

# ソボレフ空間を用いたシュレディンガー作用素の 本質的自己共役性の証明

大塚 優也・照屋 保・山本 亮介

## **A proof of the essential self-adjointness of Schrödinger operators by using Sobolev space**

Yuya OHTSUKA, Tamotsu TERUYA and Ryosuke YAMAMOTO



# ソボレフ空間を用いたシュレディンガー作用素の本質的自己共役性の証明

大塚 優也<sup>1)</sup>・照屋 保<sup>2)</sup>・山本 亮介<sup>2)</sup>

1) 群馬大学大学院教育学研究科教科教育実践専攻数学領域

2) 群馬大学教育学部数学教育講座

(2018年9月26日受理)

## A proof of the essential self-adjointness of Schrödinger operators by using Sobolev space

Yuya OHTSUKA<sup>1)</sup>, Tamotsu TERUYA<sup>2)</sup> and Ryosuke YAMAMOTO<sup>2)</sup>

1) Graduate Program in Mathematics Education, Gunma University  
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan

2) Department of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University  
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan

(Accepted on September 26th, 2018)

### 記号一覧

$$\mathbf{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$\mathbf{Z}_+^d = \mathbf{Z}_+ \times \mathbf{Z}_+ \times \dots \times \mathbf{Z}_+ (d \text{ 重の直積})$$

$$D_j = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

$$D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d}, \alpha \in \mathbf{Z}_+^d$$

$$L^p(\mathbf{R}^d)$$

:  $\mathbf{R}^d$  上の  $p$  乗ルベグ可積分関数全体

$$(1 \leq p < \infty)$$

$$L^\infty(\mathbf{R}^d)$$

: 本質的に有界なルベグ可測関数全体

$$\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$$

:  $\mathbf{R}^d$  上の急減少関数全体のなす集合

$$F_f : f \in L^p(\mathbf{R}^d) (1 \leq p \leq \infty) \text{ に対し}$$

$$\langle F_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\varphi(x)dx \quad (\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d))$$

で定義される超関数

$$\mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$$

:  $\mathbf{R}^d$  上の緩増加超関数全体のなす集合

### 0 はじめに

本論文は著者の一人である大塚優也の修士論文「ソボレフ空間—高校数学における解析思考の発展—」が元になっている。これはソボレフ空間を学ぶのに必要不可欠な一般の関数空間や超関数、ヒルベルト空間上の線型作用素の内容も含んでいる。ソボレフ空間をテーマした和書がほとんど無い為、ソボレフ空間を日本語で0から学ぶための唯一の入門書と言ってよい。本論文ではソボレフ空間の応用として「シュレディンガー作用素」の自己共役性の証明に的を絞り、簡潔にまとめている。

### 1 ソボレフ空間

#### 1.1 基礎的な性質

**定義 1.1.**  $F \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d), \alpha \in \mathbf{Z}_+^d$  とする。  $F$  が  $\alpha$  次の  $L^2$  導関数をもつとは、ある  $W \in L^2(\mathbf{R}^d)$  で、

$$D^\alpha F = F_W$$

を満たすものが存在することである。

**注意 1** この定義における  $W$  について、存在すればただ一つに限ることは以下の補題からわかる。

**補題 1.2.**  $f, g \in L^p(\mathbf{R}^d)$  ( $1 \leq p \leq \infty$ )、あるいは  $f, g$  が緩増加関数とする。

$$F_f = F_g \text{ ならば、 } f(x) = g(x) \text{ a.e. } x \in \mathbf{R}^d$$

である

**注意 2**  $F$  が  $\alpha$  次の  $L^2$  導関数を持つとき、記号を簡略化するため、定義1.1における  $W$  を  $D^\alpha F$  で表すことにする。つまり

$$D^\alpha F = F_W = W$$

と表すということである。特に  $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$  に対して、 $F_f$  が  $\alpha$  次の  $L^2$  導関数を持つとき、 $D^\alpha f$  によって  $W$  を表す。つまり、

$$D^\alpha F_f = D^\alpha f = F_W = W$$

**定義 1.3.** 非負整数  $m$  に対して、ソボレフ空間  $W^m(\mathbf{R}^d)$  とは、 $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$  で任意の  $|\alpha| \leq m$  に対して、 $F_f$  は  $\alpha$  次の  $L^2$  導関数  $D^\alpha f$  をもつもの全体がなす  $L^2(\mathbf{R}^d)$  の部分空間である。ここで、 $f, g \in W^m(\mathbf{R}^d)$  に対して、各  $D^\alpha f, D^\alpha g$  は  $L^2$  の元なので、

$$\begin{aligned} (f, g)_{2,m} &= \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbf{R}^d} D^\alpha f(x) \overline{D^\alpha g(x)} dx \end{aligned}$$

とおくと、 $(\cdot, \cdot)_{2,m}$  は  $W^m(\mathbf{R}^d)$  上の内積になる。

$$\|f\|_{2,m} = \sqrt{(f, f)_{2,m}}$$

とおくと、明らかにこれはノルムになり、これをソボレフノルムという。

**命題 1.4.** ある  $0 < c_m \leq C_m < \infty$  が存在し、すべての  $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  に対して、

$$c_m \|f\|_{2,m} \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_2 \leq C_m \|f\|_{2,m}$$

**証明** 各辺を定義に沿って書き直せば

$$\begin{aligned} c_m \|f\|_{2,m} &= c_m \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbf{R}^d} |D^\alpha f(x)|^2 dx} \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_2 \\ &= \sum_{|\alpha| \leq m} \sqrt{\int_{\mathbf{R}^d} |D^\alpha f(x)|^2 dx} \\ C_m \|f\|_{2,m} &= C_m \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbf{R}^d} |D^\alpha f(x)|^2 dx} \end{aligned}$$

ここで、 $\|D^\alpha f\|_2 = a_\alpha$  と置けば、示すことは

$$\begin{aligned} c_m \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha} &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \sqrt{a_\alpha} \\ &\leq C_m \sqrt{\sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha} \end{aligned}$$

を満たす  $c_m, C_m$  を求めればよい。足されている  $a_\alpha$  は有限個であること、また  $\sqrt{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leq \sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \cdots + \sqrt{b_n}$  (任意の  $i$  で  $b_i > 0$ ) が成り立つことに注意すれば、 $c_m = 1$  でよい。また、 $C_m$  は  $\sqrt{b_1} + \sqrt{b_2} + \cdots + \sqrt{b_n} \leq \sqrt{n} \sqrt{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$  となるように注意すれば  $C_m = m$  とっておけばよい。□

**定理 1.5.**  $W^m(\mathbf{R}^d)$  は、 $(f, g)_{2,m}$  によって、 $C$  上のヒルベルト空間になっている。

**証明**  $W^m(\mathbf{R}^d)$  の完備性を示す。 $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset W^m(\mathbf{R}^d)$  をコーシー列、すなわち、

$$\|f_j - f_k\|_{2,m} \rightarrow 0 \quad (j, k \rightarrow \infty)$$

とする。命題 1.4 より、任意の  $\alpha$  ( $|\alpha| \leq m$ ) に対して、ある  $0 < C_m \leq \infty$  をとれば、

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f_j - D^\alpha f_k\|_2 &\leq \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f_j - D^\alpha f_k\|_2 \\ &\leq C_m \|f_j - f_k\|_{2,m} \end{aligned}$$

ゆえに、仮定より

$$\|D^\alpha f_j - D^\alpha f_k\|_2 \leq C_m \|f_j - f_k\|_{2,m} \rightarrow 0 \quad (j, k \rightarrow \infty)$$

となっている。ここで  $L^2(\mathbf{R}^d)$  の完備性より、任意の  $\alpha$  ( $|\alpha| \leq m$ ) に対して、ある  $f^{(\alpha)} \in L^2(\mathbf{R}^d)$  が存在して、

$$\|D^\alpha f_j - f^{(\alpha)}\|_2 \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

となるものが存在する。ここで  $f = f^{(0)}$  とおく。任意の  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$  に対して、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} D^\alpha f_j(x) \varphi(x) dx \\ &= \langle F_{D^\alpha f_j}, \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle F_{f_j}, D^\alpha \varphi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^d} f_j(x) D^\alpha \varphi(x) dx \end{aligned}$$

ここで、 $j \rightarrow \infty$  とすると、 $\|D^\alpha f_j - f^{(\alpha)}\|_2 \rightarrow 0$  および  $\|f_j - f\|_2 \rightarrow 0$  より

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} f^{(\alpha)}(x) \varphi(x) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^d} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx \\ &= \langle D^\alpha F_f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

ゆえに、 $D^\alpha F_f = F_{f^{(\alpha)}}$  となり、 $f$  は  $\alpha$  次の  $L^2$  導関数をもつ。したがって、 $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  である。また、各  $\alpha$  に対して、

$$\|D^\alpha f_j - D^\alpha f\|_2 = \|D^\alpha f_j - f^{(\alpha)}\|_2 \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

であることと命題 1.4 より、 $\|f_j - f\|_{2,m} \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) となる。□

**定理 1.6.** 次が成立する。

- (1)  $C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subset W^m(\mathbf{R}^d)$
- (2) 任意の  $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  に対して、ある  $f_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  ( $j = 1, 2, \dots$ ) で

$$\|f - f_j\|_{2,m} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

となるものが存在する。

**証明** (1):  $C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$  であることに注意すれば、 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  とすれば、 $f$  は  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$  の元であり、それゆえに

$$D^\alpha F_f = F_{D^\alpha f}$$

が成り立つ。このとき、 $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subset L^2(\mathbf{R}^d)$ 、 $D^\alpha f$  はまた  $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$  の元となることより、 $D^\alpha f \in L^2(\mathbf{R}^d)$  であることがわかる。ゆえに、 $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  となり、 $C_0^\infty(\mathbf{R}^d) \subset W^m(\mathbf{R}^d)$  が示された。

(2): 非負関数  $\omega \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  を以下の条件を満たすものとする。

$$\text{supp } \omega \subset \{x \in \mathbf{R}^d : |x| \leq 1\}, \quad \int_{\mathbf{R}^d} \omega(x) dx = 1$$

さらに  $h > 0$  に対し、

$$\begin{aligned} \omega_h^*(x) &= \frac{1}{h^d} \omega\left(\frac{x}{h}\right) \quad (\text{このとき、}\|\omega_h^*\|_1 = 1) \\ f_h(x) &= f * \omega_h^*(x) \end{aligned}$$

とおく。最初に

$$f_h \in C^\infty(\mathbf{R}^d) \cap W^m(\mathbf{R}^d)$$

を示すことにする。まず、 $f_h \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$  となることは定理で示した。 $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  より、 $|\alpha| \leq m$  に対して、 $D^\alpha f \in L^2(\mathbf{R}^d)$  である。また、

$$\begin{aligned} (D^\alpha f)_h(x) &= \int_{\mathbf{R}^d} D^\alpha f(y) \omega_h^*(x-y) dy \\ &= \langle F_{D^\alpha f}, \omega_h^*(x-\cdot) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle F_f, D^\alpha \omega_h^*(x-\cdot) \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbf{R}^d} f(y) D_y^\alpha \omega_h^*(x-y) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} f(y) D_x^\alpha \omega_h^*(x-y) dy \\ &= D_x^\alpha \int_{\mathbf{R}^d} f(y) \omega_h^*(x-y) dy \\ &= (D^\alpha f_h)(x) \end{aligned}$$

ゆえに補題より、 $|\alpha| \leq m$  に対して、

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f_h\|_2 &= \|(D^\alpha f)_h\|_2 \\ &= \|(D^\alpha f) * \omega_h^*\| \\ &\leq \|D^\alpha f\|_2 \|\omega_h^*\|_1 \\ &= \|D^\alpha f\|_2 < \infty \end{aligned}$$

となるので、 $f_h \in L^2(\mathbf{R}^d)$ 、 $D^\alpha f_h \in L^2(\mathbf{R}^d)$  となることがわかり、 $f_h \in W^m(\mathbf{R}^d)$  がわかる。ゆえに、

$$f_h \in C^\infty(\mathbf{R}^d) \cap W^m(\mathbf{R}^d)$$

次に、 $\|f_h - f\|_{2,m} \rightarrow 0$  ( $|h| \rightarrow 0$ ) を示す。いま、 $D^\alpha f \in L^2(\mathbf{R}^d)$  であることに注意すると、補題より

$$\|D^\alpha(f - f_h)\|_2 = \|D^\alpha f - (D^\alpha f)_h\|_2 \rightarrow 0$$

となり、これがすべての  $|\alpha| \leq m$  に対して成り立つことから、 $\|f_h - f\|_{2,m} \rightarrow 0$  ( $|h| \rightarrow 0$ ) がわかる。

最後に、任意の  $f \in C^\infty(\mathbf{R}^d) \cap W^m(\mathbf{R}^d)$  に対して、ある  $f_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  で

$$\|f - f_j\|_{2,m} \rightarrow 0 \quad (j \rightarrow \infty)$$

となるものが存在することを示す。

$\eta \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$  を

$$0 \leq \eta(x) \leq 1 \quad (x \in \mathbf{R}^d),$$

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq 1) \\ 0 & (|x| > 2) \end{cases}$$

となるものとし、 $f_j(x) = f(x)\eta\left(\frac{x}{j}\right)$  とおくと、

$$\begin{aligned} & |D^\alpha(f_j - f)(x)| \\ &= \left| D^\alpha \left( f(x)\eta\left(\frac{x}{j}\right) - f(x) \right) \right| \\ &= \left| D^\alpha \left( f(x) \left( \eta\left(\frac{x}{j}\right) - 1 \right) \right) \right| \\ &= \left| \sum_{\alpha=\beta+\gamma} D^\beta f(x) D^\gamma \left( \eta\left(\frac{x}{j}\right) - 1 \right) \right| \\ &\leq \sum_{\alpha=\beta+\gamma} |D^\beta f(x)| \left| D^\gamma \left( \eta\left(\frac{x}{j}\right) - 1 \right) \right| \\ &\leq c \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} |D^\beta f(x)| \end{aligned}$$

である。最後の不等号は、 $\left| D^\gamma \left( \eta\left(\frac{x}{j}\right) - 1 \right) \right|$  が

$\gamma$  によらず、有界である為である。ゆえに、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} |D^\alpha(f_j - f)(x)|^2 dx \\ &= \int_{|x| \geq j} |D^\alpha(f_j - f)(x)|^2 dx \\ &= c' \sum_{|\beta| \leq |\alpha|} \int_{|x| \geq j} |D^\beta f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \\ & \quad (j \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

であるから、 $\|f - f_j\|_{2,m} \rightarrow 0$  ( $j \rightarrow \infty$ ) となる。ゆえに、 $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  に対し、

$$f_h \in C^\infty(\mathbf{R}^d) \cap W^m(\mathbf{R}^d)$$

となり、 $f_h$  に対し、 $f_j \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  が存在し、

$$\begin{aligned} \|f - f_j\|_{2,m} &= \|f - f_h + f_h - f_j\|_{2,m} \\ &\leq \|f - f_h\|_{2,m} + \|f_h - f_j\|_{2,m} \end{aligned}$$

とできることより、定理が証明できる。□

## 1.2 フーリエ変換とソボレフ空間

本節ではソボレフノルムをフーリエ変換を使って特徴づける。まず、 $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$  に対して、

$$p_m(f) = \left( \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^{2m}) |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

とおく。 $(p_m(f) \leq \infty)$

**定理 1.7.**  $m = 0, 1, 2, \dots$  とする。このとき、以下を満たす  $m, d$  のみに依存した正定数  $C, C'$  が存在する。:

$f \in L^2(\mathbf{R}^d)$  が  $p_m(f) < \infty$  を満たしているならば  $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  であり、

$$\|f\|_{2,m} \leq C p_m(f)$$

が成り立つ。逆に、 $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  であれば、 $p_m(f) < \infty$  であり、

$$C' p_m(f) \leq \|f\|_{2,m}$$

が成り立つ。

証明  $p_m(f) < \infty$  とすると、 $|\alpha| \leq m$  に対して、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} |\xi^\alpha \mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| < 1} |\xi^\alpha \mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \\ & \quad + \int_{|\xi| \geq 1} |\xi^\alpha \mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \\ & \leq \int_{|\xi| < 1} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi + p_m(f)^2 < \infty \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\xi^\alpha \mathcal{F}[f] \in L^2(\mathbf{R}^d)$  である。また、 $\mathcal{F}[D^\alpha f] = \xi^\alpha |\mathcal{F}[f]$  が超関数の意味で成り立っているので、 $\mathcal{F}[D^\alpha f]$  は  $L^2(\mathbf{R}^d)$  の元と同一視できる。したがって、プランシュレルの定理より、 $D^\alpha f \in L^2(\mathbf{R}^d)$  である。ゆえに、 $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  がわかる。さらに、

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi)|^2 & \leq (1 + |\xi|^{2|\alpha|}) |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 \\ & \leq 2(1 + |\xi|^{2m}) |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 \end{aligned}$$

が a.e で成り立っている。(最後の式が 2 倍されているのは  $|\xi| < 1$  の場合も考慮したからである。) これより

$$\begin{aligned} \|D^\alpha f\|_2^2 &= (2\pi)^{-d} \|\mathcal{F}[D^\alpha f]\|_2^2 \\ &\leq 2(2\pi)^{-d} p_m(f)^2 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $\|f\|_{2,m} \leq Cp_m(f)$  なる  $m, d$  にのみ依存した定数  $C$  をとることができ。一方、

$$\begin{aligned} p_m(f)^2 & \leq \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^{2m}) |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \\ & \leq \int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \\ & \quad + \int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^{2m} |\mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \\ & \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbf{R}^d} |\xi^\alpha \mathcal{F}[f](\xi)|^2 d\xi \\ & \leq \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}[D^\alpha f](\xi)|^2 d\xi \\ & \leq C_m \|f\|_{2,m}^2 \end{aligned}$$

となるように正定数  $C_m$  もとることができ。□

1.1 節では、非負整数  $m$  に対して、ソボレフ空間  $W^m(\mathbf{R}^d)$  を定義したが、この定理 1.7 をモチベーションに一般の  $s \in \mathbf{R}, s \geq 0$  に対するソボレフ空間  $H^s(\mathbf{R}^d)$  が次のように定義される。 $\Lambda_s(\xi) = (1 + |\xi|^2)^{\frac{s}{2}}$  とし、

$$H^s(\mathbf{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbf{R}^d) : \Lambda_s |\mathcal{F}[f]| \in L^2(\mathbf{R}^d)\}$$

とおく。この空間に対するノルムとしては  $\|f\|_{H^s} = \|\Lambda_s |\mathcal{F}[f]|\|_2$  を考える。以下、

$C_b(\mathbf{R}^d)$  :  $\mathbf{R}^d$  上の複素数値有界連続関数

全体のなす集合

$C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$  :  $C^\infty(\mathbf{R}^d)$  に属し、すべての偏導

関数が  $C_b(\mathbf{R}^d)$  に属するもの全体

とおく。

定理 1.8. (ソボレフの埋蔵定理)

$$(1) \quad m > \frac{d}{2} \text{ であれば } W^m(\mathbf{R}^d) \subset C_b(\mathbf{R}^d)$$

$$(2) \quad \bigcap_{m=0}^{\infty} W^m(\mathbf{R}^d) \subset C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$$

証明 (1):  $f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  とする。このとき、

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbf{R}^d} |\hat{f}(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} |\hat{f}(\xi)| (1 + |\xi|^2)^{-\frac{m}{2}} d\xi \\ &\leq \left( \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^2)^m |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ & \quad \times \left( \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^2)^{-m} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

ここで  $m > \frac{d}{2}$  であるから、 $(1 + |\xi|^2)^{-m} \in L^1(\mathbf{R}^d)$  である。ゆえに  $\|\hat{f}\|_1 \leq C \|f\|_{2,m}$  となる。さて、

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi$$

とおくと、 $f(x) = \tilde{f}(x)$  a.e.  $x \in \mathbf{R}^d$  である。ここで、 $|e^{ix\xi} \hat{f}(\xi)| = |\hat{f}(\xi)| \in L^1(\mathbf{R}^d)$  であるから、 $\tilde{f}$  は有界であり、さらにルベーグ収束定理より、

$$\begin{aligned} & \lim_{|h| \rightarrow 0} \tilde{f}(x+h) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} \lim_{|h| \rightarrow 0} e^{i(x+h)\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \tilde{f}(x) \end{aligned}$$

ゆえに  $\tilde{f}$  が連続であることが分かったので、 $\tilde{f} \in C_b(\mathbf{R}^d)$  である。

(2):  $e_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, e_d = (0, \dots, 0, 1)$  とする。 $e^{i(x+he_j)\xi}$  を  $h$  の関数としてテイラーの定理を使えば、

$$\begin{aligned} e^{i(x+he_j)\xi} &= e^{ix\xi} + ih e^{ix\xi} - \xi_j^2 h^2 e^{i(x+\theta e_j)\xi} \\ (0 < \theta < 1) \quad & (*) \end{aligned}$$

ここで剰余項  $R_2$  は

$$R_2 = -\xi_j^2 h^2 e^{i(x+\theta e_j)\xi}$$

である。いま、 $A(x, \xi) = -e^{i(x+\theta e_j)\xi}$  とおけば、 $A(x, \xi)$  は有界連続関数であり、これを (\*) に代入し変形すれば、

$$\frac{1}{h} \left\{ e^{i(x+he_j)\xi} - e^{ix\xi} \right\} = i\xi_j e^{ix\xi} + hA(x, \xi)\xi_j^2$$

となる。いま、仮定より  $\xi_j \hat{f}, \xi_j^2 \hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^d)$  であるから、(1) と同様にルベーグ収束定理から

$$\begin{aligned} & \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \tilde{f}(x+he_j) - \tilde{f}(x) \right\} \\ &= \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i(x+he_j)\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \\ & \times \int_{\mathbf{R}^d} \lim_{|h| \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left\{ e^{i(x+he_j)\xi} - e^{ix\xi} \right\} \hat{f}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} i\xi_j e^{ix\xi} \hat{f}(\xi) d\xi \end{aligned}$$

が存在し、微分可能であることが分かる。さらに

$$D_j \tilde{f}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{ix \cdot \xi} \xi_j \hat{f}(\xi) d\xi.$$

仮定より、 $\xi_j \hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^d)$  であるから、(1) と同様の議論により、 $D_j \tilde{f}$  は有界連続であることが分かる。ゆえに、 $\tilde{f} \in C_b^1(\mathbf{R}^d)$  がわかり、この議論を繰り返せば、 $\tilde{f} \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$  が得られる。□

ここでこの定理から導かれる定理として、ポアソン方程式の超関数解の滑らかさに関する定理を紹介する。

**定理 1.9.**  $u \in L^2(\mathbf{R}^d), f \in W^m(\mathbf{R}^d)$  とする。もしも、超関数の意味で、

$$\Delta u = f$$

が成り立っていれば、 $u \in W^{m+2}(\mathbf{R}^d)$  である。特に  $f \in \bigcap_{m=0}^{\infty} W^m(\mathbf{R}^d)$  であれば、 $u$  は  $C^\infty$  級である。

**証明** 与えられた式の両辺をフーリエ変換すれば、 $-|\xi|^2 \mathcal{F}[u] = \hat{f}$  となることを示す。 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$  とし、

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{F}[\varphi](x) = -i\xi_k \mathcal{F}[\varphi](x)$$

であったことに注意すると、

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\Delta u], \varphi \rangle &= \langle \Delta u, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= \langle u, \Delta \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} u(x) \Delta \mathcal{F}[\varphi](x) dx \end{aligned}$$

ここで  $\Delta \mathcal{F}[\varphi](x)$  を計算しておくとし、

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{F}[\varphi](x) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2} \right) \mathcal{F}[\varphi](x) \\ &= \sum_{k=1}^d (-i\xi_k)^2 \mathcal{F}[\varphi](x) \\ &= -|\xi|^2 \mathcal{F}[\varphi](x) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}[\Delta u], \varphi \rangle &= -|\xi|^2 \int_{\mathbf{R}^d} u(x) \mathcal{F}[\varphi](x) dx \\ &= -|\xi|^2 \langle u, \mathcal{F}[\varphi] \rangle \\ &= -|\xi|^2 \langle \mathcal{F}[u], \varphi \rangle \end{aligned}$$

ゆえに  $\Delta \mathcal{F}[u] = -|\xi|^2 \mathcal{F}[u]$  がわかり、仮定より  $-|\xi|^2 \mathcal{F}[u] = \hat{f}$  が示せた。

$|\xi| \geq 1$  のとき、 $\frac{1+|\xi|^2}{|\xi|^2} \leq 2$  であることに注意すると、

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi| \geq 1} |\mathcal{F}[u](\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^{m+2} d\xi \\ &= \int_{|\xi| \geq 1} |\hat{f}(\xi)|^2 \frac{(1+|\xi|^2)^{m+2}}{|\xi|^4} d\xi \\ &\leq 4 \int_{|\xi| \geq 1} |\hat{f}(\xi)|^2 (1+|\xi|^2)^m d\xi \\ &\leq 4c_m \|f\|_{2,m}^2 < \infty \end{aligned}$$



一方、 $|\xi| \leq 1$  のときは  $1 + |\xi|^2 \leq 2$  であるから、

$$\begin{aligned} & \int_{|\xi| \leq 1} |\mathcal{F}[u](\xi)|^2 (1 + |\xi|^2)^{m+2} d\xi \\ &= 2^{m+2} \int_{|\xi| \leq 1} |\mathcal{F}[u](\xi)|^2 d\xi \\ &\leq 2^{m+2} \|\mathcal{F}[u]\|_2^2 \\ &= 2^{m+2} (2\pi)^d \|u\|_2^2 < \infty \end{aligned}$$

よって、 $u \in W^{m+2}(\mathbf{R}^d)$  である。定理の後半は、定理の前半の主張と定理 1.8 の (2) による。□

### 1.3 ラプラス作用素の本質的自己共役性

$\Delta$  を  $\mathbf{R}^d$  上のラプラス作用素とする。まず、 $D(\Delta) = C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  として考えてみると、任意の  $f, g \in D(\Delta)$  に対して、

$$\begin{aligned} (\Delta f, g)_2 &= \sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x) \overline{g(x)} dx \\ &= - \sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \overline{\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)} dx \\ &= \sum_{j=1}^d \int_{\mathbf{R}^d} f(x) \overline{\frac{\partial^2 g}{\partial x_j^2}(x)} dx = (f, \Delta g)_2 \end{aligned}$$

が成り立つので、 $\Delta$  は対称作用素である。しかし、このままでは  $\Delta$  は、自己共役ではない。ところが、 $\Delta$  を超関数の意味での微分としてとらえ、その定義域を  $W^2(\mathbf{R}^d)$  とすることにより、 $\Delta$  が本質的自己共役であることが示せる。

以下、その定義域を  $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  としたときのラプラス作用素を  $\Delta$  で、また、定義域を  $W^2(\mathbf{R}^d)$  としたときのラプラス作用素を  $\tilde{\Delta}$  で表すことにする。

**定理 1.10.**  $\tilde{\Delta}$  は、 $L^2(\mathbf{R}^d)$  における自己共役作用素である。

**証明**  $\tilde{\Delta}$  の対称性を証明する。 $u, v \in W^2(\mathbf{R}^d)$  とすると、

$$\|u_n - u\|_{2,2} \rightarrow 0, \|v_n - v\|_{2,2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる  $u_n, v_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  がとれる。したがって、

$$\begin{aligned} (\tilde{\Delta} u, v)_2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{\Delta} u_n, v_n)_2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, \tilde{\Delta} v_n)_2 \\ &= (u, \tilde{\Delta} v)_2 \end{aligned}$$

がわかる。ゆえに  $\tilde{\Delta}$  の対称性が示された。

次に  $\tilde{\Delta}$  の自己共役性を示す。すなわち、 $D(\tilde{\Delta}^*) \subset W^2(\mathbf{R}^d)$  を示せばよい。そこで  $v \in D(\tilde{\Delta}^*)$  とする。共役作用素の定義より  $v, \tilde{\Delta}^* v \in L^2(\mathbf{R}^d)$  である。また、 $T = \sum_{j=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$  を超関数の意味での微分による作用素とする。任意の  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$  に対して

$$\begin{aligned} \langle TF_v, \overline{\varphi} \rangle &= \langle F_v, \overline{\Delta \varphi} \rangle \\ &= (v, \Delta \varphi)_2 \\ &= (v, \tilde{\Delta} \varphi)_2 \\ &= (\tilde{\Delta}^* v, \varphi)_2 \\ &= \langle F_{\tilde{\Delta}^* v}, \overline{\varphi} \rangle \end{aligned}$$

ゆえに  $TF_v = F_{\tilde{\Delta}^* v}$  であるので、 $TF_v$  と  $\tilde{\Delta}^* v \in L^2(\mathbf{R}^d)$  を同一視できる。したがって、 $\mathcal{F}[TF_v] \in L^2(\mathbf{R}^d)$  であり、さらに  $\mathcal{F}[TF_v] = -|\xi|^2 \mathcal{F}[F_v]$  である。

定理 1.7 より、

$$\begin{aligned} & C_2^{-1} \|v\|_{2,2}^2 \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^d} (1 + |\xi|^4) |\mathcal{F}[v](\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}[v](\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbf{R}^d} |\xi|^4 |\mathcal{F}[F_v](\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}[v](\xi)|^2 d\xi + \int_{\mathbf{R}^d} |\mathcal{F}[TF_v](\xi)|^2 d\xi \\ &= (2\pi)^d (\|v\|_2^2 + \|TF_v\|_2^2) < \infty \end{aligned}$$

であるから、 $v \in W^2(\mathbf{R}^d)$  である。したがって、 $D(\tilde{\Delta}^*) \subset W^2(\mathbf{R}^d)$  が示せたので、 $\tilde{\Delta}$  が  $L^2(\mathbf{R}^d)$  上の自己共役作用素であることが示せた。□

**定理 1.11.**  $\Delta$  は本質的に自己共役であり、 $\overline{\Delta}$  を  $\Delta$  の閉包とすると、 $\overline{\Delta} = \tilde{\Delta}$  である。

**証明** 定理 1.10 より、 $\tilde{\Delta}$  のグラフ  $G(\tilde{\Delta})$  は閉集合である。また、 $D(\Delta) \subset D(\tilde{\Delta})$  が明らかに成り立つことから、 $G(\Delta) \subset G(\tilde{\Delta})$  となる。これらのことより、 $\overline{G(\Delta)} \subset G(\tilde{\Delta})$ 。したがって

て、 $G(\tilde{\Delta}) \subset \overline{G(\Delta)}$  を示せばよい。 $[u, \tilde{\Delta}(u)] \in G(\tilde{\Delta})$  とすると、 $u \in D(\tilde{\Delta}) = W^2(\mathbf{R}^d)$  より、ある  $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$  で  $\|u - u_n\|_{2,2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  となるものがとれる。このとき、

$$\begin{aligned} & \| [u, \tilde{\Delta}(u)] - [u_n, \Delta(u_n)] \|_2^2 \\ &= \| u - u_n \|_2^2 + \| \tilde{\Delta}(u - u_n) \|_2^2 \\ &\leq C \| u - u_n \|_{2,2}^2 \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となるので、 $[u, \tilde{\Delta}(u)] \in \overline{G(\Delta)}$  である。よって、 $\overline{\Delta} = \tilde{\Delta}$  である。□

#### 1.4 シュレディンガー作用素の本質的自己共役性

ここで、本論文の目的であるポテンシャルとしてクーロンポテンシャルをもつシュレディンガー作用素を取り上げ、その本質的自己共役性について調べる。いま、 $\mathcal{H}$  を

$$\mathcal{H} = -\frac{h^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) + V(x)$$

とおく。この  $\mathcal{H}$  をポテンシャル  $V$  のシュレディンガー作用素という。ここで  $m > 0, h > 0$  である。(実際には  $m$  は質量、 $h$  はプランク定数と呼ばれる正の定数として考えられる。)  $V$  に対しては様々なポテンシャルが考えられるが、今回はクーロンポテンシャルの場合を考える。すなわち、

$$V(x) = -\frac{K}{|x|}$$

の場合を考える。

**定理 1.12.**  $a > 0$  を定数、 $V_1 \in L^2(\mathbf{R}^3)$ 、 $V_2 \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$  とし、 $V = V_1 + V_2$  とする。ただし、 $V$  は実数値であるとする。そして

$$\mathcal{H} = (-\alpha\Delta + V)f \quad (f \in D(\mathcal{H}) = C_0^\infty(\mathbf{R}^d))$$

により、線形作用素を定義する。このとき、 $\mathcal{H}$  は本質的に自己共役である。すなわち、 $H$  を  $\mathcal{H}$  の閉包とすると、 $H$  は  $L^2(\mathbf{R}^3)$  における自己共役作用素で、 $D(H) = W^2(\mathbf{R}^3)$  である。

証明をする前にこの定理が本節の目的であるポテンシャルがクーロンポテンシャルの場合のシュレディンガー作用素に適用できることを確認する。そのためには、クーロンポテンシャル  $-\frac{K}{|x|}$  がこの定理の  $V$  としての条件を満たすことを確かめればよいが、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|} &= \frac{1}{|x|} \chi_{B(0,1)} + \frac{1}{|x|} \chi_{\mathbf{R}^3 \setminus B(0,1)} \\ & \text{(ただし、} B(0,1) = \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| < 1\} \text{)} \end{aligned}$$

とわけておけば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{|x|} \chi_{B(0,1)} &\in L^2(\mathbf{R}^3), \\ \frac{1}{|x|} \chi_{\mathbf{R}^3 \setminus B(0,1)} &\in L^\infty(\mathbf{R}^3) \end{aligned}$$

であることがわかるので、クーロンポテンシャルは定理の条件を満たす。定理の証明に向けて、補題を二つ証明しておく。

**補題 1.13.** 任意の  $a > 0$  に対して、ある  $b > 0$  が存在し、すべての  $f \in W^2(\mathbf{R}^3)$  に対して、次が成り立つ：

$$\|f\|_\infty \leq a \|\tilde{\Delta}f\|_2 + b \|f\|_2$$

**証明**  $\lambda(\xi) = |\xi|^2$  とおく。定理 1.8(1) の証明より

$$\begin{aligned} \|f\|_\infty &= \|\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f]\|_\infty \\ &\leq \sup_{x \in \mathbf{R}^3} |\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}[f](x)| \\ &= \sup_{x \in \mathbf{R}^3} \left| \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbf{R}^3} \mathcal{F}[f](\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \right| \\ &\leq (2\pi)^{-3} \|\mathcal{F}[f]\|_1 \\ &\leq C \|(1 + \lambda)\mathcal{F}[f]\|_2 \\ &\leq C \|\mathcal{F}[f]\|_2 + C \|\lambda\mathcal{F}[f]\|_2 \end{aligned}$$

ここで、 $f$  の代わりに  $f_r(x) = f(r^{-1}x) (r > 0)$  を代入すれば、

$$\|f_r\|_\infty \leq C \|\mathcal{F}[f_r]\|_2 + C \|\lambda\mathcal{F}[f_r]\|_2$$

となり、いま、 $\mathcal{F}[f_r](\xi) = r^3 \mathcal{F}[f](r\xi)$  であるから、

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}[f_r]\|_2 &= \left( \int_{\mathbf{R}^3} |\mathcal{F}[f_r](\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_{\mathbf{R}^3} |r^3 \mathcal{F}[f](r\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= r^3 \left( \int_{\mathbf{R}^3} |\mathcal{F}[f](r\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= r^3 \left( \int_{\mathbf{R}^3} |\mathcal{F}[f](\xi')|^2 \cdot \frac{1}{r^3} d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad (r\xi = \xi' \text{ で変数変換}) \\ &= r^{\frac{3}{2}} \|\mathcal{F}[f]\|_2 \\ &= (2\pi)^{\frac{3}{2}} r^{\frac{3}{2}} \|f\|_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|\lambda \mathcal{F}[f_r]\|_2 &= \left( \int_{\mathbf{R}^3} |\lambda(\xi) \mathcal{F}[f_r](\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= r^3 \left( \int_{\mathbf{R}^3} |\lambda(\xi) \mathcal{F}[f](r\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= r^3 \left( \int_{\mathbf{R}^3} \left| \lambda \left( \frac{\xi'}{r} \right) \mathcal{F}[f](\xi') \right|^2 \cdot \frac{1}{r^3} d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= r^{\frac{3}{2}} \left( \int_{\mathbf{R}^3} \frac{|\xi'|^2}{r^2} |\mathcal{F}[f](\xi')|^2 d\xi' \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= r^{-\frac{1}{2}} \|\lambda \mathcal{F}[f]\|_2 \\ &= r^{-\frac{1}{2}} \|\mathcal{F}[\tilde{\Delta}f]\|_2 \\ &= r^{-\frac{1}{2}} \|\mathcal{F}[\tilde{\Delta}f]\|_2 \end{aligned}$$

$$\|f_r\|_\infty = \|f\|_\infty$$

が成立する。これらの等式より、

$$\|f\|_\infty \leq (2\pi)^{\frac{3}{2}} C \left\{ r^{\frac{3}{2}} \|f\|_2 + r^{-\frac{1}{2}} \|\tilde{\Delta}f\| \right\}$$

となる。ここで  $r > 0$  を適当にとれば補題は証明される。□

**補題 1.14.** 任意の  $a > 0$  に対して、ある  $b > 0$  が存在し、すべての  $f \in W^2(\mathbf{R}^3)$  に対して

$$\|Vf\|_2 \leq a \|\tilde{\Delta}f\|_2 + b \|f\|_2$$

証明 補題 1.13 より、任意の  $a' > 0$  に対し、ある  $b' > 0$  がとれて、

$$\|f\|_\infty \leq a' \|\tilde{\Delta}f\|_2 + b' \|f\|_2 \quad (f \in W^2(\mathbf{R}^3))$$

が成り立っている。ゆえに、

$$\begin{aligned} \|Vf\|_2 &\leq \|V_1f\|_2 + \|V_2f\|_2 \\ &\leq \|V_1\|_2 \|f\|_\infty + \|V_2\|_\infty \|f\|_2 \\ &\leq \|V_1\|_2 (a' \|\tilde{\Delta}f\|_2 + b' \|f\|_2) \\ &\quad + \|V_2\|_\infty \|f\|_2 \\ &\leq a' \|V_1\|_2 \|\tilde{\Delta}f\|_2 \\ &\quad + (b' \|V_1\|_2 + \|V_2\|_\infty) \|f\|_2 \end{aligned}$$

したがって、いま  $a'$  は任意なので、 $a'$  を適当にとればよい。□

**定理 1.12 の証明:**  $T = -\alpha \tilde{\Delta}$  とおく。 $T$  は、定理 1.10 より、 $D(T) = W^2(\mathbf{R}^3)$  であり、 $L^2(\mathbf{R}^3)$  上の自己共役作用素である。

$Bf = Vf$  ( $f \in W^2(\mathbf{R}^3)$ ) とおくと、補題 1.14 より、 $B$  は  $D(B) = D(T) =$  とする対象作用素で、加藤・レーリッヒの定理の仮定を満たしている。したがって、 $Q = T + B$  は  $D(Q) = W^2(\mathbf{R}^3)$  とする  $L^2(\mathbf{R}^3)$  上の自己共役作用素である。

したがって、 $Q$  が  $\mathcal{H}$  の閉包であることを示せばよい。いま、 $\beta$  を十分大きな実数とする。この  $\beta$  の大きさは後できちんと示すこととする。このとき補題 1.13 より

$$\begin{aligned} \|Qf\|_{+2} + \beta \|f\|_2 &\leq (\|Tf\|_2 + \|Bf\|_2) + \beta \|f\|_2 \\ &\leq (\|\alpha \tilde{\Delta}f\|_2 + a \|\tilde{\Delta}f\|_2 + b \|f\|_2) \\ &\quad + \beta \|f\|_2 \\ &\leq (\alpha \|f\|_{2.2} + a \|f\|_{2.2} + b \|f\|_{2.2}) \\ &\quad + \beta \|f\|_{2.2} \\ &\leq c_1 \|f\|_{2.2} \end{aligned}$$

となっている。ただし、 $a, b$  は、補題 1.13 から得られるもの、また、 $c_1$  は  $c_1 > \alpha + a + b + \beta$

を満たすものとする。さらに

$$\begin{aligned}
& \|Qf\|_2 + \beta\|f\|_2 \\
& \geq \|Tf\|_2 - \|Bf\|_2 + \beta\|f\|_2 \\
& \geq \|Tf\|_2 - a\|\tilde{\Delta}f\|_2 - b\|f\|_2 + \beta\|f\|_2 \\
& \geq \|Tf\|_2 - a\alpha^{-1}\|\alpha\tilde{\Delta}f\|_2 - b\|f\|_2 \\
& \quad + \beta\|f\|_2 \\
& \geq \|Tf\|_2 - a\alpha^{-1}\|Tf\|_2 - b\|f\|_2 \\
& \quad + \beta\|f\|_2 \\
& \geq (1 - a\alpha^{-1})\|Tf\|_2 + (\beta - b)\|f\|_2
\end{aligned}$$

ここでまだ定まっていない  $\beta$  について考えると、まず、 $1 - a\alpha^{-1} > 0$  となるように  $a > 0$  を小さく選び、次に  $\beta - b > 0$  となるように  $\beta > 0$  を定める。すると、

$$\begin{aligned}
\|Qf\|_2 + \beta\|f\|_2 & \geq C_2(\|Tf\|_2 + \|f\|_2) \\
& \geq C_3\|f\|_{2,2}
\end{aligned}$$

を満たすように  $C_2, C_3$  をとることができる。これらの不等式をまとめると

$$C_3\|f\|_{2,2} \leq \|Qf\|_2 + \beta\|f\|_2 \leq C_1\|f\|_{2,2}$$

$G(Q), G(\mathcal{H})$  をそれぞれ  $Q, \mathcal{H}$  のグラフとする。なお、 $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$  ならば  $Q\varphi = \mathcal{H}\varphi$  であることに注意しておく。

任意の  $(f, Qf) \in G(Q)$  をとる。 $f \in W^2(\mathbf{R}^3)$  であるから、ある  $f_n \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3) (n = 1, 2, \dots)$  が存在し、 $\|f_n - f\|_{2,2} \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$  である。ゆえに、

$$\begin{aligned}
& \beta\|f_n - f\|_2 + \|\mathcal{H}f_n - Qf\|_2 \\
& \leq C_1\|f_n - f\|_{2,2} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)
\end{aligned}$$

となっている。したがって、

$$G(\mathcal{H}) \subset G(Q) \subset \overline{G(\mathcal{H})}$$

が得られる。さらに  $G(Q)$  が閉集合であるから、 $G(Q) = \overline{G(\mathcal{H})}$  である。よって、 $Q = \mathcal{H}$  が示された。□

## 参考文献

- [1] 伊藤清三, 「ルベーグ積分入門」 裳華房, 1963.
- [2] 河村哲也, 「キーポイント偏微分方程式」 岩波書店, 1997.
- [3] 恒田高夫, 「シュワルツ超関数入門」 日本評論社, 1985.
- [4] 新井仁之, 「フーリエ解析と関数解析学」 培風館, 2001.
- [5] 前田周一郎, 「関数解析」 森北出版, 1974.
- [6] 日合文雄・柳研二郎, 「ヒルベルト空間と線型作用素」 牧野書店, 1995.
- [7] 小針明宏, 「確率・統計入門」 岩波書店, 1973.