四面体の体積公式について

村　崎　武　明
群馬大学教育学部数学教室

（2002年９月25日受理）

《Ⅰ》はじめに

三角形は最小辺数の多角形で、四面体は最小面数の多面体です。このことから、四面体は三角形の立体版という趣があります。そして、三角形ではヘロンの公式と呼ばれる面積公式が良く知られています。それでは、これに対応するような四面体の体積公式とはどんなものでしょう。また、三角形の辺長については三角形条件がありますが、四面体の辺長ではどのような条件になるのでしょうか？このような疑問は自然に浮かんで来るものでありますが、それを扱ったものをあまり見掛けることがありません。そこで、実際に大学の授業の中でこの話題を取り上げてみたところ、図形的な考察にも発展して受講生の興味を引いたので、高校での教材として参考になる点もあるかと思い、ここに紹介することにしました。

《Ⅱ》等面四面体の体積

ここからは読み易さを目指して、Ｓ君とＲさんそして老先生Ｔの仮想対話の形で話を進めることにします。以前にも（[１]）、Ｓ君（高校三年生）とＴ先生には登場してもらいましたが、そのＳ君も今は大学一年生で、Ｒさんは同級生です。

Ｓ：先生、お久し振りです。今日は同級生のＲさんが、先生に教えてもらいたいことがあるというので、一緒に来ました。

Ｒ：初めまして、宜しくお願いします。

Ｔ：こちらこそ宜しく。大学の勉強の具合はどうじゃな？

Ｒ：今は微積分と線形代数の講義を受けていますが、高校時代とは様子がまるっきり違います。そもそもの基礎から勉強している、という感じです。

Ｔ：そうじゃろう。高校では計算して答えを出せばおしまい、という所が、大学ではその計算の基にある概念の理解が先ず大切ということだから、そこに大きな違いがあるな。

Ｓ：でも、今日の質問は概念というより計算のことです。線形代数の授業で、三次の行列式が平行六面体の体積に相当する、ということを習ったのですが、それに関してです。

Ｔ：どういうことかな？

R：授業で、三つのベクトル

$$\overrightarrow{OA}=(a_1,a_2,a_3)、\overrightarrow{OB}=(b_1,b_2,b_3)、\overrightarrow{OC}=(c_1,c_2,c_3)$$

の張る平行六面体の体積は

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \text{の絶対値}$$

となるということを教わったので、三角錐O－ABCの体積はこの値の（1/6）として求められることは分かるのですが、頂点A、B、Cの座標の代わりに、各辺の長さが与えられている時には、その体積はどう求めたら良いか？ということなのです。

T：なるほど、三角形のヘロンの公式の四面体版ということじゃな。立体の時は辺を稜と呼ぶが、今ではどちらも辺で通用しているようだな。それはともかくとして、この四面体O－ABCの六つの辺の長さを

$$OA=a、OB=b、OC=c、$$
$$BC=l、CA=m、AB=n$$

とする時、Rさんの問題は

この四面体の体積をa、b、c、l、m、nで表せ

ということかな。

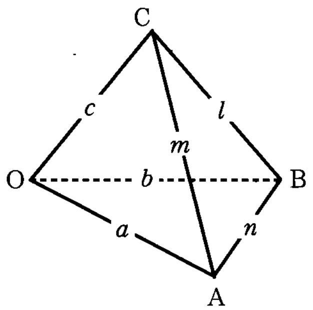

図1

R：そうです、でもどうやって調べたら良いか？まさか

$\frac{1}{3}$×底面積×高さ

で計算するのも大変そうですし、……… 。

T：複雑だが、一般の公式があることはある。

R：やはり、あるのですね。どのように求めるのでしょう？

T：一般の場合に進む前に、その「まさか」で計算出来る場合も考えてみよう。

R：どんな場合ですか？

T：等面四面体というものを知っているかな？四面体の四つの側面が互いに合同な三角形になる場合だが。

R：いいえ、初めて聞きます。

T：その展開図（図2）は、大きな三角形ABCを各辺の中点L、M、Nを結ぶ線分で折返したものになる。従って、

$$a=l、b=m、c=n$$

となるが、逆に、三組の対稜の長さがそれぞれ一致する四面体、と言っても良い。等面四面体については、S君は覚えているかな？

S：エェ、以前に教えて頂きました。（[1]）たしか、その三角形ABCは鋭角三角形でなければ

ならない、ということでした。

R：鋭角三角形を折返すだけで作られるなんて、ずいぶん分かり易いものですね。

T：ソゥ、それだけにその体積計算も容易になるから、高校生の知識の範囲内で求めることが出来る。Rさんにやってもらおうか。

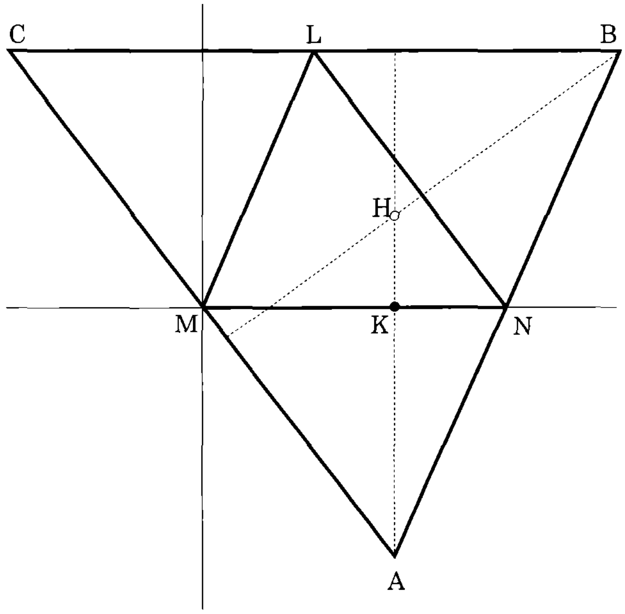

図２

R：はい。……でもどのように計算すれば良いのか、すぐには思い付きませんが。

T：△ＬＭＮを底面とする三角錐、と考えて、その底面積と高さをそれぞれ求めてしまえばよい。その計算のために、展開図のＭを原点として、図２のように直交座標系を入れてみよう。

$MN=a$、$NL=b$、$LM=c$

とすると、$N(a,\ 0)$ となる。そこで $L(\alpha,\ \beta)$ と置いてみると、a、b、c と α、β の関係はどうなるかな？

R：△ＬＭＮに着目すれば、

$$\begin{cases} \alpha^2+\beta^2=c^2 \\ (a-\alpha)^2+\beta^2=b^2 \end{cases} \quad \cdots\cdots ※$$

となります。

T：そしてこの四面体の作り方は、△ＡＭＮ、△ＢＬＮをそれぞれＭＮ、ＮＬを折り目として折返したものだから、頂点Ａ、Ｂは△ＡＢＣの垂心Ｈの真上で出会うことになる。そこで点Ｈの座標を求めてごらん。

R：□ＬＭＮＢは平行四辺形ですから、

$B(a+\alpha、\beta)$

となります。そして、ＢＨはＬＮと直交しますから、

$$\begin{cases} \text{直線AH} & x = a-\alpha、\\ \text{直線BH} & y-\beta = \dfrac{a-\alpha}{\beta}(x-(a+\alpha)) \end{cases}$$

となって、その交点Ｈは計算すると、………

$$\mathrm{H}\,(a-\alpha,\ \frac{-2a\alpha+2\alpha^2+\beta^2}{\beta}\,)$$

ですね。

T：このことから、四面体の高さ h（△ＬＭＮを底面とする）が求まり、従って四面体の体積Ｖが得られることになる。とにかく計算してみようか。

R：三平方の定理から、

$$h^2 = \beta^2-(\frac{-2a\alpha+2\alpha^2+\beta^2}{\beta})^2$$
$$= \frac{4}{\beta^2}(-a\alpha+\alpha^2+\beta^2)(a\alpha-\alpha^2)$$

となります。これと底面三角形の面積△ＬＭＮ＝½ $a\ \beta$ を用いれば、

$$\mathrm{V}^2=(1/9)(\tfrac{1}{4}a^2\ \beta^2)\frac{4}{\beta^2}(-a\alpha+\alpha^2+\beta^2)(a\alpha-\alpha^2)$$
$$=(1/9)a^2(-a\alpha+\alpha^2+\beta^2)(a\alpha-\alpha^2)$$

が得られます。ここに先の関係式※を適用して、α、β を a、b、c に置き換えて行けば良いのだと思いますが、……… 。

T：その通りじゃな。Rさんの計算力も大したものだ。※からはどういう関係が出てくるかな？

R：※の後半は展開すると、$a^2-2a\alpha+\alpha^2+\beta^2 = b^2$ から

$$2a\alpha = a^2-b^2+c^2 \ \cdots\cdots\cdots \ ◎$$

これを上式に代入して整理すると、

$$36\mathrm{V}^2=a^2(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2-2\alpha^2)$$

となります。この最後の α^2 はどうしたら良いのでしょう？

T：ここまで来れば、あと一歩じゃな。

$$72\mathrm{V}^2=(-a^2+b^2+c^2)(2a^2(a^2-b^2+c^2)-(2a\alpha)^2)$$

と変形すれば、……… 。

R：アァ、そうですね。◎を代入すれば、

$$72\mathrm{V}^2=(-a^2+b^2+c^2)(2a^2(a^2-b^2+c^2)-(a^2-b^2+c^2)^2)$$
$$=(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$$

となりますが、……… 、なんて奇麗な式なのでしょう！ちょっと感動しました。

S：本当ですね。こんな形が飛び出して来るなんて予想もしていなかったので、びっくりしまし

た。ヘロンの公式にも良く似ていますね、偶然なのでしょうか？

T：イャ、偶然ではなかろう、とても強いつながりがある筈だから。それと、この式を見ても分かる通り、

$$-a^2+b^2+c^2、a^2-b^2+c^2、a^2+b^2-c^2 > 0$$

となるから、「等面四面体の側面の三角形は鋭角三角形でなければならない」ということの傍証にもなっている。

R：式から図形的な意味も汲み取れるのですね。面白いです。

T：とにかく、今示されたことを纏めると、次の定理になる。

定理１。　三辺の長さがａ、ｂ、ｃの三角形を側面とする等面四面体の体積Ｖは、

$$72V^2=(-a^2+b^2+c^2)(a^2-b^2+c^2)(a^2+b^2-c^2)$$

そしてこの公式がどれだけ有用なものかは、実際に使ってみると分かる。例えば、

$$a=b=c=1$$

の場合は正四面体になるが、その体積Ｖは直ちに

$$V^2=1/72 \qquad \therefore V=(1/12)\sqrt{2}$$

と求まる。もちろん、正四面体の体積を求めるのにこの公式を使うのは遣り過ぎだとは思うがな。そこで、もう一つの例をやってみよう。

$$a=12、b=c=11$$

の場合を計算してみたらどうかな？

S：二等辺三角形ですね、

$$-a^2+b^2+c^2=98、a^2-b^2+c^2=a^2+b^2-c^2=144$$

ですから、電卓をたたくと………、

$$V=168$$

となります。ヘェー、整数値になるんだ。

T：平方根号が開けて整数になる場合を考察するのも面白い課題になると思うよ。例えば

$$a=12、b=c=n\ (整数値)$$

の時に、体積Ｖが整数になるのはnがどのような場合か？後でゆっくり考えて御覧。

S：そうします。

R：Ｓ君は、先生の所へ来ると、こんな宿題が出されるのが楽しみ、と言っていましたけど、私もそう思います。

T：二人とも数学が好きなんじゃな。

S：ところで、定理１に出てくる（$-a^2+b^2+c^2$）などは余弦公式で見掛けるものですね。

T：そうだが……、何を考えているのかな。

S：それを使えば、この公式が書き換えられないかな、と思うのですが、………。

T：遣ってみるとどうなるかな。

S：等面四面体の一つの頂点に集まっている三面角をα、β、γとすると、

$$-a^2+b^2+c^2 = 2bc\cos\alpha$$

$$a^2-b^2+c^2 = 2ac\cos\beta$$

$$a^2+b^2-c^2 = 2ab\cos\gamma$$

となりますから、

$$72V^2 = 8a^2b^2c^2\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma$$

$$\therefore\ V = \tfrac{1}{3}abc\sqrt{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

ということですが、どうでしょう？

T：結構じゃな。実際には三面角α、β、γは、この三角形の三内角だから、定理として纏めれば、

定理２。　等面四面体の側面の鋭角三角形が

辺長a、b、c、内角α、β、γ

となる時、その体積は

$$V = \tfrac{1}{3}abc\sqrt{\cos\alpha\cdot\cos\beta\cdot\cos\gamma}$$

と表せる。これはこれで整った形だから、公式と呼んでも良いじゃろう。面白いものを見付けたね。

《III》四面体の表示

R：ところで、一般の四面体の場合はどうなんでしょう？先程は、それについても体積公式はある、とおっしゃっておられましたね。定理１を見ると、一般の場合の公式もかなり奇麗な形で得られるのかな、と期待しているのですけれど、……… 。

T：それは纏め方によっては奇麗にもなるが、使える形としては複雑なものになってしまうのじゃ。

S：その求め方は定理１のように初等的には行かないのでしょうね。

T：それは強引に実行しても出来ないことはないが、かなり苦労するじゃろうな。それに一般の四面体の場合は等面四面体とは違って、その六つの稜の長さを与えてもそれらのつながり具合によっては様々な四面体が現われて来るから、そのことも整理しなければならないぞ。

S：どういうことですか？

T：等面四面体の場合は、側面の三角形の辺の長さをa、b、cとした時、それらをどうつなげても精々裏返し合同の違いしか生じない。しかし、一般の場合には六つの稜の長さを決めても、それから組み上げられる四面体は互いに合同にならないものがある、更には稜のつなげ方によっては四面体が作られないこともある、ということじゃ。

R：アノー、イメージが湧きにくいので、例を示して下さいませんか？

T：そうだな、例えば長さ３、４、５の棒をそれぞれ２本ずつ用意して、それらを稜としてつなげた四面体を作ってみる、という問題を考えてみよう。この時、次のような図が想像出来るかな？

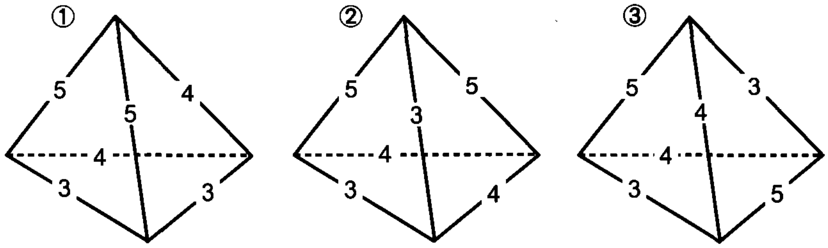

図３

R：確かにこれらは互いに合同にはなっていませんね、……… 、でも………。

T：「でも……… 」、何かな？

R：③の例は、対稜がそれぞれ等しいですから、先程のお話では等面四面体になりますね。

でも、Ｓ君も言っていたように、等面四面体の面は鋭角三角形になる筈でしょう？

それなのに、これは直角三角形です。

S：アッ、本当だ！これは四面体にはなりませんよ。すると、他のものも四面体が作られるかどうかは確かめてみなければ、……… 。

T：その通りじゃ。今は、実際に作ってみれば納得出来るだろう。ここに割箸があるから、試して御覧。

R：………、①と②は立体になりますが、③は平面になってしまいますね。

T：これが最初に、「六つの稜を与えても、稜のつなげ方によっては合同でない四面体が作られることもあるし、四面体そのものが作られないこともある」と言ったことじゃ。

S：ナルホド、「六つの稜の長さの他に、そのつなげ方も指定しなければ、四面体は決まらない」ということですか。

R：「四面体は三角形の立体版」という程度の認識でいましたけれど、意外と奥の深いものなんですね。

T：それはそうじゃ、立体は奥行があるからな。

S：また先生得意の駄洒落が出ましたね。

T：マァ、立体版という認識自体は大切なことじゃ。ただ、それだけでは扱い切れないものがある、ということだな。そこで、稜同士のつながりを整理するために、先の図１のように、

底面の三角形ＡＢＣ、頂点Ｏ

と考えて、各稜の長さを

$OA = a$、$OB = b$、$OC = c$、

$BC = l$、$CA = m$、$AB = n$

と置くことにしよう。ここで、

　　ＯＡとＢＣ、ＯＢとＣＡ、ＯＣとＡＢ

が対稜と呼ばれているものだ。このようにつなげられた稜の四面体を簡単のために、

　　四面体（$a,\ b,\ c\,;\, l,\ m,\ n$）、

と表すことにすると、Ｒさんの問題は

　　四面体（$a,\ b,\ c\,;\, l,\ m,\ n$）の体積を

　　a、b、c、l、m、n の式で表すこと……… 問題1

ということになるな。

Ｒ：そこまで整理していただくと、求めようとしていることがはっきりして来ます。でも四面体（$a,\ b,\ c\,;\, l,\ m,\ n$）の表示は、頂点Ｏ、底面三角形ＡＢＣとした時のものですね。例えば別の頂点Ａを取って底面三角形ＯＣＢとした時には、同じ四面体が（$a,\ m,\ n\,;\, l,\ b,\ c$）と表されますけれど、それでも良いのですか？

Ｔ：それでも構わん。一つの表示を基にして考察をすることにするからな。そして、等面四面体は、三組の対稜がそれぞれ等しくなるもの、と言えるから、

　　四面体（$a,\ b,\ c\,;\, a,\ b,\ c$）

と表せて、その体積が定理1として求められたものだな。

Ｓ：そういうことですね。そして、先の図3の例を表示すれば、

　　①（３，４，５；４，５，３）

　　②（３，４，５；５，３，４）

　　③（３，４，５；３，４，５）

となります。しかし、③は四面体にならなかった、①と②は四面体になる……… 。

他にも、（３，４，５；４，３，５）とつなげたものも考えられて、これは四面体になるのかどうか？

Ｒ：本当、考えなければならないことが次から次に出て来て、面白いですね。

Ｔ：ソゥ、考えるべき課題が次々と出てくるのを「面白い」と感じるのは、数学を探究する上で最も大切な気持ちだから大事にせんとな。とにかく、Ｓ君の言うように、

　　与えられた六つの長さ $a,\ b,\ c\,;\, l,\ m,\ n$ をつなげて、

　　四面体（$a,\ b,\ c\,;\, l,\ m,\ n$）が作られるための条件……… 問題2

というのも課題の一つになった訳だが、まずは問題1の方を考えてみようか。

《Ⅳ》一般の四面体の体積公式

Ｒ：それは四面体（$a,\ b,\ c\,;\, l,\ m,\ n$）が存在するものとして、その体積を求めることですね。

Ｔ：そうじゃ。座標を用いた定理1の方法で行くのはいささかしんどいので、ここでは行列式の知識を利用することにしよう。これはＲさんもＳ君も勉強していたことだったのう。

S：エェ、でもそれは、四面体の四頂点の座標が与えられた場合の式ですよ。

T：それを補助に使うのじゃ。頂点Ｏと底面三角形ＡＢＣについて、

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(a_1, a_2, a_3)、\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(b_1, b_2, b_3)、\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}=(c_1, c_2, c_3)$$

と置いてみよう。この時、四面体Ｏ－ＡＢＣの体積Ｖを行列式で表すと、どうなるかな？

R：それは線形代数の授業で習いましたが、

$$6\,\mathrm{V}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\text{の絶対値}$$

となります。でもこの式が稜の長さとどう結び付くのですか？

T：そこにチョットとした工夫がある。転値行列を掛けると

$$(6\,\mathrm{V})^2=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{a}\cdot\vec{c} \\ \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{c}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$$

となることは良いかな。

R：エート、上の式の行と列を掛ければ、それは内積の成分表示になっていますから、下の式になることは分かります。

T：そうすれば、

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=a^2、\vec{b}\cdot\vec{b}=b^2、\vec{c}\cdot\vec{c}=c^2、$$

となるし、また余弦公式から

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\gamma=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-n^2)$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=ac\cos\beta=\tfrac{1}{2}(a^2+c^2-m^2)$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=bc\cos\alpha=\tfrac{1}{2}(b^2+c^2-l^2)$$

となることから、係数を整えると

$$2\,(12\mathrm{V})^2=\begin{vmatrix} 2a^2 & a^2+b^2-n^2 & a^2+c^2-m^2 \\ a^2+b^2-n^2 & 2b^2 & b^2+c^2-l^2 \\ a^2+c^2-m^2 & b^2+c^2-l^2 & 2c^2 \end{vmatrix}$$

と得られる。これでこの体積Ｖが稜の長さ a、b、c、l、m、n で表されたことになるな。

R：本当に表せるのですね、それも意外と簡単に求められたのには驚きました。内心、半信半疑だったのですけれど。それにしても複雑ですね。もう少し簡単にはならないのでしょうか？

T：後は展開して整理するだけだが、結果の式を先回りして言えば、

$$\begin{aligned}(12\mathrm{V})^2 = & a^2l^2(-a^2+b^2+c^2-l^2+m^2+n^2)\\ & +b^2m^2(a^2-b^2+c^2+l^2-m^2+n^2)\\ & +c^2n^2(a^2+b^2-c^2+l^2+m^2-n^2)\\ & -l^2b^2c^2-a^2m^2c^2-a^2b^2n^2-l^2m^2n^2\end{aligned}$$

となる。だが、22項もあるこの式はどうもこれ以上は纏められそうもないな。もしも纏められたとしたら、教えて欲しいものじゃ。とにかくこの結果を確認してみよう。

——·——·-S君とRさんはひたすら計算をして……… ——·——·-

R：この行列式の展開は文字数が多すぎて大変です。でもそれを実行するしか無いようですね。時間は掛かりましたが、この結果になることは確かめました。少し疲れました。

S：僕もやってみましたが、ＯＫです。でも、こんな文字式計算をしたのは初めてです。二度と検算をしたくありませんね。

T：二人ともうんざり、といった顔じゃな。マァ、とにかく確かめられたのだから、良しとするか。

R：こんな複雑なものでも公式というのですか？

T：この式を覚えて措く訳にもいかないだろうが、役に立つことは間違いない。これは、オイラー(Euler)の体積公式と呼ばれておる。([２]、[３]) 実際に体積計算をする時には、上の行列式表示より、この展開された形の方が使い易いと思うよ。これも定理として述べて措こう。

定理3。 四面体 $(a,\ b,\ c;\ l,\ m,\ n)$ の（図１）の体積Vは

$$\begin{aligned}(12\mathrm{V})^2 = & a^2l^2(-a^2+b^2+c^2-l^2+m^2+n^2)\\ & +b^2m^2(a^2-b^2+c^2+l^2-m^2+n^2)\\ & +c^2n^2(a^2+b^2-c^2+l^2+m^2-n^2)\\ & -l^2b^2c^2-a^2m^2c^2-a^2b^2n^2-l^2m^2n^2\end{aligned}$$

この式で、対稜の b と m、c と n の二ヶ所を同時に入れ替えてみても、同じ式になるが、それは四面体 $(a,\ m,\ n;\ l,\ b,\ c)$ に対応するもので、もとの四面体と同じものだから当然じゃろう。

S：三組の対稜を全部入れ替えてみると、どうなります？

T：$(a,\ b,\ c;\ l,\ m,\ n)$ と $(l,\ m,\ n;\ a,\ b,\ c)$ か？これは式自体も異なるし、合同になるとは限らんぞ。そもそも、（２，２，２；１，１，１）は四面体になるが、（１，１，１；２，２，２）という四面体は存在しないからな。

それから、定理３を等面四面体 $(a,\ b,\ c;\ a,\ b,\ c)$ に適用すれば、定理１が得られることも当然じゃな。

《Ⅴ》四面体条件

T：この定理３が、Rさんの問題１に対する解答ということになる。そこで例として、前に挙げたものを計算してみようか。

R：単に代入すれば求まりますね。こういう時は電卓を使うに限る………、

① （３，４，５；４，５，３）……… $V=(1/12)\sqrt{4679}$

② （３，４，５；５，３，４）……… $V=(1/12)\sqrt{3671}$

③ （３，４，５；３，４，５）……… $V=0$

この③は平たくなって四面体が作られないのですから、体積０も当然でしょうか。

T：S君が挙げた例も計算するとどうなるかな？

S：（３，４，５；４，３，５）ですね。定理３の式に代入すると………、アリャ、

$$(12V)^2=-1225<0$$

となってしまいますね。ということは、このような四面体は存在しないことになります。図を描いてみればありそうな気もするのですが、実際には存在し得ない図、ということですね。

T：そういうことだな。正実数a、b、c、l、m、nについての整式

$$\begin{aligned}&F(a,\ b,\ c;\ l,\ m,\ n)\\&=a^2l^2(-a^2+b^2+c^2-l^2+m^2+n^2)\\&\quad+b^2m^2(a^2-b^2+c^2+l^2-m^2+n^2)\\&\quad+c^2n^2(a^2+b^2-c^2+l^2+m^2-n^2)\\&\quad-l^2b^2c^2-a^2m^2c^2-a^2b^2n^2-l^2m^2n^2\end{aligned}$$

が０以下の値を取る時には、

四面体 $(a,\ b,\ c;\ l,\ m,\ n)$ は存在しない

ということになる。

S：すると、例①、②についてはFの値は正になるので、四面体は存在する、ということになるのかな？それなら、「F＞０」が四面体の存在条件だ！

R：そこまでは未だ示されていないでしょう？

四面体が存在する⇒F＞０（Fの値は体積だから）

の対偶を言っただけですから。

T：その通りじゃ、Rさんの指摘は正しい。しかし、S君の気持ちも分かる。

S：残念だなァ。それでは、四面体が存在しなくてもF＞０、という例は実際に在るのですね？

T：例えば、

（８，４，２；１，４，２）

という場合を考えてみよう。このFの値は？

S：代入すると………、ヘェー、2000＞0ですね。でも、これらの長さはどうつなげても三角形

条件も満たさないから、四面体も作れませんね。そうか、「$F>0$」は四面体の存在条件にはならないんだ。

T：そう、必要条件だが十分条件ではない、ということになる。

S：良い所に目を着けたと思ったんだけれど、駄目ですか。未練がましいけれど、先生の挙げた例が悪いのですよ。そもそも三角形自体が作れないようなものなんて、…… 。

T：するとS君は、

「三角形が作られるような $(a, b, c; l, m, n)$ であれば、$F>0$ は四面体の存在条件になる」と言いたいのかな？

S：虫が良すぎるかも知れないけれど、そんな期待もしたいですね。

T：エライもんじゃね、S君の直感は。

S：エッ、もしかして、この予想は成立する？本当ですか？

R：ビックリです。S君、すごいですね。一体どうやって示すのかしら。

T：二人とも関心があるようなので、証明を紹介しようか。

S：是非お願いします。

R：難しい知識を必要とするのでしょうか？

T：イヤ、そんなことは無い。「三角形が作られるような $(a, b, c; l, m, n)$」ということは

(a, b, n)、(b, c, l)、(a, c, m)、(l, m, n) がどれも三角形を作る

ということだから、それら四個の三角形を平面上に次の図4のように並べることが出来る。

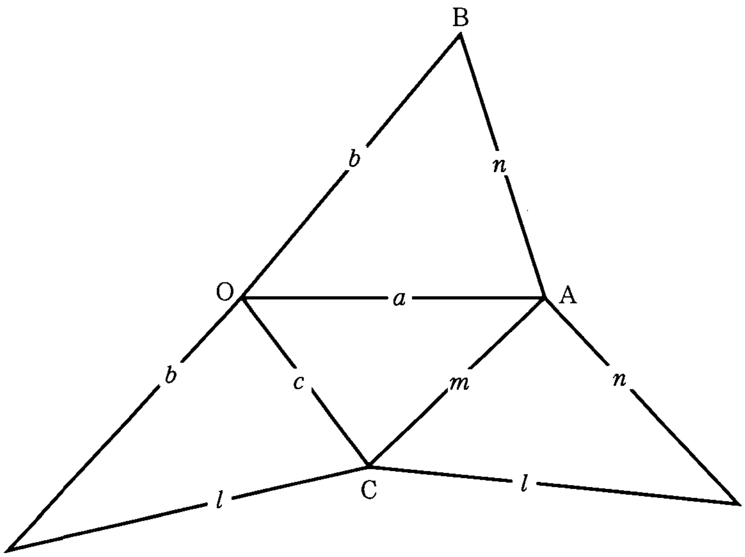

図4

S：四面体の展開図みたいなものですね。

T：そうじゃ。これを、線分ＯＡ、ＯＣ、ＡＣを折り目として外側の三角形を折返した時に四面体が出来上がるかどうかが問題だな。

S：頭の中で想像すると出来そうな気がしますが………、でも直角三角形を折っても等面四面体が作れないことを考えれば、無条件には出来ないことは分かりますね。

T：その通り。Ｓ君の空間認識力も堂に入って来たな。この図において、例えばaを共有する二つの三角形（a, b, n)、(a, c, m）に注目しよう。線分ＯＡで折返して行く時に、ＢＣ間の距離がlになる瞬間があれば、そこで折返しを止めると、求める四面体が得られることになるな。

S：ナルホド、そうなりますね、残りの二つの三角形も三辺確定で決まってしまいますから。すると、「ＢＣ間の距離がlになる瞬間がある」ということが、

四面体（a, b, c; l, m, n）が存在するための必要十分条件

ということですか。

T：そういうことだな。そこで、△ＯＡＣと△ＯＡＢを次の図５のように並べてみる。左は二つの三角形が重なった状態で、右はそこから△ＯＡＣを折り返して開き終った状態のことだ。様子は分かるかな。

S：はい。左の状態から△ＯＡＣを折り返して行って、全部開くと右の状態になるのですね。両方とも平面上にあるものですね。

T：そこで、左の状態のＢＣをl_0、右の時のＢＣをl_1と置く。明らかに

$$l_0 < l_1$$

となる。そして、左の状態から右の状態へ折り返して行く途中が（立体の）四面体になっている時であり、その時のＢＣ＝xはl_0からl_1へ単調に増加して行く。その場合の体積Ｖは定理３により、

$$(12\mathrm{V})^2 = \mathrm{F}(a, b, c, x, m, n)$$

と求まっておる。ここまで良いかな。

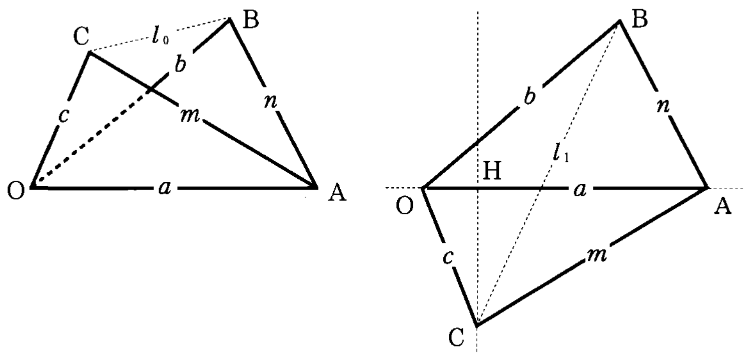

図５

R：アノー、長さ x が単調に増加するということは？

T：アァ、これは自明ではないかも知れないな。それは、直交座標系 (u, v, w) を図5の右のように入れて計算すれば確かめられることじゃ。即ち、Hを原点として、u 軸はこの平面に垂直なもの、直線OAが v 軸、直線CHが w 軸とする。

折返しによって開いて行く二面の間の角を θ と置くと、もちろん左側の図が $\theta = 0°$ で、右側の図が $\theta = 180°$ の場合だ。点Cは半円を描きながら移動するから、その半径CHを r とすれば、

$$\text{動点C}\ (r\sin\theta,\ 0,\ r\cos\theta)\text{、定点B}\ (0,\ v_0,\ w_0)$$

と表せる。ここで、$w_0 > 0$ は図から分かるじゃろう。そして、

$$\begin{aligned} BC^2 &= (r\sin\theta)^2 + {v_0}^2 + (r\cos\theta - w_0)^2 \\ &= r^2 + {v_0}^2 - 2rw_0\cos\theta \end{aligned}$$

となるが、ここで $2rw_0\cos\theta$ は θ の単調減少関数だから、BCは θ と共に単調に増加する。即ち、開いて行くにつれてBC間の距離 x は大きくなる、と言える。明らかに x の最小値が l_0、最大値は l_1 になって、x はその間の値を全て取って行く。

R：はい、分かりました。

T：ところで、式F (a, b, c, x, m, n) を見ると、その形から分かるように、これは x^2 の二次式（x^4 の係数は $-a^2$）であり、x^2 が ${l_0}^2$ や ${l_1}^2$ に近付くにつれて四面体の高さが0に近付くから、体積の値即ちFの値は0に近付く。従ってこの式の根は ${l_0}^2$ と ${l_1}^2$ であって、

$$F\ (a, b, c, x, m, n) = -a^2(x^2 - {l_0}^2)(x^2 - {l_1}^2)$$

と因数分解される。そして二次式のグラフから分かるように、この式の値が正になるのは、${l_0}^2 < x^2 < {l_1}^2$ となる時である。即ち、正実数 x について、

　　F $(a, b, c, x, m, n) > 0$ となるのは、$l_0 < x < l_1$ の時である、

と言える。そして上にも見たように、l_0 と l_1 の間の全ての実数値 x は、折り返しの途中（の θ）で実現している。以上を纏めれば、

　　F $(a, b, c, l, m, n) > 0$ となる時には、

　　　$l_0 < l < l_1$

　　であって、そのような長さ l は折返しの途中で実現する、

即ち、

　　四面体 $(a, b, c; l, m, n)$ が存在する、

ということじゃ。

S：ヘェー、言えるんだ、驚いた。それに証明も難しいことを使っている訳ではないし。

R：四面体の体積公式の形が本質的に使われるのが印象的です。それに、図形を動かして行くのも直感的で面白いです。

T：とにかくこれで、S君の問題2も解決したことになるが、一応、定理として纏めて措こう。

> 定理４。　与えられた図４が四面体の展開図になるための必要十分条件は、
> $F(a, b, c, l, m, n) > 0$ となることである。

この定理の応用を遣ってみよう。前にＳ君の提示した例（３，４，５；４，３，５）では折返しても立体にならなかった。そこで $l = 4$ ではなくて、l が幾らなら立体になるか？というんだが、Rさん、計算してみませんか？

R：F(３，４，５，x，３，５)＞０となる正実数 x を求めれば良いのですね。もちろん、(４，５,x)と（３，５,x）が三角形を作る、という条件の下で考えなければなりませんが。

T：その通り。だから、$2 < x < 8$ の範囲で考えることになる。

R：計算すると………、

$$F(3, 4, 5, x, 3, 5) = -9x^4 + 738x^2 - 10729$$

となりますから、これを解いて l_0 と l_1 を求めれば良いです。二次方程式の解の公式から、

$$x^2 = \frac{123 \pm 20\sqrt{11}}{3} \qquad \therefore l_0 \fallingdotseq 4.35、\quad l_1 \fallingdotseq 7.94$$

となります。ですから、l が4.35から7.94の間の値であれば、

四面体（３，４，５；l, ３，５）が存在する、

と言えることになります。

T：お見事！Ｓ君の例で、図４が描けてもそれを折返して四面体を作ることは出来ないのは、$l = 4$ がこの範囲から外れているからだな。ナカナカ、立派な解答じゃ。

S：定理４はこのような使い方も出来るのですね。勉強になりました。

ところで、以前に（[１]）

「図４における四つの三角形がどれも鋭角三角形
になる時には、図４は四面体の展開図になる」

ということをお話して頂きましたが、あれは十分条件ですね。今回のは必要十分条件ですから、もっと良い結果ということになりますか。

T：そうだな、あれは鋭角三角形という図形的に分かり易い性質だから、それなりに意味はあるじゃろう、この式Ｆは複雑過ぎるからな。そして、今回の話と合わせれば、

「図４における四つの三角形がどれも鋭角三角形になる時には、
$F(a, b, c, l, m, n) > 0$ 」

ということになるが、式計算だけでこのことを示すのは厄介かも知れん。まあ、それは二人への宿題として措くか。

S：ありがとうございました。Rさんの疑問に付き合って、面白いお話を聞くことが出来て良かったです。

R：私の漠然とした疑問が、はっきりした問題となって解決されたのは、とても刺激的な体験で

した。どうもありがとうございます。頂いた宿題もゆっくり考えてみます。

T：まあ、それが解けなくても、またいらっしゃい。こんな話をするのは楽しいからな。

参考文献

［1］村崎武明：図形教材（四面体）の一つの扱い方について、(群馬大学教育実践研究 第17号27～64頁 2000 ）

［2］岩田至康著：幾何学大辞典第二巻（槇書店）1992

「3」秋山武太郎著：わかる幾何學立體篇（高岡本店）1932