ごとの変形パターンを示す. 図中において各測定点における固有ベクトルを丸印で示した. 実線はフーリエ級数を用いて最小自乗近似により得られた近似曲線を示す. 黒色の太線と灰色の細線はそれぞれ長時間間隔と短時間間隔の

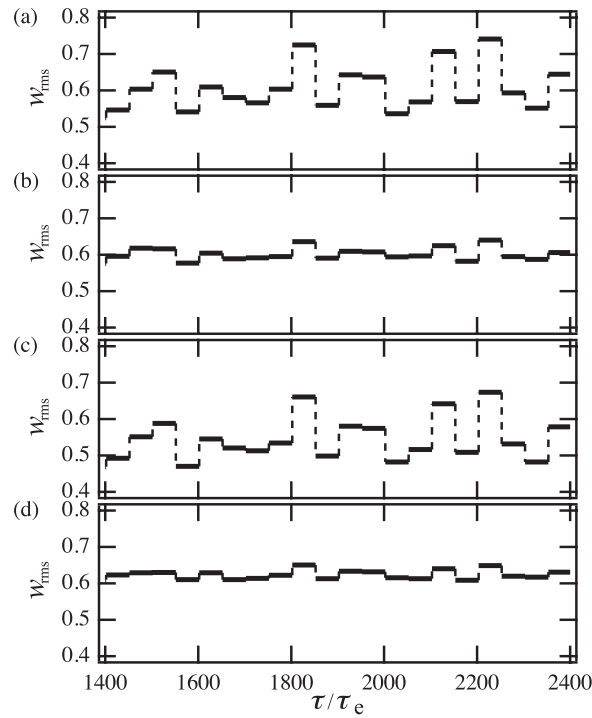


Fig 3.10: Time histories of the amplitude ($\omega_{\text{ex}} = 9.59$, $p_d = 4.4$): (a) measured at $\xi = 0.47$, $\theta = 0$; (b) measured at $\xi = 0.47$, $\theta = \pi/2$; (c) measured at $\xi = 0.47$, $\theta = \pi$; (d) measured at $\xi = 0.47$, $\theta = 3\pi/2$.

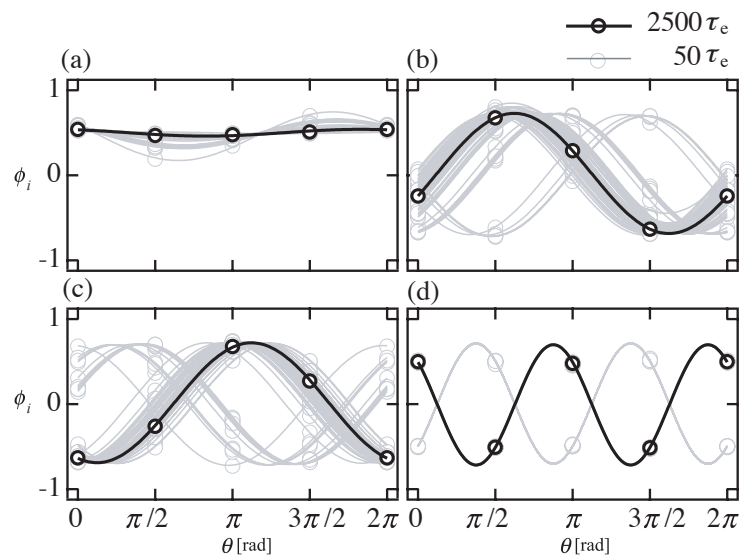


Fig 3.11: Modal pattern obtained by principal component analysis ($\omega_{\text{ex}} = 9.59$, $p_d = 4.4$): (a) μ_1 ; (b) μ_2 ; (c) μ_3 ; (d) μ_4 .

主成分分析により得られ変形パターンに対応する．長時間間隔の時間波形を用いた分析結果から，図 3.11 (a) から (d) における変形パターンはそれぞれ 0, 1a, 1b ならびに 2 モードに対応する．短時間間隔の変形パターンは，長時間間隔の分析から得られた変形パターンと近い形状を有する．ただし，1a モードと 1b モードに対応する第 2 主成分と第 3 主成分において，長時間間隔の時系列波形を用いた分析結果とは角度の異なる変形パターンがみられる．これらの変形パターンは周方向へ不規則に分布している．この不規則な分布は変形パターンの不規則な変動に対応する．

短時間間隔の主成分分析から得られた寄与率の時系列波形を図 3.12 に示す．0, 1a ならびに 1b モードに対応する変形パターンの寄与率をそれぞれ，丸印，四角印，三角印で示す．0 モードの寄与率の増加と減少に対して，1a モードの寄与率は同程度の減少と増加を示す．つまり，0 モードと 1a モードで寄与率のやり取りが行われている．一方，1b モードはほぼ一定の寄与率を示した．0 モードと 1a モードの間の寄与率のやり取りは，0 モードと 1a モードが内部共振によりカオス振動へ寄与することを示す．一方，1b モードの様な寄与率は，1b モードの固有振動数が加振振動数の約 2 倍の位置にあるため 2 倍の高調波共振としてカオス振動に寄与することを示す．

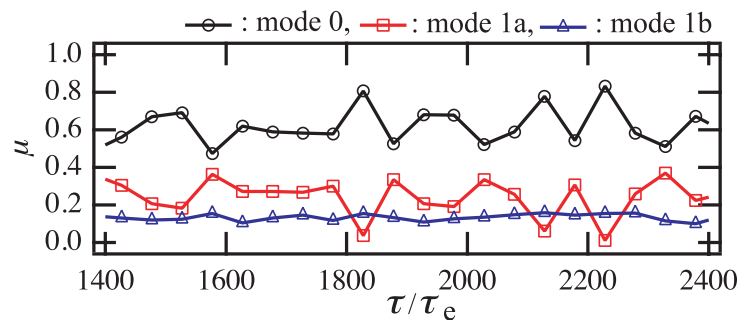


Fig 3.12: Time history of the contribution ratio corresponds to the each modal pattern ($\omega_{ex} = 9.59$, $p_d = 4.4$).

3.5 結言

外周固定と内周自由の円環板の非線形振動実験を行った．主な結果は以下に示す通りである．

1. 非対称な変形形状により，節直径を一本有する 1a モードと 1b モードが異なる固有振動数で発生した．これらの節直径は互いに直交する．
2. 節直径をもたない 0 モードの主共振応答の限られた振動数範囲において，振幅変調を有するカオス振動が発生した．このカオス振動は 0 モードと 1a モードの 1:2

の内部共振から発生した。

3. 主成分分析から、0, 1a ならびに 1b モードがそれぞれ 62, 24, 14% の顕著な寄与率を示した。主成分分析に用いる時間長を短時間間隔とした場合に、1a モードと 1b モードに対応する変形パターンで周方向への変動を確認した。さらに、寄与率の時間変化に注目すると、内部共振条件を満たす 0 と 1a モードでは寄与率のやり取りが確認された。一方、加振振動数の約 2 倍に線形固有振動数を有し内部共振条件を満たしていない 1b モードにおいては、カオス振動において寄与率の変化は小さい。

参考文献

- [1] S. Sridhar, D. T. Mook, A. H. Nayfeh, Non-linear resonances in the forced responses of plates, part 1: Symmetric responses of circular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 41, Issue 3, (1975), pp. 359-373.
- [2] S. Sridhar, D. T. Mook, A. H. Nayfeh, Non-linear resonances in the forced responses of plates, part II: Asymmetric responses of circular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, Issue 2, (1978), pp. 159-170.
- [3] M. H. Yeo, W. K. Lee, Corrected solvability conditions for non-linear asymmetric vibrations of a circular plate, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 257, Issue 4, (2002), pp. 653-665.
- [4] J. Hadian, A. H. Nayfeh, Modal interaction in circular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 142, Issue 2, (1990), pp. 279-292.
- [5] G. K. Ramaiah, Flexural vibrations of annular plates under uniform in-plane compressive forces, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 70, Issue 1, (1980), pp. 117-131.
- [6] N. Yamaki, K. Otomo, M. Chiba, Nonlinear vibrations of a clamped circular plate with initial deflection and initial edge displacement, part I: theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 79, Issue 1, (1981), pp.23-42.
- [7] N. Yamaki, K. Otomo, M. Chiba, Nonlinear vibrations of a clamped circular plate with initial deflection and initial edge displacement, part II: experiment, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 79, Issue 1, (1981), pp.43-59.
- [8] H. N. Arafat, A. H. Nayfeh, W. Faris, Natural frequencies of heated annular and circular plate, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 41, Issue 11-12, (2004), pp.3031-3051.
- [9] H. N. Arafat, A. H. Nayfeh, Modal interactions in the vibrations of a heated annular plate, *International Journal of Non-linear Mechanics*, Vol. 39, Issue 10, (2004), pp.1671-1685.

- [10] K. Nagai, T. Yamaguchi, K. Tanifuji, H. Yoh, Experiment on chaotic vibrations of a cantilevered beam deformed by a stretched cable, *Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers, Series C*, Vol. 60, No. 569, (1994), pp.3-9.

第4章 はりと円板の結合要素の非線形振動実験

4.1 緒言

Micro Electro Mechanical System (MEMS) は電子機器や情報機器においてセンサーやアクチュエータとして、幅広く用いられている。MEMS 構造物の一つにマイクロスキャナーがある。マイクロスキャナーは、はり要素と板要素を結合させた形状を有し、その板厚は長手方向の寸法に対して十分薄い。板要素として矩形板や円板が用いられる。マイクロスキャナはねじりモードの共振応答を利用して、レーザー光を幅広い範囲に反射する。共振応答のねじり角が大きい場合、非線形振動によりねじり振動モードと曲げ振動モードの連成振動が発生し得る。さらに、特定の荷重や振動数の条件でカオス振動の発生する可能性がある。非線形振動やカオス振動はマイクロスキャナーの走査精度を低下させる。精度のよいマイクロスキャナーを設計する上で、はり要素と板要素を組み合わせた結合要素の非線形振動挙動を明らかにすることは重要である。

マイクロスキャナーは、はりと板の要素から構成される。はりの非線形振動については多くの研究者により報告がされている。Yamaki ら [1, 2] は初期軸圧縮変位を变化による両端固定はりの非線形振動の研究を行った。Nagai ら [3] は両端固定の境界条件を有する座屈後はりの非線形振動、特にカオス振動の実験を行った。座屈後はりのカオス振動の解析は Maruyama ら [4] により詳細に行われ、カオス振動におけるモードの寄与が調査された。板の非線形振動についても多くの研究者により調査が行われている。初期面内変位を受ける固定矩形板の非線形振動について、Yamaki ら [5, 6] は実験ならびに解析により研究を行った。Chang ら [7] は単純支持された矩形板の非線形振動ならびにカオス振動の解析を行った。Onozato ら [8] は面内圧縮力を受ける矩形板のカオス振動実験を行った。固定円板の非線形振動の解析は Sridhar ら [9, 10] により行われた。初期面内変位を受ける固定円板の非線形振動の実験ならびに解析は Yamaki ら [11, 12] により行われている。マイクロスキャナの動的応答の研究は複数の研究者により報告されている。Khatami ら [13] は静電力と衝撃を受けるトーションミラーの動的応答の解析を行った。Shabani ら [14] はプルイン条件近傍における静電ねじりアクチュエータの非線形振動を解析した。Ataman ら [15, 16] は、くし歯マイクロスキャナの非線形応答曲線の調査を行った。これらの研究では、マイクロスキャナの解析モデルをばねと剛体板の組み合わせで仮定している。実験におけるねじり振動モードと曲げ振動モー

ドの非線形連成振動については、さらなる分析の余地がある。先に述べた通り、マイクロスキャナーの設計を発展させるために、ねじり振動と曲げ振動の非線形連成を明らかにする必要がある。著者の知る限り、複雑形状に対して適用できる非線形振動解析は現在まで、開発されていない。これより、実験によるねじり振動モードと曲げ振動モード間の非線形連成振動の発生条件とモードの寄与を調査することは重要である。これらの実験結果は複雑形状の非線形振動解析を発展させるために価値のある知見となりうる。

本章では、マイクロスキャナーの基礎モデルとして、はりと円板で構成される結合要素の非線形振動について実験により詳しく調べた。要素の両端はたわみ方向に固定されている。要素の一端は板バネにより軸方向が弾性拘束されており、板バネにより軸力が作用する。まず、軸力を変化させた場合のねじりモードと曲げ振動モードの固有振動数を測定した。代表的な軸力のもと、結合要素の形状と復元力特性を測定した。ついで、軸引張力を作用させた結合要素に横方向周期加振加速度を加えた。加振振動数を掃引し、非線形の周波数応答曲線を得た。特定の振動数領域で発生した非周期応答を、動的応答の時系列波形、周波数分析、ポアンカレ写像図ならびに最大リャプノフ指数を用いて分析した。非周期応答に対するモードの寄与を調べるために、多点同時収録した長時間の時系列波形に主成分分析を適用した。さらに、長時間の時系列波形から短時間間隔ごとに主成分分析を行い、寄与率の時間変化を調べた。

4.2 はりと円板の結合要素

はりと円板の結合要素と固定装置を図 4.1 に示す。各部の寸法と結合物の物性値を表 4.1 に示す。結合要素は二つのはりと円板で構成される。円板は要素中央にある。要素の両端は固定装置に固定されている。固定端間の距離は $L = 157.5 \text{ mm}$ である。はりの幅は $b = 13.5 \text{ mm}$ であり円板の直径は $D = 99 \text{ mm}$ である。固定端間の距離に対する円板の直径は $D/L = 0.63$ である。はり部から円板へ移行する箇所の要素の幅は半径 10mm の円弧に沿って滑らかに変化する。結合要素として板厚 $h = 0.15 \text{ mm}$ のリン青銅板を用いた。リン青銅板のヤング率は $E = 81 \text{ GPa}$ 、密度は $\rho = 8.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ である。要素表面は測定精度の向上のため、アクリルラッカーにより白色塗装されている。白色塗装を含む板厚は $h' = 0.21 \text{ mm}$ である。要素に直交座標系を導入する。要素長手方向に向かって x 軸、固定端に沿って y 軸、 $x - y$ 面と鉛直に z 軸をとる。

固定装置は、剛体ブロックと可動台により構成される。剛体ブロックはボルトを用いて土台フレームに固定されている。可動台は、スライドブロック上に二枚の平行なりん青銅板からなる板ばねを有する。スライドブロックは、土台フレーム上を x 軸方向

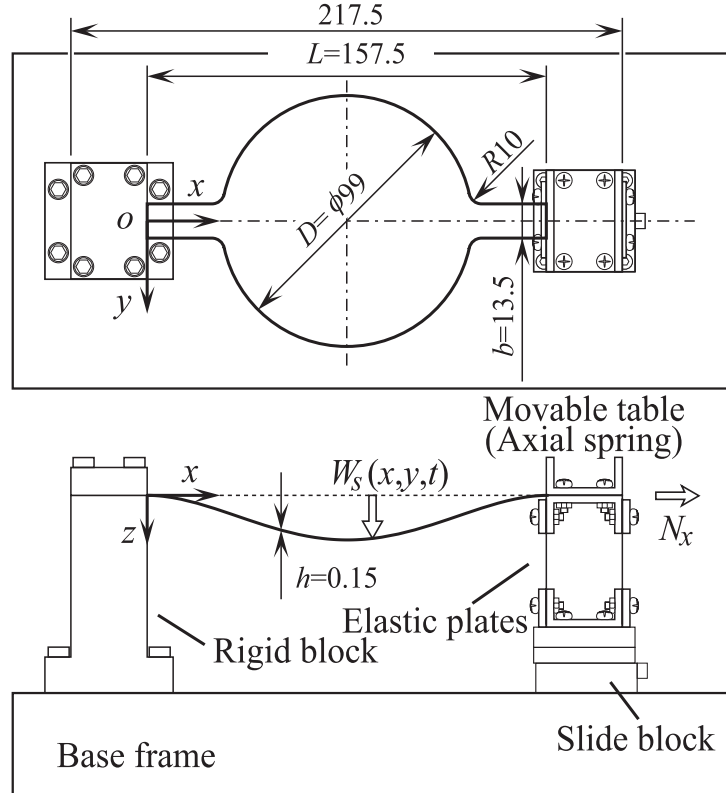


Fig 4.1: The combined structure and the fixture.

Table 4.1: The dimensions and the material properties of the structure.

The length between clamped edges	$L = 157.5$ mm
The breadth of the beam	$b = 13.5$ mm
The diameter of the disc	$D = 99$ mm
The thickness	$h = 0.15$ mm
Young's modulus	$E = 81$ GPa
The mass density	$\rho = 8.5 \times 10^3$ kg/m ³
The spring constant of the elastic plates	$k_s = 13 \times 10^3$ N/m

へ移動できる．要素の一端は剛体ブロックにより固定され，もう一端は可動台上に固定される．結果として，たわみ方向の境界条件は両端固定となり，軸方向の境界条件は弾性拘束となる．スライドブロックを x 軸方向へ移動すると，要素には軸力 N_x が作用する．軸力は板ばねに取り付けたひずみゲージから換算した．スライドブロック上の板ばねのバネ定数は，集中荷重と板ばねのたわみの関係から $k_s = 13 \times 10^3$ N/m と得られた．

4.3 無次元化

実験結果を整理する上で，以下の無次元量を導入した．ただし，諸量として断面二次半径 $r = \sqrt{I/A}$ と角振動数に関する定数 $\Omega_0 = (1/L^2)\sqrt{EI/(\rho A)}$ を導入する．ここで I と A はそれぞれ，はり要素における断面二次モーメントと断面積である．

$$\xi = x/L \quad (4.1a)$$

$$\eta = y/D \quad (4.1b)$$

$$[w_s, \bar{w}_s, w] = [W_s, \bar{W}_s, W]/h \quad (4.1c)$$

$$n_x = N_x L^2/EI \quad (4.1d)$$

$$[p_s, p_d] = [g, a_d]\rho AL^4/EIr \quad (4.1e)$$

$$q_s = Q_s L^3/EIr \quad (4.1f)$$

$$[\omega_{ex}, \omega_{mn}] = [f_{ex}, f_{mn}](2\pi/\Omega_0) \quad (4.1g)$$

$$\tau = \Omega_0 t \quad (4.1h)$$

ξ と η はそれぞれ， x 軸と y 軸の無次元座標である．記号 w_s は $z = 0$ からの無次元の静たわみを示し， \bar{w}_s と w はそれぞれ，自重と軸力が作用した際の静的平衡位置からの静たわみ \bar{W}_s と動的応答 W の無次元量である． n_x は無次元の軸力である．記号 p_s と p_d は無次元の重力加速度 g と加振加速度振幅 a_d である． q_s は無次元集中荷重である．記号 ω_{ex} と ω_{mn} は無次元の加振振動数と (m, n) モードの線形固有振動数である．ここで m と n はそれぞれ， ξ 軸と η 軸と直交する節線の数を示す．記号 τ は無次元時間を示す．

4.4 実験要領

結合要素の基本特性として，まず，軸力に対する線形固有振動数を測定した．ついで，代表的な軸力において自重下での変形形状と復元力特性を測定した．復元力特性は，集中荷重に対する板の静たわみの関係より得た．荷重点と測定点を変え，最低次曲げ振動モードとねじり振動モードに対応する復元力特性を得た．

代表的な軸引張荷重を作用させた状態で結合要素に横方向周期加振加速度を与え、加振実験を行った。加振振動数を最低次曲げ振動モードの固有振動数近傍で掃引し、応答振幅の実効値から周波数応答曲線を得た。周波数応答曲線で特徴的な振動応答を示した周波数領域において、たわみの時系列波形とポアンカレ写像図を収録した。時系列波形の収録は複数の測定点で同時に行った。得られた時系列波形を分析し、周波数分析結果、最大リアプノフ指数ならびに主成分分析結果を得た。主成分分析では、長時間にわたり収録した時系列波形を用いた分析結果と長時間の時系列波形波形から一定の時間間隔に分割し分析を行った結果を比較した。

4.5 結果及び考察

4.5.1 結合要素の基本特性

要素に作用する軸力を変化させ、線形固有振動数を測定した。軸力と線形固有振動数の関係を図 4.2 に示す。縦軸は (m, n) モードの線形固有振動数 ω_{mn} を示し、横軸は軸力を示す。最低次の曲げ振動モードである $(0, 0)$ モードとねじり振動モードである $(0, 1)$ モードをそれぞれ丸印と三角印のプロットで示した。軸圧縮荷重を加えるために軸力 n_x を 0 から負方向へ増加させると、固有振動数 ω_{00} はわずかに減少し $n_x = -7$ で最小となり、その後上昇した。一方、固有振動数 ω_{01} は、軸力 n_x を 0 から正方向へ増加させ引張荷重を与えた際に最小値を示した。固有振動数 ω_{00} が最小値を示した軸圧縮荷重 $n_x = -7$ の絶対値を座屈荷重 $n_{cr} = 7$ とする。

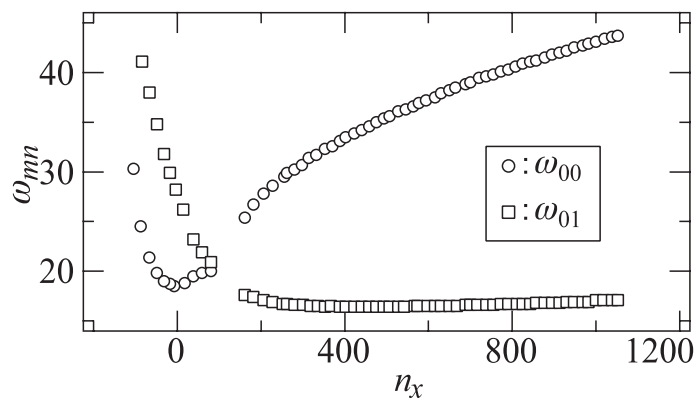


Fig 4.2: Natural frequencies of the structure under axial forces n_x .

軸引張荷重を $n_x = 0, 350$ ならびに 700 として、座屈荷重 n_{cr} に対する軸力 n_x/n_{cr} が $0, 50$ ならびに 100 における結合要素の形状と復元力特性を測定した。図 4.3(a) と (b) に要素の形状を示す。軸力 $n_x/n_{cr} = 0, 50$ ならびに 100 における静たわみをそれぞれ、

丸印, 四角印ならびに三角印のプロットで示している. 図 4.3(a) は $\eta = 0$ における ξ 方向の形状を示す. 軸力が $n_x/n_{cr} = 0$ のもとで, 静たわみは要素の中央で板厚の約 8 倍生じている. 軸引張力を上昇させた $n_x/n_{cr} = 50$ と 100 の場合では, 静たわみは板厚程度に減少する. 3つの軸力 $n_x/n_{cr} = 0, 50$ と 100 のもとで, 要素の形状は $\xi = 0.5$ に対してほぼ対称の形状を示した. $\xi = 0.5$ における η 方向の要素の形状を図 4.3(b) に示す. 軸力 $n_x/n_{cr} = 0$ では, 両端の静たわみの方向が $\eta = 0$ のたわみに対して異なる. 軸引張力を上昇させると, $\eta = 0$ での静たわみの減少に伴い両端の静たわみは同方向となる. さらに, 両端の静たわみの差が減少する.

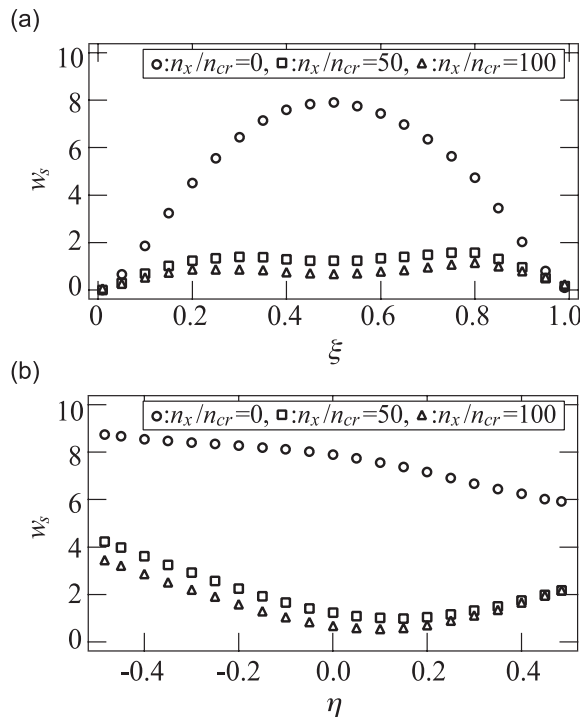


Fig 4.3: Configurations of the structure under axial tensile forces, (a) along the ξ direction at $\eta = 0$, (b) along the η direction at $\xi = 0.5$.

図 4.4 (a) と (b) は要素の復元力特性を示す. 横軸は静たわみ \bar{w}_s であり, 縦軸は集中荷重 q_s である. 軸力 $n_x/n_{cr} = 0, 50$ ならびに 100 における静たわみ \bar{w}_s をそれぞれ, 丸印, 四角ならびに三角で示す. 図 4.4 (a) では, 最低次の曲げ振動モードに対応する復元力特性を得るために, 集中荷重を $(\xi, \eta) = (0.5, 0)$ に作用させ静たわみ \bar{w}_s を $(\xi, \eta) = (0.3, 0)$ で測定した. 図 4.4 (a) より, 軸力が $n_x/n_{cr} = 0, 50$ と 100 のすべての場合で, 要素はわずかに非線形性を有する復元力特性を示した. 軸引張力の増加に伴い, 復元力特性の勾配は増加する. 図 4.4 (b) では, ねじりモードに対応する復元力特性を得るために, 集中荷重を $(\xi, \eta) = (0.5, 0.45)$ に作用させた際の \bar{w}_s を $(\xi, \eta) = (0.5, -0.45)$ で測定した.

軸力 $n_x/n_{cr} = 0$ のもとで、集中荷重 q_s を正方向に増加すると、勾配の大きい復元力特性を示す。一方、集中荷重を負方向へ増加させると、復元力特性の勾配は減少する。軸力が $n_x/n_{cr} = 50$ と 100 のもとでは、要素はほぼ線形の復元力特性を示した。さらに、それぞれの軸力における復元力は、ほぼ同じである。これより、軸引張力がある程度大きい場合に、軸引張力の増加の影響が要素の復元力特性に及ぼす影響は小さい。

3つの軸引張条件のなかで、軸引張力が $n_x/n_{cr} = 100$ の場合に要素は最も対称な形状とわずかに非線形性を有する復元力特性を示した。本実験では、軸引張力 $n_x/n_{cr} = 100$ のもとで加振実験を行った。軸力 $n_x/n_{cr} = 100$ における要素の線形固有振動数と固有振動モードを表 4.2 に示す。表において、破線は節線を示す。

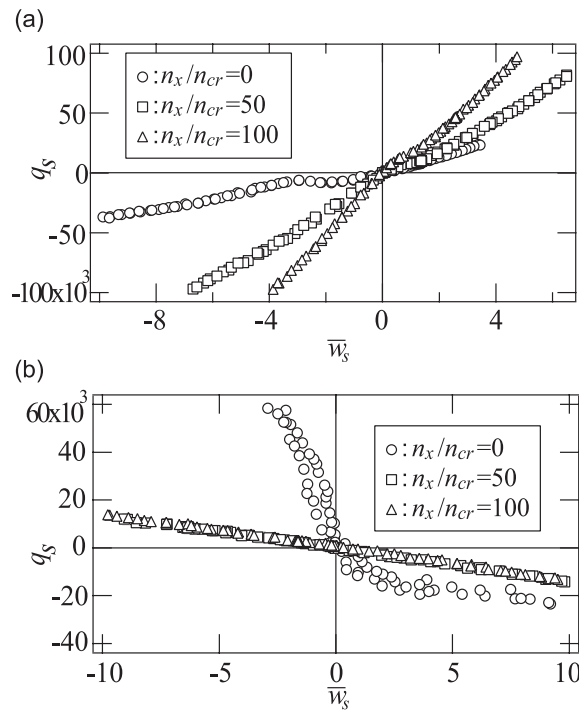
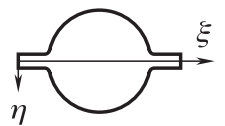
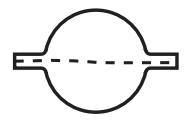
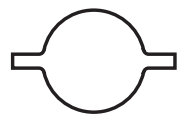


Fig 4.4: Characteristics of the restoring force of the structure, (a) \bar{w}_s is measured at $(\xi, \eta) = (0.3, 0)$ under q_s at $(\xi, \eta) = (0.5, 0)$, (b) \bar{w}_s is measured at $(\xi, \eta) = (0.5, -0.45)$ under q_s at $(\xi, \eta) = (0.5, 0.45)$.

4.5.2 周波数応答曲線

要素に軸引張荷重 $n_x/n_{cr} = 100$ を加え、比較的小さい加振加速度振幅 $p_d = 3 \times 10^3$ ($a_d = 4\text{m/s}^2$) のもと周波数応答曲線を得た。加振振動数は $(0, 0)$ モードの線形固有振動数近傍で掃引した。座標 $(\xi, \eta) = (0.7, 0.3)$ における周波数応答曲線を図 4.5 に示す。縦軸は無次元の動的応答 w の実効値振幅 w_{rms} であり、横軸は加振振動数 ω_{ex} である。 $(0, 0)$ モードの線形固有振動数を横軸上に丸印で示している。比較的小さい加振加速度

Table 4.2: The modes of vibration and the natural frequencies of the structure under $n_x/n_{cr} = 100$.

mode (m,n)	mode (0,1)	mode (0,0)
		
ω_{mn}	$\omega_{01}=16.5$	$\omega_{00}=38.7$

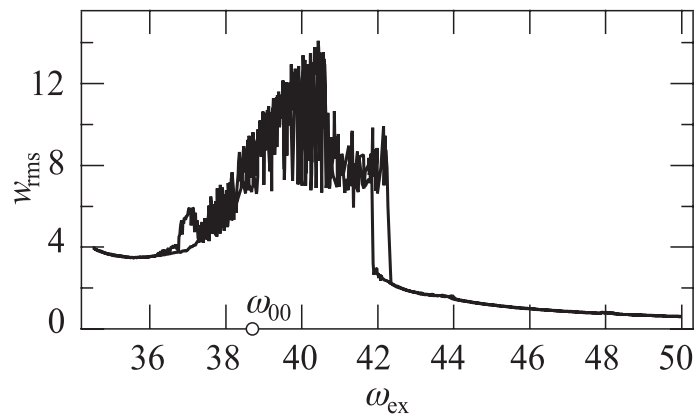


Fig 4.5: Frequency response curve under $p_d = 3 \times 10^3$.

振幅にもかかわらず，周波数応答曲線は非線形性の強い漸硬型の復元力特性に対応した大振幅応答を示した．さらに，非周期応答が大振幅応答に沿って確認された．本実験では，加振振動数が $\omega_{ex} = 40.6$ の場合に発生した非周期応答について詳細に分析を行った．

4.5.3 非周期応答

加振振動数 $\omega_{ex} = 40.6$ において，要素の動的応答，周波数分析結果ならびにポアンカレ写像図を収録した．測定点は $(\xi, \eta) = (0.7, 0.3)$ である．

図 4.6(a) に加振周期 τ_e で基準化した周期数 τ/τ_e に対する動的応答 w を示す．動的応答の包絡線の非周期的な変調が確認できる．動的応答の周波数分析結果を図 4.6(b) に示す．図の縦軸はデシベル値で示された振幅 A であり，横軸は無次元振動数 ω である．線形固有振動数を横軸上に丸印で示している．広帯域の振動成分の誘起が確認できる．顕著なスペクトルのピークが加振振動数 ω_{ex} と加振振動数の半分の振動数 $(1/2)\omega_{ex}$ 近傍で確認できる．加振周期に同期して収録した動的応答 w と速度 $w_{,\omega\tau}$ をプロットし，ポアンカレ写像図を得た．図 4.6(c) にポアンカレ写像図を示す．図より写像点は幅広

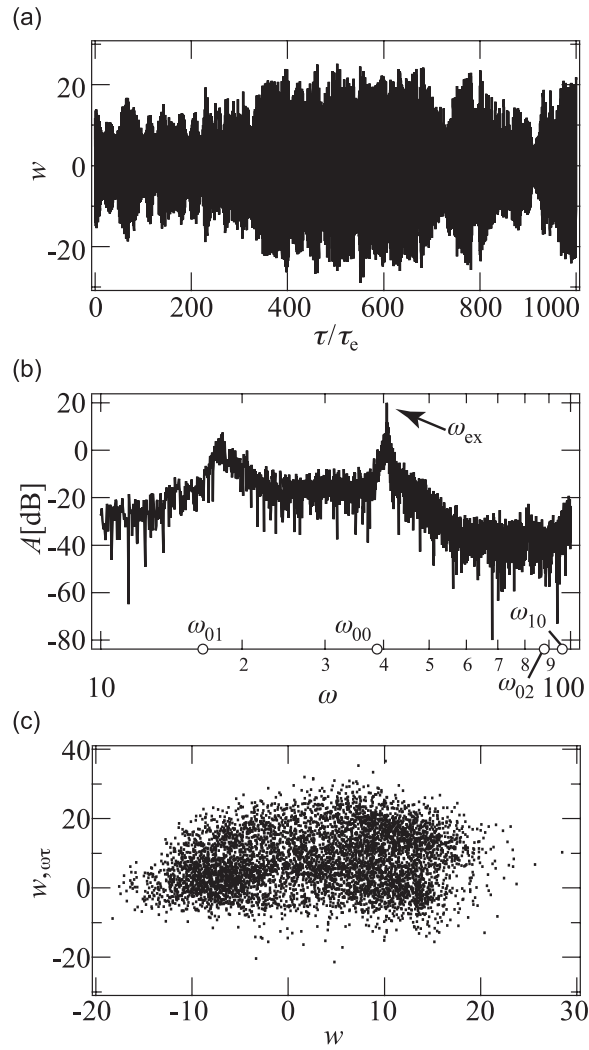


Fig 4.6: The nonlinear response (a)time history, (b) Fourier spectrum, (c) Poincaré projection under $p_d = 3 \times 10^3$, $\omega_{ex} = 40.6$.

い範囲に分散している。

$\omega_{ex} = 40.6$ で加振した際の、幅測定点 $(\xi, \eta) = (0.7, 0.3)$ における時系列波形を用いて最大リアプノフ指数 λ_{max} を計算した。埋め込み次元 e に対する最大リアプノフ指数 λ_{max} を図 4.7 に示す。埋め込み次元 $e = 10$ 以上では、最大リアプノフ指数 λ_{max} は $\lambda_{max} = 1$ から 1.3 に収束する。埋め込み次元 e の増加に対する最大リアプノフ指数 λ_{max} の正值への収束から、動的応答がカオス振動であると確定された。

カオス振動に寄与する振動モードとその寄与率を明らかにするために、多点同時計測された動的応答の時系列波形に主成分分析を適用した。時系列波形の収録は、加振振動数を $\omega_{ex} = 40.6$ として、測定位置の座標は $(\xi, \eta) = (0.1, 0.05), (0.3, -0.3), (0.5, 0)$,

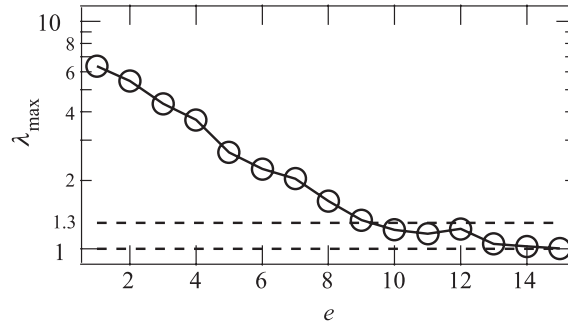

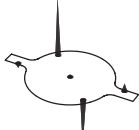


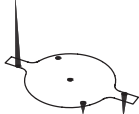


Fig 4.7: Maximum Lyapunov exponent related to embedding dimension under $p_d = 3 \times 10^3$, $\omega_{\text{ex}} = 40.6$.

(0.7, 0.3) ならびに (0.9, -0.05) の 5 点で行った．主成分分析に用いる時系列波形の時間長は加振周期 τ_e の 1500 倍とした．表 4.3 に，カオス振動に寄与する変形パターンと対応する寄与率 μ_i を示す．変形パターンにおける黒の円錐の高さと向きは，各測定点における固有ベクトルの成分 ϕ_i に対応する．最低次曲げ振動モードである (0, 0) モードに対応する変形パターンは 76.9% と，最大の寄与率を示した．ねじり振動モードである (0, 1) モードに対応する変形パターンは 2 番目の寄与を示し，その寄与率は 22.2% である．3 番目から 5 番目の寄与率は比較的小さい．これより，分析を行ったカオス振動には (0, 0) モードと (0, 1) モードが顕著に寄与する．

(0, 0) モードと (0, 1) モードの寄与率の時間変化を調べるために，先の分析に用いた時間長が $1500\tau_e$ の時系列波形を短時間間隔に分割して主成分分析を行った．短時間間隔の時間長は $30\tau_e$ とする．寄与率の時間変化を図 4.8 に示す．(0, 0) モードと (0, 1) モードの寄与率をそれぞれ丸印と四角印で示し，分析に用いた時間間隔の中央にプロットした．(0, 0) モードと (0, 1) モードの間で寄与率の不規則なやり取りが確認できる．さらに，特徴的な寄与率の変化は，3 つの時間範囲に分類できる．加振周期に対する周期数 τ/τ_e が 0 から 210 ならびに 330 から 660 の場合には，モード (0, 0) が 90% 程度の顕著な寄与を示す． τ/τ_e が 210 から 330 の場合には，(0, 1) モードの寄与率が (0, 0) モードより高い寄与率を示す．これらの時間範囲では寄与率の変化は比較的小さい．しかし， τ/τ_e が 660 から 990 の場合には，(0, 0) モードと (0, 1) モードの寄与率の順番が不規則に入れ替わる．

Table 4.3: Contribution ratio and modal patterns to the chaotic response under $p_d = 3 \times 10^3$, $\omega_{ex} = 40.6$.

i th	μ_i [%]	modal patterns η ξ
1	76.9	
2	22.2	
3	0.7	
4	0.1	
5	0.08	

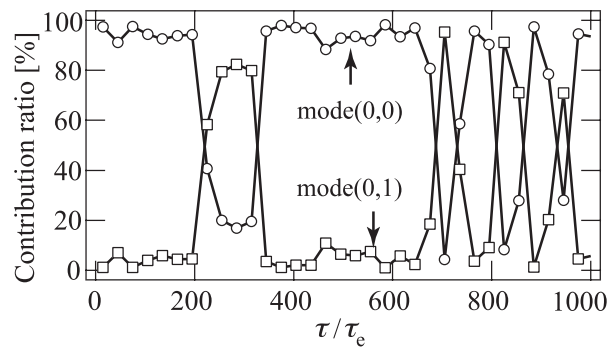


Fig 4.8: Time histories of the contribution ratios corresponding to mode(0,0) and mode(0,1) under $p_d = 3 \times 10^3$, $\omega_{ex} = 40.6$.

4.6 結言

はりと円板からなる結合要素の非線形振動の実験結果を示した。結合要素には軸方向に引張力を与えた。結合要素に一様な横方向周期加振加速度を加え、最低次の曲げ振動モード近傍で非線形振動応答を測定した。主な結論を以下に示す。

1. 最低次曲げ振動モードの固有振動数付近で、最低次曲げ振動モードとねじり振動モードの連成したカオス振動を確認した。
2. 短時間間隔に分割したカオス振動の時系列波形に主成分分析を適用した。その結果、最低次曲げ振動モードとねじり振動モードの寄与率の不規則なやり取りが確認された。さらに、特徴的な寄与率の変化は3つの時間範囲に分類できる。まず、最低次の曲げ振動モードが顕著な寄与率を示す時間範囲である。ついで、ねじり振動モードの寄与率が最低次曲げ振動モードより高い寄与率を示す時間範囲である。これら2つの時間範囲において、寄与率の時間変化は小さい。そして、最低次曲げ振動モードとねじり振動モードの寄与率の順番が不規則に入れ替わる時間範囲である。

参考文献

- [1] N. Yamaki, A. Mori, Non-linear vibrations of a clamped beam with initial deflection and initial axial displacement part I: Theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 71, Issue 3, (1980), pp. 333-346.
- [2] N. Yamaki, A. Mori, Non-linear vibrations of a clamped beam with initial deflection and initial axial displacement part II: Experiment, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 71, Issue 3, (1980), pp. 347-360.
- [3] K. Nagai, S. Maruyama, K. Sakaimoto, T. Yamaguchi, Experiments on chaotic vibrations of a post-buckled beam with an axial elastic constraint, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 304, Issues 35, (2007), pp. 541-555.
- [4] S. Maruyama, K. Nagai, T. Yamaguchi, K. Hoshi, Contribution of multiple vibration modes to chaotic vibrations of a post-buckled beam with an axial elastic constraint, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 2, Issue 3, (2008), pp.738-749.
- [5] N. Yamaki, M. Chiba, Non-linear vibrations of a clamped rectangular plate with initial deflection and initial edge displacement part I: Theory, *Thin-Walled Structures*, Vol. 1, Issue 1, (1983), pp. 3-29.
- [6] N. Yamaki, K. Otomo, M. Chiba, Non-linear vibrations of a clamped rectangular plate with initial deflection and initial edge displacement part II: Experiment, *Thin-Walled Structures*, Vol. 1, Issue 2, (1983), pp. 101-119.
- [7] S. I. Chang, A. K. Bajaj, C. M. Krousgrill, Non-linear vibrations and chaos in harmonically excited rectangular plates with one-to-one internal resonance, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 4, Issue 5, (1993), pp. 433-460.
- [8] N. Onozato, S. Maruyama, K. Nagai, T. Yamaguchi, M. Kurosawa, Experiments on chaotic vibrations of a rectangular plate under an in-plane elastic constraint at clamped edge, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 3, Issue 6, (2009), pp. 877-888.

- [9] S. Sridhar, D. T. Mook, A. H. Nayfeh, Non-linear resonances in the forced responses of plates, part I: Symmetric responses of circular plates, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 41, Issue 3, (1975), pp. 359-373.
- [10] S. Sridhar, D. T. Mook, A. H. Nayfeh, Non-linear resonances in the forced responses of plates, part II: Asymmetric responses of circular plates. *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 59, Issue 2, (1978), pp. 159-170.
- [11] N. Yamaki, K. Otomo, M. Chiba, Non-linear vibrations of a clamped circular plate with initial deflection and initial edge displacement part I: Theory, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 79, Issue 1, (1981), pp. 23-42.
- [12] N. Yamaki, K. Otomo, M. Chiba, Non-linear vibrations of a clamped circular plate with initial deflection and initial edge displacement part II: Experiment, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 79, Issue 1, (1981), pp. 43-59.
- [13] F. Khatami, G. Rezazadeh, Dynamic response of a torsional micromirror to electrostatic force and mechanical shock, *Microsystem Technologies*, Vol. 15, Issue 4, (2009), pp. 535-545.
- [14] R. Shabani, S. Tariverdilo, G. Rezazadeh, A. P. Agdam, Nonlinear vibrations and chaos in electrostatic torsional actuators, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, Vol. 12, Issue 6, (2011), pp. 3572-3584.
- [15] C. Ataman, H. Urey, Nonlinear frequency response of comb-driven microscanners, *Proceedings of the SPIE*, Vol. 5348, (2004), pp. 166-174.
- [16] C. Ataman, O. Kaya, H. Urey, Analysis of parametric resonances in comb-driven microscanner, *Proceedings of the SPIE*, Vol. 5455, (2004), pp. 128-136.

第5章 結論

第1章の目的に従い、円環板ならびにはりと円板を組み合わせた形状の結合要素について非線形振動実験を行った。円環板のたわみ方向の境界条件は、外周自由・内周固定ならびに外周固定・内周自由とした。外周自由と内周固定の円環板では解析をあわせて行い、実験結果と比較した。はりと円板を組み合わせた結合要素では、軸引張力を与えた状態で実験を行った。発生したカオス振動について詳細な分析を行った。特に、主成分分析に用いる時系列波形を長時間とした場合と、長時間の波形を等間隔に分割し、それぞれの区間について分析した結果を比較し、カオス振動における振動モードとその寄与率の時間変化を調べた。得られた結言は各章に示した通りである。それらを統合し要約するとつぎのようになる。

1. 円環板ならびにはりと円板を組み合わせた結合要素で発生したカオス振動に主成分分析を適用した。分析に用いる時系列波形の時間長を短くすることで、寄与率の不規則な変動を有する振動モードの存在を確認した。それぞれの薄肉板で確認された不規則な寄与率の変動の特徴はつぎの通りである。

外周自由と内周固定の円環板 寄与率の順番が不規則に入れ替わる。

外周固定と内周自由の円環板 内部共振条件を満たす二つの振動モード間で、寄与率のやり取りが発生した。一方、内部共振条件を満たしていない振動モードの寄与率の変化は小さい。

はりと円板を組み合わせた結合要素 最低次の曲げ振動モードが顕著な寄与率を示す時間範囲と、ねじり振動モードの寄与率が最低次曲げ振動モードより高い寄与率を示す時間範囲が存在する。これらの時間では寄与率の時間変化が小さい。さらに、最低次曲げ振動モードとねじり振動モードの寄与率の順番が不規則に入れ替わる時間範囲が存在する。

2. 外周自由・内周固定ならびに外周固定・内周自由の円環板に発生するカオス振動で、主成分分析の分析時間長を短くした結果、周方向への不規則な変動を示す節直径を有する振動モードの存在を確認した。

今後の課題として，初期たわみ，境界条件ならびに円環板の外半径に対する内半径の比が，円環板のカオス振動応答における振動モードの周方向への変動や寄与率の時間変化に及ぼす影響の解明が必要である．さらに，複数の要素からなる複雑形状の薄肉板に適用可能な非線形振動解析法が求められる．

謝辞

終わりに臨み，本研究を進めるにあたり，終始懇切なるご指導とご鞭撻を賜りました群馬大学大学院理工学府知能機械創製理工学教育プログラム 丸山真一 准教授に深甚の謝意を示します。

学部時代から退官されるまでの6年間に渡り，懇切なるご指導とご鞭撻を賜りました群馬大学 永井健一 名誉教授に深甚の謝意を示します。

さらに，有益なご助言とご討論を賜りました群馬大学大学院理工学府知能機械創製理工学教育プログラム 山口誉夫 教授，藤井雄作 教授，山田功 教授に厚く御礼申し上げます。

研究の苦楽を共にした，旧メカトロニクス第2，3，4研究室の卒業生ならびにダイナミクスシステム創製研究室の在校生のみなさまに感謝いたします。

最後に，長きにわたる学生生活を温かく見守ってくれた両親，祖母，兄に感謝します。

関連論文

発表論文

1. Ken-ichi NAGAI, Kenji OKADA, Shinichi MARUYAMA, Takao YAMAGUCHI, Experiments on chaotic vibrations of a thin circular plate with outer clamped edge and a circular center hole, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 4, Issue 4, (2010), pp. 660-671.
2. 岡田 賢二, 丸山 真一, 永井 健一, 山口 誉夫, 初期たわみを有する外周自由・内周固定の円環板のカオス振動実験, *日本機械学会論文集 C編*, Vol. 77, No. 774, (2011), pp. 300-308.
3. Kenji OKADA, Shinichi MARUYAMA, Ken-ichi NAGAI, Takao YAMAGUCHI, Experiments on nonlinear vibrations of a combined structure with segments of beams and a disc subjected to axial tensile force, *International Journal of Dynamics and Control*, Vol. 3, Issue 2, (2015), pp. 148-156.

研究発表

1. 永井 健一, 岡田 賢二, 丸山 真一, 山口 誉夫, 外周固定・内周自由の薄肉円環板のカオス振動実験, *Dynamics and Design Conference*, (2007).
2. 永井 健一, 岡田 賢二, 丸山 真一, 山口 誉夫, 円環板のカオス振動におよぼす集中質量の影響, *Dynamics and Design Conference*, (2008).
3. 岡田 賢二, 丸山 真一, 永井 健一, 山口 誉夫, 初期変形を有する外周固定円板のカオス振動実験, *Dynamics and Design Conference*, (2009).
4. 岡田 賢二, 丸山 真一, 永井 健一, 山口 誉夫, 外周固定円板のカオス振動におよぼす集中質量の影響, *Dynamics and Design Conference*, (2010).
5. 岡田 賢二, 丸山 真一, 永井 健一, 山口 誉夫, 区分はりと円板による結合要素の非線形振動実験, *マイクロ・ナノ工学シンポジウム*, (2010).

6. Kenji Okada, Ken-ichi Nagai, Shinichi Maruyama, Takao Yamaguchi, Effects of a concentrated mass on chaotic vibrations of a clamped circular plate with initial deformation, *ASME 2011 International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference (8th International Conference on Multibody Systems, Nonlinear Dynamics, and Control)*, (2011).
7. Kenji Okada, Shinichi Maruyama, Ken-ichi Nagai, Takao Yamaguchi, Analysis on nonlinear static deflection and natural frequencies of a thin annular plate with initial deformation, *International Conference on Mechanical, Electrical and Medical Intelligent System 2017*, (2017).