群馬大学教育学部紀要　自然科学編　第64巻　11—14頁　2016

Hyperbolic modules について

福島　博
群馬大学教育学部数学教室
(2015年9月30日受理)

On hyperbolic modules

Hiroshi Fukushima
Department of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan

(Accepted on September 30th, 2015)

概要

“既約指標の積がまた既約となる２つの忠実な既約指標をもつ可解群 G は巡回群に限る”という Isaacs の予想 A は, 彼のたてた予想 B のもとで成り立つことが示された。本論文では予想 B の反例を考え, その際反例となるのが最も自然であると思われる extra-special 群を正規部分群にもつ群について, 反例となる群をさがしたが, その結果, それらの群は最小位数の反例とはならないことが分かった。

1　序

G を有限群として, α,β を G の既約指標とする。このとき α と, β の積 $\alpha\beta$ はまた G の指標となるが, 既約指標となることがあるのだろうか？ まず考えられるのが α と β が共に１次指標の場合である。この場合は α,β も１次指標となり既約となる。

次に π を素数の集合として G の既約指標 α と β がそれぞれ π-special, π'-special ならば α と, β の積 $\alpha\beta$ はまた既約指標になるという Gajendragadkar [4] の定理がある。このように既約指標の積がまた既約指標になると言うことは、よくあるとまではいえないがそれ程珍しいことではない。しかしこのとき, $O_\pi(G)$ は $Ker(\beta)$ に含まれ, $O_{\pi'}(G)$ は $Ker(\alpha)$ に含まれる。可解群 G においては $O_\pi(G), O_{\pi'}(G)$ のいずれかは１ではないから α と β のいずれかは忠実な指標ではない。

また α と β が共に１次指標の場合も G が巡回群でなければ α,β は忠実ではない。そこで α,β を G の忠実な既約指標とするとき α と, β の積 $\alpha\beta$ はまた G の既約指標となることがあるのだろうか？という問題が考えられる。

上記のような２つの忠実な既約指標 α,β をもつ群 G（以下 $(*)$-群とよぶ）の例としては次の群が知られている。

(1) 巡回群　　(2) $SL(2,5), n$ 次の交代群 (n は 9 以上の平方数)

これに関して, Isaacs [6] は次のような予想をした。

予想Ａ：可解な $(*)$-群は巡回群に限る。

これに関して彼は次の定理, 系を証明した。

定理Ａ：G が可解な $(*)$-群で, 全ての極小正規部分群が G の中心に含まれるならば G は巡

回群である。

系：G がべき零群かつ $(*)$-群ならば G は巡回群である。

また論文 [2] において, G が M-群かつ $(*)$-群ならば G は巡回群であることが証明された。べき零群は M-群であるからこれは上の系の拡張になっている。

また Isaacs は次の予想Bをたて, 予想Bが成り立てば予想Aが成り立つことを示した。

予想B：Fを体, G を有限群, V を既約な FG 加群とし, $G = XY$ (X, Y は G の部分群) で X, Y がそれぞれ V の中に 0 以外の固定点をもてば, G は V に自明に作用する。

予想Bに関して, 彼は F が標数 p の体で G が p-nilpotent なら予想Bが正しいことを証明した。そしてこれを用いて, 群 G の Fitting height が 3 以下ならば予想Aが成り立つことを証明した。また, これを拡張して $G = O_{p',p,p',p}(G)$ のとき予想Bが正しいことが論文 [3] において証明された。

2 主定理

この予想Bは, 現段階に置いて正しいともそうでないとも言い難く, 反例を見つけるのも一つの方法である。そのときいろいろ調べていくと $O_{p'}(G)$ として extra-special group を考えるのが, 反例を作る際自然であると思われる。そしてこれに関して次の結果を得た。

主定理

次の性質を持つ G は予想 B の最小位数の反例とは成り得ない。

(1) E は 位数 q^{2n+1} の extra-special q-部分群で, $E \lhd G$, ただし q は素数。

(2) H は G の部分群で, $G = HE, H \cap E = 1.$

(3) $K \lhd G$ となる K が存在する。

(4) K は q'-部分群で $[E, K] = E$

(5) G は $Z(E)$ に自明に作用する。

(6) V は忠実な既約 G-加群で標数 p の体上のベクトル空間で次の性質を持つ。ただし p は q と異なる素数。

(i) X, Y は G の部分群で $G = XY, |X \cap E| = |Y \cap E| = q^n$

(ii) $X \cap E, Y \cap E$ は H-不変

(iii) $C_V(X) \neq 0 \neq C_V(Y)$

[注] (6)(ii) が成り立つとき $E/Z(E)$ は加群として $H-hyperbolic$ であるという。([8] 参照)

[証明]

[1] より, E は次数 q^n の既約加群 U を持ち, それは G に extention される。このとき G の既約加群は, $W \otimes_F U$ と表され W は既約 G/E 加群となる。ここで F は標数 p の体。

ステップ 1
このとき, X, Y で固定される元は, それぞれ $w_1 \otimes u_1, w_2 \otimes u_2 (w_1, w_2 \in W, u_1, u_2 \in U)$ と表される。
[ステップ 1 の証明]
X で固定される元を $v = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes u_i$ とする。ここで $w_1, \cdots, w_n$ は W の基底 $u_1 \cdots, u_n \in U$ とする。
v に $X \cap E$ を作用させると, $x \in X \cap E, v = v^x = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes u_i^x = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes u_i$. これが成り立つためには $u_i^x = u_i$. 一方 $C_V(X \cap E) = \langle u' \rangle$. 故に $u_i = k_i u' (k_i \in F)$ とかける。
故に $v = \sum_{i=1}^{n} w_i \otimes u_i = \sum_{i=1}^{n} k_i w_i \otimes u' = (\sum_{i=1}^{n} w_i) \otimes u'$. 故に $w_1 \otimes u_1$ の形となる。$w_2 \otimes u_2$ についても同様に証明される。

(6)(ii) より $X \cap E, Y \cap E$ は H-invariant. $N_G(X \cap E) \subseteq Z(X \cap E)H$. 故に $N = N_G(X \cap E)$ とおくと $N = (Z(X \cap E)H)(N \cap (Y \cap E))$, $N_{Y \cap E}(X \cap E) = 1$ より $N = Z(X \cap E)H$. 一方 $X \subseteq N$ より $N = X(Y \cap N)$, $Y_0 = Y \cap N$ とおく。$C_U(X \cap E) = \langle u_1 \rangle$, $W \otimes \langle u_1 \rangle$ は N-module となる。このとき X は $w_1 \otimes u_1$ を固定していた。

ステップ 2
このとき Y_0 は $w_2 \otimes u_1$ を固定する。
[ステップ 2 の証明]
$y \in Y_0$ とすると, y は $w_2 \otimes u_2$ を固定する。
$w_2 y = k w_2, u_2 y = k' u_2, (k, k' \in F)$ とすると $w_2 y \otimes u_2 y = k k' w_2 \otimes u_2$. 故に $kk' = 1, k' = k^{-1}$.
一方 $u_2 = \sum_{a \in Y \cap E} u_1 a$ ここで $u_1 y = l u_1 (l \in F)$ とすると,
$u_2 y = (\sum_{a \in Y \cap E} u_1 a) = \sum_{a \in Y \cap E} (u_1 y) a^y = l \sum_{a \in Y \cap E} u_1 a^y = l u_2$ 故に $l = k'$ となる。すなわち $u_1 y = k' u_1 = k^{-1} u_1$. 故に $(w_2 \otimes u_1) y = w_2 y \otimes u_1 y = k w_2 \otimes k^{-1} u_1 = w_2 \otimes u_1$

ステップ 3
G は最小位数の反例ではない。
[ステップ 3 の証明]
よって $N = XY_0$ において $W \otimes \langle u_1 \rangle$ は既約 N-加群で, X, Y_0 は $W \otimes \langle u_1 \rangle$ において 0 でない固定点を持ち予想 B の反例となっている。$N \subset G$ より G は最小位数の反例ではない。

参考文献

[1] E.C. Dade, Characters of groups with normal extra special subgroups, Math. Z, 152(1976), 1-31.

[2] H. Fukushima, Irreducible products of characters of solvable groups, J. Algebra 321(2009), 312-315

[3] H. Fukushima, Modules with large centralizers, Science Reports of Faculty of Education, Gunma University, Vol.58(2010), 5-7.

[4] D. Gajendragadkar, A characteristic class of characters of finite π-separable groups, J. Algebra 59(1979), 237-259.

[5] I.M. Isaacs, Characters of solvable and symplectic groups. Amer. J. Math. 95(1973), 594-635.

[6] I.M. Isaacs, Irreducible products of characters, J. Algebra 223(2000), 630-646.

[7] G. Navarro, Characters and blocks of finite groups, London Mathematical Society Lecture Series 250, Cambridge University Press, 1998.

[8] A.E. Parks, Nilpotent by supersolvable M-groups, Can. J. Math. Vol.XXXVII(1985), 934-962