「中高生の科学研究実践活動推進プログラム」における数学研究活動への指導助言の取り組み

山　本　亮　介

An activity of advice and guidance for research on mathematics in JST's program "Promotion of scientic practice activity by junior and senior high school students"

Ryosuke YAMAMOTO

群馬大学教育学部紀要　自然科学編
第 65 巻　11—18 頁 2017 別刷

「中高生の科学研究実践活動推進プログラム」における数学研究活動への指導助言の取り組み

山　本　亮　介
群馬大学教育学部数学教育講座
（2016 年 9 月 30 日受理）

An activity of advice and guidance for research on mathematics in JST’s program “Promotion of scientic practice activity by junior and senior high school students”

Ryosuke YAMAMOTO
Depertment of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan
（Accepted on September 30th, 2016）

1　はじめに

独立行政法人科学技術振興機構が平成 27 年度より実施している「中高生の科学研究実践活動推進プログラム」に採択された群馬県立富岡東高校による企画において，4 つの分野の科学研究実践活動が計画され，その一つに数学分野の研究実践活動が設定された．筆者は，富岡東高校の担当教諭と協同して，生徒による研究活動への助言・指導を担った．

本プログラムの特徴として，参加する生徒の自主性にこれまでになく大きな重点が置かれていることが挙げられる．すなわち，この活動に参加する生徒は，個々に自由に課題もしくは研究テーマを発見し，自分なりの方法で探求活動に取り組むことが求められるのである．

筆者にとっては，高校生に対する上述のような活動への指導の経験はこれまでになく，高校生が数学において自由な研究活動を行うためには，いかなる援助のあり方が有効であるのか模索を繰り返しながらの取り組みであった．

2　中高生の科学研究実践活動推進プログラム

2.1　プログラムの概要

このプログラムは，独立行政法人科学技術振興機構が平成 27 年度から実施を開始したもので，「学校・教育委員会と大学等が連携して，中高校生自ら課題を発見し，科学的な手法にしたがって進める，科学的研究実践活動の継続的・自律的な取り組みを推進［2，p.4］」するものである．その目的は，活動を実施する生徒が高校や連携機関の援助を得ながら，課題の発見，実験方法の検討，実験，結果の考察という一連のプロセスを自立的に行うことで，科学的探求の能力と態度を育成するものである．また，研究成果発表会を高校全体で開催することで，活動を実施した生徒が培ったものを同級生や下級生にも波及させ，学校全体の学習意欲の活性化につなげる．さらに，群馬県においては，県全体の合同発表会も開催された．そこでは，短い時間のプレゼンテーションにおいて，自分たちが得た成果を聴衆に分かりや

すく伝える工夫が必要である．その準備において難しさを感じ試行錯誤することにより，自らの経験を他者へ発表することの意義を認識するとともに，自らの研究成果に対するより高い次元の理解の獲得も期待できる．

2.2 富岡東高等学校における取り組み

富岡東高校では，生物化学分野において2つ，システム工学分野に1つ，そして数学分野に1つの合計4分野の探求活動を設定した．生物化学分野の連携機関は群馬大学理工学部生物化学科，システム工学分野の連携機関は群馬大学理工学部機械知能システム理工学科であり，数学分野の連携機関が，筆者所属の群馬大学教育学部数学教育講座である．

活動実施期間は8月から3月まで. 8月は研究テーマを決定するための情報収集の期間. 数学分野では，あとに詳述するように，助言者の側から研究テーマの候補をある程度提示した．9月は，研究テーマを絞り込む期間．10月～1月は研究を進める期間．2月は，研究の成果をまとめ，発表する準備の期間．この時期に校内課題研究発表会が実施された．3月には,「群馬県SSH等合同成果発表会」において研究発表を行った．

3 数学分野の科学研究実践活動

3.1 概要

数学分野の研究実施者は2年生の2名の生徒であった．以下では生徒A，生徒Kと表記する．

生徒は，10月から2月までの期間に4回，担当教諭の引率のもと群馬大学教育学部を訪れ，研究の進捗をセミナー形式で報告した．

平成28年3月12日（土）に開催された「群馬県SSH等合同成果発表会」では，2名の生徒がそれぞれの研究成果をまとめて口頭発表を行った．

3.2 活動開始における援助の方法

まずは，8月初旬に担当教諭と筆者が会合し，実践研究活動の進め方と援助の仕方について，以下のように定めた．

- 生徒による研究課題の発見．

  指導者側から研究テーマを与えてしまうことは，プログラムの趣旨に照らしても，できるだけ避けたい．しかし，全く自由に課題を発見するためには，数学の（ある程度に広い分野に対する）知識と経験が必要となる．それを8月の1ヶ月間で得るのは困難であると予想できる．そこで，いくつかの数学上の話題に関する短い文献を指導者側でピックアップして提示し，まずはその内容を理解する活動から始めてもらうこととした．
- 提示した文献．

  課題発見のための材料として，以下の条件が必要であると考えた．

i ）高校1年生までに学ぶ数学の知識だけで読めること．

ii ）内容は，高校までの数学で学習しないものであること．

iii）数学のできるだけ多様な分野について，提示したい．

iv）それぞれが比較的短い文章であること．

以上の条件を満たすものとして，数学専門雑誌である「数学セミナー」と「現代数学」に着目した．これらの雑誌のバックナンバーの中から，いくつかの記事を担当教諭と筆者で選出した．以下にそのリストを記す．

— 「素数を探せ！（その1）」: 現代数学2015年3月

— 「ミニ数学を創ろう–汎魔法陣–」: 現代数学2015年3月

— 「フィボナッチが学んだ数学 , 伝えた数学 / 遊戯問題」: 現代数学2014年2月

— 「群のイメージをつかむ」: 数学セミナー2013年4月

— 「組合せ論入門」: 数学セミナー2010年8月

— 「結び目理論への誘い」：数学セミナー1996年6月

- 8月は，提示した文献を読む期間とし，9月はその中から，深めて行きたい話題を絞る期間とした．第1回のセミナー（10/11）は，選択した文献の内容を2名が分担して発表することに充て，そのうえで，第2回のセミナーまでを，自分の研究テーマを絞り込んでゆく期間とした．

3.3　生徒が選んだ文献

8月の準備期間を経て，2名の生徒は提示した文献の中から共通で「フィボナッチが学んだ数学，伝えた数学/遊戯問題」[1] を選択した．フィボナッチが著した「算板の書」と呼ばれる書物の内容を紹介する連載シリーズの第10回であり，この回では，整数論に関するいくつかのトピックが紹介されている．

9月は，この文献の内容を十分に深く理解することに努め，第1回のセミナーを迎えた．

3.4　各回のセミナー

群馬大学教育学部で行われた全4回のセミナーは，それぞれ9：00～15：00の6時間．基本的には，前半で2名の生徒がそれぞれの研究の進捗を報告した．後半では，筆者が，彼女らそれぞれの研究分野において既に知られている事柄についての講義を行った．その際，彼女らが探求活動を続けるなかで自分で発見するかもしれない事柄は避けて，最小限必要であろうものだけを提示することに留意した．

3.4.1　第1回［10月11日（日）］

先述したように，第1回のセミナーでは2名の生徒が分担して，その内容を発表した．

2名ともに，学んだことを“発表”するという経験は初めてのものであり，かなり戸惑っていた．ともかくも発表をしてもらうと，口頭による解説は要領を得ないものであった．説明が明瞭でない点があるたびに，聞いている側には何が伝わらないかを筆者から伝え，説明の仕方を改善してみるという作業を繰り返した．また，黒板を有効に使うということも難しいようで，ときどき数式等をメモするといったものであった．第1回においては，口頭説明の改善に集中してもらうこととし，板書については次回以降に少しずつ進めることとした．

セミナーの最後で，文献にあるトピックの中から各自今後の研究テーマをさらに絞る作業を行った．まだ，両名ともに“自分なりの探求活動”がどのようなものなのか，その具体的なイメージが掴めていないようで,「どのトピックを深めて行きたいか？どれに最も興味が湧いたか？」と問われても，困惑するばかりであった．半ば無理やりに1つに絞ってもらうことで，生徒Aは「数の言い当ての問題」を，生徒Kは「平方列の和の問題」を選択した．「数の言い当ての問題」は，ある人が選んだ数をいくつかの情報の元に言い当てるという話題についてのものである．特に，言い当てができる仕組みに整数が持つ性質が利用されている．「平方列の和の問題」とは，いくつかの平方数の和に関する話題であり，特にいくつかの2のべき乗の和について詳述されている．筆者の講義としては，高木貞治の「初等整数論講義」[3] の第1章から抜粋した内容を話した．両名ともに整数論に関する分野を選択したことから，今後の研究活動で必要になるであろう整数論の基礎知識の整理を行う目的であった．

3.4.2　第2回［10月25日（日）］

<u>生徒Aの発表．</u>生徒Aはこのセミナーまでに，数の言い当てマジックについて，いくつかの文献やインターネットの情報を広く収集した．彼女はその中で，整数の2進数表示の性質を利用するものに注目した．以下のようなものである．

1～15の数当て

演者Pは，相手Qに1～15から一つの数を頭の中で決めてもらう．そのうえで図1の7枚のカードを順に見せて，その中に自分の数があるかないかを答えてもらう．その際，Qは1度だけ嘘をついてもよいこととする．つまり，ある1枚のカードだけで，自分の数があるのに「ない」と答えたり，その逆で

A			
2	3	4	5
8	9	14	15

B			
1	3	4	6
8	10	13	15

C			
1	2	5	6
8	11	12	15

ABC			
8	9	10	11
12	13	14	15

AB			
4	5	6	7
12	13	14	15

AC			
2	3	6	7
10	11	14	15

BC			
1	3	5	7
9	11	13	15

図 1：7 枚のカード

ある．嘘をつかなくてもよい．演者 P は 4 枚のカードに対する「ある」,「ない」の情報から，Q の数を言い当てる．

［実演例］ 例えば，Q の数が 7 であり，7 枚のカードに対して，以下のように答えたとする．

カード A　　：「ない」
カード B　　：「ない」
カード C　　：「ある」（嘘をついた）
カード ABC：「ない」
カード AB　：「ある」
カード AC　：「ある」
カード BC　：「ある」

(1) まず，演者 P は「ある」の答えだったカードの名前に含まれる A，B，C の個数を調べる．この場合，A が 2 つ，B が 2 つ，C が 3 つである．
(2) あとに述べる理由により，C の個数が奇数であることから，Q がカード C で嘘をついていると分かる．つまり, 本当の「ある」のカードは AB，AC，BC である．
(3) 最後にカード ABC，AB，AC，BC のうちの「ある」のカードの最初の数字 4，2，1 を合計すると Q の決めた数 7 となる．

以上が生徒 A が注目した数当てゲームである．「ある」のカードの正しい情報から数が復元できることには，以下の整数の性質が利用されている．

- 1～15 までの数を 2 進数表示すると，$1_{[2]}$～$1111_{[2]}$ となる．
- カード ABC には 2 進数表示で 2^3 の桁が 1 である数が並び，カード AB には 2 進数表示で 2^2 の桁が 1 である数が，カード AC には 2 進数表示で 2^1 の桁が 1 である数が，カード BC には 2 進数表示で 2^0 の桁が 1 である数が並んでいる．つまり，Q の数がこれらのカードのうちのどれに「ある」のか分かると，その数の 2 進数表示が定まる．
- 2 進数表示から 10 進数表示に変換するのは，例えば，$1011_{[2]}$ の 10 進数表示は $2^3+2^1+2^0=8+4+1=13$ であり，これは,「ある」のカードの最初も数字を合計することに対応している．

以上のトリックについては，生徒 A は理解できていた．しかし，嘘がなぜ見破られるのかについては，この数当てが記載されていた文献にも説明がなく，その仕組みを発見できずにいた．そこで，この謎の解明を次回までの課題とした．

生徒 K の発表．生徒 K はこのセミナーまでに，メルセンヌ数についてのいくつかの既知の事柄を調べてきた．メルセンヌ数とは，自然数 n により 2^n-1 と表される数のことである．以下で $M_n=2^n-1$ と表す．彼女が発表したメルセンヌ数の性質（いくつかについては，その証明も含めて）は以下の通り．

ｉ）$n=1, 2, \ldots, 5$ のメルセンヌ数を具体的に列挙．
ii）メルセンヌ数を 2 進数表示すると，全ての桁が 1 となる．この逆も成立する．
iii）M_n が素数であるならば，n は素数である．また，この逆は成立しない．$M_{11}=2047=23\times$

89 がその反例.

iv）現在見つかっている最大のメルセンヌ素数は $M_{57885161}$ である[1].

v）M_n が素数ならば，$2^{n-1}\times M_n$ は完全数である.

最大のメルセンヌ数に関しては，筆者から「それはどのくらい大きな数か ?」と問いかけた．数学的事実をできるだけ自分の“手触り”を持って認識してほしいという考えからである．すぐには何を調べればよいか思い当たらない様子であったが,「どんな数を『大きい数』と思うか ?」といった簡単な質問を重ねるうちに，常用対数により桁数を調べることに考えが至った[2].

この回のまとめ.　両名ともに，前回に比較して発表の姿勢や説明の仕方に変化が見られた．これは，2 回目であるので少し慣れてきたということがあるのとともに，前回と今回との発表内容の性質の違いも原因としてあると筆者は感じた．つまり，前回は他人の書いたテキストを読解してきて発表したというものであったのに対し，今回は，自分なりに調べたり考えたりした内容を説明するもので，自然に自分の言葉による発表になったのだろうという意味である．ただ，研究発表の要点，すなわち「発表内容を理解してもらうために，何を言う（または書く）必要があって，何は必要がないのかを理解して話す」という点について，やはりまだまだ未熟であった.

今回は，板書についても，話の腰を折らない程度の頻度でコメントをした．黒板に書き留めておくことで聞き手の理解を助けるであろう情報が何であるか，それをどのように記せばよいか，ということについて考える癖を少しずつ身につけていけるよう，いくつかの場面で具体的に細かく助言した.

3.4.3　第 3 回［12月14日（月）］

生徒 A の発表.　生徒 A は自然数の 3 進数表示を利用した数当てが開発できないか検討した結果を報告した.

まず，生徒 A は以下のようにゲームを設定した.

- 1 から 30 までの数値から一つ選んでもらい，それを当てることとする.
- オリジナルと同じように，ABC，AB，AC，BC と名前のついた 4 枚のカードを用意し，各カードに書かれる数は以下のとおりとした.

ABC：3 進数表示の 3^3 の位が 1 の数 ,
AB　：3 進数表示の 3^2 の位が 1 の数 ,
AC　：3 進数表示の 3^1 の位が 1 の数 ,
BC　：3 進数表示の 3^0 の位が 1 の数 .

このように，2 進数表示を利用した数当てを真似た設定をしてみたところ，以下の問題点があることに気がついた.

(1) 1 から 30 の数で上記の 4 枚のカードに現れない数がいくつもある.
(2) カード A，B，C をどのように作ると良いのかわからない.

ということである.

生徒 A は，(1) が起こる理由，すなわち，3 進数表示には 2 も使われるので，1 がどの桁にも現れない数が 1 から 30 までにいくつもあるのだ，ということをちゃんと理解できていた．この点をどう改良すれば，3 進数バージョンの数当てを設計できるのか，次回への課題とした.

次に，(2) について考察した．オリジナルの 2 進数バージョンの数当てにおいて，なぜ嘘を 1 回ついても見破ることができるのかという問題を解決することが先決であるが，彼女なりに考察を重ねてきたが，確たる説明ができずにいた.

以下の点は，生徒 A が独自に気づいたことである.

1 から 15 までのどの数についても，その数を含むカードの A，B，C の個数の合計が必ず偶数個となるようにカード A，B，C が作られている.

このことと嘘が見破られる仕組みとに明らかに関連があるという理解はあるのだが，確証を掴むとこ

ろまで到達できていなかった．そこで，筆者から「ちょうど一つのカードで嘘があると，A，B，C それぞれの個数の合計は一般的にどう変化するか ?」と質問した．つまり，こちらから A，B，C の個数の“変化”に焦点を絞ってやることで，生徒 A は以下の事実に気がついた．

- 各カードの名前には A，B，C は高々1 つしか含まれない．
- したがって，嘘のない状態から 1 枚のカードで嘘が発生すると，A，B，C のどれかの個数の合計が± 1 変化して奇数個となる．
- このことを逆に言うと，合計が奇数個のアルファベットを持つカードで嘘があったと分かるということだ．

生徒 K の発表．生徒 K はメルセンヌ数の亜種について調べた成果を発表した．つまり，$M_n = 2^n - 1$ の 2 の部分を別の数に変更したものについて，それぞれに何らかの特徴を持つかどうか考察したというものである．$n = 1, 2, 3, 4, 5$ についてそれぞれの数値を書き出したものが図 2 である．

この数値たちから生徒 K が見出した特徴は以下である．

(1) 奇数$^n - 1$ は偶数であり，偶数$^n - 1$ は奇数．
(2) $5^n - 1$ の 1 の位の数は全て 4 である．
(3) $4^n - 1$ の 1 の位の数は，3 と 5 の繰り返し．同様のことが $9^n - 1$ にも見られる．
(4) $8^n - 1$ は全て 7 の倍数である．

これら 4 つの特徴のうち，(1)，(2) については，これらが成立する理由は明らかであり，生徒 K も確認していた．(3)，(4) については，任意の自然数 n に対しても成立するのだろうという予想は持っていたが，どちらについても証明はできていなかった．

これに対し，筆者から「(3) と似たような性質が他のメルセンヌ数の亜種に対しても確認できないか」と質問した．しばらく悩んだ結果，$3^n - 1$ や $8^n - 1$

$3^n - 1$	$4^n - 1$	$5^n - 1$	$6^n - 1$
$3^1 - 1 = 2$	$4^1 - 1 = 3$	$5^1 - 1 = 4$	$6^1 - 1 = 5$
$3^2 - 1 = 8$	$4^2 - 1 = 15$	$5^2 - 1 = 24$	$6^2 - 1 = 35$
$3^3 - 1 = 26$	$4^3 - 1 = 63$	$5^3 - 1 = 124$	$6^3 - 1 = 215$
$3^4 - 1 = 80$	$4^4 - 1 = 255$	$5^4 - 1 = 624$	$6^4 - 1 = 1295$
$3^5 - 1 = 242$	$4^5 - 1 = 1023$	$5^5 - 1 = 3124$	$6^5 - 1 = 7775$
⋮	⋮	⋮	⋮

$7^n - 1$	$8^n - 1$	$9^n - 1$
$7^1 - 1 = 6$	$8^1 - 1 = 7$	$9^1 - 1 = 8$
$7^2 - 1 = 48$	$8^2 - 1 = 63$	$9^2 - 1 = 80$
$7^3 - 1 = 342$	$8^3 - 1 = 511$	$9^3 - 1 = 728$
$7^4 - 1 = 2400$	$8^4 - 1 = 4095$	$9^4 - 1 = 6560$
$7^5 - 1 = 168902$	$8^5 - 1 = 32767$	$9^5 - 1 = 59048$
⋮	⋮	⋮

図 2：メルセンヌ数の亜種たち

でも，1 の位の数字が循環を起こしていることに気がついた．さらに，筆者からの「$5^n - 1$ はどうですか ?」の問いかけに，これもしばらく考えた末に，ここでも 1 つの数字 4 が“循環”していると見ることができると気づくことができた．結局，全ての亜種において，1 の位の数字の循環が起こっていることを明らかすることができた．ただ，なぜ数字が循環するのか，その理由は不明のままであるので，次回への研究課題とすることとした．

ほぼ同様の考察を (4) に対しても行った．すなわち，(4) と似た性質は他のメルセンヌ数の亜種にはないのか考えることとした．その結果，以下の予想を発見するに至った．

> 予想「n, a は自然数とする．$a^n - 1$ は必ず $a - 1$ の倍数である．」

この予想を証明することも次回までの目標とした．

この回のまとめ．両名ともに，自身の研究成果を発表するということにかなり慣れてきたようであった．また，黒板の利用についても，少しずつではあるが効果的な使い方のできる場面が増えてきていた．

なによりも両名ともに，自分自身の興味に従って数学的な探求をしていくことに対して，難しさやもどかしさの中にも楽しさ・面白さを感じているようであった．

3.4.4　第 4 回［1 月31日（日）］

生徒 A の発表．生徒 A は 3 進数表示を利用した数当ての開発に成功した．以下がその詳細である．

- 1〜26 から選ばれた数を当てる．$26 = 222_{[3]}$ である．
- 用意するカードは，A，B，C，D，AB，AC，AD，BC，BD，CD の 10 種類．それぞれに記される数は以下のとおり．

カード A　: 奇数
カード B　: 6〜14，18〜23
カード C　: 2，3，4，8，11，12，13，17，18，19，23，24，25
カード D　: 1，2，4，5，6，10，11，13，14，15，19，20，22，23，24
カード AB: 3^2 の位が 1 の数
カード AC: 3^1 の位が 1 の数
カード AD: 3^0 の位が 1 の数
カード BC: 3^2 の位が 2 の数
カード BD: 3^1 の位が 2 の数
カード CD: 3^0 の位が 2 の数

- 2 進数表示の場合と同様に，各カードに対して，思い浮かべた数が「ある」か「ない」かを答えてもらう．一度だけ嘘をついてもよい．
- 嘘がない場合には「ある」のカードの名前の A，B，C，D の個数の合計はそれぞれ偶数個となるようにカード A からカード D が作られている．次のような実演もなされた．筆者は頭の中で 16 を選び，以下のように答えた．

カード A　:「ない」
カード B　:「ない」
カード C　:「ない」
カード D　:「ある」（嘘をついた）
カード AB:「ある」
カード AC:「ない」
カード AD:「ある」
カード BC:「ない」
カード BD:「ある」
カード CD:「ない」

この結果,「ある」のカードの A ～ D の個数は

A：2 個，B：2 個，C：0 個，D：3 個

である．よって，カード D で嘘をついたことが分かり, 本当の「ある」のカードたち, カード AB, カード AD, カード BD の最初の数 9，1，6 を合計して 16 を当てることができた．

生徒 K の発表．生徒 K はまず，前回発見した予想の証明を発表した．それは，因数分解

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+...+1)$$

が成立することを示すものであった．生徒 K は，この因数分解が多くの自然数 n について正しいことは確かめており，任意の自然数 n についても，全く同様のことが起こって当然であるという感想は得ていたが，そのことを演繹的に示すには至っていなかった．そこで，a^n を $a-1$ で割る筆算を黒板で実行してもらった．この筆算によって，n に依らず余りが 1 となることを確認できればよいのだが，やはり，n が未知数のままでは計算が終わらないので，どう対処してよいか迷っていた．そこで筆者が「筆算の各段階で余りが何になっているのか」と質問すると，

常に a^k-1 の形であり，k は n より小さい自然数で，どんどん減少してゆく

ということに気がついた．さらに，このことにより証明が完了することを理解できた．

次に，a^n-1 の 1 の位の出現パターンについての考察の発表があった．

- a^n-1 の 1 の位の出現パターンを調べることと，a^n の 1 の位の出現パターンを調べることとは同

等である．

- a^n の n を1より大きくしてゆくときに，1の位が初めに a に戻ってくるまでの長さに注目した[3]．

この観点により以下の結果が得られた．

a の値	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
長さ	1	1	4	4	2	1	1	4	4	2

この回のまとめ．どちらの研究にも，さらなる発展が期待できる．生徒Aの研究は，任意の自然数 n による n 進数表示に対して，これを利用した数当てが構成できるのではないかということが，生徒Kの研究では，a^n の a の値と1の位の循環の長さとの関係の解明が，興味深い課題として見えてきた．

4　まとめ

セミナーの最終回までに，両名ともに“研究”と呼ぶに相応しい独自性と数学的な厳密さとを持った探求活動を行ったと言える．この取り組みの開始当初に筆者が想像していたレベルを大きく超えたという感想を持った．一方で，活動内容を発表するということ，他者に的確に伝えるということに関しては，最後まで両名ともに難しさを感じているようであった．しかし，回を追うごとに改善された点が増えていったことも事実であり，3月の「群馬県SSH等合同成果発表会」における発表では，入念な準備の成果もあって，短い発表時間にも関わらず，的確な口頭説明とパワーポイントによる情報提示により，十分に伝わるプレゼンテーションがなされた．

注

1　このセミナーの約3ヶ月後の2016年1月19日に最大のメルセンヌ素数が $M_{74207281}$ に更新されている．

2　$\log_{10}(2^{57885161}) \fallingdotseq 57885161 \times 0.3010300 = 17425170.0158$ より，$M_{57885161}$ は17425170桁の数と分かる．

3　例えば，2^n であれば，$2^1=2$ から n を大きくしてゆくと $2^2=4$，$2^3=8$，$2^4=16$，$2^5=3\underline{2}$ と4増えたところで1の位が2に戻る．よって，長さ4．

発表2　　　　　　　　　　　　　　　　群馬県立富岡東高等学校

初等整数論　n進法の活用とその応用

1　はじめに

私たちは、群馬大学教育学部数学教育講座の山本亮介先生のご指導のもと、初等整数論について学んだ。数の不思議について考えていく中で、特にn進法に注目をし、それぞれメルセンヌ数と数当てについて調べた。疑問に思ったことやさらに知りたいことを中心に学んだことを発展させ、自分なりに応用させて考えることができた。

2　研究内容

（1）メルセンヌ数　Mn

メルセンヌ数は 2^n-1（nは自然数）の自然数で、以下の性質をもっている。

①　Mnが素数ならば、nは素数である。ただし、逆は成り立たない。Mnが素数の場合、それはメルセンヌ素数という。

②　Mnを2進数にすると、すべての桁が1になる。

これらの性質をもとに、メルセンヌ数の2の部分の数値を変えていき、考えを発展させた。「メルセンヌ数と同じような性質はみられるのだろうか。また、他にはどんな違いがみられるだろうか」という疑問をもち、右図のような a^n-1の場合について具体的に検証した。

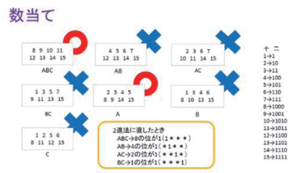
（2）数当て

1～15の数を2進法で表し、それらを以下の規則に従ってABC、AB、AC、BC、A、B、Cのグループに分類することで数当てをする。（右図はその例）

規則①2進法に直したとき、8の位が1の数字はABC、4の位が1の数字はAB、2の位が1の数字はAC、1の位が1の数字はBCのグループに入る。また、A、B、Cのグループは、ABCやABに入っている数字をもとにA、B、Cのそれぞれの個数が偶数個になるよう分類し、一度嘘をついても数が当てられるようにする。

規則②数当てをするには、その数が入っているグループの先頭の数を足す。

これらをもとに3進法で数当てはできないのかという疑問をもち、何個のグループが必要でどのように分類するかなどを考え、一般のn進数の場合についても研究した。



3　感想

今回は普段学べないことを考える良い機会となり、貴重な体験をすることができた。n進法は数学の様々なところで応用されていることがわかった。自分たちで新しいアイデアを考えたり、それを伝えたりすることは難しく大変だったが、未知のことに挑戦しながら考えていくことができた。これからの数学の勉強に、今回学んだことを生かしていきたい。

図3：「群馬県SSH等合同成果発表会」レジュメ

参考文献

[1]　三浦伸夫，フィボナッチが学んだ数学，伝えた数学/遊戯問題，現代数学 ’14 No.2, pp.70-pp.75，2014年2月，現代数学社．

[2]　独立行政法人科学技術振興機構 理数学習推進部，平成27年度中高生の科学研究実践活動推進プログラム募集要項，2015年2月，http://www.jst.go.jp/cpse/jissen/

[3]　高木貞治，初等整数論講義，1971年10月，共立出版．