Leibnizens

gesammelte Werke

aus den Handschriften

der Königlichen Bibliothek zu Hannover

herausgegeben

von

Georg Heinrich Pertz.

Dritte Folge

Mathematik.

Dritter Band.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1855.

Leibnizens

mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Erste Abtheilung.

Band III.

Briefwechsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1855.

BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und

Jacob Bernoulli.

Jacob Bernoulli war der ältere jenes Brüderpaars, das nach Leibnizens eigenem Geständniss sehr bald nach der Entdeckung der höheren Analysis um die Vervollkommnung und Ausbreitung derselben sich bei weitem die grössten Verdienste erworben hat. Er studirte nach dem Willen seines Vaters Theologie; indess regte sich in ihm schon früh eine entschiedene Hinneigung zu den mathematischen Disciplinen, die aber von Seiten seines Vaters durchaus gemissbilligt und auf keine Weise unterstützt wurde. Jac. Bernoulli konnte sich deshalb nur im Geheimen mit seiner Lieblingswissenschaft beschäftigen und befriedigte seine Wissbegier auf diesem Gebiete durch geliehene Bücher, wie sie der Zufall ihm gerade in die Hände spielte. So wurde Jac. Bernoulli in der Mathematik Autodidact und frühzeitig in selbstständiger Besiegung der Schwierigkeiten, die diese Wissenschaft so reichlich darbietet, geübt; zugleich gewöhnte er sich aber auch, wie es wohl vorzugsweise mit dieser Art des Studiums verbunden ist, an ein klares und vollständiges Durchdringen der mathematischen Wahrheiten, ein Zug, der in allen seinen spätern Arbeiten besonders hervortritt. Auf diese Weise kam freilich Jac. Bernoulli während seiner Studienzeit nicht über die ersten Elemente der mathematischen Wissenschaften hinaus. Auf seiner ersten Reise, die er im Jahre 1676 durch ganz Frankreich antrat, hatte er sich um Vervollkommnung in seinen Lieblingsstudien wenig bekümmert; um so mehr suchte er auf einer zweiten Reise durch Holland und England dies Versäumniss nachzuholen. Zu Amsterdam hörte er den Professor der Mathematik, Alexander de Bie, zu Leyden unter andern den Philosophen de Volder; der Umgang mit diesen Männern bestimmte ihn, sich angelegentlichst mit den mathematischen Wissenschaften zu beschäftigen und er vertiefte sich namentlich in das Studium der Cartesianischen Geometrie. Während seines Aufenthalts in Holland gab er zwei Schriften heraus: Conamen novi systematis Cometarum pro motu corum sub calculum revocando et apparitionibus praedicendis, und: De Gravitate Aetheris; beide erschienen zu Amsterdam, die erste im Jahre 1682, die zweite im folgenden Jahre. Von Holland ging Jac. Bernoulli über Calais nach England, wo er die Bekanntschaft Boyle's und Robert Hooke's machte, und kehrte über Hamburg durch Deutschland im Jahre 1682 nach Basel zurück. Nachdem er noch die ganze Schweiz bereist, nahm er seinen festen Wohnsitz in seiner Vaterstadt und gründete, um seine Landsleute für die mathematischen Wissenschaften zu interessiren, ein Collegium experimentale Physico-Mechanicum daselbst. Seine alte Neigung für die Mathematik erwachte mit unwiderstehlicher Kraft von neuem; er wurde mehr als je sich bewusst, dass die mathematischen Disciplinen das Gebiet seien, auf dem er einmal etwas leisten könnte. Er legte daher alle andern Studien bei Seite und beschloss sich ganz seinen Lieblingswissenschaften zu widmen. Jac. Bernoulli begann nun mit seinem jüngern Bruder Johann, der bereits in die Elemente der Mathematik eingeweiht war, alle wichtigen mathematischen Schriftsteller zu studiren. Ohne irgend eine weitere Anleitung, nur durch eigene Kraft und Beharrlichkeit drang Jac. Bernoulli in die Tiefen der Wissenschaft und gewann dadurch, dass er zugleich seinen jüngeren Bruder unterrichtete, eine klarere, bestimmtere Einsicht in das Wesen derselben.

Bei diesem rastlosen Streben, die mathematischen Wissenschaften in ihrer Totalität zu erfassen, konnte ein Verlangen nach gegenseitiger Mittheilung und Ideenaustausch bei Jac. Bernoulli nicht ausbleiben; aber in seiner Vaterstadt war Niemand, bei dem er sich Rath erholen, mit dem er sich über mathematische Probleme unterhalten konnte. Die beiden damals einzig für dergleichen Mittheilungen bestehenden Zeitschriften, das Journal des Savans und die neu gegründeten Acta Eruditorum Lipsiensium boten nur mangelhaften Ersatz. In letzterer Zeitschrift hatte Leibniz im Jahre 1684 seine neue Methode pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus, auf wenigen Blättern bekannt gemacht, und Jac. Bernoulli mochte wohl ahnen, von welcher Wichtigkeit sie für die gesammte Wissenschaft sein könnte; dennoch vermochte er den Schleier nicht zu lüften, der das in grösster Kürze

dargestellte Princip derselben, wie es schien, fast undurchdringlich verhüllte. Endlich — es war im Jahre 1687, in dem er die erledigte Professur der Mathematik an der Universität seiner Vaterstadt erhalten hatte — bot sich Jac. Bernoulli eine Gelegenheit dar, mit Leibniz selbst, dem Verfasser jener neuen Methode, eine Correspondenz anzuknüpfen und ihn um Aufklärung und Anleitung zum Verständniss der neuen Rechnung zu bitten. Ein Mechaniker seiner Vaterstadt hatte ihn nämlich über die zweckmässigste Construction von Wagen um Rath gefragt, und Jac. Bernoulli hatte zu der Abhandlung Leibnizens: Demonstrationes novae de Resistentia solidorum, die in den Act. Erudit. 1683 erschienen war, seine Zuflucht genommen. Er fand darin, was er suchte, aber das Fundament, das Leibniz seiner Theorie zu Grunde gelegt, dass nämlich die Ausdehnungen der Körper den spannenden Kräften proportional seien, fand Jac. Bernoulli durch seine Versuche nicht bestätigt und er beschloss Leibniz seine Zweifel vorzulegen. Zugleich bringt er in diesem ersten Schreiben noch zwei andere Probleme aus der oben erwähnten Leibnizischen Abhandlung zur Sprache: über die Tragfähigkeit eines in einer Mauer horizontal befestigten Balkens, und über die Figur eines Balkens, der den Belastungen überall proportionalen Widerstand leiste. Namentlich ist es das letztere, das ihm Gelegenheit giebt auf die neue Methode Leibnizens zu kommen, in die eingeweiht zu sein sein sehnlichster Wunsch ist, und er bittet dringend um Belehrung*). Dieses erste Schreiben

*) Dies Geständniss von Jac. Bernoulli stimmt wenig mit den prahlerischen Expectorationen Joh. Bernoulli's in seinem selbst verfassten Lebensabriss, der neulich von R. Wolf in Bern (Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern Nr. 131 bis 155, und daraus in Grunert's Archiv Theil 13. Heft 2, literarischer Bericht) bekannt gemacht worden ist. Joh. Bernoulli sagt darin: Après ces commencemens, par un hazard imprévu nous tombâmes conjointement mon frère et moi sur un petit écrit de Mr. Leibnitz insére dans les actes de Leipzic de 1684, où en 5 ou 6 pages seulement il donne une idée fort légère du calcul différentiel, ce qui était une énigme plutôt qu'une explication; mais c'en était assez pour nous, pour en approfondir en peu de jours tout le secret, témoin quantité de pièces que nous publiâmes ensuite sur le sujet des infiniment petits. — Vergl. hiermit auch das Schreiben Jac. Bernoulli's vom 15. Nov. 1702, wo er sagt, dass er seinen Bruder Johann in die Differentialrechnung eingeweiht habe.

von Jac. Bernoulli traf jedoch Leibniz nicht mehr in Hannover; er hatte bereits seine grosse Reise durch Deutschland und Italien angetreten, und der Zufall wollte, dass dasselbe ihm auch nicht nachgeschickt wurde. So geschah es, dass Leibniz erst nach seiner Rückkehr im Jahre 1690 eine Antwort darauf an Jac. Bernoulli übersandte, in der er jedoch letzteren nicht weiter über das Princip der höheren Analysis zu belehren nöthig hatte. Denn derselbe war durch eigene Kraft und durch ein beharrliches Studium in das Mysterium eingedrungen und hatte bereits seine erlangte Meisterschaft durch die Lösung des von Leibniz den Cartesianern vorgelegten Problems der isochronischen Curve bekundet. Zwar hatte Hugens schon im Jahre 1687 die Eigenschaften und die Construction der verlangten Curve bekannt gemacht und Leibniz einen synthetischen Beweis gegeben, dass die Lösung von Hugens die richtige sei; beide indess hatten die Analysen zurückgehalten. Jac. Bernoulli dagegen machte zugleich die Analysis bekannt, um, wie er sagt, Leibniz zu nöthigen, zur Belehrung des Publicums ein Gleiches zu thun. Leibniz gestand, dass ihm Niemand bekannt sei, der den Sinn der Aufgabe besser getroffen hätte, als Jac. Bernoulli. Zugleich hatte dieser hierbei Veranlassung genommen, das Problem der Kettenlinie wieder zur Sprache zu bringen, auf das bereits Galiläi die Geometer aufmerksam gemacht hatte. — Obwohl Leibniz in seinem Antwortschreiben die Meinung von Jac. Bernoulli über das Princip der Dynamik, wie er es in dem Streite mit den Cartesianern aufgestellt hatte, zu vernehmen wünschte, und so Gelegenheit gab, die Correspondenz weiter zu führen, so erfolgte dennoch unmittelbar kein weiteres Schreiben von Seiten Jac. Bernoulli's. Erst nach 5 Jahren, als sein Bruder Johann sich zum Abgang nach Holland rüstete, im Jahre 1695 schreibt Jac. Bernoulli wiederum an Leibniz, der es ausdrücklich in seinen Briefen an den jüngeren Bruder gewünscht hatte. Abgesehen dass Jac. Bernoulli sich selbst Befriedigung von dem, weshalb er die Correspondenz angeknüpft, verschafft, und dass er stets ein gewisses Phlegma (nativus ad scribendum lentor et sequities non mediocris) überwinden musste, ehe er zum Schreiben kam, hatte ihn eine gewisse Scheu zurückgehalten, Leibniz sich wiederum zu nahen. Er hatte nämlich in den Act. Erudit. ein etwas vorschnelles Urtheil über die Leibnizische Differentialrechnung abgegeben, das er zwar

sehr bald wiederum öffentlich rectificirte*), in Folge dessen jedoch eine gewisse Verstimmung (maeror) in ihm zurückblieb. Ausserdem hatte er an einer schweren Krankheit darnieder gelegen, die seinen Körper, wie es scheint, für immer zerstörte, wegen häufiger Rückfälle seine Thätigkeit hemmte und seinem Leben in den besten Mannesjahren ein Ziel setzte. Er knüpft wieder an den letzten Brief Leibnizens an, verweist in Betreff der Dynamik auf die Correspondenz mit seinem Bruder**) und erinnert an die Summation

---

*) In einem Aufsatze: Specimen calculi differentialis in demen' sione Parabolae helicoidis, ubi de flexuris curvarum in genere, earun' dem evolutionibus, aliisque (Act. Erudit. 1691. Jan.) hatte Jac. Bernoulli gesagt: Quanquam ut verum fatear, qui Calculum Barrovianum intellexerit, alterum a Dn. L. inventum ignorare vix poterit, utpote qui in priore illo fundatus est, et nisi forte in differentialium notatione et operationis aliquo compendio, ab eo non differt. Diese Aeusserung hatte er aber sogleich rectifieirt und zurückgenommen in einem zweiten Aufsatz, im Juni desselben Jahres: Specimen alterum Calculi differentialis in dimentienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum etc., wo er am Schlusse hinzufügt: Caeterum in his Problematibus omnibus, quae quis nequicquam alia tentet Methodo, calculi Leibnitiani eximium et singularem plane usum esse comperi, ut ipsum propterea inter primaria seculi nostri inventa censendum esse existimem. Quanquam enim, ut nuper innui, ansam huic dedisse credam calculum Barrowii, qualem appello, qui, ab hujus Viri tempore, passim fere apud Geometras praestantiores invaluit, quemque etiamnum Nobil. Tschirnhausio solemnem esse video: hoc tamen non eo intelligendum est, quasi utilissimi inventi dignitatem ullatenus elevare, aut Celeberrimi Viri laudi meritae quicquam detrahere et aliis ascribere cupiam: et si quae conferenti mihi utrinque intercedere inter illos visa est affinitas, ea major non est, quam quae faciat, ut, uno intellecto, ratio alterius facilius comprehendatur, dum unus superfluas et mox delendas quantitates adhibet, quas alter compendio omittit. De caetero namque compendium isthoc tale est, quod naturam rei prorsus mutat, facitque ut infinita per hunc praestari possint, quae per alterum nequeunt: praeterquam enim quod ipsum hoc compendium reperisse utique non erat cujusvis, sed sublimis ingenii et quod Autorem quam maxime commendat.

**) Hierbei giebt Jac. Bernoulli noch ein herrliches Zeugniss von der brüderlichen Eintracht, wie sie anfangs zwischen den beiden Brüdern bestanden hatte: Credo enim ipsum mecum sentire, seu quod ego recte sentiam, seu quod ideis ab institutione mea sibi implantatis praeoccupatus mecum errat.

der harmonischen Progression, die Leibniz in der Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum etc. (Act. Erudit. 1682) gegeben hatte. Leibniz theilt in seiner Antwort ein sehr künstliches Verfahren mit, die Summe der Brüche von $\frac{1}{1}$ bis $\frac{1}{1000}$ zu finden, von dem indess Jac. Bernoulli nachweist, dass es ebenso weitläufig ist, als wenn die Glieder der Reihe nach und nach addirt würden. Er selbst zeigt zugleich einen interessanten Weg, annäherungsweise die Summe von irgend welcher Anzahl Glieder einer solchen Progression zu bestimmen. Die Summation dieser Reihe kommt in der Correspondenz zwischen Leibniz und Jac. Bernouilli öfters zur Sprache; Untersuchungen über Reihen war ja ein Lieblingsthema Jac. Bernoulli's, der, wie es scheint, sein ganzes Leben hindurch mit dergleichen sich beschäftigte, wie die nach und nach von ihm herausgegebenen fünf Abhandlungen: De Seriebus infinitis etc. beweisen. Bemerkenswerth ist noch die Sammlung von Problemen, die Jac. Bernoulli als Beitrag zu dem von Leibniz beabsichtigten Werke: Scientia infiniti, übersendet.

Das Jahr 1696 brachte das Problem der Brachystochrone, das in seinen Folgen die zwischen den beiden Brüdern schon vorhandene Missstimmung zu der erbittertsten Feindschaft entflammte. Jac. Bernoulli löste es nicht allein ohne Schwierigkeit, sondern er nahm auch hiervon Veranlassung, die schwierigen Aufgaben über die isoperimetrischen Figuren den Geometern zur Lösung vorzulegen. Bei dieser Gelegenheit zeigte sich das eminente Talent Jac. Bernoulli's im schönsten Lichte; nicht zufrieden das vorgelegte Problem gelöst zu haben, wurde es ihm eine Quelle zu neuen Speculationen, in die er sich so vertiefte, dass er des Gegenstandes vollkommen Meister wurde, in der Folge die mangelhafte Auflösung seines Bruders sogleich durchschaute und die Fehler der Methode desselben mit grösster Zuversicht nachwies. Dessenohngeachtet ist ein hervorstechender Zug seines Charakters Bescheidenheit, die edle Eigenschaft des wahren Talentes: Agnosco infirmitatem meam, schreibt er (27. Jan. 1697) an Leibniz bei Empfang des grossen Programms, in dem Joh. Bernoulli die Geometer zur Lösung des Problems der Brachystochrone einlud, nec tam credo me solvisse, quam Deum per me, ut fastum ejus (seines Bruders Johann) immodicum reprimeret. Doleo autem acerbe, ipsum usque adeo sui oblitum esse, ut non recordetur amplius, quo instrumento divina gratia olim in se fuerit operata.

Von 1697 bis 1702 ist die Correspondenz zwischen Leibniz und Jac. Bernoulli unterbrochen. Die Streitigkeiten mit seinem Bruder Johann über die richtige Lösung des isoperimetrischen Problems, die in Journalen geführt ein öffentliches Aergerniss wurden, verbitterten dem kränklichen Mann das Leben so sehr, dass er sich für jede Thätigkeit unaufgelegt fühlte. Besonders aber war Jac. Bernoulli gegen Leibniz aufgebracht, da er annahm, dass dieser für seinen Bruder Partei genommen und wenn er gewollt, den Zwist im Keim hätte ersticken können. Wenn auch Leibniz im Allgemeinen sehr zu Gunsten Joh. Bernoulli's gestimmt war, so ist er doch gegen diese Beschuldigungen Jac. Bernoulli's in Schutz zu nehmen; die Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli giebt die besten Beweise, wie sehr dem ersteren daran gelegen war, die beiden Brüder wieder zu versöhnen. Erst die Freude über seine Wahl zum Mitgliede der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vermag die Missstimmung Jac. Bernoulli's zu lösen und er wendet sich wieder an Leibniz, den Gründer und Präsidenten der Akademie, ihm seinen Dank abzustatten. Nach fünfjähriger Unterbrechung knüpft er wieder an das zuletzt erhaltene Leibnizische Schreiben an und erklärt sich vor allen Dingen als Anhänger des dynamischen Princips, das Leibniz in fast allen seinen Briefen zur Sprache gebracht hatte und dessen Anerkennung von Seiten der Coryphäen der Wissenschaft sein sehnlichster Wunsch war. Ausserdem ist in diesen Briefen aus den letzten Lebensjahren Jac. Bernoulli's besonders die Rede von den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die dieser in seinem nachgelassenen Werke: De arte conjectandi, zu Grunde gelegt hatte, von der Integration der Differentialgleichungen und irrationalen Ausdrücke. Da Jac. Bernoulli in Bezug auf seine Integrationsmethoden, wie es scheint, etwas zurückhaltend ist, so rafft sich Leibniz auf und bringt längst angestellte Untersuchungen über Integration irrationaler Functionen in Ordnung, um zu beweisen, dass auch er, der als Emeritus wohl Ansprüche hätte, dass man ihm offen neue Ergebnisse mittheilte, noch etwas vermöchte.

Von der Correspondenz zwischen Leibniz und Jac. Bernoulli war bisher nur ein Schreiben Leibnizens (XIX, ohne die Beilage) gedruckt zuerst in den Memoiren der Berliner Akademie vom Jahre 1757.

I.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Pruriit mihi jam dudum animus, tuas interpellandi Musas, nisi et gravissimorum tuorum negotiorum, quibus obrutum Te esse noveram, multitudo, et tenuitatis meae conscientia, et Nominis Tui celebritas calamum hucusque retinuissent. Non sine causa enim metuebam, in eorum a Te referri numerum, qui cum aliter non possint, magnorum Virorum alloquio inclarescere student; quae quidem insania, si a quoquam, a me certe debet esse alienissima, utpote quem latere quam innotescere, praesertim Tibi, melius conveniret. Velim itaque persuasus sis, Amplissime Vir, nihil ad scribendum aliud me impulisse, quam ardorem, quo res Mathematicas deperio, inque iis proficiendi desiderium inexplebile. Hoc cum aliunde satiare hactenus non potuerim, qui a Mathematicorum consortio longe remotus, caeterisque fere subsidiis destitutus vivo, Tuum tandem oraculum sollicitare coactus fui, cujus sublimia, ut sic dicam, effata summa saepe cum admiratione stupeo, mecumque stupent omnes, quotquot in scientiarum nobilissima non plane versantur hospites. Quo et invitavit me singularis Tua Humanitas, et peregrinis inserviendi promtitudo, cui debentur tot tamque praeclara ingenii monumenta, quae quotidie publico impertis; ea enim spem faciebat, fore ut non minus facilem Te praeberes instruendo uni alterive privato, qui forte opem Tuam in dilucidandis iis, quae in lucem emisisti, imploraturus esset. Quapropter hac spe fretus, Amplissime Vir, in nonnullis paucis Te consulam circa ea, quae olim in Actis Lipsiensibus de Resistentia solidorum pu-

blicasti; idque occasione nostratis cujusdam Artificis, qui miram quandam in fabricandis stateris dexteritatem prae se fert. Hujus artificium praecipuum cum animadvertissem facile, non tam consistere in instituendis jugi divisionibus, quam in ejusdem crassitie ita attemperanda, ut a proprio pondere appensoque sacomate facile flecti nequeat, opportune recordatus sum Tuorum illorum Inventorum, eaque circa hanc materiam quandam mibi lucem allatura credidi. Nec credidi frustra. Id ipsum quod quaesivi reperi; paucis enim perlectis paginis videbam non sine voluptate, me calculo subducere posse, quanta in unoquoque jugo ad debitam ei firmitatem conciliandam requiratur crassities, aut vicissim in data crassitie et longitudine quanto oneri ferendo par sit, postquam in unico ejusdem materiae bacillo ea de re experimentum cum cura institutum fuerit. Quo magis autem, Vir Amplissime, hoc Systema tuum mihi placuit, eo magis etiam sollicitum me statim reddidit de veritate hypotheseos, cui superstruitur. Supponis, librarum extensiones viribus tendentibus proportionales esse; quod assertum sequenti modo examinari posse arbitratus sum. Sumpsi chordam tenuiorem ex intestinis paratam, qua Instrumentum musicum armatum erat, longitudinis circiter bipedalis, eamque unco alligatam inferiore extremitate lance oneravi, quo ipso chorda acquisivit rectitudinem: dein immissis lanci successive aequalibus ponderibus, examinavi singulis vicibus chordae longitudinem in partibus sedecimis pollicis. Quae observavi, sunt sequentia:

Chorda a pondere librarum		extensa fuit partibus		extendenda juxta hyp. partibus
	2		9	9
	4		17	18
	6		23	27
	8		27	36

Unde patet, hypothesi isti non omnino convenire cum experientia: neque est cur dici poss t, futurum forte fuisse, ut in posterioribus observationibus chorda ulterius extenderetur, si diutius absque additione novi ponderis relicta fuisset: etenim eadem ratione sequeretur, et in prima observatione a pondere bilibri illam magis extendendam fuisse; neque propterea major sperari potuisset experimenti cum hypothesi tua conformitas. Quae cum ita se habeant, haereo quid ea de re statuendum sit: an credere debeam, me sensum tuae hypotheseos, quam alibi jam confirmatam esse dicis, non assequi; vel experimentum non satis curate factum; vel disparem potius rationem esse chordae hujus, fibrarumque e quibus corpora dura componi statuis?

Sed et porro alius mihi sedet scrupulus. Concipis, Ampliss. Vir, unamquamque portionem trabis horizontalis tanquam gravitantem super illa extremitate, qua cum reliqua portione cohaeret: quo posito sequitur indubie, trabem cylindricam vel prismaticam, adeoque aequaliter ubique resistentem, si nimium oneretur, eo ipso semper in loco frangi vel incurvari debere, quo muro adhaeret, cum ibidem ex tua hypothesi maximam vim sustineat. Asseveravit autem ante memoratus Artifex, se saepius experimentis de industria factis id examinasse; atque in virga ferrea prismatica alicubi firmiter inserta, alteraque sui extremitate pondere gravata, donec flecti inciperet, ope regulae studiose admotae comperisse, quod flexura (quae nihil videtur esse aliud, quam initialis fractio) subinde inchoarit in tertia parte longitudinis virgae ab insertione ejus, ac circa mediam longitudinem desierit. Quae iterum ut cum hypothesi Tua conciliarem, diu sed incassum laboravi.

Praecipuum vero tandem, quo de, Vir Amplissime, desiderarem instrui, modum concernit inveniendi figuras trabium, gravitationibus respondentibus ubique proportionaliter resistentium: quorsum spectans Problema huc redit, ut inveniatur curva ABC (fig. I) ejus naturae, ut □ ordinatarum AD, BF, se habeant, sicut trilinea ABCD, BCF, ducta in GJ, HL, distantias centrorum gravitatis ab AD, BF (si solum trabis pondus spectetur) vel sicut aggregata ex istis trilineis et communi quapiam quantitate data, ducta in distantias centrorum gravitatis horum aggregatorum (si praeter trabis pondus etiam onus P extremitati ejus C annexum in rationes venire debeat). Ubi levi quidem opera priorem casum expedio, si supponam portiones ABCB, BCF, ad circumscripta rectangula MD, NF eandem ubique rationem habere, quam vocabo $\frac{1}{z}$; simulque JG, LH longitudinibus DC, FC proportionales esse. Etenim posito AD = a, DC = b, BF = y, FC = x, manifestum,

ADq. BFq : : Tril. ABCD in DC. Tril. BCF in FC.

$$aa.\ yy\ ::\ \frac{abb}{z}\ .\ \frac{xxy}{z}.$$

id est : aa . yy : : abb . xxy; adeoque $\frac{bby}{a} = xx$; et propterea curvam ABC esse Parabolicam: sicut etiam si desideraretur, ut

trilinea ista ducta in distantias centrorum gravitatis se haberent, ut Cubi vel Biquadrata ordinatarum, ABC foret linea recta, vel paraboloidica ejus generis, cujus natura exprimitur per $y^3 = \frac{a^3xx}{bb}$ At in altero casu, ubi praeter trabis pondus etiam annexi oneris P habenda ratio est, non apparet, quo pacto exresolutione proportionis hujus aa . yy : : $\frac{abb}{z} + bP$. $\frac{xxy}{z} + xP$ natura quaesitae curvae elici possit: quia nunc litera z, quae et ipsa incognita est, non uti antea evanescit: quin imo ex hoc ipso non obscure conjicio, quaesitam figuram talem non esse, qualis supponitur, id est, cujus portiones ad circumscripta rectangula ubique eandem rationem habeant. Quare suspicor, Amplissime Vir, latere hic sublimioris cujusdam Geometriae vestigia, ad quae per vulgarem Cartesianam methodum nullus mihi hucusque patuit aditus. Illam volo Geometriam, cujus ope Tu cum Nobiliss. vestro Tschirnhausio circa quadraturam circuli dimensionesque aliarum curvilinearum tot tamque praeclara reperistis. Hujus vestrae methodi si aliqualem (quod impense flagito) impertiri mihi digneris radium, quantum per gravissima Tua negotia licebit, eo ipso facies, ut deinceps non nudus Tuorum Inventorum admirator, sed et dignus eorum aestimator ac praeco futurus sim. Huic vero desiderio si quid temeritatis subest, uti subesse fateor plurimum, ejus humillime a Te peto veniam, quam forte generosa Tua Humanitas non recusabit ei, quem solus discendi ardor temerarium fecit. Vale, Vir Amplissime, vitamque quam vivis, publico tam pretiosam tamque utilem, vive proporro diutissime etc.

Dabam Basileae 15. Dec. 1687.

II.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Vereor ne apud Te laboraverit existimatio mea, responso ad literas tuas humanitatis et doctrinae plenissimas Basiliae 15. Decembr. 1687 datas, nullo secuto; sed allatae sunt illae paulo postquam ego iter ingressus eram longinquum, ex quo hac demum aestate ineunte feliciter (Deo juvante) sum reversus, venere autem in manus hominis qui seposuit inter schedas suas, et postea ex memoria dimisit, nuper autem forte reperit reddiditque. Sed multum interest inter literas, quae nova in Scientiis, quarum aeternum objectum est, continent et quae de rebus humanis atque caducis tractant; hae mox veterascunt, illis etiam ex longo intervallo manet gratia novitatis. Itaque serum non esset ad Tuas responsum meum, si satisfaceret quaesitis; Ego vero ut in quibusdam aliquid ad rem fortasse contulero, ita in plerisque ad opem potius tuam confugio, ut collatis viribus expugnemus hanc naturae arcem. Omnino enim nondum mihi satisfacio circa Elasticas leges, et quod olim in Actis Lipsiensibus posui, extensiones esse ut vires tendentes, non ausim ultra hypothesin porrigere, quae quousque satisfaciat, Experimentis definiendum est, qualia instituere coepisti. Equidem pro causa Tensionis explicanda tale quid commentus olim eram. Fingamus corpora ex partibus constare ut A, B (fig. 2) quae vel tangant sese ubique et exacte, vel varias inter se sinuositates relinquant aperturasque seu hiatus, modo aperturae (ut C) tam sint exiguae, ut ambienti fluido crassiori introitum non permittant. Suppono porro talem esse statum vel motum ambientis, ut eo magis proportione turbetur, adeoque resistat, quo majus est spatium vacuum quod divellendo relinquitur inter A, B, D, E, seu quo majus est spatium, quod ipsi ambienti extrorsum adimitur. His positis utique sequitur ubique aequalem fieri tensionem seu disjunctionem inter particulas, seu tracto E a pondere F spatium vacuum in tantum augeri debere inter E et D, quantum inter D et B. Patet etiam aequaliter spatium vacuum augeri distantia particularum aequaliter aucta, sive exacte se tetigerint sive cum sinuositatibus. Patet denique etiam pondera seu vires extendentes fore ut extensiones. Sed si poneremus figuram ABDEF esse in vase aëre pleno vel aliquo fluido comprimibili analogo, et fingi divulsionem non esse tantam, ut ambienti pateat aditus; vel, in crassis et sensibilibus, adhiberi cylindros sibi insertos bene tornatos vel clausos ut in antliis, tunc observo non omnino vires impendendas fore ut extensiones, sed rem ita se habere: Sit Hyperbola L(L) (fig. 3) cujus centrum G et Asymptotos GK(K), erit aliquod Hyperbolae punctum J, ex quo ducatur in dictam asymptoton recta JH parallela alteri Asymptoto hic non ductae, et ex eodem puncto J ducatur recta JM(M) parallela ipsi Asymptoto dictae GK(K),

denique per puncta L in Hyperbola sumta ducantur rectae ordinatae KLM occurrentes ipsi GK(K) in K, ipsi M(M) in M, ajo si vires tendentes sint ut JM, extensiones fore ut ML, ut facile ipse colliges ex supposita aëris vel fluidi aequabili comprimibilitate, seu resistentia spatiis contentis reciproca, licet ea, ut (si bene memini) in tuo de aethere Tractatu observasti rigorose vera fortasse non sit. Tam diu autem in his hypothesibus aequaliter ubique continuatur extensio, donec partium divulsarum distantia aditum fluidi ambientis admittat, ubi sequitur ruptura. Verum dubitari potest in chordis quibus utimur, an non admixta sit extensioni alia compressio. Quemadmodum si fingeremus cylindrum haberi ex corio inflato per aërem immissum, et huic cylindro helicaliter circumligari filum, ipsum autem filum pondere adjecto extendi, patet concurrere fili extensionem et aëris inclusi compressionem. Et multa alia supponi possunt, ex quibus quid sit optimum experimenta definire debent. Caeterum quid ex hypothesi ambientis comprimibilis et lineae hyperbolicae JLL (in locum rectae prioris hypotheseos) adhibitae, in illa ratiocinatione quam Actis Lipsiensibus olim inserui consequatur variationis, facile supplebis conferesque tuis experimentis. Sane quantum primo obtutu judicari potest, magis iis respondet haec hypothesis; sit enim JP repraesentans duas libras et PQ ordinata hyperbolae respondeat novem partibus sedecimis pollicis quas ponis in tua Epistola; sit deinde JM repraesentans libras quatuor et rectam KM secet Hyperbola quidem in L, recta vero JQ producta in R; patet extensionem faciendam per 4 libras secundum priorem quidem hypothesin fore ut rectam MR particularum 18, sed secundum posteriorem fore ut ML paulo minorem, et ita porro semper magis magisque deficere. Observo tamen in Tabula tua aliquid, quod si constanter reperiretur verum aut vero propinquum continuatis experimentis, alia fabricanda esset hypothesis, nempe invenio excessus hypotheseos primae super experimenta procedere ut numeros quadratos. Tabula tua haec est:

Chorda a pondere librarum	2	extensa fuit partibus	9	extendenda juxta hyp. partibus	9
	4		17		18
	6		23		27
	8		27		36

ubi excessus hypotheseos sunt 0, 1, 4, 9, et differentiae numerorum experimento repertorum inter se, quae sunt 8, 6, 4, (seu

17—9, 23—17, 27—23) sunt progressionis Arithmeticae. Igitur si hypothesis comparandi Extensiones cum viribus extendentibus mutanda esset, mutari etiam deberet proportio virium a latere abrumpentium trabem ad vires eam directe evellentes. Non tamen hinc sequitur mutandam esse proportionem inter resistentias transversas seu laterales diversarum basium seu (fig. 5. ad Actorum Lipsiensium Mens. Jul. 1684) proportionem resistentiae baseos AB ad resistentiam baseos FG (fig. 4). Nam si ponamus trilinea BAEB, FGHF repraesentare resistentias basium AB, FG, patet trilineum BAEB esse ad trilineum FGHF ut quadratum AB ad quadratum FG, non tantum quando linea curva trilinei est Parabola Conica, quo casu trilineum est tertia pars quadrati circumscripti, sed et quando linea curva est Parabola altior seu Paraboloeides Cubica, vel quadrato-quadratica etc. ubi trilineum est quadrati circumscripti pars quarta vel quinta etc. Semper enim trilineum unum BAEB habet eandem rationem ad suum quadratum circumscriptum, quam alterum FGHF ad suum; adeoque trilinea manent ut quadrata AB, FG. Imo etsi ordinata trilinei utcunque composita esset additione vel subtractione ex ordinatis Paraboloeidum quotcunque, verbi gratia si trilineum BAEB vel FGHF aequaretur aggregato trilinei aeque alti et lati parabolici, quadratici (seu Conici) et cubici simul, idem manebit verum; et in universum similes figurae sunt in duplicata ratione homologorum laterum; jam omnis curvae ordinata exprimi potest per additas invicem aut subtractas ordinatas paraboloeidum saltem ope seriei infinitae, adeoque ex aggregatis aut residuis horum trilineorum et curvae trilineum componetur. Itaque manente proportione resistentiarum eadem quae quadratorum, subsistent nostrae de figuris aeque resistentibus demonstrationes.

Quod asserui unamquamque portionem trabis horizontalis gravitare super sectione communi cum reliqua portione, et ab ejus sectionis firmitate sustineri, id quidem non tam hypothesin esse arbitror, quam κοινὴν ἔννοιαν, nec ulla ratione in dubium revocari posse, idque temet puto agnoscere, si consideres. Certe pondus partis CFG (Fig. 4) ne agere quidem potest super AB, nisi praecedente ac mediante actione super FG, cujus firmitas connexionem facit. Nec puto Artificis vestri Observationem hoc evertere. Certe prius flectitur trabs nonnihil a pondere extremitati appenso, antequam actio ad extremitatem oppositam perveniat. Ego in ra-

tiocinationibus meis nolui considerare flexionem totius trabis, vel potius posui figuram a pondere per flexiones praecedentes jam ad eam figuram quam ei dedimus esse redactam, postquam ultra flecti notabiliter negat, vel omnino flexiones consideratu dignas non esse. Flexionum autem consideratio novae adhuc nec inelegantis operae foret. Caeterum materiae qualitas non permittit, ut quae de figuris aeque resistentibus demonstrantur, perfecte satis per experimenta exhiberi possint.

Venio ad postremum caput literarum tuarum, ubi recte notasti difficilius esse lineam ABC (fig. 1) pro trabe aequaliter resistente assignare, quando conjunguntur pondus trabis et pondus appensum vel impositum ut P et rationem quoque difficultatis optime animadvertisti. Nempe videtur figura debere esse talis naturae, ut (retinendo schema Epistolae tuae) quadrata ordinatarum FB sint proportionalia aggregatis ex trilineo CFB ducto in LH et plano constanti repraesentante pondus P, ducto in FC distantiam Centri Gravitatis ipsius P ab FB. Ego dum rem in gratiam Tui aggredior, incido in difficultates, quae me admonuere debite accommodandos esse quaesiti terminos remque ita, ut figura exhibet, esse impossibilem. Idque ipsum quod sine admonitione ista in mentem non venerat, mox facile animadverti; primum enim nego fieri posse ut figura in punctum C desinente appensoque trabi pondere P in C, trabs ubique aequaliter resistat, quod sic ostendo: in figura desiderata si talis esset figura CDABC, debet esse solidum ex plano repraesentante pondus P ducto in distantiam CF seu momentum ipsius P ex FB, una cum momento ipsius trilinei CFBC ex FB tanquam axe, aequale solido ex quadrato ipsius FB ducto in rectam constantem; sed sub initium cum abscissa est incomparabiliter parva ut CQ, adeoque et ordinata incomparabiliter parva QR, tunc momentum ipsius trilinei CQR ex axe QR est incomparabiliter parvum respectu momenti ponderis P, seu respectu plani alicujus assignabilis ducti in CQ. Ergo evanescit in additione et proinde idem est, sive dicas momentum ponderis P et momentum trilinei CQR simul sumta debere alicui rei aequari; sive potius dicas momentum ponderis P solum eidem ipsi rei aequari. Postulatur ergo tunc ut solidum factum sub plano constante assignabili (pondus P repraesentante) ducto in CQ incomparabiliter parvum aequetur solido facto ex quadrato CR incomparabiliter parvo ducto in rectam constantem assignabilem; sed hoc est absurdum, cum illud solidum sit hoc incomparabiliter majus, nempe QA in CQ est incomparabiliter majus quam QR quadrat. in Bb, posito a et b esse quantitates comparabiles, sed CQ et QR esse ipsis incomparabiliter minores; nisi vicissim QR esset incomparabiliter major ipsa CQ, cujus contrarium in parabola est verum, ubi sub initium (seu pro incomparabiliter parvis) CQ etsi ipsamet incomparabiliter parva est, tamen adhuc incomparabiliter major ipsa QA adeoque nec in curva nostra desiderata (quippe quae postremo imminuto continuo pondere P in parabolam evanescit) contrarium fieri potest, ut scilicet QR contra incomparabiliter major sit ipsa CQ. Cum ergo res desiderata praestari non possit sub initium pro partibus incomparabiliter parvis, nec poterit figura hoc generaliter praestans exhiberi. Sin putemus figuram posse reperiri quae praestet desideratum, at quae non in apicem desinat, sed sit quodammodo truncata ut SVDABS (fig. 5.) ex cujus extremo VS suspendatur pondus P, ajo ne sic quidem desideratum posse praestari ob contrariam causam. Nam finge pondus P suspendi ex T intervallo VT infinite vel incomparabiliter parvo, idem est, ac si suspensum esset ex V, verum eo casu cum pondus P assignabile agat in resistentiam seu firmitatem rectae VS itidem assignabilem, sed ope vectis VT incomparabiliter parvi, nihil aget, resistentiaque in VS ipsius respectu erit infinita, adeoque non ubique ejusdem rationis, cum initio sit infinita, alibi non item. Quod si pondus medio aliquo loco in trabe ex puncto suspendas, utique per se intelligitur nullam esse in figura uniformitatem rationum resistentiae et momenti. Uno tamen modo obtineri potest desideratum, quem nunc exponam, si scilicet pondus non suspendatur ab extremitate trabis, sed ei certa quadam ratione debita applicetur, quorsum me tandem ne cogitantem quidem ipsa duxit Analysis, quanquam potuissem praevidere sine calculo. Ajo igitur figuram exhiberi posse ubique aequaliter resistentem et proprio ponderi et alieno ipsi affixo, nempe a trabe trilinea parabolica CDABC resecetur trilinea aliqua portio apicem continens CVSC. Deinde corpus cylindricum (si placet) VTZ, cujus longitudo sit dimidia ipsius CV, affigatur trabi truncatae SVDABS, et ab ejus medio T suspendatur pondus P. Res autem ita temperetur, ut corpus VTZ una cum pondere P appenso aequetur ponderi ipsius portionis a trabe resectae CVSC. Hoc posito si modo corpus VTZ suam et ponderis P gravitatem sustinere possit firmiterque satis trabi affigatur,

de reliquo trabs truncata SVDABS aequaliter resistet et ponderi proprio et alieno VTZP. Quod sic probo: quando trilineum CVSC non erat resectum, tunc trabs SVDABS aequaliter resistebat et alieno ponderi, nempe trilinei CVSC et proprio, ex proprietate trilinei parabolici demonstrata. Jam pondus VTZP eodem modo gravitat, ut trilineum CVSC cum et pondere ei sit aequale, et eandem sui Centri gravitatis distantiam habeat ab FB (quocunque) quam trilineum. Nam Centrum gravitatis ipsius VTZP cadit in rectam normalem TP, et cum VT sit quarta pars ipsius CV ex constructione, patet centrum gravitatis trilinei CVSC cadere in eandem, aequivalent ergo hoc loco pondus VTZP et resecta trabis portio CVSC. Et hoc servire potest, quando trabs aliqua projecta ex muro aliquid in extremo sustinere debet; idem est si non in extremo, sed alibi, imo et in locis pluribus diversis simul pondera eadem vel diversa sint ferenda, modo ponderum ratio situsque ita temperetur, ut gravitatio ipsius trilinei parabolici debite imminuti per ipsa suppleatur. Ac proinde habebitur et solutio, si tota longitudo trabis aequaliter vel inaequaliter esset oneranda. Itaque huic certe quaesito aliisque connexis me puto satisfecisse. Sed ut figura detur quae desideratum praestet, quocunque pondere (etiam intra limites certos) fieri non potest nec tu quaesisti.

Quod superest Tibi velim persuadeas, Vir Clarissime, nihil mihi esse gratius, quam tui similibus, quibus curae est inquisitione veritatis augere humani generis opes, placere et conjunctis operis aliquid conferre posse ad praeclarissimum institutum. Cum igitur desideres aliquid lucis circa meam Analysin infinitorum, cujus in Actis specimina dedi, ego profecto velim, quicquid in hoc genere a me actum est vel ideo Tibi esse notum, ut perfici tua quoque ope possit, sed distantia locorum colloquio nos excludit et literis talia difficilius explicantur, praesertim cum nunc diversissimis distrahar cogitatis Historico-politicis quibus absolutis plus libertatis spero. Interim video ex Actis ubi Analysin curvae Isochronae exposuisti, intellecta esse Tibi methodi meae fundamenta; puto, et circa curvam catenariam me Tibi satisfacturum. Invitavi autem et alios in Actis ad hoc problema a Te propositum, ut experiar an et aliorum Methodi eo perveniant, praesertim D. Tschirnhusii mei qui de sua nuper methodo praeclara pollicitus est, sed ut intelligo queritur de calculi prolixitate; unde judico non aliam esse ejus Methodum, quam qua ego forte primus jam olim sum usus, cum Parisiis essemus, scilicet fingendo curvas generales, quas deinde comparo cum quaesitis, sed ea methodus praesertim quod et ipsa aliquid obstaculi patitur alicubi, Tabulis condendis sublevanda esset, alias nimis prolixa. Et sunt aliae magis directae facilesque, sed fateor nondum me quam opto perfectionem in hoc genere assecutum. Interim saepe desiderata consequor. Nuper Hugenius, Vir, ut non ignoras, in his studiis eminentissimus, duas lineas mihi quaerendas proposuit, quas inveni feliciter; scripsit ipse non parum se aestimaturum analysis meae rationem, si eo pertingat. Nimirum hac notandi ratione eandem opem Geometriae illi sublimiori vel Archimedeae affero, quam Vieta et Cartesius Euclideae et Apollonianae attulere, sed praeter vulgares affectiones, quae sunt potentiae et radices, adhibeo novas, quae sunt differentiae et summae; quomodo hac ratione Cycloidis aequationem exhibuerim in Actis Junii 1686, fortasse vidisti. Nec ulla mihi proponi potest Cycloidis proprietas, quam ope hujus aequationis non inde calculo demonstrem. Sic nullo negotio inde duces Tangentes, idemque est in aliis curvis. Sententiam tuam nosse velim circa meam demonstrationem contra Cartesianos de aestimatione virium a quantitate motus diversa. In Actis respondi Dno. Papino contradicenti, quod mentem meam non percepisset. Quae D. Fatio Duillier dedit contra D. Tschirnhusium, mihi jam innotuerant ex principio satis diverso et latius patente, et quod de centro gravitatis notavit, inveneram ratione plane diversa, aliaque Generaliora. Interim ego magni facio ingenium Viri et ab ipso quoque praeclara expecto. Est mihi in mente Analysis quaedam Geometriae propria toto coelo ab Algebra diversa, quae non procedit per aequationes, et suos usus habebit insignes. Nam Speciosa hactenus usitata proprie magnitudinis est seu numerorum, non situs seu figurarum; etsi situs obtorto collo ad eam revocetur. De ipsa Algebra Speciosa per artem combinatoriam perficienda spero dare quiddam ejusque ope explicare radices aequationum altiorum, nam aliae viae vel non procedunt vel sunt nimis prolixae, combinationibus autem Algebraicae expressiones mire contrahuntur. Et omnino Algebra est scientia ipsi combinatoriae (nempe scientiae de formulis in universum tractanti) subordinata, ejusque regulas applicat ad casum, quo per literas vel notas numeri indefiniti significantur. Sed finio etc.

Dabam Hanoverae 24 Septembr. 1690.

III.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Octennium est, ex quo primas ad Te literas dare ausus fui, et quinquennium, ex quo ad illas responsum a Te accepi. Ego (ut illo tempore adhuc hospes in Geometria fui, temeritatemque meam triennali silentio meritissime punitam vidi) diu mecum deliberabam, num rescribere auderem, tum quod Tumet ipse velle Te significasti, ut hac erga Te occupatissimum scribendi libertate parcius uterer, tum praesertim quod ea omnia, in quibus a Te instrui desideraveram, propriis interea meditationibus perspecta mihi evasissent. Huc accessit etiam maeror ex Tui paulo post offensione conceptus, qui me a scribendo aliquanto diutius retraxit; quo vehementius enim illam semper abhorrui nequitiam, quo quis ultro laedit eum cui gratias deberet, hoc acerbius dolebam, me in ejus apud Te suspicionem incidisse. Et quanquam nullius in Te pravi affectus conscius unquam mihi fuerim (quod ille novit qui novit omnia, quodque Tibi, si jubes, probare paratus sum narratione ejus, quod inauspicato illi de Tuis judicio in Acta relato ansam dederat) non potui tamen quin compellare metuerem, quem undecunque mihi offensum arbitrabar. Vixdum autem hunc metum posueram, ac Te mihi reconciliatum putabam, cum ecce novum ingruebat obstaculum, quod me fatali quadam quasi vi a Tui commercio hucusque arcuit. Morbum volo longe gravissimum, qui antehoc triennium me primum invasit, et non tantum per integrum semestre lecto me affixit, ac frequentioribus postea recidivis infestavit, sed et universam corporis mei oeconomiam sic turbavit, ut ejus reliquias in hunc usque diem circumferre, multoque acidularum et aliorum medicamentorum usu lenire cogar. Est vero quippiam, ut conjicio, cachectici ex bile et scorbuto conflatum, quod pessimam mixturam efficit, et praecipue vitae meditabundae et sedentariae adeo inimicum est, ut etiam horariae lucubrationi monitione destitutae non sine incommodo vacare liceat. Cui si adjungas nativum meum ad scribendum lentorem ac segnitiem non mediocrem, habebis fortasse quae diuturnum meum silentium apud Te utcunque excusabunt. Nescio vero, an et etiamnum haec obstacula superare potuissem, ni per fratrem certior factus essem, commercium literarium Tecum ineundum non tantum benignissime a

Te exceptum iri, sed optari quam maxime ac desiderari, ut haberes qui post suum discessum Tua in his oris negotia curanda in se susciperet. Ea namque, Vir Amplissime, Te veneratione prosequor, eo cultu et amore complector, ut nihil non molestiarum devorare malim, quam Tuis deesse servitiis. Praecipe itaque liberrime, si qua tuis usibus ac commodis prodesse potero; et experieris, neminem majore fide, promptitudine et alacritate jussa Tua executurum. Percontatus antehac ex me fuisti, quid sentirem de discrimine quod constituis inter quantitatem motus et virium. At quia video Tibi jam cum fratre hanc per literas controversiam agitari, nolo actum agere; credo enim ipsum mecum sentire, seu quod ego recte sentiam, seu quod ideis ab institutione mea sibi implantatis praeoccupatus mecum erret. Ego, ut verum fatear, nunquam capere potui, cur virium quantitatem aestimare malis ex longitudine itineris ab extrinseco impedimento (hic a gravitate) saepe minuendi, quam ex eo, quod in ipso ictus momento contingit; quod mihi perinde videtur esse, ac si quis globo e tormento majori in murum exploso minorem virium quantitatem tribueret, quam glandi sclopetariae quae murum transiliret. Nisi forte principium gravitatis velis esse quid intrinseci interpretandum de illo conatu, qui Tibi juxta nuperam sciagraphiam Tuae Dynamicae corporis essentiam ingreditur; quamvis in literis ad fratrem datis nec hoc mihi voluisse visus es.

Jacturam desideratissimi nostri Hugenii magnopere doleo, optoque, ut ejus posthuma in commodum rei Geometricae quantocyus cum publico communicentur. Memini Dethlevum Cluverium an. 1682 Londini mihi retulisse, illum mentis quandoque alienationem passum esse; quod ego tum ex sequiori affectu dictum existimabam; sed idem postea ab aliis mihi confirmatum fuit. Cum Cluverii mentionem facio, qui primus elegantissimae Tuae quadraturae circuli tum recens publicatae participem me fecit, succurrunt illa, quae hic Vir m. Jul. 1686, et Octob. 1687 velut in aenigmate proposuit; et quia sublime quid in iis latere suspicor, libenter de iis plenius edoceri cuperem. Magnum illo tempore in suis aedibus habebat typorum apparatum, quem ajebat operi cuidam Astronomico destinatum: an vero quippiam hoc Auctore prodierit, dubio procul Tu me melius nosti. Recordor etiam ejus, Vir Amplissime, quod habes in praefato Tuo Tetragonismo anni 1682 de Summa Progressionis Harmonicae per compendium invenienda. Avidissime

a Te expecto, si quid ejusmodi nosti; quia sentio rem in tota Geometria summae utilitatis fore. Ego saepius id aggressus sum, sed nihil inveni, quod compendii alicujus nomen mereatur. Aliud etiam est, cujus sciendi sum impatientissimus. D. Tobias Hollanderus, Ex-Consul Scaphusianus, nuper exemplaria nonnulla Tractatus alicujus Astronomici, cui nomen Amalthei dedit, hic distribui curavit, in quo prima Propositio sic habet: Data proportione radii ad peripheriam, invenire obliquitatem Eclipticae, ostenditurque medium proportionale inter ista duo secantem esse complementi obliquitatis Eclipticae: quod cum expertus essem quam accurate quadret, non potui non summopere mirari, nescius an casu hoc contingat, an vero a re necessariae veritatis pendeat, quod a liberrimo Creatoris arbitrio dependisse semper credidi. Multa ejusmodi habet alia, quae me prorsus attonitum reddiderunt. Puto autem esse Spleissiana. Quid Tibi de istis videatur, scire valde aveo. Si quae sit Physica, quae harum rerum necessitatem a priori demonstrare potest, eam fatebor omnium absolutissimam. Sed nolo Te hac vice diutius morari. Vale, Vir Amplissime, et ama etc.

Dabam Basiliae 9. Octobr. 1695.

IV.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Hanoverae 2. Decembr. 1695.

Gratissimae mihi Tuae fuere ex tanto intervallo, idque multis nominibus. Nam et semper Te feci plurimi nec dubitavi meditationes Tuas et publico prodesse posse et mihi. Duo autem displicent, quod Te video non optime valere, et quod me offensum Tibi putasti. Sed utinam tam facile esset priori malo mederi, quam mihi in proclivi est sinistram opinionem Tibi eximere. Equidem quod triennale silentium mihi tribuis ad primas duas, quomodo sese res habuerit, jam olim significavi. Advenere Tuae Hanoveram, cum ego inde digressus essem ad longum iter in Italiam usque, unde sesquianno demum transacto eram reversus: et cum pleraeque aliae mihi fuissent missae, Tuae tamen nescio quo casu haeserant neglectae, ita ut ad reversum etiam sero fuerint delatae. Acceptis mox respondi, explicatis morae causis, et sperabam excusationem meam Tibi innocentiae meae fidem fecisse, ne mihi elationem animi tribueres, a qua sum alienissimus, quasi, ut scribis, temeritas Tua longo silentio sit punita. Ego vero honori mihi literas Tuas duxi, et conatus sum satisfacere quantum tunc posse videbar, occupatissimus vel ideo quod reverso domum post longam absentiam magna rerum moles incumbebat. Et res ostendit, eo Te ingenio esse, ut facile per Te posses consequi quae in Actis posita explicari amplius desideraveras. Idque postea intelligere fuit mihi gratissimum. Itaque mire gravisus sum, ubi Te in adyta haec penetrasse vidi, quod inde multum fructus augurarer his literis speraremque Tua ope nostram methodum spargi magis posse et inclarescere, ut alii ex torpore excitarentur, in quo facit eos haerere vana opinio de analysi jam a Cartesio prope perfecta. Itaque omnem a me invidiam abfuisse velim Tibi persuadeas: ac ne hoc quidem poenitet, quod (ut poteram, si vacasset) expositis Tibi meis non impedivi, ne in partem hujus laudis venires. Nam etsi fortasse sic magis consuluisse videri possem meae gloriae, minus tamen consuluissem Reipublicae, quoniam quae prorsus aliena judicasses mereque ab alio communicata, excoluisses, credo, minore affectu, et minores progressus fecisses, quod ipsum fortasse non tam auxisset quam minuisset laudes meas (si tanti est etiam has curari) methodo nostra diu adhuc latitura in obscuro, si a me solo produci satis debuisset. Et tantus est candor Tuus, ut non neges, mea opera haec in lucem prodire coepisse. Quanquam autem nonnihil miratus fuerim, quod aliquando non satis discriminis agnoscere visus fuisses inter nostra et aliena, hoc tamen non malo animo, sed quodam judicio factum putabam; et mox ita mentem Tuam explicaveras, ut nisi morosus essem prorsus, non possem non contentus esse. Dissensus autem in quibusdam minutioribus quam mihi non displicuerit, vel inde intelligere potes, quod Tuis rationibus consideratis mea emendare non dubitavi alicubi, licet (quod pudet dicere, minus tamen mirareris si meas distractiones nosses) sero demum et occasione Epistolae ab ingeniosissimo fratre Tuo scriptae attentionem attulerim quam res postulabat. Sic igitur velim habeas, me vim ingenii Tui facere maximi, neque etiam de optima voluntate dubitare, adversa autem valetudine non mediocriter tangi. Atque utinam inciperent quibus licet, de Medicina constituenda cogitare attentius. Ego enim non dubito multa nos jam tum praestare posse, si saperemus, id est si vellemus cogitare quae maxime interest nostra. Itaque etiam Cl. Fratrem Tuum hortatus sum, ut subinde huc animum verteret, non quasi Clinicum fieri velim Medicum, quales vix sui amplius esse solent, sed quod putem ea aetate, eoque ingenio posse ab ipso in re Medica non hospite aliquid magni proficisci. Habetis vos in Helvetia viros egregios, et prae caeteris video jure merito Wepferum celebrari, quem adhuc in vivis esse puto. Certe Weselovius, collega meus et ad Comitia Ratisbonensia Electoris, tunc Ducis Brunsvicensis, Domini mei, ante aliquot annos ablegatus, Wepferi operam sibi salutarem apud me non potuit satis praedicare.

Circa summam progressionis harmonicae aliquid me consecutum puto, etsi non omne quod vellem. Sint verb. gr. summandi numeri progressionis harmonicae $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ etc. usque ad $\frac{1}{1000}$. Partiamur, si placet, in quinque partes, primam ab $\frac{1}{1}$ usque ad $\frac{1}{199}\left(\text{omisso } \frac{1}{100}\right)$, ab $\frac{1}{201}$ usque ad $\frac{1}{399}\left(\text{omisso } \frac{1}{300}\right)$, inde ab $\frac{1}{401}$ usque ad $\frac{1}{599}\left(\text{omisso } \frac{1}{500}\right)$, et ab $\frac{1}{601}$ usque ad $\frac{1}{799}\left(\text{omisso } \frac{1}{700}\right)$, et ab $\frac{1}{801}$ usque ad $\frac{1}{999}\left(\text{omisso } \frac{1}{900}\right)$, quibus deinde separatim addantur $\frac{1}{100}+\frac{1}{200}+\frac{1}{300}+\frac{1}{400}+\frac{1}{500}+\frac{1}{600}+\frac{1}{700}+\frac{1}{800}+\frac{1}{900}+\frac{1}{1000}$. Porro una ex his quinque partibus, veluti ab $\frac{1}{1}$ usque ad $\frac{1}{199}$ constabit ex $\frac{1}{100-1}+\frac{1}{100-2}+\frac{1}{100-3}$ etc. usque ad $\frac{1}{100-99}$ seu $\frac{1}{1}$; et $\frac{1}{100+1}+\frac{1}{100+2}+\frac{1}{100+3}$ etc. usque ad $\frac{1}{100+99}$ seu $\frac{1}{199}$. Jam

$$\frac{1}{100-1}=\frac{1}{100}+\frac{1}{100^2}+\frac{1}{100^3} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{100-2}=\frac{1}{100}+\frac{2}{100^2}+\frac{4}{100^3}+\frac{8}{100^4} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{100-3}= \text{etc.}$$ Et similiter

$$\frac{1}{100+1} = \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{100+2} = \frac{1}{100} - \frac{2}{100^2} + \frac{4}{100^3} + \frac{8}{100^4} \text{ etc.}$$

$\frac{1}{100+3} =$ etc. Atque ita si quamlibet fractionem per talem seriem exprimas, summa omnium ab $\frac{1}{1}$ usque ad $\frac{1}{199}\left(\text{excepto } \frac{1}{100}\right)$ redacta erit ad summas potentiarum a numeris integris ab 1 ad 99, quas non longe admodum continuare necesse est, cum altiores potentiae omitti possint. Et dimidiatur rursus labor ex eo, quod potentiae exponentis paris quippe ipsis v. gr. $\frac{1}{100-2}$ et $\frac{1}{100+2}$, sub contrariis signis communes, eliduntur. Itaque $\int \frac{1}{100-x} + \int \frac{1}{100+x}$ (usque ad ultim. $x = 99$) aequ. $\frac{2}{100}\int \overline{1 \text{ (seu 99)}} + \frac{2}{100^3}\int xx + \frac{2}{100^5}\int x^4$ etc. Simili modo et secunda pars summabitur. Nam $\int \frac{1}{300-x} + \int \frac{1}{300+x}$ (usque ad $x = 99$) $= \frac{2}{100}\int \overline{1 \text{ (seu 99)}} + \frac{2}{300^3}\int xx + \frac{2}{300^5}\int x^4$ etc. Eodem modo habebitur summa partis tertiae, quartae, quintae, quas et in unum addi facile est, et hoc inest commodi, quod $\int xx$, $\int x^4$, $\int x^6$, seu summae 99 potentiarum ab rusque ad 99 (quas jam in Tabula vel aliter haberi suppono) in quinque partibus eaedem manent. Et ita reperietur $\frac{2}{100}\int 1$ seu $99:50$ debere multiplicari per $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$, et $\frac{2}{100^3}\int x^2$ debere multiplicari per $\frac{1}{1} + \frac{1}{27} + \frac{1}{125} + \frac{1}{343} + \frac{1}{729}$ summam cuborum ab his quinque, et $\frac{2}{100^5}\int x^4$ per summam surdesolidorum ab iisdem quinque, et

$\frac{2}{100^7}\int x^6$ per summam septimarum dignitatum ab iisdem, et ita porro si sit opus. Caeterum perfectius aliquid a me optari, quod etiam theoriae magis satisfaceret, non dissimulo. Et aperiunt se nonnulla, sed quae satis examinare non licuit.

Pulcherrima haud dubie observatio est, sive Hollanderi, insignis ut apparet viri, sive, ut suspicaris, Spleissii, quem olim ab Ottio et Screta eximiis ingenio et doctrina tunc juvenibus mire mihi laudari memini, quod secans complementi obliquitatis Eclipticae sit proportione media inter radium et peripheriam circuli. Sed in causam inquirere tum maxime opus foret, si quod in via telluris ad circulationem suam relata deprehensum est, idem in caeteris planetis deprehenderetur. Caeterum quod addis, dubitare Te casu hoc contingat, an vero pendeat a re necessariae veritatis, quod a liberrimo Creatoris arbitrio dependisse semper antea crediderís, ea de re mihi videtur, etiam quae certis rationibus constant in mundo, a liberrimo Creatoris arbitrio proficisci; perfectissima enim libertas est sine ullo obstaculo ad optimum semper ferri; nec libertas est, sed servitus posse aberrare in delectu. Interim etsi omnia determinatis rationibus fieri credam, non tamen necessitatem eventibus impono, sed contingentiae sua jura conservo. Multumque interesse censeo ea in re inter Geometricam et Physicam veritatem, non tantum quoad nos, qui causas ignoramus, sed etiam in rebus ipsis. Quibus omnibus aliquam lucem afferre spero, ubi meditata circa res ab imaginatione separatas proferre potero, in quibus multa sunt inexpectatae, ut mihi videtur, claritatis et utilitatis, praesertim ad mentem nostram magis erigendam. Caeterum fac quaeso ut Hollanderi liber etiam apud nos innotescat.

Dethlevum Cluverium ob ingenium et doctrinam maximi facio, et doleo domesticis quibusdam negotiis quietem ejus perturbari. Inter annos aliquot mihi bis vel ter scripsit. In meditationibus ejus circa series non dubito quin aliquid lateat praeclari et fundi. Tametsi non videam, cur Archimedem et nos culpet, quod proinassignabilia negligimus, quod nec apud ipsum dissimulavi. Multum in calculo Astronomico laboravit. Sed nondum aliquid edidit, de quo doleo.

De controversia Dynamica, cujus meministi, gratissimum mihi semper erit intelligere judicium Tuum, et velim vacet Tibi satis considerare sententias meas; nunc enim quod de iis suspicari videris a me longissime abest. Saepe dixi omnia in natura fieri mechanice, atque adeo et gravitatem; sed causas intimas ipsarum mechanismi Legum puto a superioribus principiis Naturae insitis proficisci. Nolim etiam putes me virium quantitatem aestimare ex longitudine itineris, sed unice ex quantitate effectus quo consumuntur. Ubi nihil refert, quem effectum sumas, modo adhibeas mensuram quandam certam. Nam quod eundem effectum (vires consumentem) bis terve producendo demum vim suam consumit, id mihi virtute duplum triplumve est ejus quod vim suam consumit producendo eum non nisi semel. Itaque globus qui in plano horizontali decurrens quatuor Elastra inter se aequalia et similia eodem modo intendere potest, virtute quadruplus est ejus qui uno solo sic tenso redigitur ad quietem. Et quod vim habet attollendi unam libram ad pedem unum, dimidium est ejus quod potest hunc effectum praecise adhuc semel repetere, quod fit sive attollendo unam libram ad unum pedem, et eandem adhuc ad unum pedem; sive attollendo unam libram ad unum pedem, et simul adhuc aliam ad eundem pedem. Utrumque enim est attollere libram ad pedem, et libram ad pedem. Sed gravitate et Elastro sepositis (quorum rerum minus liquidae sunt causae, tametsi in Dynamicis de eorum causa solicitos nos esse necesse non sit) de simplici magnitudine et motu loquamur. Ubi similiter procedit regula mea de repetitione certae mensurae. Dico igitur potentiam quae quatuor corporibus inter se aequalibus dare potest certum velocitatis gradum, eumque eundem in unoquoque (sive simul sive successive, sive longo sive brevi tempore) quadruplam esse ejus, quae uni tantum corpori tali eundem gradum dare potest. Nam illa praecise quater efficit, quod haec semel. Consentiunt autem aestimationes inter se, quamcunque mensuram adhibeas exacte repetitam, nam potentia quae quadruplo corporum numero datam velocitatem dare potest, etiam datum grave ad quadruplam altitudinem attollere, vel quadruplum elastrorum numerum intendere potest. Sed eidem corpori quadruplam velocitatem dare non potest. Nam hoc non est mensuram (corpus simplum velocitatis simplae) quater repetere, cum modale tantum, scilicet velocitas, non vero simul et corpus repetatur. Unde etiam qui hoc potest, is plus multo quam prior, nempe corporibus celeritatem simplam dare potest, adeoque mensuram exacte repetit non quater, sed sedecies. Et majus est velocitatem multiplicare corpore non multiplicato ob inertiam corpo-

rum naturalem, ut Keplerus vocabat. Nam agunt substantiae quantum non noxia corpora tardant, ut Virgiliane loquar. Scilicet hic quoque vis unita fortior. Sed demonstrativa ratio aliunde patet. Quibus expensis forte agnosces me non tam perfunctorie de his cogitasse, quam videris suspicari; quod facere solet, ut demonstrationes aliorum minus attente examinemus. Neque vero in generalibus substiti, sed multas et difficiles circa motum quaestiones hinc solvi, in quibus aliorum principia, ni fallor, cessant. Omnino autem reperio, si vim meo more per effectum aestimes, semper eandem virium quantitatem manere; eandem autem quantitatem motus semper manere non posse. Sed de his omnibus nemo est, cujus judicium libentius audiam quam Tuum, modo id sine incommodo Tuo fiat. Vale et valetudinis inprimis rationem habe, ac me ama etc.

P. S. Skretam puto obiisse. Nihilne Ottius in studiis facit? Quid Facii Duillerii? Sed maxime quid Tu ipse? An mihi aliquando Analyseos nostrae novae descriptionem daturo, summittere inedita quaedam Tua vel etiam (quod ipsum non exiguum erit) editorum analyses velis, erit in Tua manu. Senties autem me facturum semper, ut Tuum Tibi tribuatur, alienissimumque me esse ab alienis laudibus involandis.

V.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Basiliae 4. Martii 1696.

Ex nuperis tuis ad me datis laetabundus intellexi, affectum Tuum erga me, nec longo meo silentio, nec aliis quae in me displicare forte poterant, refriguisse; id quod tot argumentis mihi persuades, ut morosus essem, si vel umbram scrupuli retinerem; tametsi et illud superfluum apud me fuisse credas velim, quippe qui Tuum ad primas meas silentium in meae qualiscunque excusationis, minime vero elationis, ut scribis, alicujus in Te argumentum attuli. Quanquam autem illo tempore nihil mihi fuisset optabilius, quam in pervestigandis Geometriae adytis manuductoris alicujus opera uti, qua multum et temporis et laboris lucri facere potuissem; gaudeo tamen nunc id subsidii mihi tum fuisse denegatum, quia Tecum existimo, nos ita comparatos esse, ut profundius semper ruminemus, majorique ut loqueris, affectu excolamus ea, quae ex propriis meditationibus, quam quae ex aliena institutione haurimus. Si quid ergo isthic aegre ferre debeo, hoc est, quod in Italiam petituro hac vel non longe abhinc transeundum Tibi fuerit, desideratissimo Tui aspectu et alloquio frui mihi non contigerit. Utinam vero id aliquando fiat, atque etiam per firmiorem valetudinem sperare liceat. Meam quidem ab aliquo tempore, per Dei gratiam, satis benignam sentio, at Tuae me sollicitudo tenet, de qua memini Te antehac tum in Actis, tum in literis ad Fratrem datis conquestum esse. Deus meliora!

Scretam Scafusianum recte putas obiisse, sed et obiit Wepferus, Practicus magni apud nos nominis et existimationis, idque jam ante annum et quod excurrit. Non dubito, quod si quis principia Mathematica ad Medicinam applicare vellet, is rem Medicam, immane quantum promovere posset. Hac nempe opinione motus, Auctor primum extiti Fratri, ut hoc studium amplecteretur et quam primum illud salutare inceperat, identidem illum stimulavi, ut pricincipia scientiae, quam a me didicerat, huc applicaret. Sed surdo fabulam: praevisa enim difficultate absterritus, vix de Fermentatione et de Motu musculorum quaedam dedit; quantillum autem istud est, satis ostendit, quid Medicus Mathesi adjutus possit. In partibus animalium solidis hoc abunde comprobavit Borellus, nec de fluidis videtur desperandum, cum naturam pressionis ipsorum satis quoque nunc compertam habeamus. De Fatziis Duilleriis nihil novi, nisi quod alter Londini sedem fixerit, alter a Fratre meo Tuum calculum edoctus, etiamnunc Genevae resideat. Ottius Dioptricis totus immersus est, et lentibus expoliendis aetatem consumit. Quam ante 25 annos sententiam Heidelbergae pro Cathedra defendit, de radiis per meros circulos ex uno puncto in aliud colligendis, etiamnunc urget. Tentavi aliquando hoc problema, sed prolixi calculi impatiens, iterum deserui. De causa Obliquitatis Eclipticae multa disseris, Vir Ampl. et quod etiam illa, quae certis rationibus in mundo constant a libero Creatoris arbitrio pendeant, ostendis, quae quidem ego nolo controvertere, attamen hoc non est, quod volo, sed peto tantum a Te, num existimes nexum inter obliquitatem hanc et circuli mensuram ab Auctore ejus casu tantum vel palpando inventam fuisse, an vero per Analysin vere

Geometricam inveniri potuisse credas. Librum ipsum proxime occasione nundinarum Francofurtensium submittam, una cum excerptis*) quibusdam ex Adversariis meis, quae aequi bonique consulas, rogo; alio tempore plura communicabo, sed mallem Ipse significes, quae Tibi submissa velis; quanquam dubitem, quicquam in iis contineri, quod Te dignum, Tibique non omne jam antea perspectum sit. Audio, brevi proditurum Tractatum aliquem Dn. March. Hospitalii de Calculo Differentiali (differentiali tantum, non summatorio) quod nuncio, ut Tua Tibi mature asserere festines, nec Te ab aliis praeveniri patiaris. Dedit et promisit Dn. D. T. nupero IXbri quaedam, quibus, si vera sunt omnia, vix praeclariora et utiliora in tota Geometria inveniri possunt. Secus sentiendum puto de Geometriae correctione, quam suscepit olim atque etiamnunc versat animo Dn. Cluverius. Is per literas, quibus me non ita pridem salutavit, sententiam meam super ea re percontatus est; cui rescripsi hunc in modum: Videas num bene! „Pour les „espaces Paraboliques (hoc enim Idiomate me compellarat) vous „avez raison de dire qu'elles sont comme $\frac{2N^2+1}{4N^2-1}$; mais lorsque „vous ajoutés, que tous les Geometres se sont trompés, pour les „avoir faites, comme $\frac{2N^2}{4N^2}=\frac{1}{2}$, je ne suis point du tout de vôtre „sentiment, parceque ces expressions $\frac{2N^2+1}{4N^2-1}$ et $\frac{2N^2}{4N^2}$ signifient „tout à fait une même quantité, lorsque N signifie un nombre „infini des parties. Pour être persuadé de cela, concevéz une de „ces parties encore divisible en deux autres, et par consequent, „leur nombre $P=2N$ (puisque les infiniment petits aussi bien „que les infiniment grands reçoivent du plus et du moins, comme „les grandeurs finies) et vous trouveréz par le meme Calcul les „Espaces Paraboliques, comme $\frac{2P^2+1}{4P^2-1}$; c'est à dire (à cause de „$P=2N$) comme $\frac{8N^2+1}{16N^2-1}$; donc $\frac{8N^2+1}{16N^2-1}$ et $\frac{2N^2+1}{4N^2-1}$ doivent „signifier une même raison, ou bien, les memes grandeurs auront „ensemble une plus grande et plus petite raison, ce qui est absurde.

*) Siehe die Beilage zu diesem Schreiben.

Quae de summa Progressionis Harmonicae in Tuis attulisti, valdopere me quidem affecerunt, nec satis initio mirari potui summam Tuam dexteritatem, facilitatemque in transmutandis varieque ad nutum Tuum detorquendis numeris; sed tamen re penitius inspecta deprehendi, Te hoc conatu parum, imo nihil compendii consecutum esse; nec magis scopo appropinquari nova hac serie, in quam propositam $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \ldots\ldots \frac{1}{1000}$ convertis, quam simplici additione totidemmet terminorum ipsius propositae; quod sic ostendo: Quia docente Wallisio, posita maxima $x = 99$, $\int xx$ fere $= \frac{x^3}{3} = \frac{99^3}{3}$, et $\int x^4$ fere $= \frac{x^5}{5} = \frac{99^5}{5}$ et $\int x^6$ fere $= \frac{x^7}{7} = \frac{99^7}{7}$ etc. erit

$$\begin{array}{l}
\frac{2\sqrt{1}}{100}\,\mathrm{M}\,\overline{\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}} \\
\frac{2\sqrt{xx}}{100^3}\,\mathrm{M}\,\overline{\frac{1}{1} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3}} \\
\frac{2\sqrt{x^4}}{100^5}\,\mathrm{M}\,\overline{\frac{1}{1} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5}} \\
\frac{2\sqrt{x^6}}{100^7}\,\mathrm{M}\,\overline{\frac{1}{1} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7}} \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{array}$$

$\frac{2\sqrt{1}}{100} + \frac{2\sqrt{xx}}{100^3} + \frac{2\sqrt{x^4}}{100^5} + \frac{2\sqrt{x^6}}{100^7}$ etc. fere $= \frac{2.99}{1.100} + \frac{2.99^3}{3.100^3} + \frac{2.99^5}{5.100^5} + \frac{2.99^7}{7.100^7}$ etc. neglecta viz. multiplicatione per factores terminorum alteros $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ etc. quippe qui sensibiliter brevi in unitatem abeunt. Sed et fractiones $\frac{99}{100}$, $\frac{99^3}{100^3}$, $\frac{99^5}{100^5}$ etc. ab unitatibus sensibiliter non differunt, nec nisi post 34^{tum} terminum ad $\frac{1}{2}$ decrescunt. Idcirco series ista fere convenit cum hac $\frac{2}{1} + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7}$ etc. atque sic in eandem seriem harmonicam relabimur, cujus summam initio per compendium quaerere studebamus. Caeterum si acquiescere velimus aliquali tantum approximatione nec accurata summa quaeratur, possumus simplici additione paucorum terminorum rem satis longe provehere, hoc vel simili modo utendo. Addantur si placet decem primi termini

eritque $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \mathrm{A} = \frac{7381}{2520}$; hinc pro singulis sequentium decem terminorum ab $\frac{1}{11}$ usque ad $\frac{1}{20}$ ponatur $\frac{1}{10}$, adeoque pro omnibus $\frac{10}{10} = \frac{1}{1}$, ita etiam pro 10 seqq. ab $\frac{1}{21}$ ad $\frac{1}{31}$ ponantur $\frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, et pro seqq. ab $\frac{1}{31}$ ad $\frac{1}{40}$ substituantur $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$ etc. et ita consequenter usque ad $\frac{1}{100}$, adeo ut summa terminorum ab $\frac{1}{11}$ ad $\frac{1}{100}$ fiat $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \mathrm{A} - \frac{1}{10}$, justo major. Eadem ratione ponantur pro singulis terminorum ab $\frac{1}{101}$ ad $\frac{1}{200}$ totidem $\frac{1}{100}$, et pro singulis ab $\frac{1}{201}$ ad $\frac{1}{300}$ totidem $\frac{1}{200}$, atque ita porro usque ad $\frac{1}{1000}$; quo pacto summa terminorum ab $\frac{1}{101}$ ad $\frac{1}{1000}$ fiet ut antea $= \mathrm{A} - \frac{1}{10}$ justo quoque major; ideoque summa omnium mille terminorum ab unitate fiet $\mathrm{A} + \mathrm{A} - \frac{1}{10} + \mathrm{A} - \frac{1}{10} = 3\,\mathrm{A} - \frac{1}{5} = 8\frac{493}{840}$ justo major. Iterum pro terminis ab $\frac{1}{11}$ ad $\frac{1}{20}$ ponantur totidem $\frac{1}{20}$, et pro terminis ab $\frac{1}{21}$ ad $\frac{1}{30}$ totidem $\frac{1}{30}$ etc. ut et pro terminis ab $\frac{1}{101}$ ad $\frac{1}{200}$ totidem $\frac{1}{200}$; et ab $\frac{1}{201}$ ad $\frac{1}{300}$ totidem $\frac{1}{300}$ etc. qua ratione summa terminorum ab $\frac{1}{11}$ ad $\frac{1}{100}$ fiet $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} = \mathrm{A} - 1$, quanta quoque erit summa terminorum ab $\frac{1}{101}$ ad $\frac{1}{1000}$, sed utraque justo minor; unde et summa omnium mille terminorum obtinetur $\mathrm{A} + \mathrm{A} - 1 + \mathrm{A} - 1 = 3\,\mathrm{A} - 2 = 6\frac{661}{840}$

justo minor. Vera ergo summa progressionis cadit inter limites $8\frac{493}{840}$ et $6\frac{661}{840}$; Imo inter medium horum Arithmeticum $7\frac{577}{840}$ et minorem $6\frac{661}{840}$, cum ostensu facile sit, summam veram propius accedere debere limiti inferiori quam superiori. Et certum est, Tuae progressionis additionem per quam plurimos terminos continuandam esse, priusquam limitem hunc assequatur; praeterquam etiam quod nullum limitem in excessu suppeditare potest: Verumtamen ista omnia ad Praxin parum subsidii afferre possunt.

Circa Controversiam Dynamicam mentem Tuam ita nunc demum explicuisti, ut facile mihi sit perspicere, ubi error lateat. Vis quantitatem virium aestimandam esse ex quantitate effectus, id est, ut explicas, ex numero elastrorum, quorum tensione absumuntur. Non repugno. Supponis item, corpus dupla cum celeritate sursum nitens quadruplam emetiri altitudinem, priusquam tota absumatur. Et hoc verissimum. Sed cum existimas, propterea quadruplum intendi elastrorum numerum, hoc vero Tibi concedere non possum, nisi velis materiam horum elastorum quae gravitatem efficit spectandam esse velut quiescentem ac passive tantum resistentem; quemadmodum sane perspicuum est, globum in plano horizontali decurrentem, tantundem aëris si hic quiescat in itinere suo offendere, quantum ipse spatii in illo confecerit. At talis hypothesis naturae gravitatis manifeste repugnaret, cum ex illa non ostendi posset, cur gravia sursum projecta finito ascensu deorsum repellenda essent. Ponamus igitur, quod res est, quodque nosti jam ab Hugenio observatum esse, materiam elasticam, quam gravitatis causam esse volumus, rapidissime deorsum ferri, et in gravia sursum projecta magna celeritate impingere, imo celeritate infinities majore illa quam corpora naturalia descendendo acquirere possunt (id enim nisi supponatur, cessabit tandem omnis gravium acceleratio, quod ipsum est contra Galilaei hypothesin, in qua tamen commune nostrum principium de ascensu quadruplo cum dupla celeritate peragendo fundatur) ponamus, inquam, ista, et plana erunt omnia. Nam ob celeritatem infinite magnam materiae gravitatem efficientis tantundem est, ac si grave sursum projectum quiesceret, et, si quiescit, liquet numerum elastrorum in illud impingentium tempori proportionalem esse; unde duplo tempore, quo corpus dupla cum velocitate sursum tendens, quadruplum spatium emetitur, duplum tantum ela-

strorum numerum ostendit, duplamque adeo quantitatem virium impendit, non quadruplam ut Tu voluisti. Et considerandum est, quod si materia gravitatem efficiens, ut quiescens spectaretur, ejusque resistentiae, hoc est, decrementa velocitatum in corporibus sursum projectis ponerentur in ratione seu simplici, seu verius duplicata harum velocitatum, nunquam accidere posset, ut corpus dupla cum celeritate moveri incipiens, seu duplo seu aequali tempore quadruplum spatium conficeret; quod tamen experientia confirmat, Tuque pro principio assumpsisti. Quorum omnium veritatem puto Te agniturum, si vel leviter ad haec attendere graviora Tibi negotia permiserint. Utinam vero totus noster esses, nec tam diversis studiis distraherereris! singulis imo pluribus Te parem esse scimus et sentimus, at omnibus non potest fieri quin obruaris, nec Tu dees ulli rei, sed tempus deest Tibi. Tametsi fortassis ego, qui sum tardiusculus, comprehendere nequeam, quid natura valeat in homine extraordinario, qualem Te universus orbis literatus meritissime suspicit. Et sane aliquando cum fratre miratus fui, quod responsum a Te ad suas acceperit, et diffusissimum simul et subtilium speculationum refertissimum, cui parando, habita ratione temporis, quo id acceperat, vix νυχθήμερον Tibi suppetiisse aestimaveramus. Sed et aliud est et praecipuum, cur vellem Tibi temperares; metuo Tuae valetudini, quam conservari omnium interest; hanc igitur, Vir Eximie, supra omnia cura, et vale, meque ceu facis, ama etc.

P. S.

Meminit Nob. Dn. Tschirnh. in 2.a editione Medicinae Mentis, p. 186. machinae cujusdam Arithmeticae, cujus Te inventorem praedicat. Valdopere me obstringes, si qua in re illa consistat, mihi patefeceris.

Beilage.

I. Numerum quemcunque surdum seu irrationalem $\sqrt{n}$ vel $\sqrt{cn}$*) etc. per infinitam seriem rationalium exprimere.

Convertatur numerus n in fractionem hujus formae $\frac{a}{a-b}$. Haec fractio (ut et ejus $\square^{tum}$, Cubus, Biquadr. etc.) convertatur per divisionem artificiosam in series, hoc pacto: Harum serierum per-

*) d. h. $\sqrt[3]{n}$.

pendicularium primi termini sunt unitates, secundi numeri naturales, tertii trigonales etc.

Expon. potest.	Potestates.
0	$1 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0$ etc.
$\frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{a}{a-b}} = 1 + \frac{b}{2a} + \frac{1.3bb}{2.4aa} + \frac{1.3.5b^3}{2.4.6a^3} + \frac{1.3.5.7b^4}{2.4.6.8a^4}$ etc.
1	$\frac{a}{a-b} = 1 + \frac{b}{a} + \frac{bb}{aa} + \frac{b^3}{a^3} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^5}{a^5}$ etc.
$1\frac{1}{2}$	$\frac{a}{a-b}\sqrt{\frac{a}{a-b}} = 1 + \frac{3b}{2a} + \frac{3.5bb}{2.4aa} + \frac{3.5.7b^3}{2.4.6a^3} + ..$
2	$\frac{aa}{\square\, a-b} = 1 + \frac{2b}{a} + \frac{3bb}{aa} + \frac{4b^3}{a^3} + \frac{5b^4}{a^4} + \frac{6b^5}{a^5}$ etc.
$2\frac{1}{2}$	
3	$\frac{a^3}{C.\,a-b} = 1 + \frac{3b}{a} + \frac{6bb}{aa} + \frac{10b^3}{a^3} + \frac{15b^4}{a^4} + \frac{21b^5}{a^5}$ etc.
$3\frac{1}{2}$	
4	$\frac{a^4}{B.\,a-b} = 1 + \frac{4b}{a} + \frac{10bb}{aa} + \frac{20b^3}{a^3} + \frac{35b^4}{a^4} + \frac{56b^5}{a^5}$ etc.

hinc ad inveniendas potestates intermedias, seu radices (quarum exponentes sunt intermedii inter exponentes integros) numeri terminorum figurati sunt interpolandi, juxta doctrinam Wallisii prop. 172 seqq. Arithm. Infinitor. unde habetur

$\sqrt{n}$ seu $\sqrt{\frac{a}{a-b}} = 1 + \frac{b}{2a} + \frac{1.3bb}{2.4aa} + \frac{1.3.5b^3}{2.4.6a^3} + \frac{1.3.5.7b^4}{2.4.6.8a^4}$ etc.

et $\sqrt{C.n}$ seu $\sqrt{C.\frac{a}{a-b}} = 1 + \frac{b}{3a} + \frac{1.4bb}{3.6aa} + \frac{1.4.7b^3}{3.6.9a^3} + \frac{1.4.7.10b^4}{3.6.9.12a^4}$ etc. et $\sqrt{n^3}$ seu $n\sqrt{3}$ (cujus postestatis exponens est $1\frac{1}{2}$) $= 1 + \frac{3b}{2a} + \frac{3.5bb}{2.4aa} + \frac{3.5.7b^3}{2.4.6a^3} + \frac{3.5.7.9b^4}{2.4.6.8a^4}$ etc. et sic consequenter.

II. Invenire rationem y ad x applicatae ad abscissam in curvatura laminae, cujus aequatio differentialis est $dy = \frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}}$.

Convertantur potestates quantitatis $\frac{x^4}{a^4-x^4}$ in series (ut factum proposit. praeced.) hoc pacto:

Expon. potest.	Potest.
0	$1 = 1 + 0 + 0 + 0 + 0$
$\frac{1}{2}$	$\frac{xx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}}{2.4.6a^{14}} + \frac{1.3.5.7x^{18}}{2.4.6.8a^{18}}$ etc.
1	$\frac{x^4}{a^4-x^4} = \frac{x^4}{a^4} + \frac{x^8}{a^8} + \frac{x^{12}}{a^{12}} + \frac{x^{16}}{a^{16}} + \frac{x^{20}}{a^{20}}$ etc.
$1\frac{1}{2}$	
2	$\frac{x^8}{\square\, a^4-x^4} = \frac{x^8}{a^8} + \frac{2x^{12}}{a^{12}} + \frac{3x^{16}}{a^{16}} + \frac{4x^{20}}{a^{20}} + \frac{5x^{24}}{a^{24}}$ etc.
3	$\frac{x^{12}}{C.\,a^4-x^4} = \frac{x^{12}}{a^{12}} + \frac{3x^{16}}{a^{16}} + \frac{6x^{20}}{a^{20}} + \frac{10x^{24}}{a^{24}} + \frac{15x^{28}}{a^{28}}$ etc.

hae series interpolentur inter 0 et 1^am^ potestatem, ut habeatur potestas dimidia

$$\frac{xx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{xx}{aa} + \frac{1x^6}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}}{2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{14}}{2.4.6a^{14}} + \frac{1.3.5.7x^{18}}{2.4.6.8a^{18}} \text{ etc.}$$

quare $dy = \frac{xxdx}{\sqrt{a^4-x^4}} = \frac{xxdx}{aa} + \frac{1.x^6dx}{2a^6} + \frac{1.3x^{10}dx}{2.4a^{10}}$ etc. eorumque integralia $y = \frac{x^3}{3.aa} + \frac{1.x^7}{7 \text{ in } 2a^6} + \frac{1.3x^{11}}{11 \text{ in } 2.4a^{10}} + \frac{1.3.5x^{15}}{15 \text{ in } 2.4.6a^{14}}$ etc.; hinc si $x = a$ et utraque $= 1$, erit $y = \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \text{ in } 7} + \frac{1.3}{2.4 \text{ in } 11} + \frac{1.3.5}{2.4.6 \text{ in } 15} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8 \text{ in } 19}$ etc.; sic spatium, cujus rectificatione construitur curva elastica, est $ay = \frac{x^3}{3 \text{ in } a} + \frac{1x^7}{7 \text{ in } 2a^5} + \frac{1.3x^{11}}{11 \text{ in } 2.4a^9} + \frac{1.3.5x^{15}}{15 \text{ in } 2.4.6a^{13}}$ etc.

Haud absimiliter invenitur ratio s ad x, ipsius curvae ad abscissam, per seriem:

$$ds = \frac{aadx}{\sqrt{a^4-a^4}} = dx + \frac{x^4dx}{2a^4} + \frac{1.3x^8dx}{2.4a^8} + \frac{1.3.5x^{12}dx}{2.4.6a^{12}}$$

$+ \frac{1.3.5.7x^{16}dx}{2.4.6.8x^{16}}$ etc. adeoque $s = x + \frac{x^5}{2 \text{ in } 5a^4} + \frac{1.3x^9}{2.4 \text{ in } 9a^8} + \frac{1.3.5x^{13}}{2.4.6 \text{ in } 13^{12}}$ etc. et posito $x = a = 1$ reperitur $s = 1 + \frac{1}{2 \text{ in } 5} + \frac{1.3}{2.4 \text{ in } 9} + \frac{1.3.5}{2.4.6 \text{ in } 13} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8 \text{ in } 17}$ etc.

III. Theorema Cat-Optricum. Diametro (fig. 6) BM = $\frac{1}{2}$BF (quae radius est circuli curvam BCG in B osculantis) describatur circulus ABCM, et radiet punctum A in puncta curvae cujusvis BCG in distantia B, C, per radios AB, AC; dico, si punctum A fuerit in peripheria circuli BCM, radios reflexos BI, CH fore parallelos: si extra circulum, convergentes: si intra, divergentes. Et reciproce, si radii incidentes contigui IB, HC sint paralleli, coibunt ipsorum reflexi BA, CA in puncto aliquo circuli BCM etc.

Demonstrat. Productae sint particulae curvae in tangentes DBCL, ECG, eritque LBI = DBA = BAC + BCA = BMC (2BFC) + BCA = 2ECD + BCA = ECD + ECA = LCG + GCH = LCH. Ergo BI parallela CH. Quod si autem sit intra circulum, erit DBa $\sqsubset$ DBA = LBI, quare divaricabitur a CH. Sin α sit extra circulum, erit DBα $\sqsupset$ DBA = LBI, quare coibit cum CH. Q. E. D.

Coroll. Hinc possunt inveniri puncta Causticae: Nam quia BF = 2 BM, et ang. BAM rectus, hinc ex F centro circuli osculatoris tantum perpendicularis FI vel FP demittenda in radium incidentem BI, vel reflexum BP, determinabitque dimidia BI vel BP punctum A in Caustica: puta si radii incidentes BI, CH fuerint paralleli.

Quod si punctum A (fig. 7) radiet ex finita distantia, et radiorum reflexi convergant, erit BAC + BHC = 2BFC. Demonstr. BAC + BHC = DBA (LBH) — DCA + BHC = LBH — ECA + ECD + BHC = LBH — GCH + LCG + BHC = LCH — BHC — GCH + LCG + BHC = LCH — GCH + LCG = LCG + LCG = 2LCG = 2BFC. Q. e. d. Hinc inveniri potest relatio puncti H ad punctum F ita: Quia BAC = BMC, et BHC = BPC, erit BMC + BPC = 2BFC; sed BMC. BPC :: CP. CM (in infinite parvis) hoc est, BMC = $\frac{CP \times BPC}{CM}$ et BFC. BPC :: CP. CF, hoc est, BFC = $\frac{CP \times BPC}{CF}$, quare BMC + BPC $\left(= \frac{CP \times BPC}{CM} + \frac{CM \times BPC}{CM}\right) = \frac{2CP \times BPC}{CF}$, hoc est $\frac{CP+CM}{CM} = \frac{2CP}{CF}$, hoc est CP = $\frac{CM \times CF}{2CM - CF}$ et quia CP . CH :: CM . CA, erit CH = $\frac{CA \times CF}{2CM - CF}$. Constr. Ex puncto radiante A ducatur ad CF

ipsa AM normalis radio luminis AC, et fiat CH = $\frac{CA \times CF}{2CM - CF}$ eritque H in caustica.

IV. Quadratura Curvae $y^4 - 6aayy + 4xxyy + a^4 = 0$, quae eadem est cum illa quam Cel. Dn. Leibnitius D. D. T. proposuit 1687 p. 525 (Act. Erudit.).

Analys. $y^4 = 6aayy - 4xxyy - a^4$,

$$yy = 3aa - 2xx - \sqrt{8a^4 - 12aaxx + 4x^4}$$

$$y = \sqrt{3aa - 2xx - \sqrt{8a^4 - 12aaxx + 4x^4}} = \sqrt{2aa - xx} - \sqrt{aa - xx},$$ unde $ydx = dx\sqrt{2aa - xx} - dx\sqrt{aa - xx}$.

Construc. Curvae. Super latere et Diagonio quadrati AQ (fig. 8) ceu radiis describantur duo quadrantes AKPH et ALQI, et ducantur MN, OP parallelae ipsi QH iisque fiant aequales DS, GT eruntque puncta S, T ad curvam quaesitam RSTV.

Demonstr. AH = a, AG = x, GT = y, erit AJ = $\sqrt{2aa}$, PG = $\sqrt{aa - xx}$, OG = $\sqrt{2aa - xx}$, proinde y = GT = OP = OG — PG = $\sqrt{2aa - xx} - \sqrt{aa - xx}$. Unde ARVH = spatio LOQHPK, sed hoc quadrabile, aequale nempe ΔQKH, quandoquidem si ab utroque subtrahatur trilineum commune KQHPK, relinquitur semisegmentum LOQKL et segmentum KPHK, quae aequalia sunt, cum illius duplum huic simile sit, ejusque duplum ob circulum circuli duplum. Sed praeter hoc spatium integrum LOQHPK seu AHVTR infinita alia duabus applicatis intermediis intercepta (qualia MOPN seu DGTS) quadrari possunt, dummodo arcus MO similis sit semissi arcus NP, tum enim ob circulum circuli duplum, segmentum quoque segmenti duplum erit, ac proinde semisegmentum MOW = integro segmento NP, additoque communi quadrilineo XOPN, erit MOW + XOPN (= MOX + ΔMXW + XOPN) = ΔMXW + MOPN = trapezio XOPN, ergo MOPN (= DGTS) = Trapezio XOPN — ΔMXW.

Porro ductae sint AM, AN, AO, AP; et NB ipsi AM, PE ipsi AO parallelae, et ang. BNC fiat ipsi ANB seu NAM, ut et EPF ipsi APE seu PAO aequalis: quo facto, si ang. CND et FPG sint aequales, erit duplum arcus MO simile arcui NP.

Demonstr. NAM + AMN = AND = ANC + CND = 2ANB (2NAM) + CND, ergo AMN = NAM + CND, et AMN — NAM = CND.

Eodem ratiocinio colligitur ang. FPG (CND) $=$ AOP $-\frac{1}{2}$PAO, unde AMN $-$ NAM $=$ AOP $-$ PAO $=$ AYD $-$ PAO $=$ AMN $+$ OAM $-$ PAO, quare OAM $=$ PAO $-$ NAM, et OAM $+$ NAM ($=$ OAN $+ 2$NAM) $=$ PAO, adeoque 2OAN $+ 2$NAM ($= 2$OAM) $=$ PAO $+$ OAN $=$ PAN. Q. E. D.

Jam sit anguli CND vel FPG sinus s, sinus compl. t sumto AH $=$ a pro radio:

$$\begin{array}{l|l}
OG \,.\, AG :: PG \,.\, EG & t \,.\, s :: (PG \,.\, GF) :: \sqrt{aa-xx} \,.\, \frac{s}{t}\sqrt{aa-xx} \\
\sqrt{2aa-xx} \,.\, x :: \sqrt{aa-xx} \,.\, x\sqrt{\frac{aa-xx}{2aa-xx}} & t \,.\, a :: (PG \,.\, PF) :: \sqrt{aa-xx} \,.\, \frac{a}{t}\sqrt{aa-xx} \\
EF = EG - GF = x\sqrt{\frac{aa-xx}{2aa-xx}} - \frac{s}{t}\sqrt{aa-xx} & AE = AG - EG = x - x\sqrt{\frac{2aa-xx}{aa-xx}}
\end{array}$$

$$AE \,.\, EF :: AP \,.\, PF$$

$$x - x\sqrt{\frac{aa-xx}{2aa-xx}} \,.\, x\sqrt{\frac{aa-xx}{2aa-xx}} - \frac{s}{t}\sqrt{aa-xx} :: a \,.\, \frac{a}{t}\sqrt{aa-xx},$$

unde habetur $\overline{s+x}\sqrt{2aa-xx} - x\sqrt{aa-xx} = tx$, quadratisque membris, positoque aa pro $ss+tt$, et facta divisione per $s+x$, oritur $aas + aax - x^3 = x\sqrt{2a^4 - 3aaxx + x^4}$, unde porro $x^4 - 2sx^3 - aaxx + 2aasx + aass = 0$: Quare si fiat curva AZ$\alpha$H hujus naturae, ut si AG $=$ x, et Gα $=$ s, sit $x^4 - 2sx^3 - aaxx + 2aasx + aass = 0$, ac deinde ducatur quaevis Zα parallela ipsi AH, sic ut DZ $=$ Gα $=$ s, erit spatium DGTS quadrabile, nempe $=$ trapezio XOPN $-\Delta$MXW. Nota, sumpta Aβ $= a\sqrt{\frac{2}{3}}$, erit $\beta\gamma = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}A\beta$, maxima applicatarum.

V. Solutio Problematis de Minimo Crepusculo.

Sit (fig. 9) BLZ horizon, MER ejus parallelus 18 gradibus infra illum depressus, PDM aequator; ZE, QR ejus paralleli versus polum Australem W; WQ, WZ, et WR, WE circuli declinationum; ZP vel EV arcus declinationis paralleli ZE: Jam si sol describens parallelum ZE efficiat crepusculum minimum, erit mora solis in ZE brevissima, hoc est, brevior mora in DM vel CA, adeoque differentia morae solis in parallelis contiguis ZE, QR nulla, cumque et morae in ZS et TR differentia nulla sit, eodem quoque tempusculo SE et QT pertransibuntur, ac propterea ipsi arculi SE, QT erunt ut celeritates, quibus percurruntur, hoc est, ut radii parallelorum ZE, QR, hoc est, propter infinite parvam distantiam parallelorum, dicti arculi erunt aequales, et quia SR, ZT quoque sunt aequales, et anguli ESR, ZTQ recti, erunt et ang. SER, TQZ $=$ GQC $=$ HZC aequales, et proinde (ob VES, PZH rectos) ipsi GEV, DZP quoque aequales (posito EGB esse quadrantem circuli maximi, tangentem parallelum Horizontis MEA in E) quare cum et GVE, DPZ sint recti, et arcus VE, PZ aequales, erunt et arcus EG, DZ et anguli EGV, ZDP seu BDG aequales; unde cum in ΔBDG, sin. ang. BDG sit ad sin. ang. BGD $=$ sin. ang. VGE $=$ sin. ang. BDG, ut sinus arcus BG ad sin. arcus BD, erunt hi duo arcus aequales semicirculo, et ducto arcu EL ad utrumque normali, unius defectus infra quadrantem GE, aequalis alterius excessui supra quadrantem LD; quocirca cum et anguli ΔLFD singuli sint aequales singulis ΔFEG, erit et LF $=$ FE $= \frac{1}{2}$LE $=$ 9 gr. et quia, ut ostensum, LD $=$ GE $=$ DZ, hinc in trinangulis DPZ, DLF sic operaberis:

$$\begin{array}{ll|llll}
\text{sin. tot.} & = r & \text{sin. tot.} \,. & \text{Tang. compl. ang. LDF} :: & \text{Tang. LF} \,. & \text{sin. LD (DZ)} \\
\text{Tang. LF } 9^0 & = a & r \,. & d :: & a \,. & \frac{ad}{r} \\
\text{sin. ang. LDF} & = b & \text{sin. tot.} \,. & \text{sin. DZ} :: & \text{sin. PDZ (LDF)} \,. & \text{sin. PZ} \\
\text{sin. compl.} & = c & r \,. & \frac{ad}{r} :: & b \,. & \frac{abd}{rr} \\
\text{Tang. compl.} & = d & & & & = (\text{quia } d \,.\, r :: c \,.\, b)\ \frac{ac}{r};
\end{array}$$

quare ut sin. tot. ad tang. 9 grad. sic sin. compl. ang. horiz. et aequatoris (hoc est, sinus elevationis Poli) ad sinum declinationis solis australis quaesitae, tempore minimi crepusculi. Per Logarithmos ita: a Log. sin. elev. Poli subtrahatur 0.8002875, residuum erit Logarith. sin. declinationis quaesitae.

VI. Invenire Relationem inter Evolutas et Diacausticas.

A punctum radians (fig. 10), BCG curva quaecunque, BC ejus portio infinite parva, BF, CF curvae perpendiculares, F punctum evolutae, AB, AC radii incidentes protracti in R et S; BH, CH ipsorum refracti coëuntes in puncto diacausticae H. Dico, ang. BAC $+$ BHC $=$ HBR $-$ HCS.

Nam BAC $+$ BHC $=$ DBA (LBR) $-$ DCA $+$ BHC $=$ LBR $-$ ECA $-$ ECD $+$ BHC $=$ LBR $-$ GCS $-$ LCG $+$ BHC $=$ LBH $+$ HBR $-$ GCH $-$ HCG $-$ LCS $+$ BHC $=$ LCH $-$ BHC $+$ HBR $-$ GCH $-$ HCS $-$ LCG $+$ BHC $=$ LCH $+$ HBR $-$ GCH $-$ HCS $-$ LCG $=$ HBR $+$ LCG $-$ HCS $-$ LCG $=$ HBR $-$ HCS. Q. E. D.

Brevius: Ductae intelligantur Bs, Bh parallelae ipsis CS, CH, eritque $BAC + BHC = RBs + hBH = HBR - hBs = HBR - HCS$. Q. E. D.

Reducto ad puram Geometriam Problemate, in Analysi pergere non erit difficile, quam brevitatis gratia omitto.

VII. Regula pro Constructionibus Mechanicarum per Rectificationem Linearum Algebraicarum.

Ponatur indeterminata x, et coordinatarum lineae Algebraicae, una $\sqrt{bx^m + cx^r}$, altera $\sqrt{\pm bx^m \mp cx^r}$, existente $r \sqsubset m$, sequitur Analysis Elementi curvae Algebraicae:

Elem. Coordin. $\dfrac{bm.x^{m-1} + cr.x^{r-1}dx}{2\sqrt{bx^m + cx^r}}$, $\dfrac{+bm.x^{m-1} \mp cr.x^{r-1}dx}{2\sqrt{\pm bx^m + cx^r}}$

Quadrata Elem. Coordin.

$$\frac{bbmm.x^{2m-2} + 2bcmr.x^{m+r-2} + ccrr.x^{2r-2}dx^q}{4b.x^m + 4c.x^r}$$

$$\frac{bbmm.x^{2m-2} - 2bcmr.x^{m+r-2} + ccrr.x^{2r-2}dx^q}{\pm 4b.x^m \mp 4c.x^r}$$

reducta ad idem nomen et addita faciunt

$$\begin{array}{l} \text{pro 1. form.} \\ \text{pro 2. form.} \end{array} \frac{\begin{array}{l} +b^3mm.x^{3m-2} + bccrr.x^{m+2r-2} - 2bccmr.x^{m+2r-2} \\ + c^3rr.x^{3r-2} + bbcmm.x^{r+2m-2} - 2bbcmr.x^{r+2m-2} \end{array} dx^q}{\pm 2bbx^{2m} \mp 2ccx^{2r}}$$

factaque divisione per x^{2m}, et extracta radice, habetur elementum Curvae

$$= \frac{\begin{array}{l} dx\sqrt{+b^2mm.x^{m-2} + bccrr - 2bccmr.x^{2r-m-2}} \\ dx\sqrt{+c^3rr.x^{3r-2m-2} + bbcmm - 2bbcmr.x^{r-2}} \end{array}}{\sqrt{\pm 2bb \mp 2cc.x^{2r-2m}}} = \left(\text{posita } \begin{array}{l} r = 2m \\ m = 2r \end{array}\right)$$

$$\frac{\begin{array}{l} +bm.x^{1/2m-1}dx\sqrt{b} \\ +cr.x^{-1/2r-1}dx\sqrt{c} \end{array}}{\sqrt{2}\sqrt{\pm bb \mp cc.x^{2m}}}$$

factaque divisione per $\dfrac{\begin{array}{l} +bm\sqrt{b} \\ +cr\sqrt{c} \end{array}}{\sqrt{2}}$ erit $\dfrac{\begin{array}{l} +x^{1/2m-1} \\ +x^{-1/2r-1} \end{array} dx}{\sqrt{\pm bb \mp cc.x^{2m}}}$ elementum Curvae alicujus, cujus ordinatae sunt

in primo casu, una $\dfrac{x^{1/2m}.\sqrt{2}.\sqrt{1+x^m}}{m}$, altera $\dfrac{x^{1/2m}.\sqrt{2}.\sqrt{1-x^m}}{m}$,

in secundo casu, una $\dfrac{x^r.\sqrt{2}.\sqrt{1+x^{-r}}}{r}$, altera $\dfrac{x^r.\sqrt{2}.\sqrt{-1+x^{-r}}}{r}$

quae si nominentur y et z, habebitur

pro 1. casu $yy + zz = \dfrac{4x^m}{mm}$ et $yy - zz = \dfrac{4x^{2m}}{mm}$, adeoque $yy + zz = \dfrac{2\sqrt{yy-zz}}{m}$

pro 2. casu $yy + zz = \dfrac{4x^r}{rr}$ et $yy - zz = \dfrac{4x^{2r}}{mm}$, adeoque $yy + zz = \dfrac{2\sqrt{yy-zz}}{r}$.

Hinc Regula: Si Fractio differentialis talis sit, vel ad talem reduci possit, ut numerator sit rationalis, denominator radix quadrata differentiae quantitatis cognitae et potestatis indeterminatae x, cujus index quadruplus sit indicis ejusdem, unitate aucti in numeratore, erit ejus integrale, portio Curvae Algebraicae.

Exempl.

1. $\dfrac{aadx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$, quia $4 = \overline{0+1}.4 = 2m$, erit $m = 2$, et $yy + zz = a\sqrt{yy - zz} = xx$.

2. $\dfrac{aadx}{\sqrt{x^4 - a^4}}$, quia $4 = \overline{0+1}.4 = -2r$, erit $r = -2$, et $yy + zz = a\sqrt{yy - zz} = \dfrac{a^4}{xx}$.

3. $\dfrac{adx\sqrt{a}}{\sqrt{aax - x^3}}$, quia $\dfrac{adx\sqrt{a}}{\sqrt{aax - x^3}} = \dfrac{dx\sqrt{\dfrac{a^3}{x}}}{\sqrt{aa - xx}}$, ubi $2 = \overline{-\tfrac{1}{2}+1}.4 = 2m$, adeoque $m = 1$, erit $yy + zz = 2a\sqrt{yy - zz} = 4ax$.

VIII. Constructio Elasticae, cujus aequatio $dy = \dfrac{xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$.

Quia $\displaystyle\int \frac{aadx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ est portio curvae Lemniscatae, ut ostensum, videatur num $\dfrac{aadx + xxdx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$ integrari possit hoc modo: $\dfrac{\overline{aa + xx}dx}{\sqrt{a^4 - x^4}} = \sqrt{\dfrac{aa + xx}{aa - xx}}dx = \sqrt{\dfrac{aa - xx + 2xx}{aa - xx}}dx$, cujus quadratum resolvitur in partes $\dfrac{aa - xx}{aa - xx}dx^q = dx^q$, et $\dfrac{2xxdx}{aa - xx}$, quarum radices dx et $\frac{-x\,dx\sqrt{2}}{\sqrt{aa-xx}}$, et harum integralia x et $\sqrt{2aa-2xx}$ coordinatae Ellipsis, cujus $2a$ axis minor et major $2a\sqrt{2}$. Ergo cum $\int\frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}=\int\frac{aa\,dx+xx\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}-\int\frac{aa\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$, erit applicata Elasticae aequalis excessui, quo portio Ellipticae superat portionem Lemniscatae.

VI.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Gaudeo Te optima nunc valetudine frui, quod bonum ut sit diuturnum precor. Mea quoque sese paulo melius habet, non tamen satis firmata videtur. Gratissimum erit beneficio Tuo videre quae Dn. Hollanderus dedit. Interim credo consensum inter obliquitatem Eclipticae et Circuli mensuram fuisse repertum non ex causis, sed ex collatione numerorum. Cum Dn. Ottius valeat ingenio et matheseos scientia, vellem daret nobis meditata sua et observata etiam dioptrica, idque optarem ipsi data occasione etiam meo nomine cum salutatione insinuari, cum olim aliqua fuerit inter nos notitia, et semper ipsum feci plurimi. Verissimum est superficiem sphaericam posse puncti radios omnes colligere in punctum. Nam ovalis quaedam Cartesii dioptrica certo casu in circulum abit, quod etiam Hugenius apud Schotenium notavit. Domino Cluverio meo judicio optime respondisti. Mirum est virum caetera egregium haerere in istis proportionibus non nisi per infinite parva variatis, quae nulla constructione aliter quam hactenus exhiberi possunt.

Excerpta ex Adversariis Tuis mihi imprimis grata erunt, quibus utar prout jubebis. Ipse enim optime noris, quorum analysin prostare publice velis, certe pleraque Tua videntur hoc mereri.

Mea methodus tentandi summas videtur adhuc habere aliquid in recessu, nam ut taceam posse esse alias series praeter harmonicam, in quibus praestet majora compendia, videtur ne hic quidem prorsus esse contemnenda, nam etsi $\frac{99}{100}$ sit fractio cujus potentiae tarde decrescunt, possumus tamen alios numeros comminisci, ubi statim ab initio non ascenditur ultra $\frac{1}{2}$ vel $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{4}$ prout commodum videtur, ut adeo non sit opus ad altiores potentias ascendere, quod si paucis potentiis multi termini comprehenduntur, utique utilitas inest. Ut si adhibeamus $\frac{1}{100-50}$ et $\frac{1}{100+50}$; $\frac{1}{100-49}$ et $\frac{1}{100+49}$ etc. summabuntur termini ab $\frac{1}{50}$ ad $\frac{1}{150}$; inde adhibito $\frac{1}{300\pm150}$ summabuntur termini a $\frac{1}{150}$ ad $\frac{1}{450}$, vel si placet $\frac{1}{50\pm25}$ dat terminos a $\frac{1}{25}$ ad $\frac{1}{75}$; et $\frac{1}{100\pm25}$ dat terminos a $\frac{1}{75}$ ad $\frac{1}{125}$; et $\frac{1}{150\pm25}$ dat terminos a $\frac{1}{125}$ ad $\frac{1}{175}$; et $\frac{1}{200\pm25}$ dat terminos a $\frac{1}{175}$ ad $\frac{1}{225}$.

Machina mea Arithmetica, de qua occasione mentionis a Dn. Tschirnhausio factae quaeris, iis sane qui viderunt mirabile quiddam praestare visa est. Primum tentamentum in tribus tantum notis Societatibus Anglicae et Gallicae ostendi, ante annos plus quam viginti, et Dominus Matthion mentionem ejus fecit in edita tunc quadam tabula Hexapodaria (du Toisage); sed aliis distractus et inventione contentus pene oblivioni tradideram. Tandem pulsatus Hugenii, Arnaldi et aliorum qui viderant hortationibus et pene conviciis, horologiarium non sine sumtibus in id unum accessivi. Ita prima Machina magna absoluta est, quam adhuc sub incude positam Dominus de Tschirnhaus ante biennium hac transiens vidit, experimentaque sumta sunt coram ipso, in ea parte, quae erat perfecta. Maximus multiplicator pro praesentis Machinae magnitudine potest esse octo notarum, maximus productus notarum duodecim; imo sedecim si velis, nam pro quatuor adhuc adjiciendis locus vacuus est relictus. Omnia fieri possunt a puello omnis calculi experte, sine ullis additionibus auxiliaribus, et sola rotae circumactione perfecte prodit productus. Parvusque an magnus sit multiplicator nihil interest ad tempus et facilitatem. Idem de divisione, ubi nec opus tentare circa quotientes. Secundum exemplar (vel exemplum potius) mox absolvetur, et spero dicere posse cum Ovidio: jamque opus exegi.

In Dynamicis ignosce si dicam, mentem Te meam longe aliter accepisse quam fuerat scribenti, tametsi putes te nunc primum eam recte assecutum. Exemplum Elastrorum per spatium dispositorum tantum proposui, ut sententiam explicarem de aestimatione virium, non vero quod putarem Elastris hujusmodi renitentibus oriri amissionem virium gravis ascendentis. Verba tua fere hinc redeunt: me velle quantitatem virium aestimandam esse ex quantitate effectus, exempli causa, ex numero elastrorum quorum tensione absumuntur vires, addisque Te non repugnare; subjicis deinde: me supponere corpus (grave) dupla cum celeritate sursum nitens quadruplam emetiri altitudinem priusquam tota absumatur; et hoc quoque esse verissimum, sed cum existimem propterea quadruplum intendi elastrorum numerum (a gravi assurgente) hoc vero Te mihi concedere non posse. Ego vero hoc neque dixi, quod sciam, neque sentio; et proinde quae contra disseris, mihi non adversantur. Sane in materia gravifica (quemadmodum appellare soleo fluidum illud insensibile quod motu suo est causa gravitatis) non Elastrum considero ad usum praesentem, sed simplicem impulsum et velut flatum qualis est venti, celeritate sane incomparabiliter majore, quam quae est gravis; quae res facit et facere debet, ut quovis momento aequalis gradus velocitatis gravi imprimatur vel adimatur, adeoque celeritates crescere vel decrescere ut tempora; sed tantum abest hinc sequi etiam vires crescere vel decrescere proportione temporum, ut potius vel huic oppositum concludatur; et in hoc ipsum produxi Elastra per spatium horizontale disposita, quippe in quibus manifestus est processus et causa detrimenti virium aequabilis, ut nimirum velut ad oculum appareret discrimen inter decrementum aequabile virium, et decrementum aequabile celeritatis. Nam cum corpus in plano horizontis Elastra aequalia successive aequaliter intendit, utique ut concedis et per se manifestum est, ad quemvis occursum amittit aequalem gradum potentiae. Sed non amittit aequalem gradum velocitatis, ut demonstratu non difficile est, et ipse attendens mox animadvertes: aliud ergo est in corpore eodem decrementum virium, aliud vero et minime priori proportionale decrementum celeritatis, quod demonstrandum mihi proposueram. Atque hoc a Te desideraveram examinari, et nunc quoque desidero, postquam

nescio quomodo per conjecturam mihi tribuens quae non statuo, aliorsum ivisti quod Galli vocant „prendre le change“, quemadmodum et priore Epistola mihi tribueras tanquam πρῶτον ψεῦδος, quod spatii longitudini aliquid darem cujus tamen efficacia nulla est. Ego vero vel adeo, ut videres me respicere id quod fit ... spatio, exemplum elastrorum attuleram. Et si ita errarem ut credideras, nimis crasse errarem.

Gratias ago quod Dni. Marchionis Hospitalii consilium edendi tractatum de Calculo differentiali significas. Ipse pro sua humanitate de eo ad me scripsit quaesivitque an ego potius aliquid edere de eo malim prior, neque enim sese praevenire velle invitum. Respondi mea quae animo designaverim, nondum parata satis esse et me hortari potius ut pergat de republica bene mereri. Interea tamen operam dabo, ut et meam Infiniti Scientiam nonnihil elaborem posthinc, cum habeam quasdam meditationes philosophicas quae mihi vitentur certitudine et usu mathematicis non inferiores; cogitabo et de illis ordinandis, ne intercident; quemadmodum et Elementa quaedam perpetui juris olim a me concepta, ut de aliis taceam. Sed Historica et Politica me nimis morantur, dum aulis satisfaciendum est. Conabor tamen paulatim eximere me ab his laboribus minus fortasse profuturis, ut rem potius generis humani, quam certae regionis geramus, quorsum a Te sane jam praeclara praestita sunt, et fieri porro possunt.

VII.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Juin 1696.

Meas acceperis quibus Tuis alteris utcunque respondi. Quae Dn. Hollanderus in publicum dedit, et literae Tuae ex nundinis Francofurtensibus mihi mittenda significabant, Analysesque etiam Tuas nondum accepi. Interea redditae sunt mihi literae a Domino Cluverio, cum adjunctis Tibi inscriptis quas hic vides, eaque res impulit ut scriberem denuo, ne Tua apud me moram traherent.

Dominus Nieuwentiit Replicationem minatur, quae velim magis nova afferat. Domini Cluverii meditationes profundiora pariter et solidiora promittunt. Interim non video cur vir egregius iis uti vel abuti velit ad bene constituta evertenda. Respondebo, me interrogare utrum quadraturae parabolae constructionem accuratiorem Archimedea dare possit; imo an non fateri cogatur ne possibilem quidem esse accuratiorem.

Je n'entends pas bien ce qu'il dit dans vostre lettre des series appropriees aux Planetes.

J'avois monstré dans ma response à Mons. Nieuwentiit, qu'il estoit tombé dans une Equation identique ou chimerique. Mons. Cluver . . . .

VIII.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Diu nimis ad Tuas patior desiderari responsum ob varia, quae moram mihi injicere. Profectus fui nupera aestate ad acidulas, sed minus prospero eventu; mox enim aeger inde reversus magno decubui temporis intervallo, priusquam iterum utcunque convalui. Responderam tamen antea ad has, quibus de Libro Hollanderi perquisivisti, quanquam responsum socordia hominis, cui miseram, Herbornae tum degentis interiisse suspicer, tum quod ipsum et alia male curasse novi, tum quod Tu nullam ejus mentionem fecisti. Bene interim est, quod non pariter liber ipse perierit, de quo quid sentias, aveo scire. Non dubito etiam, Te accepisse Librum D. Marchionis, quem Tibi per me postremis nundinis submisit; miror autem, nondum ad Acta relatum; nam Dnum. Menkenium suum exemplum recepisse confido. Conscripsi nuper data occasione tertiam Disputationem de seriebus infinitis, quam proximis nundinis Tibi transmittam, ubi serierum inventum ad Quadraturas et Rectificationes applicare coepi, continuaturus cum tempore materiam, si Deus vitam concesserit. Istis intento tertiae tuae supervenere literae, quibus significasti Te problema fraternum*) solvisse, eoque salivam movisti, ut et ego tentarem.

*) Es ist dies das berühmte Problem der Brachystochrone, von Joh. Bernoulli 1696 vorgelegt. An die Auflösung desselben knüpfte

Quanquam autem cito superavi, ansam tamen inde captare volui, speculationem extendendi ad alia difficiliora in Actis proponenda, quibus ita pertinaciter inhaerebam, ut omnis commercii literarii hucusque fuerim oblitus. Nunc solutio Problematis has ipsas Lipsiam comitatur, non tamen prius edenda, quam Vos vestras etiam solutiones ad Acta communicaveritis. Rogo itaque, Amplissime Vir, ut Tuam quoque Cycloidem mature ad praelum pares. Quod si placeat insuper curare, ut quae vicissim in Actis propositurus sum, in Gallia quoque et Italia innotescant, beneficio me obstringes.

Methodo approximandi summis Progressionis Harmonicae aliquam, fateor, medelam attulisti; sed tamen perfectius aliquid optassem; et omnino existimavi, cum primum de his in Actis 1682 legissem, Te compendium innuere, quo summa praecise haberi possit. Et quidem ad praxin geometriae transcendentis nihil foret conducibilius. Approximationes saltem expeditae plane videntur necessariae in his seriebus, quae tarde decrescunt, quales sunt harmonicae, et illae quas dedi pro Elastica; quanquam in aliis, quae per se satis appropinquant, insuper haberi possunt, cujusmodi illa tua est, quae longitudinem sinus recti respectu dati arcus exprimit, quippe quae quinque primis terminis, subinde et quatuor tribusve tantundem appropinquat, quantum ordinariae sinuum tabulae solent: unde laborem vel condendi vel examinandi has tabulas mirifice contrahere posse autumo, praesertim si Machina insuper Tua Arithmetica adjungeretur, de cujus structura plenius edoceri cuperem, ut si mediocri pretio liceret, similem mihi comparare possem. Vidi annis abhinc tredecim Scaphusii apud Spleissium praesente Ottio rudimentum talis Machinae, quam ille, si bene memini, pro sua venditabat; sed quia tum scientiam vix a limine salutaram, non attentius inspexi. In paucis notis ut res succedere possit, satis quidem capio, sed cum plures sunt propositae, non video, quomodo immensa combinationum varietas sub una rota cogi queat. Quae praefatum Ottium concernunt, ex literis tuis exscripsi, eique per conterraneum insinuavi, sed nihil responsi tuli. Homo est qui sibi soli vivit, non publico natus. Pulsavi

Jac. Bernoulli die schwierigen Aufgaben über die isoperimetrischen Curven, die besonders die Veranlassung zu dem berüchtigten Streite zwischen beiden Brüdern wurden.

ipsum super variis, sed frustra. Quod ovalis quaedam Cartesii certo casu in circulum abeat, novi et demonstravi in notis ad ipsum p. 442, sed ignotum mihi est, annon radii, duorum circulorum ope semper ex puncto dato in aliud datum punctum possint colligi, adeoque num datis focis A et B (fig. 11) et crassitie situque lentis inter illos, determinari queant circuli CDC, CEC, qui lentem terminent, radiosque ex A egressos versus B ire cogant; hoc enim est, quod velle Ottium existimo, et cujus quidem ego impossibilitatem nondum cerno. Succurrit hic proprietas quaedam vitri plano-plani, de qua non memini apud Scriptores Opticorum quicquam me legisse. Observavi nempe, quod si tale vitrum ad axem visionis valde obliquum statuatur, dextrum per illud incipiat apparere sinistrum, et vicissim, supero tamen et infero situm suum naturalem retinentibus, cujus phenomeni rationem ex Opticis principiis frustra explicare olim conatus fui. Est vero etiam in Astronomicis, quod me turbat, dissensus videlicet inter modernos Astronomos in eo, quod nonnulli, velut Newtonus, supponant, Planetam in orbita sua elliptica circa solem in uno focorum ejus constitutum areas, alii non minus celebres, quos inter Sethus Wardus, ejusdem nationis Vir, circa focum alterum angulos temporibus proportionales describere, quae duae hypotheses secum invicem minime consistere possunt. Si quid habes quod huc faciat, quaeso mihi impertire.

Vidisti nuper in Actis constructionem meam aequationis $dy = ydx + x^n dx$, aut potius hac universalioris, quam et Tu reperisse scribis: vellem porro ex Te scire, num et hanc tentaveris $dy = yydx + x^n dx$. Ego in mille formas transmutavi, sed operam meam improbum Problema perpetuo lusit. Felicius successit (qua de judicium Tuum exspecto) constructio generalis harum, quae literas indeterminatas separatas habent, ope Tractoriae et Logarithmicae, in eo a Tua diversa, quod Tua Tractoria est ipsa statim curva quaesita, sed difficulter delineabilis, mea vero punctis tantum quaesitae inveniendis inservit, at contra facilius describitur.

In Dynamicis doleo multum, et tantum non mihimet male cupio, quod tuam mentem nondum assequor. Velim Tibi persuadeas, neminem ad retractandum me paratiorem fore, si me in errore versari deprehenderem. Scribis, hunc a fratre meo juniore tuo monito tandem agnitum fuisse. At obsecro, Vir Excellentissime, num ille me est eloquentior, et ego ipso sum hebetior, quod in materia osculorum Tu ipsum intellexeris, non me; ille vero nunc Te intelligat, non ego? Utinam vero particeps fierem omnium eorum, quae inter vos de his utrinque acta sunt; fortasse major inde mihi lux affulgere posset. Fallor tamen, nisi omnis tandem controversia in logomachiam desinit, quandoquidem in conclusionibus nobis per omnia conveniat, dum uterque statuimus, corpus dupla cum celeritate sursum tendens quadruplo altius eniti, quaestioque tantum est, num propterea vires sint dicendae quadruplae necne. Unum hic ex Te peto, ut explices, qui juxta Te loquendum esset, si corpora omni gravitate destituta forent (hanc enim concedis corpori non essentialem esse, ac proinde licite ab illa posse abstrahi, quanquam subinde aliter statuere videris, dum corporis essentiam in conatu quodam ponis). Cum enim corpora talia quacunque velocitate mota pergerent in infinitum, nunquamque redigerentur ad quietem, non possent quantitates virium horum corporum aliunde aestimari, quam ex spatiis eodem tempore percursis; unde non apparet, cur corpus dupla celeritate latum hoc casu quadruplam virium quantitatem possidere diceretur. Cum de conatu tuo loquor, illud adhuc dubii movere liceat, qui fiat scil. ut corpori statuas essentialem, cum corpus ad omnes plagas sese indifferenter habeat, conatus autem quaquaversum sese exerens implicet, nullusque possit concipi, nisi cum determinatione in certam partem. Agnosco lubens, in corpore praeter extensionem aliud aliquid superesse, ad quod tamen fere caecutimus: puto enim hic, ut ubique cum ad prima rerum principia deventum est, prodere sese infinitatis characterem, qui eo me impulit, ut jam ante plures annos systema quoddam excogitaverim, per quod mysteria haec naturae, tum et Fidei, Trinitatis, Incarnationis, Unionis animae cum corpore etc. utcunque explicarem. Cum vero haec in sacra nimis involent, nolimque litem mihi excitari cum Theologis, praestat de his penitus silere.

Vale et favere perge etc.

Dabam Basileae 27. Januarii 1697.

P. S. Desiderat Doctor quidam Lindaviensis Catalogum omnium eorum, quae unquam publicasti, illectus Tractatu quodam sub personato Fürstenerii nomine a Te edito, quem non satis admirarij nec depraedicare potest. Magno, Vir Amplissime, beneficio hominem Tibi devincies, si voti compotem reddere velis.

Dni. Nieuwentiit replicationem, quam scribis, non est cur multum metuamus; spero enim, ejus sententiam de explodendis elementorum elementis vel ex fraterni Problematis solutionibus brevi publicandis solide et evidenter confutatum iri. Meditationes Dni. Cluverii, qua saltem eversionem principiorum nostrorum respiciunt, in fumum etiam abiisse judico, quod nihil horum, quae mense Junio publicare pollicitus est, hucusque in Actis comparuit. Sane qui de veritate sententiae suae sunt persuasi, non aenigmatice loquuntur. Conatus sum in his inclusis*), quas curae tuae sigillo muniendas committo, absurdum ad quod ejus placita deducunt, evidentius exponere. Nescio an plus soliditatis insit promotioni Geometriae, quam Dn. de Tschirnhaus iterata vice promisit; post enim ostensam speciminum suorum tum insufficientiam tum falsitatem judicio meo non debuisset antiqui promissi repetitione acquiescere, sed potius novis speciminibus inventa sua stabilire. Scire autem percupio, quid Tibi de istis videatur, qui Viri Tibi familiarioris principia procul dubio melius perspecta habes.

Hac ipsa hora incidit mihi in manus ingens aliquod Programma typis excusum, quo frater jam tertium omnes totius orbis Geometras, et ut videtur me in specie, verbis jactantia et felle plenis, ad solutionem sui Problematis provocat. Agnosco infirmitatem meam, nec tam credo me solvisse, quam Deum per me, ut fastum ejus immodicum reprimeret. Doleo autem acerbe, ipsum usque adeo sui oblitum esse, ut non recordetur amplius, quo instrumento divina gratia olim in se fuerit operata.

Beilage.

Jac. Bernoulli an Detlef Clüver.

Il y a bien du temps, que je vous dois une reponse à vôtre derniere lettre. Ce n'est pas que les soins de mon menage m'ayent fait oublier mon devoir envers vous, comme vous croyés, qu'ils ont dû effacer de mon ame l'idée de votre chere personne: car la connoissance des hommes de votre merite fait trop d'impression par mon esprit, pour me permettre, d'en perdre jamais la memoire. Je vous avoue que ceux qui sont mariés, n'ont pas, à leur

*) Siehe die folgende Beilage.

grand regret, tout le temps qu'il faut pour les meditations et pour l'entretien de leur commerce avec les savans; et c'est aussi pour cela, que j'envie bien des fois l'heureux sort de vous autres, qui ne l'etés pas. Toutes fois ce n'est pas maintenant ce qui m'a empeché le plus de vous écrire: la principale cause de mon silence c'est que j'ay voulu attendre, que je puisse vous dire mon sentiment sur vos inventions, dont vous avés promis de nous regaler au mois de Juin. Cependant j'ay attendu inutilement, et il n'a rien paru de tel jusqu'icy dans les Actes. D'ou vient, Monsieur, que vous ne degagés pas votre parole? vous êtes-vous peutetre marié, pour me servir du bonmot de votre Anglois, que vous ne vous souvenez plus de ce que vous aves promis pendant vôtre celibat, en nous donnant cette science de L'infini, que vous nous avés fait esperer depuis plus de 10 ans, et dont vous m'avés reiteré la promesse, il n'y en a qu'un. Je vous confesse, qu'apres tout ce que vous m'en avés écrit, ce ne sont encore que mysteres pour moy. Je ne comprends que fort peu de chose dans vos nombres triquarres, quoy que je vous aye dit, que j'en trouve aisement une infinité: et pour vos quadratures planetaires, pour les combinaisons de tout l'univers renfermées dans un seul segment de cercles, je n'y vois rien du tout. Ainsi je n'en diray rien; car je n'ay pas le temps de dechiffrer des enigmes et peutetre M. Leibniz l'a encore moins. C'est à vous, à nous en donner la clef, si vous voules etre entendu. Il semble même, qu'il y va de votre honneur, de le faire au plutôt; etant à craindre, que plusieurs ne traitent de vision des choses si extraordinaires et si bizarres. Qu'en penses-vous, s'il vous arrivoit de mourir, avant que d'avoir desabusé ces temeraires, qui auront pû concevoir de telles pensées; asseurement ils vous feroient passer pour un homme, qui a û l'imagination un peu blessée. Ne tardez-dont plus, je vous prie, à vous en acquiter sans cesse, et n'apprehendes pas, que d'autres vous ravissent la gloire de vos inventions: étant impossible, que personne aille à ce point d'effronterie, que de s'attribuer une chose, qui aura deja été rendue publique, et même promise dix ans auparavant par un autre. Pour moy, bien loin d'y pretendre aucune part, je seray des premiers à celebrer vos louanges. J'exepte un seul point, sur le quel je crois toujours etre votre adversaire. C'est lorsque vous accusés d'erreur tout ce qu'il y a û de Geometres depuis Archimede, en condamnant toutes leurs quadratures, même jusqu'à celle de la Parabole, puisqu'en cela vous attaques une verité, qui me semble claire comme le jour. Je vous avois repondu dans ma premiere lettre, que votre quadrature ne differoit aucunement de celle de tous les Geometres. Vous me faites faire là-dessus un raisonnement qui à la verité est assez ridicule, mais qui est tres-different du mien; ce qui m'oblige à m'expliquer plus amplement, en vous faisant voir deux choses; la premiere: que votre quadrature se peut trouver par le calcul ordinaire sans vos nouveaux principes: et l'autre, qu'elle ne sauroit être differente de l'ordinaire sans une contradiction manifeste. Soit la Parabole AFD (fig. 12), le Parametre $AB = a$, l'Axe $AC = x$, l'appiquée $CD = y$, et leurs parties infiniment petites $CE = dx$, $DS = dy$, à la façon de Mr. Leibniz. Par la nature de la courbe ▭ BAC = □ CD, et ▭ BAE = □ EF; par consequent ▭ BAC — ▭ BAE = □ CD — □ EF, c'est à dire $BA . EC = 2 CDG - GD^2$ ou par symboles $a dx = 2 y dy - dy^2$ (puisque vous voulés, qu'on ne doive pas negliger dy^2). C'est pourquoy $dx = \frac{2 y dy - dy^2}{a}$, et $CH = y dx = \frac{2 yy dy - y dy^2}{a}$, et $HFD = \frac{1}{2} HG = \frac{dx dy}{2} = \frac{2 y dy^2 - dy^3}{2a}$, et ainsi le Trapeze $FECD = CH - HFD = \frac{2 yy dy - 2 y dy^2}{a} + \frac{dy^3}{2a}$. D'ou il suit que l'espace $ACD = \frac{2y^3}{3a} - \frac{y dy^2}{6a}$, parceque mettant dans cette quantité EF ou $y - dy$ à la place de CD ou y, l'on trouve pour l'espace AEF $\frac{2y^3 - 6 yy dy + 6 y dy^2 - 2 dy^3}{3a} - \frac{y dy^2 - dy^3}{6a}$, laquelle etant otée de $\frac{2y^3}{3a} - \frac{y dy^2}{6a}$, il reste pour le Trapeze FECD $\frac{2 yy dy - 2 y dy^2}{a} + \frac{dy^3}{2a}$, la meme quantité que dessus. Or l'espace interieur ACD étant $\frac{2y^3}{3a} - \frac{y dy^2}{6a}$, l'exterieur AJD sera $CJ - ACD = xy - ACD = \frac{y^3}{a} - ACD = \frac{y^3}{3a} + \frac{y dy^2}{6a}$, et par consequent $\frac{AJD}{ACD} = \frac{2 yy + dy^2}{4 yy - dy^2}$. Determinons maintenant l'element dy, à une certaine longueur, comme DG (j'entends, non

au regard de DC ou y, à laquelle il est incomparable, mais au regard d'autres infiniment petits) et appellons le nombre infini de ces parties comprises dans la ligne CD, n, en sorte que y soit $= n dy$, et nous trouverons $\frac{2 yy + dy^2}{4 yy - dy^2} = \frac{2 nn dy^2 + dy^2}{4 nn dy^2 - dy^2} = \frac{2nn + 1}{4nn - 1}$, la même raison, que vous trouves par vos principes, et que vous soutenes etre differente de $\frac{1}{2}$; mais en voicy la contradiction: Determinons la dy à une autre longueur $D\gamma$, qui ne soit que la moitié de DG (ce qui se peut, par ce que quand je m'en suis servi, je n'ay pensé d'abord à aucune longueur determinée, et je l'ay seulement considerée comme incomparable à DC). Or n'est-il pas vray, je vous prie, que le nombre des dy, c'est à dire de $D\gamma$, contenus dans DC, etant en ce cas $= 2n$, et $y = 2n dy$, cette quantité $\frac{2 yy + dy^2}{4 yy - dy^2}$ vaudra alors $\frac{8 nn dy^2 + dy^2}{16 nn dy^2 - dy^2} = \frac{8nn + 1}{16nn - 1}$; et par consequent la raison de $\frac{AJD}{ACD}$ est en même temps $\frac{2nn + 1}{4nn - 1}$ et $\frac{8nn + 1}{16nn - 1}$, c'est à dire et plus grande et plus petite, puisque selon vous ces deux-ci $\frac{2nn + 1}{4nn - 1}$ et $\frac{2nn}{4nn}$ sont aussi differentes. Je conjecture donc que vôtre illusion procede de ce que vous envisagés le dy, comme quelque chose de determiné par la nature, au lieu que ce n'est qu'une fiction d'esprit, et ne consiste que dans une fluxion perpetuelle vers le neant, qui est cause que cette raison $\frac{2 yy + dy^2}{4 yy - dy^2}$ est toujours variable, et ne devient fixe, que lorsque dy est parfaitement rien, et la raison ne differe plus aucunement de la soûdouble. Mais si apres tout cela vous vous opiniatres à soutenir encore, que nos quadratures sont defectueuses, je voudrois bien savoir, ce que vous trouvés à redire à la maniere de demontrer des Anciens, qui se fait *per explosum excessum et defectum*, par laquelle ces quadratures se justifient; et Mr. Leibniz vous a fort bien demandé, si vous croyés, qu'on en puisse donner une construction meilleure que la leur. Encore une chose: vous avés vû, comment j'arrive parfaitement à votre quadrature en prenant FECD pour un Trapeze: vous croyés donc, que l'on peut negliger l'espace entre la courbure FD et sa chorde, d'autant qu'il est infiniment plus petit que GH. D'où vient donc, que vous ne vouliés pas, que nous soyons en droit, de negliger dans le calcul par la même raison l'espace GH qui est infiniment plus petit que CF. Il semble que vous soyés en cela du sentiment de Mr. Nieuwentyt, qui reconnoit les differences premieres, sans admettre les secondes. Et cependant le dit espace est encore assés grand pour changer vôtre quadrature, parce qu'etant $= \frac{dy^3}{4m}$, il fait trouver $\frac{AJD}{ACD} = \frac{4nn-1}{8nn+1}$. D'où il suit, que, s'il falloit parler à la derniere rigueur, vôtre quadrature bien loin d'être exacte, s'ecarteroit encore plus de la veritable, que celle d'Archimede, puisqu'elle fait l'espace AJD plus que soûdouble de ACD, au lieu que je le demontre être plus petit.

Pour ce que vous adjoutés à la fin de vôtre lettre, touchant la dimension de toutes ces lignes, que j'ay données dans les Actes, je ne puis pas croire qu'elles soient defectueuses, non plus que celle de la Parabole. Si vous trouvés, qu'on les pourroit reformer, vous aurés la bonté de nous expliquer plus clairement le fondement, sur lequel cette reforme se doit faire; car je n'en sache point d'autre, que celuy, dont se sert Mr. Leibniz, et que je crois être tres-veritable. Je suis avec beaucoup d'attachement etc.

A Bâle 27 Janvier 1697.

IX.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Gratissimae mihi fuere Tuae quas Dn. Lic. Menkenius ad me transmisit. Doleo Tuas priores Herbornam transmissas ad me non pervenisse, sed multo magis valetudinem sese non optime habere quod etiam de mea dicere cogor, quam alternis nuc phlogoses nunc blandae quidem, sed tamen crebrae diarrhoeae vexant; itaque uterque nostrum fortasse relaxatione animi a laboribus intentioribus opus haberet. Monui Dn. Menkenium non posse facile meliorem dari relationem libri Dn. Marchionis Hospitalii ea quae Diario Parisino est inserta, cujus proinde versio suffecerit.

Scripsi ad Dn. fratrem Tuum me non facile ab aliis expectare problematis curvae celerrimi descensus solutionem quam a Te, et a Dn. Marchione Hospitalio, et a Domino Newtono, et a Dn. Huddenio, si ille haec studia dudum seposita resumeret. Nec putavi Tuam sagacitatem effugiturum esse, si animum intenderes. Fortasse non est necesse ut statim in vulgus emaneat Analysis, quod etiam Dn. fratrem tuum monui, video enim multos parum sincere agere, et quae didicere ex nostris quantum possunt alio habitu larvata pro suis venditare, cujus animi Dn. Nieuwentiit sese sespectum reddit, qui nuper libellum contra me publicavit, sed cui non respondebo. Suffecerit librum ejus in Actis rite recenseri, nam quae objecit recitasse est refutasse.

Libenter dabo operam ut Tua quoque problemata in Galliam et Italiam perveniant, quanquam (excepto Dn. Marchione Hospitalio) nihil est quod a Gallis et multo minus quod ab Italis speremus. De me nihil polliceor, tum valetudinis causa, tum etiam acuminis si quod olim habui paulatim hebescentis. Et cum solvissem problema Domini fratris tui, subjeci quod vetulus ille Athleta Virgilii: coestus artemque repono! imposterumque magis spectator applausorque ero, quam Autor, tametsi circa Methodos non pauca adhuc dare posse sperem. Optarem et ego seriei Harmonicae summam praecise dari posse, sed cum hoc non sperem, spero tamen posse aliquid adhuc amplius posse praestari circa praxin. Verissimum est, si possemus dare summam progressionis Harmonicae, plerasque alias hujusmodi summas datum iri. Pro tuis de seriebus et aliis maximas ago gratias, et continuationem expecto. Tua constructio quadraturarum per Tractoriam mihi perplacet. Quae de opticis habes, videntur consideratu dignissima, sed profundam meditationem postulantia cujus ego mei vix sum capax, quemadmodum nec ausim problema sperare quod operam tuam lusit.

Machina mea Arithmetica pretio fateor exiguo haberi non potest, nam Horologii instar multis indiget rotis. Quam apud Dn. Spleissium vidisti Ottianam, etsi qualis sit nesciam, puto tamen plane diversam esse. Fortasse consentit cum Pascaliana et Morlandiana. Pascalius Machinam Arithmeticam invenit quae proprie loquendo non est nisi pro additionibus et substractionibus. Sed Dn. Moreland (autor Tubae stentoreae) a cylindro Arithmetico Domini Petiti Galli credo excitatus, baculos Neperi in rotulis exhibuit, additiones autem multiplicationi necessarias quas rhabdologia calamo fieri postulat, peragit in Machina Pascaliana, et ita ex utrisque componit unum, quod non est exigui sumtus, sed exigui tamen compendii: in mea autem multiplicatio et divisio maximorum etiam numerorum summa celeritate, et nulla additione auxiliari peraguntur. Jam alterum Exemplum paratum habeo. Dudum habuissem plura, nisi opifex partim morbo, partim aliter fuisset impeditus. Operae pretium erit, ut descriptio ejus publicetur, sed hoc nisi adhibitis multis schematibus fieri non potest; interea gaudeo rem eo deductam (etsi magno sumtu meo) ut amplius perire non possit.

Quod planetas attinet, scis me quoque Kepleri sententiam probare non minus quam Newtonum, areas scilicet esse temporibus proportionales, quod et Cassinus et Flamsteadius satis observationibus consentire putant, etsi impossibile putem aliquid absolute satisfaciens tam brevi compendio dari, quoniam ipsi planetae non procedunt summa et Mathematica regularitate, sed a se invicem patiuntur.

Curabo aliquando describi quae cum variis viris doctis circa Dynamica disputavi per literas, et imprimis quae cum Domino fratre tuo, itemque cum Dn. Papino, qui nondum arma deposuit, etsi plus semel prorsus mutarit et jam sit multo moderatior. Cum viderem alterum alteri non intelligi satis et quaerelis mutuis de male accepta alterius mente literas nostras compleri, proposui ut procederemus secundum formam Logicorum. Placuit, cum successu; ab eo enim tempore hae querelae cessavere, et tanta fuit nostra patientia, ut jam pervenerimus ad 13^{mum} syllogismum, cui ante paucos dies respondi. Agnoscit ipse Dn. Papinus controversiam non consistere in sola Logomachia, quoniam quaeritur utrum detur certa quantitas virium quae semper conservetur (quod ipse concedit) et quomodo ea sit aestimanda. Hanc ego aestimo sic ut idem semper possit produci effectus; v. g. ut eidem ponderi semper eadem dari possit altitudo, vel idem elastrum ad eundem tendi gradum, vel eidem corpori semper eadem dari velocitas, vel aliud quiddam determinatum quodcunque sit produci, quod sine virium impendio perduci nequit. Unde non gravitati me alligo, sed idem obtineri puto quemcunque effectum sumas, tametsi gravitas prae aliis sit intellectui apta. Corpus igitur dupla celeritate latum puto quadruplo esse potentius, licet sit aequale, quoniam si corpus A celeritate simpla potest dare globo L celeritatem quandam certam, efficere possum ut corpus B celeritate dupla praeditum possit qua-

tuor globis M, N, O, P, quorum unusquisque sit aequalis ipsi globo L, dare eandem velocitatem, quam habet globus L. Unde manifestum est corpus B posse quadruplam potentiam producere ejus quam producere potest corpus A, atque adeo quadruplo esse potentius; si modo concedamus effectum esse causae aequalem. Habeo tamen etiam argumentum a priori, idem plane concludens. Argumentum autem illud de 4 globis ni fallor etiam apud Dn. fratrem tuum valuit. Quicquid enim disputemus de aestimatione virium, saltem negari non potest si aliquid velut L, aut ei congruum, certa velocitate praeditum aliquoties repetatur, ut in M, N, O, P, etiam repeti potentiam. Unde non admitto corpus B esse duplum tantum potentia corporis A, neque enim repetitione praecisa potentiae A fit potentia corporis B, magnitudine aequalis et duplo velocioris, et licet in B repetatur gradus velocitatis qui est in A, non tamen etiam repetitur quantitas corporis, sed in M + N praecise duplicatur seu reperitur quod est in L, nempe tam magnitudo quam velocitas. Unde ex generali lege aestimandi pro certo sumo M + N + O + P aequivelox ipsi L, et quadruplum magnitudine ipsius L etiam potentia quadruplum esse. Fingo jam dari Elastrum quod corpus A in horizontali plano currens praecise tendat vi sua, ita ut elastro tenso corpus suam vim totam consumserit, et quiescat, dico corpus B praecise quatuor Elastra talia posse tendere. Vel si mavis corpus B quatuor corporibus ipsi A aequalibus praecise dare posse velocitatem ipsius A. Nam corpus B impetu suo quem habet (dupla scilicet velocitate ipsius A) cum possit assurgere ad quadruplam altitudinem ejus, ex qua delapsum A suam velocitatem acquirere potuit, potest facili machinamento efficere redescendens, ut quatuor corpora ipsi A aequalia assurgant ad altitudinem illam simplam, atque adeo inde redescendendo singula acquirant velocitatem ipsius A. Nec refert quod interventu gravitatis haec consequor, non magis quam ad demonstrationes Conicas refert quomodo linea Conica sit descripta; permissum est medium eligere scopo aptum, nec uno magis quam alio modo natura sibi aliquid extorqueri patitur, quo effectus causam excedat. Etsi habeam etiam ut dixi singularem a priori demonstrationem, sed quam tum demum communico, cum video argumentum a posteriori ingressum invenisse, non quod sine illo non valeat, sed quod non projici mereatur.

Quod meam opinionem attinet de conatu vel nisu quem omni corpori inesse puto, fateor omnem conatum esse determinatum in certam partem, sed non fateor corpus sese ad omnes plagas indifferenter habere, verum id quidem est de corpore in genere, sed tamen verum est etiam de conatu vel motu in genere. Et ego puto essentiale esse omni corpori ut sit in motu actuali, imo essentiale esse omni substantiae ut acta agat. Cogitata tua de charactere infinitatis et mysteriis naturae fideique non poterunt non habere plurimum ingenii, et putem ita explicari posse, ut nihil a Theologis vereri sit opus; velimque adeo non perire.

Nesciebam Te Gallice tam eleganter scribere, quam in literis ad Dn. Cluverium factum video, quae plurimum habent salis. Unus tantum locus vellem exularet, ubi propemodum sanitatem mentis ei controversam facis. Intelligo virum egregium implicari litibus taediosis. Itaque nolim afflicto afflictionem addi. Quid si patiaris locum illum a me deleri? Id enim fieri potest salvo in caeteris sensu. Ipsa Epistola ita scripta est, ut eximere ipsi errorem posse videatur, si modo id sperare adhuc licet. Sed nescio an gratias doctori suo sit habiturus; sumus nos homines Horatiano illi similes, qui se credebat miros audire tragoedos in vacuo laetus sessor plausorque theatro. Postea sanatus, pol me occidistis amici, non servastis, ait, cui sic erepta voluptas et demtus pro vim mentis gratissimus error. Dno. de Tschirnhaus Parisiis familiariter usus sum, quod ut mihi profuit, ita puto nec illi nocuisse. Unum in eo notavi, quod negat se gloriae cupidum, et tamen sic agit, ac si esset ejus cupidissimus. Cum ante biennium hac traviret, loquebatur de quibusdam suis Theorematis quorum distincte non memini, ex quibus magna sibi promittebat, ego vero momentum eorum non satis videbam, praesertim cum saepius meminerim tales spes aluisse. Interim maximi ingenium ejus facio, et tantum paulo apertius agi vellem.

Domini fratris Tui programma accepi quoque. Videbatur mihi non in Te, sed in Dn. D. T. sua quaedam verba direxisse, sed possum falli. Caeterum ipse se a Te male acceptum putat in Actis. Ego qui utrumque maximi facio, velim vos esse amicissimos, certe nolim invicem male animatos. Dubium nullum esse censeo, quin ille Tibi studiorum suorum fundamenta imo et incrementa pro maxima parte debeat, quippe a fratre seniore in mysteria haec introductus. Atque haec etiam causa est, cur lacessitum se licet putans, noluerit tamen tibi acrius respondere, sed ille vicissim contendit meditamenta sua circa altiora illa etiam Tibi profuisse. Ego

his sepositis putem et juniorem seniori plurimum deferre, et seniorem tamen hac praerogativa moderate uti debere, et si possem aliquid conferre resuscitando affectui vestro, nullae operae parsurus essem.

Verum est Caesarini Fürstenerii librum de jure suprematus et Legationis principum Germaniae mihi attribui; velim nosse quis sit ille vir doctus apud Lindavienses qui vult meas esse aliquid putare nugas. Pleraque a me edita autoris designatione carent. Hypothesin Physicam non ignoras. Dissertatiunculam de Arte Combinatoria edideram adolescens anno **1666** quae postea fuit me nescio recusa. Methodum quandam discendae docendaeque jurisprudentiae dedi anno **1668**. Codex Diplomaticus nuper prodiit. Caetera demtis iis quae in Diariis Eruditorum reperiuntur, fere ad negotia principum pertinent, ubi autorem me nollem profiteri. Scripsi innumera et de innumeris, sed edidi pauca et de paucis. Vale.

Mit dem vorstehenden Schreiben Leibnizens hat offenbar das folgende Bruchstück ein Ganzes gebildet (siehe den nächsten Brief Jac. Bernouilli's):

Gratissima mihi fuere quae de seribus infinitis, itemque in Cartesium dedisti, nondum antea mihi visa; et in universum quicquid a Te est, non potest non mihi esse gratissimum. Pro seriebus infinitis indagandis usus aliquando sum ratione singulari, quam exponam paucis, quia forte rectius me illa uti potes. Reduco nempe ad quadraturam curvae, cum alioqui curvarum quadraturas revocemus ad series. Succedit in innumeris, sed alicubi non nihil haeremus. Exempli causa quaeritur summa hujus seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ $\frac{1}{16}$ etc. constat eam pendere ex ista $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ etc. Sit aequatio serialis ad curvam $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16}$ etc. $= y$, quae redigetur ad nostram in casu quo $x = 1$. Hinc erit $\frac{1}{1} - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4}$ etc. $= dy$, et $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$ etc. $= x\,dy$ seu $\log(1+x) = x\,dy$ adeoque $y = \int dx \log(1+x) : x$. Interim neque Dn.

frater tuus quem consului, neque ego hactenus hanc quadraturam $\int dx \log(1+x) : x$ ad aliam simpliciorem revocare potuimus, etsi generaliter possimus summare $x^e\, dx \log(1+x)$, modo e non sit $= -1$, qui solus casus nos eludit. Quod si lucem huic inquisitioni accendere potes, scientiam ipsam promovebis. Sed literis prolixis finis tandem est inponendus. Vale etc.

Dabam Hanoverae 15. Martii 1697.

X.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Accepi his diebus literas ab Excellentiss. D. Jablonsky Societ. Reg. Scient. Brandeburgicae Secretario, d. 26. Septbris. ad me datas, una cum incluso Diplomate d. 11. Julii 1701 exarato, quibus in dictam Societatem, quando nihil tale exspectabam, me quoque adscitum significavit. Quo quidem, fateor, inopinato nuntio non potui non plurimum laetari et gaudere, quippe cui non posset non esse perhonorificum, tot Viris meritorum gloria et famae celebritate insignibus isto fraternitatis vinculo conjungi: Veruntamen sensum gaudii non parum minuit propriae infirmitatis conscientia, quae optimo jure vereri me facit, ne exspectationi horum de me conceptae ex aequo satisfacere minime valeam. Difficile enim dictu est, quantopere corporis animique mei vires multivariis morbis et aerumnis ab aliquot retro annis fuerint hebetatae, sic ut vix quicquam de me sperari amplius possit, quod inclytae Societatis scopo intentionive, aut eminenti quo me cohonestavit titulo satis respondeat. Quicquid autem ejus sit, agnosco me illi non minus obstrictum vivere pro benevolentia, qua me indignum complexa est, quam si ejus essem meritissimus; ac propterea Tibi, Vir Amplissime, qui eidem tanta cum laude praesides, inque Tua Persona omnibus, quorum interest, ejus membris gratias persolvo et ago humillimas, eosque certos esse cupio, me et beneficium eorum maximi facere, et summo studio anniti velle, ut iis grati animi affectum quovis obsequii, cultus et observantiae testimonio data occasione comprobem. Deum interim supplicibus votis precatus, ut laudatissimum

institutum Virorum eximiorum in Serenissimi Fundatoris gloriam, Societatis ac Sociorum decus, artium denique et scientiarum incrementum clementissime prosperet! De caetero eorum, quae novam hanc Societatem spectant, praeter ea quae ex publicis Lipsiensium Actis dedici, penitus sum ignarus; unde nec constat quot et quinam sint Collegae, quid agant moliantur ve, an hebdomadarios suos celebrent conventus, num Acta eorum publicam lucem viderint, aut visura sint, et id genus alia, de quibus libenter erudiri cuperem.

Commercium nostrum literarium, Vir Amplissime, a quinquennio jam et ultra intercidere passus sum, ob podagrici affectus incommoda, aliasque aegritudines, quibus frequenter admodum infestare soleo. Accessit cum primis mortale taedium ex inauspicata lite conceptum, quae toto hoc tempore inter me Fratremque viguit, quamque Tu in herba suffocare potuisses, nisi fratri paulo faventior tegere maluisses, quae Tibi de ejus analysi constabant. Judicium enim Tuum, quod de illa tulisti post meam jam evulgatam, ne quicquam dissimulem, nimis intempestivum mihi visum est, et opportunius venisset, si statim post pecuniam depositam una cum analysi vulgasses, quo casu publicandi potestas publice Tibi a fratre facta fuerat. Sed transeant ista, et pereat deinceps omnis eorum recordatio! Animus fuerat olim, quam primum ad Te darem literas, in mei justificationem perscribere Tibi historiolam vitae et profectuum nostrorum, quos ambo a prima adolescentia in Mathesi fecimus (ubi inter alia vidisses, non ipsum, sed me calculi Tui mysteria primum penetrasse ipsique impertivisse; vidisses, judicium illud, quod cognito etiam postea Barrovii calculo de Tuo tuli, a Te tam male acceptum, non minus ipsius quam meum fuisse etc.) sed mutavi sententiam, quia video nil profutura. Quin igitur ad Epistolae Tuae contenta, quibus adhuc responsum debeo, pergo:

Hic ante omnia, Vir Amplissime, est cur Tibi mihique impense gratuler, quod in controversia de quantitate virium aestimanda totus nunc Tuus factus sum, idque occasione exempli quod affers de 4 globis in plano horizontali: Fateri enim cogor, non placuisse alterum de ascensu corporis gravis duplo velocioris ad 4plam altitudinem, quod variis de causis minus aptum judico ad persuadendum, id quod debet; nec sane mihi persuasisset unquam, non magis atque Do. Papino. Et quanquam etiam illa, quae de 4 globis ad fratrem explicatius scripsisti, quaeque Hermannus noster, cum Groninga transiret, ex Tuis ad ipsum literis excerpsit, initio non carere scrupulo mihi viderentur, nunc tamen cum Tibi responsurus denuo examinarem, in certo sensu, puta in corporibus certa conditione praeditis, omnino vera deprehendo; et re ulterius expensa generaliter observo, quod, concessis legibus communicationis motus, in quibus determinandis Triumviri isti, Wallisius, Hugenius et Mariottus, si recte memini, consentiunt, 1. non possit manere eadem quantitas motus, sive corpora ponantur elastica, seu elatere destituta; 2. necessario manere debeat eadem quantitas virium (Tuo sensu accepta voce) si corpora ponantur elastica. E quibus porro concludo (cum hoc et rationi humanae et sapientiae Conditoris perquam conforme sit, ut eadem perseveret quantitas virium in universo) quod corpora necessario concipi debeant ut Elastica; unde et alterum illud Tuum sequi videtur de naturali ἐνεργείᾳ, seu vi agendi, quam Tu corporibus essentialem facis. Sed, quod potissimum, ista quae dixi calculo duarum linearum tam clare ostendo, ut non magis de iis dubitare possit D. Papinus, quam de simplicissima quavis demonstratione Euclidis; nec adeo tantum syllogismorum apparatu ad illum convincendum videatur opus.

De Seriebus infinitis ad quadraturas reducendis etiam olim cogitavi, et hinc curvam quaesieram, cui ista series $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. competeret, quam in Posit. meis de Seriebus Prop. XLIV eandem Tecum inveni, cujus nempe natura est $y = \int dx \log(1+x) : x$. Et patet, quod ei tantum loco $\square^{li}$ BJG in Schemate (fig. 13) sumatur solidum sub aliqua potestate BJ et JG, semper tales inveniri possint curvae, quibus indefinite competat $y = \int x^e dx \, (\log. \overline{1+x})$ et quarum quadraturae per series absolute summabiles exhibeantur, excepta sola, quam intenderam, serie $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. ubi $e = -1$. In symbolis etiam facile reperio $\int x^e dx \log. x = \frac{x^{e+1} lx}{e+1} - \frac{x^{e+1}}{\overline{e+1}^2}$, quae iterum in solo, ut dicis, casu quo $e = -1$, nos eludit. Et hoc quoque in aliis accidere solet: Sic

notum est, $x^e dx$ semper esse summabile, excepto tantum cum $e = -1$: Ita observo, $\int x^e nx \, dx$ (intellige per nx numerum ipsius x spectati ut logarithmi) generaliter ad simpliciorem reduci posse, quoties e numerum integrum et positivum significat; et quoties negativum, hoc solo nomine reduci non posse, quia in casu, quo $e = -1$, reduci nequit, sic ut solus hic casus dici possit nos fugere. Qua occasione recordor aequationis alias memoratae $dy = yydx + xxdx$, in qua nunquam separare potui indeterminatas a se invicem, sic ut aequatio maneret simpliciter differentialis; sed separavi illas reducendo aequationem ad hanc differentio-differentialem $ddy : y = xxdx^2$. Et quanquam generaliter et absolute summare possim $y^e ddy = xxdx^2$, imo generalius $y^e ddy = x^e dx^2$, in solo tamen casu non potui, quo $e = -1$; unde cogitavi aliquando, annon fieri forte possit, ut quemadmodum aequationes quaedam differentiales, velut $dy : y = x^e dx$, non sunt reducibiles ad algebraicas, ita dentur quaedam differentio-differentiales, quae nec ad algebraicas nec ad simpliciter differentiales reduci h. e. nec algebraice, neque per quadraturas construi possunt, adeo ut omnis labor in iis reducendis aut etiam separandis a se invicem differentialibus frustra impendatur. An ergo perpetuo hujusmodi curvis carebimus, nullumque medium ipsarum constructioni superest? Mihi certe hic aqua haeret, nisi Tu forte quippiam nosti. Tu enim penetrare potes, quo aliis non datur, teste eximio illo specimine,*) quod nuper in Actis Lips. dedisti pro summandis quantitatibus quibusvis rationalibus, quo profecto nihil unquam vidi excellentius. Si idem praestari posset in surdis, hem quanta scientiae promotio! Unum meo judicio taceri non debuisset: nempe modus procedendi, cum quaedam denominatoris radices sunt aequales; tum enim regulae Tuae non succedere possunt.

Machina Tua Arithmetica vellem aliquando typis excuderetur, ut ejus saltem aliquid etiam ad nos pervenire possit. Si de Pascaliana, Petitiana, et Morlandiana Machinis quidpiam mihi constitisset, forsan Tuae facilius penetrandae lucem affundere potuisset.

---

*) Die Abhandlung Leibnizens, von der Jac. Bernoulli hier spricht, hat den Titel: Specimen novum Analyseos pro Scientia Infiniti circa Summas et Quadraturas.

Vereor interim, ne Tua, cum tot implicatam rotis dicas, in praxi difficulter successum praestet.

Homo ille Lindaviensis, qui olim de Tuis sciscitatus est, Keesius appellatur, Jurium Doctor tum hic creatus: At is minime solus est, qui Tua depraedicet, cum aestimatores et admiratores habeas etiam nostrates, quotquot Tua scripta legerunt: adeo verum est, quod D. de Fontenelle ad Historiam suam nuperam Academiae Reg. Scient. praefatur, quando asserit, Virum Mathematicis scientiis instructum caeteris paribus (toutes choses d'ailleurs égales) de quavis re longe melius et accuratius disserere posse, quam ii qui hoc praesidio sunt destituti. Vale et fave etc.

Basileae, 15. Novbris 1702.

XI.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Berolini April. 1703.

Dici non potest, quam gratae mihi literae Tuae fuerint, his duobus exceptis, quod Te non optime valere, ac deinde quod Te de meo affectu subdubitasse testantur. Et valetudinem quidem boni consulere oportet, quam nobis tribuit Deus, ut caetera omnia, quae veniunt a summa illa manu, cum persuasissimum oporteat esse sapientem, non posse res melius geri quam fit a Deo; atque in bonum semper eorum cedere, qui Deum amant, et gubernatione ejus sunt contenti; etsi non semper hoc appareat in illa parte rerum quae oculis nostris subjecta est, scrupulique illis inanes semper maneant qui non semel curas in Deum rejicere dedicere. Quod me attinet, qui tota hac hyeme adversa valetudine Berolini retentus, nunc prope ex integro recuperatis viribus domum cogito, haberem (si eo scriptionis genere delectarer) nonnullam, amice, tecum expostulandi materiam. Quid quaeso a me proficisci poterat controversiae vestrae impediendae vel terminandae? Sane cum de me statim tanquam arbitro injiciebatur mentio, ea res fecit, ut nihil dicerem faceremve, quo in alterutram partem inclinare videri possem. Neque interim volebam in me nisi cum aliis recipere arbitrium. Et ut verum fatear, libenter distuli examinare sufficienti

studio an recte se omnia in solutione Groningiana haberent, ipse plus satis alias distractus, sed cum eo demum res redacta esset, ut tantum testimonio meo opus esset an eam accepissem statuto tempore, negare id non potui, judicium tamen meum interponendum non putavi. Porro liticulam illam vestram ego semper de nihilo esse judicavi, et cum illust. viris, Bignonio et Hospitalio tentavi opprimere in herba: nullamque fratribus rationem simultatis laudabilem intelligi posse statui. Tecum abruptum tunc nescio qua causa, commercium erat, alioqui facilius fortasse incommoda praevenissemus: caeterum non dissimulavi apud Drr. fratrem minorem, commune judicium ipsi minus faviturum vel ideo quia minori; plerisque (quicquid ille contra alleget) ex praesumta rerum natura censentibus fratrem seniorem quodammodo patris officium subiisse, et in studiis communibus maxime facem praeluxisse. Interim tu, qui ut aetate, ita humanarum rerum usu praestas, rem Te dignam facies, si exemplum ipsi praebeas moderationis. Quod si ille pergeret vellicare, quod tamen credendum non est, neminem ea in re habiturus esset laudatorem. Certe parvi momenti est in aliquo problemate viae compendiosiori forte alterutrum institisse, et scio fuisse in quibus Tibi, scio fuisse in quibus illi melius successit. Caeterum an eam mihi animi parvitatem tribuis, ut Tibi vel illi succenseam, si quos in Barrovio usus perspexistis, quos mihi inventionum contemporaneo ab eo petere necesse non fuit. Nondum apparuerat prima editio Lectionum Barrovii, cum aliquot foliorum centenarios impleveram duplici genere meditationum, uno per assignabilia, ut vocabam, ubi ad modum Cavallerii et Gregorii a S. Vincentio ratiocinabar; altero per in assignabilia, ubi et Triangulo, quod jam tum characteristicum vocaveram, utebar, idque credebam meum inventum, cui occasionem dederat quaedam demonstratio apud Pascalium vel Dettonvillaeum, qui ipse ejus usum non perspexerat. Hinc et dimensiones spatiorum et curvarum et superficierum rotatione genitarum ducebam multimode, quorum magnam partem postea alibi apud alios inveni, neque tanti ipsa visa sunt, cum ad fontem, nempe calculum differentialem perveni. Speraveram Tibi non displicituras meas Quadraturas Rationales, sane antiquissimas, nam jam in Gallia habui. Nunc esset cogitandum quandonam surdae ad rationales revocari possint, sed ibi in plerisque hactenus haeret aqua. Dn. Menkenio misi supplementum edendum pro radicibus aequalibus.

Machina Pascaliana, Petitiana, Morlandiana et Grilletiana nihil faciunt ad meam divinandam, nam plane aliud meae principium est. Illae omnes pro multiplicatione ac divisione Neperi baculis varie transformatis utuntur, mea nullam habet relationem ad rhabdologiam. Omnia mihi praestat natura rotarum nullo calculo praesupposito vel interposito, sed descriptio prolixior foret.

Gratum facies, si explices quomodo $dy = yydx + xxdx$ reduxeris ad $ddy : y = xxdxdx$, et quomodo solvas $y' ddy = x^{v} dxdx$. Malo enim ab egregiis viris jam inventa discere, quam per me quaerere, praesertim non certus inveniendi. Multa nobis adhuc desunt nec satis ausim dicere, quod nobis jus sperandi, etsi nil putem desperandum.*)

Res Societatis hujus Regiae paulo lentius procedunt; observationes tamen fiunt, quae cum caeteris melius ibunt observatorio absoluto.

Gaudeo quod veritatem doctrinae meae Dynamicae jam penitus perspexisti. Illam ego non inveni aut deduxi ex illis phaenomenis qualia Mariottus aliique tradidere, sed ex ipsis causis, quibus deinde consentire phaenomena necesse est. Quia autem rem brevi et eleganti calculo a Te confici ais, rem gratam facies, si mecum communicabis. Ego vero interim mitto ecce tres aequationes compendiosas quibus uti soleo, quaeque omnia quibus hic opus praebent. Non semper utor iis quae habeo, nec omnia quae potui adhibui ad Dn. Papinum convincendum.

Velocitatem progressivam vel progressus voco eam qua ferri intelligitur corpus in eam partem, in quam major est progressus in summa omnibus corporibus concurrentibus computatis. Quodsi corpus revera in contrariam partem feratur, ejus velo-

*) Für die Worte von „Multa .... desperandum" hatte Leibniz ursprünglich geschrieben: Fateor hactenus nescire me an omnes differentiales primi gradus possint reduci ad quadraturas et similiter an suppositis quadraturis, omnes secundi gradus ad primas; et ita porro. Tantum abest, ut quod ante paucos annos adhuc sibi persuadebant ineptientes de vulgo Geometrae, praesertim Cartesiani, omnia problemata solvere possimus, ut potius non nisi in liminibus haereamus rerum difficiliorum. Ne radices quidem publice habentur aequationum ultra quartum gradum; in quo tamen vera consistit aequationum analysis. Sed hoc puto esse in potestate, quamvis non ea via qua Dn. Tschirnhusius est usus.

citas progressus fiet quantitas negativa. Quantitatem progressus voco ductum ex massa in velocitatem progressus sive uno corpore adhibito sive plurium quantitatibus progressus computatis.

Esto jam velocitas progressiva corporum $\genfrac{}{}{0pt}{}{a}{b}$ ante ictum $\genfrac{}{}{0pt}{}{v}{y}$ post ictum $\genfrac{}{}{0pt}{}{x}{z}$.

Quantum corpus vincebatur celeritate progressiva ante ictum, tantum ea vi vincitur post ictum, seu

Reg. 1. Linearis. Eadem manet velocitas respectiva, qua corpora viciniam mutant; $v - y = z - x$.

Reg. 2. Superficialis. Eadem manet quantitas progressus; $av + by = ax + bz$ (unde si v, y, x, z sint quantitates affirmativae, quantitas progressus coincidet cum quantitate motus, nempe cum ante et post concursum corpora ambo tendunt in eandem plagam; sin corpora sibi occurrant, ea corpora quantitas progressus totalis erit differentia quantitatum motus.)

Reg. 3. Solidaris. Eadem manet quantitas virium, $avv + byy = axx + bzz$.

Cum corpora non satis elastica sunt, pars virium particulis corporum absorbetur, et in illis recepta insensibiles habet effectus, regulaeque 1. et 3. deficiunt sensu.

Harum trium regularum duae quaevis sufficiunt ad tertiam quoque inveniendam. Ex. gr. aequ. 1. sic demonstratur per aequ. 2. et 3: Ex aequ. 3 fit $a(vv - xx) = b(zz - yy)$. Ex aequ. 2. fit $a(v - x) = b(z - y)$. Dividatur praecedens per hanc, ab utraque parte, nempe $a(vv - xx)$ per $a(v - x)$ et $b(zz - yy)$ per $b(z - y)$, fiet utique $v + x = z + y$, seu $v - y = z - x$, ut habet aequ. 1.

Sed erat in hac doctrina desiderandum meo judicio aliquid sublimius profundiusque, ut scilicet nostra potentiae aestimatio conficeretur penitus a priori, nullo ad experimenta vel gravium vel elasticorum respectu, ex solis definitionibus potentiae, effectus, actionis et simul jam rem in motu aequabili spectando, omnibusque secundum motus essentiam formaliter et per se consideratis in unoquoque corpore moto omni violentia et accidentali remotis. Id autem jam dudum feliciter magnaque cum voluptate confeci, nec facile nisi illis communico, qui principia aestimare norunt. Sit spatium quod percurritur s, tempus quod impeditur t, et velocitas v, et corpus c, et potentia p, et effectus e, et actio a, quae jam pleraque definiemus aestimando,

s *sunt ut* vt id est spatia percursa sunt in ratione composita velocitatum et temporum impensorum, ut constat. Quod si quis spatium et tempus ut cognita assumat, continetur hic definitio velocitatis, eruntque *velocitates* ut s : t, id est in ratione spatiorum recta et temporum reciproca.

e *sunt ut* cs, id est *effectus* sunt in ratione composita corporum promotorum et spatiorum, per quae sunt promota. Intelligo hic abstractos et mathematicos effectus vel si mavis *formales*, per quos solos non est aestimanda vis, ut per violentos, quia violenti consumunt vim eoque mensurant, sed formales eam relinquunt nec totam exhauriunt aestimationem actionis, ut jam patebit.

Porro a *sunt ut* ev seu *actiones* motrices sunt in ratione composita et effectuum et celeritatum, quibus illi effectus fiunt. Intelligo actionem motricem in corpore moto per se spectato. In ea non tantum quid sit productum aut quantum corpus quam longe sit promotum quaeritur, sed et qua celeritate.

Tandem a *sunt ut* tp, nempe potentiae natura intelligitur a suo fructu, scilicet actione, si consideres actionem esse potentiae exercitium, et resultare potentiae replicatione, vel ductum per tempus. Unde habetur definitio aestimatoria potentiae: p sunt ut a : t, id est potentiae seu vires sunt in ratione composita ex actionum ratione directa et temporum reciproca, ut supra velocitates ex spatiorum directa et temporum reciproca.

Hinc jam nostra potentiae aestimatio sic demonstratur: tp ut a, sed a ut ev, ergo tp ut ev, sed e ut cs, ergo tp ut csv. Sed s ut vt; ergo tp ut cvvt seu p ut cvv, id est potentiae sunt in ratione composita ex simplice corporum et duplicata velocitatum. Quod erat demonstrandum.

Mirabere, tam simplices notiones ut potentiae, actionis, et similes, hominibus satis perspectas non fuisse; et ex iis tamen sponte nasci vides verum Dynamices principium, quod omnia deinde experimenta confirmant. Idem concludo adhuc alio mirabili argumentandi genere inexspectatae simplicitatis, cujus tamen idem est fundus. Concluditur quoque hinc aliud magnum Theorema; posito enim servari quantitatem virium in universo, sequitur falsum quidem esse quod eadem maneat quantitas motus; sed tamen verum est,

aequalibus temporibus aequales manere quantitates Actionis motricis in universo, secundum nostram scilicet Actionis ac potentiae definitionem. Nam quia a ut tp, et p semper eadem, etiam aequalibus temporibus erunt tp eadem, adeoque et a eaedem, aequalibus t. Hinc si vel in universo, vel in composito corporum cum aliis corporibus non communicante sumatur tempus determinatum, v. g. minuti, et durante eo ducantur respective corpora in sua respective spatia percursa, simulque in percurrendi velocitates; proveniens aggregatum quocunque minuto erit aequale: ut mirabile sit Cartesium, cum vicinus esset veritati, semper hic a janua aberravisse. Unum addo, etsi putem omnia corpora suo quodam modo esse Elastica, et in omni corporum concursu Elastrum exerceri, neque aliter leges naturae divinas executionem habere posse, non tamen a me concipi Elastrum, ut quantitatem ἄῤῥητον divinitus, immediate inditam aut procuratam, sed ut effectum fluidi tenuis interlabentis; partesque hujus fluidi rursus Elasticas esse per aliud fluidum multo tenuius, et sic procedi in infinitum. Nec volo ut meae formales causae, Animae nempe vel Entelechiae primitivae, non magis quam finales quae autorem rerum perpulere, vel minimum derogent efficientium et materialium seriei intelligibili seu mechanismo, etsi principia mechanismi seu Leges Dynamicae propter finales in formalibus contineantur.

P. S. Audio a Te doctrinam de aestimandis probabilitatibus (quam ego magni facio) non parum esse excultam. Vellem aliquis varia ludendi genera (in quibus pulchra hujus doctrinae specimina) mathematice tractaret. Id simul amoenum et utile foret nec Te aut quocunque gravissimo Mathematico indignum. Sitas theses quasdem Tuas vel dissertationes earum non nisi paucas vidi. Optarem autem habere omnes.*)

---

*) **Anmerkung.** An die Stelle von diesem P. S. hatte Leibniz ursprünglich das folgende geschrieben, das seines interessanten Inhalts wegen hier einen Platz finden mag.

An eam in me animi parvitatem putas, ut vel Tibi vel Dno. fratri tuo, vel cuiquam alteri succenseam, si vos in Barrovio usus perspexistis, quos mihi inventionum contemporaneo ab eo petere necesse non fuit. Cum Parisios appulissem anno Christi 1672, eram ego Geometra autodidactos, sed parum subactus; cui non erat patientia percurrendi longas series demonstrationum. Algebram Lanzii cujusdam puerilem,

XII.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Humanissimas Tuas praeterito Aprili Berolino ad me datas recte accepi, gaudeoque quo ibidem detinebaris morbo Te rursus feliciter liberatum: Meam quod valetudinem attinet, eam post re-

---

deinde Clavii puer consulueram; Cartesii implicatior visa erat. Videbar
tamen ipse mihi nescio qua satis credo temeraria ingenii fiducia par
et his faturus si vellem. Audebamque inspicere libros profundiores,
ut Cavalerii Geometriam et Leotaudi amoeniora curvilineorum elementa,
quae forte Noribergae inveneram, et similia quaedam plane sine cortice
nataturus. Nam pene legebam ut Historias Romanenses. Interim quen-
dem calculum mihi Geometricum fingebam, per quadratilla et cubillos
incertis numeris exprimendos; ignarus haec omnia Vietam et Cartesium
melius elaborasse. In hac pene dixerim superba Matheseos ignorantia
ego historias et jura circumspiciebam, quod illis studiis me destinassem.
Ex mathesi jucundiora libabam, Machinas inprimis cognoscere atque
invenire amans; nam et Arithmetica mea Machina illius temporis partus
fuit. Cum forte Hugenius, qui plus credo in me quaerebat quam erat,
exemplum mihi sui de Pendulis Libri recens editum pro humanitate
sua attulit. Id mihi accuratioris Geometriae initium vel occasio fuit.
Dum sermones caedimus, animadvertit me non satis rectam habere no-
tionem centri gravitatis, eam ergo indicavit paucis; simul addidit Det-
tonvillaeum (hoc est Pascalium) talia egregie executum. Ego qui
semper hoc habui eximium, ut essem mortalium docillimus saepeque
luce ex unius magni viri verbis pauculis hausta innumera mea medi-
tata nondum matura delevi: statim arripere monita summi mathematici:
nam quantus esset Hugenius facile perspiciebam. Accedebat pudoris
stimulus, quod visus essem rem talem ignorare. Itaque Dettonvillaeum
peto a Buotio, Gregorium Vincentiadem ex Bibliotheca Regis, jam se-
rio Geometram acturus. Nec mora illos ductus Vincentii, illas ungu-
las a Vincentio coeptas, a Pascalio promotas; tum illas summas et
summarum summas nataque diverse solida et resoluta, cum jucundi-
tate spectabam; plus enim voluptatis quam laboris afferebant. In his
eram, cum forte incido in demonstrationem Dettonvillaei specie levissi-
mam, qua probat dimensionem Archimedeam superficiei sphaerae, et ex
triangulorum EDC et CBK (fig. 14) similitudine ostendit, fore CK in
DE = BC in EC, adeoque ponendo BF = CK, fore rectangulum
AF aequale momento curvae AEF ex axe AB. Haec ratiocinandi no-
vitas me percussit; neque enim animadverteram apud Cavalerianos.
Sed nihil magis obstupui, quam quod Pascalius fato quodam velatos

ditum ex thermis Plumberiis satis quidem nunc tolerabilem sentio, sed tamen tenerrimam, et quavis levissima diaetae aërisve intemperie alterandam, ut nulla spes sit, me unquam plene convaliturum, aut pristinas vires ex integro recuperaturum esse. Quicquid ejus sit, jam dudum Deo confidere, ejusque paternae providentiae omnia mea committere didici persuasissimus nihil mihi adversi ac-

---

oculos habuisse videretur; statim enim videbam generalissimum esse
theorema pro quacunque curva, etsi perpendiculares in uno centro non
concurrerent, si modo perpendicularis a curva ad axem in ordinatam
transferretur, ut (fig. 15) PC vel (P)(C) in BF vel (B)(F), mani-
festum erat zonam FB(B)(F)F aequari momento curvae C(C) ex axe.
Ego statim eo ad Hugenium, quem nondum revideram: dico me ob-
secutum ejus monitis, jam posse aliquid, quod neque Pascalius ha-
buisset. Et theorema generale pro momentis curvarum expono. Ille
admiratus, atqui, inquit, hoc ipsum theorema est, cui innituntur meae
constructiones pro superficiebus Conoidum Parabolicorum, Ellipticorum
et Hyperbolicorum explanandis, quae quomodo inventa essent, Rober-
vallius et Bullialdus nunquam sapere potuerunt. Itaque applaudens
ipse progressibus meis, quaesivit, possemne jam curvarum quales FF
naturas invenire. Cum negarem me in ea inquisitione exercitatum,
ipse Cartesium et Slusium inspicere jussit, qui aequationes locales
conficere docuissent, id enim ajebat esse percommodum. Ex eo Geo-
metriam Cartesii examinavi, Slusiumque adjunxi, ingressus profecto in
Geometriam per posticum. Cum vero successus blandiretur et in-
numera sub manibus nascerentur, aliquot centena folia eodem anno
implevi, quae in duo genera distinguebam, Assignabilium et Inassigna-
bilium; ad assignabilia referebam quaecunque consequebar iis viis an-
terioribus, quibus Cavallerius, Guldinus, Torricellius, Gregorius a S.
Vincentio, Pascalius, erant usi, summis, summis summarum, transposi-
tionibus, ductibus, cylindrisque per plana truncatis, per viam denique
centri gravitatis. Inassignabilibus ascribebam quae adhibito triangulo
illo quod jam tum vocabam characteristicum, similibusque aliis con-
sequebar, et quorum initia Hugenius et Wallisius dedisse mihi vide-
bantur. Paulo post incidit in manus meas Geometria Universalis Jac.
Gregorii Scoti, huic videbam eandem artem esse perspectam (quamvis
demonstrationibus ad morem veterum obscuratam), quemadmodum et
Barrovio demum cum ejus Lectiones prodirent, ubi magnam partem
meorum theorematum praeceptam vidi. Parum tamen movebar, cum
obvia esse viderem semel his imbuto tironi animadverteremque super-
esse multo altiora, sed quae novo calculi genere indigerent. Unde
Arithmeticam meam Quadraturam similiaque licet magno plausu Galli
Anglique excepissent nec editione digna putabam, pertaesus haerere
in minutis, dum se Oceanus quidem aperiret. Caetera ut processe-
rint, nosti et comprobant literae meae ab Anglis ipsis editae.

cidere posse, quod non in propriam vergat salutem. Quorsum etiam refero vel ipsam calamitatem, quam mihi per litem fraternam accessivi, quippe qua Deus patientiam et humilitatem meam voluit exercere: quanquam propterea ipsum fratrem (per quem haec tribulatio mihi immissa est) minime velim excusatum, neque hoc impediat, quo minus justitiam causae a meis semper partibus stetisse credam. Quocirca paternae hujus castigationis intuitu in posterum tacebo, nec ejus injuriis quicquam reponam, modo ne porro lacessere, aut aliquid quod ipsius non est (praeter id quod jam ex Actis Lips. et Gallico Diario mihi innotuit) sibi arrogare pergat. Eodem pacis spiritu actus nolo disquirere, utri nostrum cum altero potior expostulandi ratio suppetat, sed tamen in hoc Tibi astipulari non possum, quod litem nostram de nihilo fuisse judicas; quasi quidem avaritiae et sacrilegii publice insimulari, ac hujus impacti criminis suspicionem a se amoliri esset res nihili. At satis tandem de istis!

Supplementum Tuarum Quadraturarum pro radicibus aequalibus nondumque hucusque in D. Menckenii Actis comparuit, nisi forte Mensis aliquis Actorum mihi inconspectus mansit. Audivi, ni mea me fallit memoria, fratrem meum idem inventum tanquam suum Parisios misisse; quod ego miror, cum Tu antiquissimum Tibique jam in Gallia notum dicas. Reductio Aequationis $dy = yydx + xxdx$ ad aliam differentio-differentialem nihil habet mysterii; pono solummodo $y = -dz : zdx$; sic fiet $\overline{dxdz^2 - zdxddz} : zzdx^2 = dy = yydx + xxdx = dz^2 : zzdx + xxdx$; adeoque (multipl. per $zzdx^2$) $dxdz^2 - zdxddz = dxdz^2 + xxzzdx^3$; hoc est, $-zdxddz = xxzzdx^3$, sive $-ddz : z = xxdx^2$, optata aequatio, in qua separatae sunt indeterminatae. Solutio porro hujus alterius $-z^e ddz = x^2 dx^2$, minus adhuc artificii habet: posito namque $z = ax^m$, fit $-z^e = -a^e x^{em}$, $dz = amx^{m-1}dx$, $ddz = am . \overline{m-1} . x^{m-2}dx^2$; adeoque $-z^e ddz\,(x^v dx^2) = -a^{e+1} . m . \overline{m-1} . x^{em+m-2}dx^2$; unde facta comparatione habetur $v = em + m - 2$, hoc est $m = \overline{v+2} : \overline{e+1}$; quod in omni casu solutionem possibilem reddit, praeterquam cum $e = -1$. Habes sic, Vir Amplissime, quae desiderasti; sed nondum mihi vicissim satisfecisti, neque explicuisti, quid sentias de analogia has inter aequationes $dz : z = x^v dx$; et $ddz : z = x^v dx^2$; et de conjectura quam inde deduxi; nisi quod dicas nil esse desperandum.

Num igitur putas, nec de priore desperandum? aut, num existimas, de posteriore melius sperari posse? Ego profecto nullam discriminis rationem video, valdeque verisimile mihi fit, quod quemadmodum prior aequatio ad algebraïcam reduci nequit, ita et altera neque ad algebraicam neque ad simpliciter differentialem reduci possit. Si vero ita sit, quomodo quaeso ejusmodi aequationes construentur? nullum hic nisi commune serierum refugium novi: reduco autem aequationem $dy = yydx + xxdx$ ad fractionem, cujus uterque terminus per seriem exprimitur, ita:

$$y = \frac{\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{3.4.7} + \frac{x^{11}}{3.4.7.8.11} - \frac{x^{15}}{3.4.7.8.11.12.15} + \frac{x^{19}}{3.4.7.8.11.12.15.16.19} - \text{etc.}}{1 - \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^8}{3.4.7.8} - \frac{x^{12}}{3.4.7.8.11.12} + \frac{x^{16}}{3.4.7.8.11.12.15.16} - \text{etc.}}$$

quae series quidem actuali divisione in unam conflari possunt, sed in qua ratio progressionis non tam facile patescat, scil.:

$$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{3.3.7} + \frac{2x^{11}}{3.3.3.7.11} + \frac{13x^{15}}{3.3.3.3.5.7.7.11} + \text{etc.}$$

Quod res novae Societatis concernit, scripsit mihi M. Jenischius, Vir juvenis egregius et eruditus, cui Tui alloquii copiam fecisti, parari a societate librum, qui omnia calculi Tui differentialis arcana complectatur. Quid istud libri sit, et quis ejus futurus Author, scire libenter velim.

Circa Doctrinam Tuam Dynamicam novus, quod venia Tua dixerim, mihi obortus scrupulus, ex quo postremas meas ad Te dedi; non quod evertere velim ea quae Tibi semel concessi (certum enim est, secundum receptas communicationis motus leges eandem manere debere quantitatem virium in Universo, si corpora sunt elastica) sed quod de veritate potius annexae conditionis subdubitem. Primam scrupuli ansam dedit vulgare experimentum vectis, quo videmus pondus unius librae cum celeritate ut 2, paria facere cum pondere bilibri (non quadrilibri) celeritatis ut 1. Sed quia responderi hic poterat, celeritates, juxta quarum quadrata Tu vires aestimatas velis, intelligendas esse actuales, non vero potentiales aut initiales tantum, quales in vecte obtinent; quaesivi aliud experimentum, ubi ista exceptio non valet, reperique apud Mariottum sequens: Sit libra brachiorum aequalium, super unam ejus lancem cadat pondus bilibre ex altitudine unius pedis, h. e. cum celeritate ut 1; super alteram pondus unius librae ex altitudine 4 pedum, adeoque cum celeritate ut 2; et ita simul impetum faciant unumquodque in suam lancem. Testatur experientia, bilancem in aequilibrio mansuram, neutro ponderum alteri praevalente; id quod cum Tua sententia nullo modo conciliare possum, juxta quam pondus unius librae vires haberet duplo majores, adeoque alteri multum praevalere deberet. Unde re diu multumque mecum pensitata ita coepi statuere: Inter partes Universi perpetuum suppono servari aequilibrium; hoc autem ut obtineatur, 1. non est necesse, ut eadem maneat quantitas motus aut virium *absoluta* in universo; 2. contingit tamen ex accidenti in systemate duorum pluriumve corporum in se agentium, ut eadem maneat absoluta quantitas virium, si nempe corpora illa sint elastica; 3. necesse autem est, ut eadem maneat quantitas motus *respectiva* sive in eandem plagam. Primi veritas patet ita: Trahant duae aequales potentiae A et B libram ab (fig. 16) secundum directiones perpendiculares aA, bB, fiet aequilibrium: trahat deinde altera potentia B oblique secundum directionem bC, plus utique nunc requiretur virium ad conservandum aequilibrium quam antea. Vel etiam ita: Sit planum aliquod aequilibratum super recta ab (fig. 17) et exeant simul ex a duo corpora aequalia A, B, quae celeritatibus aequalibus super plano moveantur per rectas aA, aB; manebit plani aequilibrium; sed currat deinde corpus B oblique per rectam ac, requiritur major in illo celeritas, adeoque et major quantitas motus et virium, quam antea, ad conservandum plani aequilibrium. Unde si nulla alia in Universo corpora concipiantur praeter haec duo A et B, patet propositum. Tertium porro mihi egregie confirmat calculus, quo mediante reperio, quod sive corpora in se agentia sint elastica, sive non, semper commune eorum gravitatis centrum uniformiter movetur in linea recta, adeoque ad conceptibile quodvis planum aequaliter accedit aut recedit: hinc enim colligi potest, quod summa momentorum respectu illius plani (quae summa distantiae centri grav. ab illo proportionatur) aequabiliter etiam minuitur vel augetur; et per consequens, quod summa productorum ex singulis corporibus in suas respectivas celeritates versus illud planum, h. e. quod quantitas motus eorum respectiva semper maneat eadem. De Tuo caeteroqui ratiocinio, quo sententiam Tuam demonstrari posse existimas nullo habito Elasticitatis respectu, ego certe judicium meum interponere non ausim, cum notiones istae metaphysicae *actionis*, *effectus* etc. in discursu mathematico non sat evidentiae pro me habeant. — Unum observo,

cujus rationem non capio, nempe cur facias a (actiones) ut ev (effectus et velocitates simul) cum tamen notio velocitatis in notione effectus (qui est ut cs, hoc est ut cvt) jam comprehendatur. Remota igitur nova consideratione velocitatis, si facias a simpliciter ut e, prodibit praecise id, quod Tu impugnare volebas, nempe p fore ut cv, non autem ut cvv.

Scire libenter velim, Amplissime Vir, a quo habeas, quod Doctrina de probabilitatibus aestimandis a me excolatur. Verum est me a pluribus retro annis hujusmodi speculationibus magnopere delectari, ut vix putem, quemquam plura super his meditatum esse. Animus etiam erat, Tractatum quendam conscribendi de hac materia; sed saepe per integros annos seposui, quia naturalis meus torpor, quem accessoria valetudinis meae infirmitas immane quantum auxit, facit ut aegerrime ad scribendum accedam; et saepe mihi optarem amanuensem, qui cogitata mea leviter sibi indicata plene divinare, scriptisque consignare posset. Absolvi tamen jam maximam Libri partem, sed deest adhuc praecipua, qua artis conjectandi principia etiam ad civilia, moralia et oeconomia applicare doceo, soluto eum in finem singulari quodam Problemate, quod difficultatis commendationem non parvam, utilitatis longe maximam habet, et de quo jam ultra duodecennium fratri constitit, etsi hic, de eodem olim interrogatus a D. Marchione Hospitalio, pro suo mea depretiandi studio veritatem dissimularit. Breviter Tibi aperio, quid sit: Notum est, quod probabilitas cujusvis eventus dependeat a numero casuum, quibus ille contingere aut non contingere possit; itaque ratio, cur ex. gr. sciamus, quanto sit probabilius, ut in duabus tesseris 7, quam 8 puncta cadant: nesciamus vero, quanto sit verisimilius, juvenem 20 annorum supervicturum seni sexagenario, quam hunc illi; haec unica est, quod cogniti nobis sint numeri casuum, quibus 7 et quibus 8 puncta in tesseris evenire possunt: ignoti vero numeri eorum, qui juveni prae sene, et huic prae illo mortem accersere valent. Hinc coepi cogitare, annon forte quod a priori nos latet, saltem nobis innotescere possit *a posteriori*, ex eventu in similibus exemplis multoties observato, puta hic, facto experimento in plurimis senum juvenumque binariis: nam si deprehenderem, millies verbi gr. contigisse, ut juvenis suo respective seni supervixerit, et quingenties tantum aliter accidisse, satis tuto colligere possem, duplo probabilius esse, ut juvenis seni supervivat quam ut hic illi. Quam

quam autem, quod mirabile est, etiam stupidissimus quisque nescio quo naturae instinctu per se et nulla praevia institutione norit, quod quo plures observationes fiunt, hoc minus a scopo aberrandi periculum sit; hoc ipsum tamen accurate et geometrice demonstrare minime vulgaris indaginis est. Sed neque hoc totum est, quod volo: quaerendum insuper est, an crescente numero observationum ita continuo crescat probabilitas, ut tandem data quavis probabilitate probabilius mihi fiat, me veram rationem inter numeros casuum, quam aliam a vera diversam, invenisse: an vero problema suam, ut sic dicam, habeat asymptoton, id est, an perveniam tandem ad aliquem probabilitatis gradum, ultra quem probabilius mihi fieri non possit, me veram rationem detexisse. Nam si hoc sit, actum erit de nostro conatu explorandi numeros casuum per experimenta: sin illud, aeque certo rationem illorum a posteriori indagabimus, atque si nobis a priori cognita esset. Et hoc quidem modo reperi se rem habere; unde jam determinare possum, quot observationes instituendae, ut centies, millies, decies millies etc. verisimilius (adeoque tandem ut moraliter certum) sit, rationem inter numeros casuum, quam hoc pacto obtineo, legitimam et genuinam esse; quod in usu vitae civilis sufficit, ad conjecturas nostras in quavis materia contingente non minus scientifice dirigendas atque in ludis aleae; in quo solo omnem Politici prudentiam consistere puto. Nescio, Vir Amplissime, an speculationibus istis soliditatis aliquid inesse Tibi videatur; quo casu gratum facies, si materias quasdam Juridicas mihi subministres, in quibus utiliter adhiberi posse arbitreris. Nuper in Menstruis Excerptis Hanoverae impressis citatum inveni Tractatum quendam mihi ignotum Pensionarii de Wit von Subtiler Ausrechnung des valoris der Leib-Renten. Fortasse is quaedam huc facientia habet; quod si sit, copiam ejus mihi alicunde fieri percuperem.

Nonnulli non infimae notae Theologi Reformatae nostrae Helvetiae in mandatis mihi dederunt, ut quaererem ex Te, cujus judicium consiliumque faciunt maximi, quid sentias de pace inter Protestantes utriusque communionis Lutheranos et Reformatos (Syncretismum vocant) attentanda; num illam ullatenus possibilem statuas, et quaenam media huic promovendae maxime conducere autumes.

Collega meus D. D. Zuingerus ante quadrimestre circiter Berolinum iter fecit, ut, quod ajunt, de Statione Medici in aula Regis Borussiae sibi oblata, in locum D. Albini, qui Leidam evocatus fuit, cognosceret. Obstringes me non parum, si proxime certiorem me reddas, an vocationem hanc acceptarit, an recusarit; quod per amicos, quos ibi habes, rescire facile poteris. Rumor etiam fuit, Fratrem meum ad Professionem Mathematum in Academia Hallensi (alii addunt, et in Ultrajectina) vocatum aut vocandum esse. Si ipse vocationi locum dare nolit vel nequeat, credo Hermannum nostrum Spartam utramlibet non difficulter amplexurum, et praesertim etiam egregie exornaturum esse, si commendatione Tua efficere posses, ut ipsi offerretur.

Theses vel Positiones meas de Seriebus (quas in praecedentibus meis citavi) ni fallor jam habes. Sola Tibi deest pars 4ta, quam Tibi aliquando mittere possum, etsi nihil contineat Tuo adspectu dignum. Opus incepi, cui prius immoriar quam absolvero, ob respondentium inopiam, et materiae ubertatem. Vale et fave etc.

Basileae, 3. Octobris 1703.

XIII.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Gaudeo quod literae meae Tibi recte sunt redditae, sed magis quod valetudine uteris tolerabili. Eam nihil melius sustinet quam animus hilaris, pars magna laudabilis dietae. Cumque nihil desit ad commoditates vitae, et magna sit omnium intelligentium de Te existimatio, famaque parta perennis, quibus imprimis homines ducuntur, et merita insignia in Rempublicam, quod mihi potissimum videtur, omnia ad Deum communis boni maximum curatorem referenti, minuta illa incommoda liticulae quam refers, facile spernas. Talia non possunt nocere nobis, quam quantum illis ipsi potestatem in nos damus. Objectio avaritiae haud dubie inanis omnibus, sacrilegii etiam ridicula videretur. Ut solent talia plerumque abire utrinque vitilitigationes; quibus tandem finem impositum laetor.

Dn. Frater Tuus significaverat mihi se misisse Parisios problematum quorundam Catalogum, in quibus unum fuit: Omnes quadraturas ut $\int(v\,dx : z)$ revocare ad quadraturam Circuli aut Hyperbolae, posito v et z esse formulas rationales ex x. Et cum intellexisset a me missam ad Acta Lipsiensia Analysin omnium Quadraturarum rationalium, petiit suam quoque methodum addi, quam proprio marte reperisset. Feci quod petebat, adjunxique meo supplemento, sed simul notavi in eo diversum a via abiisse, quod putavit omnes quadraturas rationales pendere a quadratura Circuli et Hyperbolae, quod est secus, nam $\frac{1}{1+x}$ per quadraturam Hyperbolae, et $\frac{1}{1+xx}$ per quadraturam Circuli summantur quidem, sed $\frac{1}{1+x^4}$, $\frac{1}{1+x^8}$, $\frac{1}{1+x^{16}}$ etc. per binas istas summari non possunt. Nempe non omnes radices imaginariae, ut prima fronte videri possit, revocantur ad $\sqrt[2]{-1}$, nam $\sqrt[4]{-1}$, $\sqrt[16]{-1}$, altioris sunt naturae, nec ab inferioribus pendent. Mihi autem haec antiquitus fuere discussa quadraturarumque rationalium analysis constituta, jam tum cum adhuc in Galliis agerem.

Grata mihi sunt quae de aequationibus $dy = (yy+xx)dx$ et $-z^e ddz = x^v dx dx$ scripsisti, tum quod per se pulchra sunt, tum quod mihi amplius his attentionem valde adhibere vix licet, etsi aliquando et ipse arteficiis sim usus, quae non sunt absimilia tuis.

Non despero omnes aequationes differentiales reduci posse ad quadraturas, imo interventu quadraturarum aequationes ulteriorum differentiarum reduci posse ad differentias citeriores. Sane si quis demonstrare posset hoc non licere, quod vix puto, novae etiam construendi artes quaerendae forent. Cum dico nil desperandum, facile judicas intelligi, nisi valida adsint argumenta impossibilitatis. Quod analogiam attinet inter $dz : z = x^v dx$ et $ddz : z = x^v dx dx$, verum est aequationes omnes $z^e dx = x^v dx$ solvi posse per quadraturas ordinarias excepto casu ubi $e = -1$, nec, quod addo, simul $v = -1$, et similiter $z^e ddz = x^v dx dx$ posse solvi per quadraturas ordinarias, excepto casu quo $e = -1$ nec simul $v = -2$. Sed ut tamen prior aequatio pendet a quadraturis transcendentibus, cum $e = -1$, ita et similiter, quantum ex analogia duci potest, nihil prohiberet, etiam posteriorem eo casu quo $e = -1$, a quadraturis transcendentibus pendere. Pro aequatione $dy : dx = yy + xx : aa$ valorem, in quo series seriem dividit, duxisti ni fallor ex aequ. $-ddz : z = xx dx dx$, et seriem

ubi valor simpliciter exprimitur, ex actuali in valore priore facta divisione ductam, ubi $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3.3.7}x^7 + \frac{2}{3.3.3.7.11}x^{11}$ etc. pari credo facilitate obtinuisses directe ex priore aequatione, faciendo $y = ax + bxx + cx^3$ etc. in aequatione hinc explicata quaerendo a, b, c, etc. per destructionem terminorum.

Dn. Jenischium vidi Berolini, ejusque placuit ingenium. Schediasma conscripserat de Paradoxis nostri Calculi infinitesimalis, et video nonnullos viros ingeniosos talia inde ducere, quae ἄδοξα potius censerem, ipsumque calculum damnandum, si fundamentis hujusmodi indigeret. Itaque ipsi ostendi, et in seriebus infinitis et in calculo nostro summarum et differentiarum non esse ratiocinationes extendendas ultra casus, in quibus res ad rigorosam demonstrationem reduci potest more veterum. Veteris enim methodi nostra non nisi contractio est, inventioni apta. Hinc pro infinitis et infinite parvis sumo utcunque magna et utcunque parva, et si sic error possit fieri dato minor, tuta est methodus. Librum de Calculo differentiali Societas Berolinensis Regia molitur nullum, neque quisquam fere Berolini est, qui in eo studio magnam hactenus operam posuerit. Et quis Te ac Dn. fratre tuo melius Calculi nostri arcana pleraque exponere possit, non video.

Venio ad difficultates Tuas circa Dynamicen meam. Equidem non est quod verearis retractare quae mihi concessisti, si nova argumenta occurrant. Putem tamen scrupulis Tuis non difficulter occurri posse. Corpora omnia universi puto Elastica esse, non quidem per se, sed ob fluida interlabentia, quae rursus tamen partibus Elasticis constant, atque ea res procedit in infinitum, nullaque sunt in corporibus ultima Elementa, quod aliunde satis demonstratum habeo. Vires mortuas seu in initiis motuum existentes esse in ratione composita celeritatum et molium, vel ex ipso meo principio constat, quia vires aestimo ex effectu violento, nempe in gravibus ex descensu; sed cum corpora colluctantur viribus mortuis, ut in libra, tunc descensus sunt ut celeritates, cum in viribus vivis descensus sint ut quadrata celeritatum. Experimentum quod allegas, nos turbare non debet. Possum in talibus sine jactantia usurpare illud Virgilianum: omnia praecepi atque animo mecum ante peregi. Sciendum est in omni corporum conflictu rem reduci ad vires mortuas, sive (si ita appellare malis) embryonatas, eo ipso quia Elastica sunt. Nam si concurrant corpora, unum 2 celeritate ut 1, alterum 1 celeritate ut 2, vires suas invicem sibi adiment seu in Elastrum quo constant transferent non per saltum, sed per diminutiones infinitesimales, seu per vires embryonatas; ita re ad has redacta semper aequalem ambo perdent quantitatem motus sive reciprocam motibus celeritatem, atque ita ipsam vim totalem seu vivam simul amittent, in Elastrum translatam. Itaque hinc duo corpora in aequalium **virium absolutarum**, sed aequalium motus quantitatum se mutuo sistunt seu aequalem habent **vim impeditivam**. Et hoc non tantum fit, cum corpora illa concurrant interposito alio corpore duro vel saltem elastice resistente; idem ergo evenire debet, cum concurrunt interpositis librae lancibus, quae et ipsae sunt durae et elasticae. Verissimum est et a me quoque observatum, quod sive Elastica et dura sint corpora totalia, sive mollia, quae vim absorbeant, manere eundem progressum centri gravitatis; seu in Actis ni fallor loquebar, conservari vim directionum, et in eo multa adhuc elegantia latent. Caeterum neque id officit, neque caetera quae affers, quin simul et vires absolutae serventur. Nam cum mollia concurrunt, ex. gr. duae pilae aëreae aut ex terra molli, pars virium perditur non omnino quidem, sed respectu totorum: consumitur enim in particulis nec totis redditur, perinde ac si globi duri innumeri essent colligati in massam, ut si natarent in aliquo liquore vel vortice, talesque vortices bini concurrerent inter se. Bene notas, cum corpus oblique incurrit, majorem requiri vim, sed hujus ipsius rei lex ostendit vires vivas esse ut quadrata celeritatum, ut si globus A (fig. 18) tempore 12 celeritate ${}_1A\,{}_2A$ incurrat in globos B, C, aequales ipsi et quiescentes eodem tempore 12, idque fiat ita ut centra omnium faciant in concursu triangulum rectangulum isosceles, centro ipsius A', nempe ${}_2A$ cadente in angulum rectum, tunc post ictum quiescet A tempore 23 quod aequale sit tempori 12, unde ${}_2A$ et ${}_3A$ coincidunt, et eodem tempore 23 B ibit ex ${}_1B$ vel ${}_2B$ in ${}_3B$, celeritate ${}_2B\,{}_3B$, et similiter C ex ${}_1C$ vel ${}_2C$ in ${}_3C$ celeritate ${}_2C\,{}_3C$. His positis erunt motus ${}_2B\,{}_3B$ et ${}_2C\,{}_3C$ in lateribus quadrati, in cujus diagonali perrexisset A eodem tempore 23 si obstaculum non invenisset, eruntque ob aequalitatem trium corporum quadrata celeritatum post ictum, aequalia quadrato celeritatis ante ictum, nam quadrata laterum aequantur quadrato diagonalis. Itaque ipsae obliquitatis leges nostris regulis consentaneae sunt. Neque unquam sat scio vel exemplum vel rationem reperiemus, quae principiis nostris obstare possit.

Argumentum meum ex altiori fonte ductum non pro merito expendisse videris. Metaphysica non minus evidentia sunt quam mathematica, si recte tractentur. Quod de Effectu objicis, ad litem nominis redit neque quicquam in ratiocinatione immutat. Si corpus aliquod motu uniformi moveatur, nomine effectus dico a me intelligi factum ex mole corporis et longitudine lineae. Quidni hoc mihi liceat? Cum vero plus adhuc insit motui, nec tantum referat quid efficiatur, sed et quam promte; seu non tantum quantum corpus per quantam lineam transmittatur, sed et qua celeritate; hinc quod aestimo conjunctis tribus omnibus adeoque conjuncto effectu (qui duo comprehendit) et promptitudine, id voco ipsam **actionem**, quippe in qua nihil quod aestimationem faciet, ulterius considerandum occurrit. Porro **vim** definio id cujus exercitio seu duratione fit completum istud seu actio, adeo ut actio fiat vi tantum ducta in tempus. His definitionibus adhibitis seu hoc sensu verborum supposito (in quibus nihil est quod non cum mathematicis evidentia certet) efficitur a priori nullo gravitatis aut Elastri aut alterius physici non explorati interventu Theorema illud magnum: Vires esse ut quadrata celeritatum; quod tum experimentis, tum et ratiocinationibus ex hypothesi gravium et elasticorum deinde pulcherrime confirmatur. Quod si (tibi dicto audiens) facerem actiones ut effectus, post tales definitiones positas, contradicerem ipse mihi. Itaque oportet Te valde festinasse in hoc ratiocinio expendendo, haud dubie quod praejudicio quodam jam esset praedamnatum Tibi. Caeterum hic vides de effectu formali sermonem esse, seu qui motui est essentialis qui totam actionis aestimationem minime absolvit. At secus esset in Effectu physico, qualis est ascensus gravis in datam altitudinem, ubi scilicet vis se agendo consumit; tunc enim vires totae per effectum aestimari possunt. Et vel ideo mihi ipse hac demonstratione placeo, quod vix alias in istis μεταφυσικωτέροις aliquid praestitum est ἀκριβείᾳ successuque Mathematicorum.

Utilissima est aestimatio probabilitatum, quanquam in exemplis juridicis politicisque plerumque non tam subtili calculo opus est, quam accurata omnium circumstantiarum enumeratione. Haec a Te tractata non primum a Dno. Fratre Tuo, sed aliunde me discere memini. Cum Empirice aestimamus probabilitates per experimenta successuum, quaeris an ea via tandem aestimatio perfecta obtineri possit. Idque a Te repertum scribis. Difficultas in eo mihi inesse videtur, quod **contingentia** seu quae ab infinitis pendent circumstantiis, per finita experimenta determinari non possunt; natura quidem suas habet consuetudines, natas ex reditu causarum, sed non nisi *ὡς ἐπὶ τὸ πολὺ*. Itaque quis dicet, an sequens experimentum non discessurum sit nonnihil a lege omnium praecedentium? ob ipsas rerum mutabilitates. Novi morbi inundant subinde humanum genus, quodsi ergo de mortibus quotcunque experimenta feceris, non ideo naturae rerum limites posuisti, ut pro futuro variare non possit. Cum ex aliquo observationum numero indagamus lineam cometae, supponimus eam esse ex conicarum aut alio faciliorum genere. Datis quotcunque punctis inveniri possunt lineae infinitae per ipsa transientes. Quod sic demonstro: Postulo (quod demonstrari potest) datis quotcunque punctis inveniri posse lineam aliquam regularem, per ipsa transeuntem. Inventa illa esse ponatur et sit A. Sumatur jam aliud punctum inter data, sed extra hanc lineam; et per puncta initio data et punctum novum transeat linea, quod fieri potest per idem postulatum: hanc necesse est esse diversam a priori, at tamen per eadem transire puncta data, per quae prior. Et cum punctum infinities variari possit, etiam aliae atque aliae in infinitum lineae erunt possibiles. His autem punctis comparari possunt casus observati et lineae regulari regulae seu aestimationes ex casibus ducendae. Etsi autem empirice non posset haberi perfecta aestimatio, non ideo minus empirica aestimatio in praxi utilis et sufficiens foret. Qui menstrua excerpta Germanica Hanoverae conscribebat, apud me fuit. Pensionarii de Wit libellus exiguus est, ubi aestimatione illa nota utitur a possibilitate casuum aequalium aequali et hinc ostendit reditus ad vitam sufficientes pro sorte a Batavis solvi. Ideo Belgice scripserat, ut aequitas in vulgus appareret.

P. S. 3 Decembr. 1703.

Oblitus sum notare supra, Te et Dn. fratrem Tuum ita loqui ac si solutio problematum differentialium consisteret in separatione indeterminatarum, sed vides ex hoc ipso exemplo, cum quaeritur $ddz : z = xxdxdx : a^4$ quod est adeo simplex, eam non sufficere, quanto minus in aequationibus compositis. Optatam quidem vocas talem aequationem, sed vero notavi dudum in omni differentiali cujuscunque gradus nullo negotio posse obtineri hanc separationem seu semper posse obtineri valorem ipsius dx vel ddx vel d^3x etc. olius per solas a, y, dy, ddy etc. ne mutando quidem indeterminatas. Exempli causa in aequatione Tangentiali (seu differentiali primi gradus) $dy : dx = xx + yy, : aa$ ad hanc formam redacta $x = \sqrt{,aadxdy - yydx,,} : dx$ et differentiata, restat sola dx ex affectionibus ipsius x, quia ddx et d^3x etc. ponuntur aequales nihilo; et ita habetur dx per a, y, dy, ddy. Sed non ideo res redacta est ad quadraturas neque observatur quadratoria, ut sic dicam, homogeneitas. Eadem opera haberi plane potest relatio inter ipsos y, dy, ddy, d^3y etc. sine interventu ipsius x vel dx. Nam si aequatio dx = valori per a, y, dy, ddy, evanescet dx et habebitur aequatio, in qua dabitur relatio inter a, y, dy, ddy, d^3y; ex quo aliquo modo intelligitur quae sit relatio ipsarum y, posito progressionem ipsarum x esse uniformem seu ddx esse $= 0$. Sed si hinc posset duci lex progressionis simplicioris, posset ejus ope perveniri ad quadraturas. In formulis quadratorie heterogeneis ea imperfectio est, quod ut plurimum summatio universalis institui non potest, quod tamen fit in quadratorie homogeneis, ubi summatio quae assumta una lege progressionis succedit, etiam succedit assumta alia quacunque v. g. $\int x dx$ fit $= \frac{1}{2}xx$, sive x procedant progressione Geometrica sive Arithmetica sive alia quacunque, quod non habet locum, si velimus quaerere $\int x ddx$ vel $\int dxdx$. Etsi res succedat, si velimus summare $xddx + dxdx$ simul, ubi summa fit xdx.

Quantum Berolino intelligo, Celeberrimus Zwingerus conditionem medici regii non accepit, sed dicitur deferenda Dno. Gundelheimio, quicum Dno. Turnefort missu regis Christianissimi in Orientem profectus fuerat.

Ab aliquot annis actum est Berolini et alibi de Protestantium Reunione et mecum quoque a doctis utriusque partis viris communicatum; apparetque non omnem spem abesse, si res dextre instituatur, bonaque consilia locum habeant nec supervacaneo adiaphororum studio animi turbentur. Circa praedestinationis negotium vix mihi videtur superesse difficultas: modo evitentur quae attributis divinis justitiae, sapientiae, sanctitati praejudicium creare videri possent agnoscaturque omnia Deum juste agere, non modo quia summe est potens, sed et quia summe sapiens bonusque, ita ut statuendum sit nihil fieri posse melius quam quod facit, etsi nobis in totam rerum harmoniam non admissis id apparere non possit. Hoc constituto quaestiones de absoluto vel conditionali decreto, gratiaque universali aut particulari partim philosophicae partim verbales videntur. Turbat adhuc nonnihil controversia, utrum solis electis vera fides et justificatio competat; in quo optem quorundam ex vestris exemplo caeteros quoque paulo accommodatius loqui. Meo judicio lites de coena Domini, quae debet esse vinculum caritatis, non debere talere schisma infelix; sunt tamen quidam in ea re rigidiores, quos molliri posse non desperem. Sed vestrorum Theologorum quos meam opinionem expetere ais (plus ut apparet mihi tribuentes quam agnoscere audeam) sententiam potius nosse optem.

XIV.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Tuis 26 Novbr. anni praeteriti ad me exaratis tardius respondeo, tum ad varia negotia quibus hucusque distractus fui, tum etiam ob affectum podagricum, qui aliquamdiu misere me lancinavit. Nempe volebam usu vini rubri optimi (quamvis modico) phlegma quo cerebrum quoque repletum sentiebam desiccare, sed pessimo eventu; vixdum enim per paucos dies continuaveram, cum dolores arthritici (quibus et nephritici quid admixtum erat) denuo et repente omnes meos artus ipsumque etiam cranium (rarissimo podagricorum exemplo) invaderent: quem adeo manifestum vini effectum persentiscens, ejus usu penitus me interdicere cepi; sicque jam a trimestri et amplius optime valeo et optime digero, contra Medicorum praesagium, qui potu solius aquae stomachum nimis iri debilitatum praedixerant.

Vidi nuper optato in Actis Lips. anni praeteriti mens. Jan. supplementum Tuum quadraturarum una cum methodo Fratris, quem Tu recte redarguis, quod asseruerit omnes quadraturas rationales pendere a quadratura circuli aut hyberbolae: et miror ipsum adeo sibi confisum esse, ut asserti sui veritatem in tam simplici formula, qualis est $\frac{dx}{1+x^4}$, examinare non sustinuerit. Sed

praeterea et illud notavi, quod Frater partem inventi tantum dederit facillimam, fundatam in proprietate fractionum, qua additae et multiplicatae fiunt cognomines; non dederit autem praecipuam, quam Tu adjecisti, nempe rationem progressionis in numeratoribus, quam ego longe maximi facio.

De Inventione serierum, quas dedi pro aequatione $dy:dx = yy+xx:aa$, recte conjecisti; sed cum putas, omnes aequationes differentiales altiorum graduum posse reduci ad quadraturas, me certe Tibi non habes ὁμοψηφον. Si enim dantur Curvae, quarum coordinatae non habent relationem algebraice exprimibilem, sed tantum coordinatarum elementa: cur non darentur tales, ubi nec ordinatae nec harum elementa, sed tantum elementorum elementa ejusmodi rationem habeant? Confirmor in suspicione ex eo, quod quemadmodum $dz:z = x^r dx$ nullo modo a quoquam ad algebraicam reduci potuit, ita nec $ddz:z = x^r dx^2$ ullo adhibito conatu ad simpliciter differentialem reducere potuerim. Neque metuendum nobis est, ne ita statuendo nimis feracem faciamus naturam in variandis suis effectis, cum delusos nos sentiamus, quotiescunque ipsi limites figere voluerimus. Si quando solutionem Problematum differentialium consistere dixi in separatione indeterminatarum, utique hoc de primi tantum gradus differentialibus affirmare volui. Caeterum et mihi jamdudum innotuit, quod altera indeterminatarum semper eliminari possit, h. e. quod dari possint aequationes locales, quas una tantum indeterminatarum literarum ingrediatur.

Ad ea, quae pro Tuis Dynamicis stabiliendis tam prolixe disseruisti, nescio quid dicam, nec habeo vel quae reponam vel quibus convincar: sunt enim ita concepta, ut dubitem a me satis intelligi. Interim vides, nobis in conclusionibus per omnia convenire, quod fieri non posset, si in principiis esset dissensus: puto ergo pugnam nostram in mera versari logomachia, quae ultro evanesceret, si alter alteri intelligeremur.

Quod Doctrina de probabilitatibus aestimandis in materiis juridicis non sola circumstantiarum enumeratione, sed eodem illo ratiocinio et calculo indigeat, quo alias in sortibus aleatorum computandis uti solemus, docent me variae quaestiones de Assecurationibus, de Reditibus ad vitam, de Pactis dotalibus, de Praesumptionibus, aliaeque; quemadmodum suo tempore liquido ostendam. Difficultas autem Tua contra modum meum Empiricum determinandi rationem inter numeros casuum, non magis urget illa exempla, in quibus de numeris istis aliunde constare nequit, quam illa, in quibus etiam a priori cognosci possunt. Dixi autem, in istis me posse demonstrare; viditque demonstrationem jam ante duodecennium Frater et approbavit. Ut vero clarius comprehendas quid velim, do Tibi exemplum: Pono in urna quadam reconditos esse calculos aliquot, albos et nigros, et numerum alborum esse duplum numeri nigrorum, Te autem nescire hanc rationem, et experimentis illam determinare velle. Educis itaque calculum unum post alterum (reponendo singulis vicibus illum quem eduxisti, priusquam sequentem eligis, ne numerus calculorum in urna minuatur) et observas, albus an ater sit quem elegisti. Dico jam, quod (assumtis duabus rationibus rationi duplae quantumvis propinquis, una majore, minore altera, puta 201 : 100 et 199 : 100) scientifice determino numerum observationum, quem si instituas, decies aut centies aut millies etc. probabilius tibi fiat, rationem numeri vicium, quibus album eligis, ad numerum vicium, quibus eligis nigrum, intra quam extra hos limites rationis duplae 201 : 100 et 199 : 100 casuram; adeo ut tandem moraliter certus esse possis, rationem per experimenta deprehensam verae rationi duplae quantumvis proxime accessuram. Quod si nunc loco urnae substituas corpus humanum senis aut juvenis, quod fomitem morborum inter se velut urna calculos continet, poteris eodem modo determinare per observationes, quanto ille quam iste morti sit vicinior. Neque prodest dicere, numerum morborum, quibus uterque expositus est, esse infinitum; demus enim hoc; notum tamen est, et in infinito dari gradus, et rationem unius infiniti ad aliud infinitum etiam numeris finitis, aut praecise aut quantum ad praxin sufficit, exprimi posse. Si morbi tractu temporis multiplicentur, novae tum utique observationes forent instituendae: et certum est, illum qui vellet ex hodiernis observationibus Londini, Parisiis alibique institui solitis de termino vitae Patrum antediluvianorum judicare, a veritate enormiter aberraturum esse. Exemplum de Trajectoria Cometae indaganda ex aliquot observatis ejus locis, fere hic est ἀπροσδιόνυσον; neque unquam illo uterer ad ostendendum propositum: quanquam et debito modo applicatum mihi non adversetur, cum negari non possit, quod observatis quinque punctis, quae omnia deprehendantur esse in Parabola, suspicio Parabolae jam major sit futura, quam si 4 tantum puncta fuissent observata: etsi enim infinitae sint il-

neae, quae per illa 5 puncta transeunt, praeter tamen has infinitas infinitae, imo infinities infinite sunt aliae, quae per sola 4 priora, non vero per 5^{tum} punctum transeunt, quaeque adeo omnes per 5^{tam} observationem excluduntur. Fateor tamen omnem conjecturam, quae ex ejusmodi observatis deducitur, admodum levem et lubricam fore, nisi jam pro concesso sumatur, lineam quaesitam esse unam ex genere simpliciorum curvarum; quod equidem mihi admodum veresimile fit, cum naturam ubique vias simplicissimas assectari videamus. Percipio ex Tua descriptione, Tractatum Belgicum Johannis de Wit talia continere, quae scopo meo apprime inserviunt. Rogo itaque Te quam maxime, Vir Amplissime, ut Tuum Libri exemplum qua poteris occasione mihi commodato transmittas, quandoquidem cum Amstelodami frustra perquirendum curavi. Remittam illum fideliter in proximis nundinis Francofurtensibus, una cum 4^{ta} et 5^{ta} parte Positionum mearum de S e r i e b u s i n f i n i t i s, quarum haec novissime impressa et ventilata fuit.

Frater meus Groningae febri ardente correptus lethaliter decumbit. Frequens delirium et lipothymia quibus infestatur, nos de vita ejus magnopere anxios et sollicitos reddunt; quanquam undecimus jam fuerit morbi dies, quo literae postremae Groninganae ad nos fuerunt exaratae.

Vale et favere perge etc.

Basileae 20 Aprilis 1704.

P. S. Hac hora inspiciendum mihi offertur magnum volumen in quarto, cui titulus: Nova Crisis temporum (oder Curiöser Philosophischer Zeitvertreiber) in quo Auctor Dethlevus Cluverdus confusum chaos miscuit plurimarum rerum, atque in geometricis antiqua sua somnia de structura mundi, de quadraturis planetariis etc. recoquit, meque etiam, quem Auctorem credit libelli ab Hermanno nostro Considerationibus Nieuwentitianis oppositi, hinc inde perstringit: sed nondum assequor quid velit, adeo mystice et cryptice dicta sunt omnia. Obsecro, Vir Amplissime, num Tu hominem intelligis? Ego certe nunc revera credo, illum ἀρρωστίᾳ τῆς διανοίας laborare. Nuper quoque insperato literas accepi a D. Joh. Ott, Med. D. Scaphus. in quibus judicium meum perquirit de methodo quadam sua rectificandi quadrandique omnes curvas et omnia spatia; at ego nihil tale sequi video ex iis, quae bina vice prolixe ad me perscripsit: miror vero, numquid Tibi horum olim aperuerit; quandoquidem ea jam ab anno 1659 sibi cognita esse scribit.

XV.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Cum in procinctu sim proficiscendi in Thermas Badenses, nolui differere responsum ad binas Tuas, quarum alteras per D. Hottingerum mihi perferendas curasti. De Fratre meo nil novi, nisi quod cum pristina sanitate pristinum in me animum resumere videtur; in litteris enim ad Hermannum nostrum subinde mihi molestus esse pergit, mentionem debiti nescio cujus injiciendo: vellem huc tandem concederet, Professionis Graecae a Proceribus nostris sibi demandatae auspicia facturus, ut causam hic nostram coram judice forensi agere, et uter alteri in aere sit discutere possimus. Nuper Wallisio, Huddenio et Hospitalio quos recenses, ac praeterea Sturmio, parentatum vidi in Actis Lips. mirorque in iis praeteritum Vivianum. Nihil ab hoc Auctore scriptum conspexi, ne quidem ejus Exercitationes de Maximis et Minimis. Luce dignum esset illius opus de Locis, siquidem et Loca Linearia seu sectionibus Conicis altiora tractaret; alias vix quicquam novi continere posse puto. Ejus observationes de aquis fluentibus fortasse non differunt ab his, quae ejus haud dubie Discipulus Guilielminus de hac materia jam evulgavit. Huddenio Tractatus quidam Mechanices mihi ignotus tribuitur in Mercurio Historico-Politico; ut et inventio cujusdam Machinae, qua canales Amstelodamenses eadem opera aquis foetentibus repurgari et puris adimpleri soleant. Structuram Machinae utilissimae nosse peroptarem, quia Viri ingenium maximi facio.

De Reductione Problematum differentialium ad Quadraturas, de separatione indeterminatarum etc. nolo disputare ulterius, sed rem in medio relinquo; nemo enim me lubentius de iis rebus tacet, in quibus certitudinem assequi nequimus. Unum hic subit occasione summationis differentialium, quod liceat ex Te percontari: nempe an aliquod Tibi notum sit exemplum Producti ex elemento indeterminatae et quantitate rationali quotcunque terminorum multiplicata vel divisa per radicem qualemcunque quantitatis alterius rationalis quotlibet etiam terminorum (talisque ut exponentes potestatum indeterminatae ubique sint integri et positivi, sed exponens maximus in vinculo plus quam unitate super et maximum extra vinculum) quod absolute summari possit. Nam si nullum tale detur exemplum, puto me aliquid praestitisse exhibendo universalem Canonem, quo

ejusmodi differentialia, quae maximum exponentem in vinculo vel minorem vel non plus quam unitate majorem habent maximo exponente extra vinculum, aut absolute summantur, si summabilia sunt, aut saltem reducuntur ad talia, ubi exponens in vinculo plus quam unitate superat exponentem extra. Intelligo autem quantitatem quoad fieri potuit vinculo liberatam; nam ex. gr. summationem recipit quantitas $xxdx\sqrt{aaxx+x^4}$, etiamsi exponens in vinculo binario superet exponentem extra, quoniam reducitur ad $x^3dx\sqrt{aa+xx}$.

Accipiam brevi ab Abbate Varignonio duo exemplaria Historiae Academiae Scientiarum pro anno 1701, Tibi Fratrique mittenda: Tuo adjungi curabo quartam quintamque partem Positionum mearum de Seriebus Infinitis; exspectans vicissim his nundinis a Te scriptum Pensionarii de Wit, cui utinam adjungere posses quae de Conditionibus olim scripsisti. Velim etiam exemplum aliquod legati conditionalis mihi suppedites; quid item per reditus qui constituuntur in plures vitas intelligas, exemplo declares; nam studio Juridico nunquam ego animum ex professo applicui. Rationem inter numeros morborum etsi infinitos determinare possumus finitis experimentis non praecise, sed quantum ad praxin sufficit accedendo subinde propius donec error insensibilis fiat; quod vel in ipsa Geometria vulgare est, sic ratio diametri ad circumferentiam, etsi accurate determinari non possit nisi per numeros Cyclicos Ludolphi in infinitum continuatos, ab Archimede tamen limitibus ad usum sufficienter constrictis 7 : 22 et 71 : 223 definitur. Specimen artis conjecturandi exhibeo in aliquot ludis aleae, praesertim in ludo pilae reticularis, quo de prolixe tracto; sed in plerisque chartarum ludis non succedit, multo minus in latrunculorum ludo, ob immensam complexionum varietatem, quam repetiti calculorum jactus recipere possunt. D. Cluveri librum, qua fui patientia, totum perlegi, sed nihilo doctior redii ab ejus lectione, ut fateri cogar me tempus meum nunquam pejus collocasse. Asserit alicubi, se ad ultimas meas per Te acceptas responsum eadem mihi via remisisse, non memini autem, me quicquam a Te accepisse, uti nec a D. Ottio ullas accepi, ex quo ipsi rectificationem suam Parabolae erroneam esse ostendi. D. Fatzius Angliam quantum scio jamdudum repetiit. Frater ejus natu major et ipse Geometra insignis, nuper cum Hermanno nostro communicavit ingeniosum ipsius inventum de Transmutatione seriei tuae Cyclicae $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ etc. quae terminos habet alternatim affirmativos et negativos, in hanc aliam pure affirmativam $\frac{1}{2}+\frac{1}{2.3}$ $+\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{4}{5.7.9}+\frac{4.5}{5.7.9.11}+\frac{4.5.6.}{5.7.9.11.13}$ etc. quae celerrime convergit, utpote in qua terminus quilibet minor est quam subduplus praecedentis, addiditque, quod sibi constitutum sit proximam hyemem impendere in provehendis seriei hujus ope numeris Ludolphinis ad centum usque notas, quare suasor fui Hermanno, ut sese socium laboris ipsi adjungeret, quo communicatis utrinque calculis de operationis probitate eo certius constaret, quod hic etiam se suscepturum promisit. Vale, Vir Amplissime, et fave etc.

Basileae 2 Augusti a^0. 1704.

XVI.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Quoniam ex ultimis Tuis intelligo, responsum meum ad praecedentes Tibi traditum non esse, copiam ejus hic transmitto. Quae D. Hermannum concernunt, ad ea Tibi respondebit ipse. Expectabam a Te his nundinis Tractatum Tuum D. de Wit, sed frustra. Eum fortasse D. Menkenius tempore nundinarum Lipsiensium per mercatores huc curare poterit. Historiam Academiae Scient. nondum, quod miror, Parisiis accepi. R. P. Lelong, Oratorii sacerdos, catalogum quendam Librorum pro Te mihi proxime submittet Historiae huic adjungendum. Cum utrumque accepero, qua primum occasione potero, Hanoveram curabo. Vale.

Basileae 15 Novembr. 1704.

XVII.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Gratissimas Tuas recte, etsi paulo serius, accepi, cum jam diu abfuerim domo. Interea ad Te scripseram cl. Hermanni causa, cui offertur Mathematica apud Patavinos cathedra. Utriusque vestrum responsionem accepi, Tuam breviculam, ipsius fusiorem, sed tanquam conditionem declinantis, religionis causa. Malui tamen apud

Venetos dissimulare sententiam viri, ut amplius ei deliberandi spatium darem, praesertim, cum me hortante scripsisset ad eum doctissimus Naudaeus noster, cui responsionem adhuc debebat. Nec me poenituit morae, nam posteriores cogitationes secutus huic demum significavit: amicis prudentibus visum, posse illic officio vacari nullo conscientiae detrimento, nec contemnendo in publicum fructu.

Nollem suadere Dno. Fratri Tuo, ut professionem Graecae linguae apud vos acciperet; ita enim a rebus mathematicis non parum distraheretur. Caeterum non dubito, fraterno vos invicem animo fore, ut decet viros scientiarum cultu celebres; ubique paene primas violare humanitatis leges, quae tam propinquos colligat, mali res exempli foret.

Huddenii Tractatus Mechanicus mihi est ignotus. De machina aliquid audivi, sed vagum et obscurum.

Pensionarii Wittii dissertatio, vel potius Scheda impressa de reditibus ad vitam, sane brevis, extat quidem inter chartas meas, sed cum ad Te mittere vellem, reperire nondum potui. Dabo tamen operam ut nanciscare, ubi primum domi eruere licebit alicubi latitantem. Caeterum nihil continet, quod Tibi possit esse valde novum. Mea de conditionibus dissertatio duplex Academica Lipsiae impressa est anno, si bene memini, 1665. Biennio post reformata cum aliis quibusdam meditatiunculis meis juridicis recusa est Noribergae, ubi reliqueram Altorfio digrediens in peregrinationes, sed exemplaria ita evanuere, ut aegre unum postea in Germaniam redux casu impetrarim ab amico. Cogito de nova aliquando procuranda editione.

Non dubito, quin Tibi facile sit Canones quosdam summationum absolutarum aut reductionum pro non absolutis fabricare. Sed non video, cur desideres rem eo reducere, ut exponens in vinculo plusquam unitate superet exponentem extra, cum malim ego exponentem in vinculo esse quam minimum. Exempla quale postulas, etiamsi forte mihi affuissent aliquando, an semper putas esse in numerato quodvis aliud potius jam dudum agitanti? Talium plus est in meis schedis quam in mea mente. Interim si differentietur formula $x^e+cx^f, \sqrt{(am+bx^r)}$ prodit (ni fallor) calculanti dum haec scribo et parentheses pro vinculis adhibenti

$$dx,\ \frac{\left.\begin{array}{c}(2am+2bx^r)\,(ex^{e-1}+cfx^{f-1})\\ brx^{r-1}\,(x^e+cx^f)\end{array}\right\}\sqrt{(am+bx^r)}}{2am+2bx^r}$$

unde cum pateat effici licere, ut $x^e + cx^f$ dividi possit exacte per am $+ bx^r$, quoniam numeri e, f, r sunt a se invicem independentes, quemadmodum et m, b, c (quod magis etiam variare liceret, si pro $x^e + cx^f$ adhiberemus $x^e + cx^f + gx^h$ aut etiam formulam magis compositam) consequens est, facta divisione habitum iri formulam exacte summabilem carentem indeterminata in fractione, ubi irrationalis dicta multiplicatur per quantitatem rationalem integram et ubi nihil prohibet maximum exponentem ipsius x intra vinculum esse unitate majorem exponente extra vinculum. Sed fortasse non satis mentem Tuam intelligo et (fateor) in talia incumbere nunc non vacat malimque ea a Te discere, quam Tecum contendere, uter prius observarit.

In quibusdam non satis colligatis (pro nostro scilicet captu) certum non est, aucto datorum numero veluti novis annis ad observationes morborum accedentibus nos propius accedere ad veritatem mediam in universum, etsi prudentia rem ita accipi jubeat, sed in serie, qualis Ludolphina, continuando semper acceditur. In Ludis sive purae rationis (velut scaccorum et aggerum) sive semifortuitis, ut chartularum quem hominis vocant Hispani (hombre) vel aleae quem nostri conversionis appellant (Verkehren) etsi non sit facile definire calculo, quanto unum eligendorum altero sit ad spem victoriae convenientius, plerumque tamen definiri potest ratione utrum sit convenientius quantum licet judicare fas est ex datis. Unde videmus lusores ingeniosos propemodum ut in re militari aut medica, quid sit melius decernere, usos considerationibus magis multiplicibus quam profundis, quod ipsum quoque est artis.

Si quid Dn. Cluverius mihi pro Te olim misit (quod an ita sit, dicere non possum) haud dubie ad Te destinavi.

Non suaserim Dn. Hermanno nostro, ut tempus terat Ludolphinis calculis extendendis, etsi placeat Faciana series, quae quomodo ex mea deducta sit nosse velim. Malim adhibita mea Arithmetica Dyadica, ubi omnia scribuntur per 0 et 1, inveniri regulam generalem qua appareat, quomodo Magnitudo circumferentiae vel aliae quantitates Transcendentes determinatae exprimi possint per seriem infinitam integrorum vel quasi integrorum numerorum id est (pro decimalibus) bimalium, quemadmodum si regula haberetur, qua series Ludolphina semper continuari posset. Scripsi ea de re ad Dn. Hermannum, nec puto ullam esse Methodum meliorem pro expres-

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8

sione quantitatum determinatarum. Hac enim scribendi ratione omnes series omnium potentiarum habent periodos columnarum, quales vides habere naturalium seriem, ubi periodus primae columnae est 01, secundae 0011, tertiae 00001111, etc.

Guilielminum Viviani discipulum fuisse non puto, nec sua de aquis decurrentibus ab ipso hausisse. Liber hujus de Locis non est malus; sed nullus Veterum commentator aut imitator circa Loca mihi hactenus satisfecit. Vale.

Berolini 28 Novembr. 1704.

XVIII.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Differre volui responsum meum, donec certiorem Te reddere possem receptionis tum Catalogi Patris Le Long, tum et Librorum, quos cum Icone Sereniss. Electoris vestri defuncti D. Brousseau ad me mittere debebat: sed frustra hucusque exspectavi, haud dubie quod illos directa ad Te via curabunt, patente nunc iterum, ut opinor, libero mercium commeatu. Si quid tamen etiamnum pro Te accipiam, certus esto, me sine mora Augustam curaturum, quo mittendi hic frequens occasio se offert. Historiam Academiae Scientiarum Parisinae una cum inclusis 4[ta] quintaque Parte Positionum de Seriebus ab ipso pariter D. Varignonio immediate accipies, nisi forte jam accepisti. D. Wittii Tractatum mihi vicissim mittere quaeso memento, si quando interea in manus Tuas inciderit; quaecunque enim continet, mihi non possunt non esse plane nova; quemadmodum etiam Tua, quaecunque unquam publicasti, mihi semper peroptabilia erunt, si quorundam me compotem reddere digneris; nihil eorum habeo praeter Artem Combinatoriam et Hypothesin novam Physicam.

Quae Dnum. Hermannum concernunt ejusque vocationem Patavinam, ex ipso haud dubie plenius rescisces. Agitata fuerunt inter Marpurgenses consilia de eodem in locum D. Papini, qui nunc Casselis in aula degit, surrogando: sed ipse Patavium praeferre videtur, Tui praesertim, ut ait, Tuique calculi gratia quem etiam in Italia notum facere gestit. Accepit nuper a Cl. Fardella literas humanitatis plenissimas, et nunc alteras exspectat, quibus de decreto sibi salario certior reddatur; ita ut non dubitem amplius, quin ista res successum sit habitura. Nunc illi certe nec ipse suaserim, ut superfluis calculis tempus terat, quando praeter linguae Hetruscae studium, cui jam totus incumbit, mox alia ipsum negotia manebunt. Artificium commutandi seriem Tuam in Facianam leviculum est, et consistit in sola additione continua primi et secundi, secundi et tertii, tertii et quarti etc. termini, prout uberius Tibi ab ipso Hermanno explicitum esse credo. Unum hoc addo, quod ejusdem artificioli ope series hyperbolica $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ etc. convertatur in hanc $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.8} + \frac{1}{4.16} + \frac{1}{5.32} + \frac{1}{6.64} +$ etc. quae eadem mihi ex alio fundamento se obtulerat (vid. Prop. LIX de Seriebus) et in qua per 18 primos terminos tantundem approximatur, quantum per mille terminos alterius.

De mysterio Arithmeticae Tuae Dyadicae (quam video esse supplementum Tetractys Weigelianae) nihil adhuc mihi innotuerat; ex iis autem, quae de illa refers, non apparet sequi quod intendis; nam et in serie numerorum naturalium Arithmeticae Decadicae periodis locus est, in altioribus autem potentiis et quantitatibus praesertim transcendentibus nec in Dyadica nec in Decadica ejusmodi perioda obtinere puto. Vides enim in serie hac quadratorum dyadice

0	0
1	1
100	4
1001	9
10000	16
11001	25
100100	36
110001	49
1000000	64
1010001	81
1100100	100
1111001	121
10010000	144
10101001	169
11000100	196
11100001	225
100000000	256
etc.	etc.

expressa, periodum quidem primae columnae esse 01; secundam columnam constare meris cifris, periodum tertiae esse 1000, in caeteris vero columnis nullas tales periodos haberi, aut (si habeantur) saltem nullas periodorum periodos observari. Quid multis? Numerum illum Ludolphinum 36 notarum 3,1415 etc. qui circumferentiam circuli refert, existente diametro 1, cum 35 cifris dyadice sic exprimendum invenio:

1111001000000100111111011001100011011011011001100000100
1111001001011001010110110110101000110111001010100000000
$111101000\frac{1}{0}$, ubi exponentes vicium, quibus eadem nota (1 vel 0) continue repetitur, hoc ordine progrediuntur:

42161261222321212122241242121122111212121111321321111174114:

at nulla hic apparet notarum periodus, nec ulla progressionis lex, non magis quam in ipsis Ludolfii numeris 3,1415 etc. quare et in aliis parum hoc pacto nos consequi posse sperandum.

Ex iis, quae contra Canonem meum Summationum movisti, Vir Amplissime, video me Tibi non satis intelligi; idcirco mentem meam exemplo declaro: Sit integrandum differentiale $\overline{ax^5 + bx^4 + cx^3 + exx + fx + g}, dx\sqrt[3]{hx^3 + ixx + kx + l}$. Dico, me illud ope Canonis mei statim reducturum ad $\overline{qx^3 + rxx + sx + t}\,\sqrt[3]{hx^3 + ixx + kx + l}^{4}$, aut saltem ad hanc quantitatem, auctam minutamve quantitate $\int \overline{\overline{mx + n}, dx\sqrt[3]{hx^3 + ixx + kx + l}}$, in qua exponens maximus extra vinculum plus quam unitate superetur a maximo intra: unde patet, si quantitates ejusmodi non possunt absolute summari, me praestitisse quodcunque praestari poterat; at si inter infinitas vel una summata sit, me Canone meo nihil admodum profecisse, cum semper verendum esset, ne et ista summationem admitteret. Valde itaque scire cuperem, num ullum detur exemplum talis summationis, quale fortasse Frater meus exhibere posset, si ipsi proponeretur. Ex formula sane Tua possibilitatem ejus colligere possum, cum $\overline{x^e + cx^f}\sqrt{am + bx^r}$ differentiata acquirat extra vinculum exponentem $f + r - 1$ et $e + r - 1$, qui non potest esse plus unitate minor ipso r exponente intra, nisi f et e contra hypoth. statuantur negativi.

Quod Verisimilitudines spectat, et earum augmentum pro aucto scil. observationum numero, res omnino se habet ut scripsi, et certus sum Tibi placituram demonstrationem, cum publicavero.

Dum scribis, neminem circa Locorum Doctrinam Tibi satisfecisse, quaeso num loca solida h. e. Sectiones Conicas, an vero Loca, ut vocant, Linearia seu Curvas altiores intelligis? Si de his loquaris, certe Tibi non satisfactum esse minime miror. Cum enim his diebus occasione Epistolae Tuae animum huc applicarem, deprehendi earum solummodo curvarum, quae Sectiones conicas proxime excipiunt, seu quarum coordinata alterutra aut productum ex utraque ad tres dimensiones, nec ultra, assurgit, tam stupendam esse multitudinem, ut credam neminem mortalium unquam illas omnes enumeraturum. Hinc ex toto numero simpliciores tantum inquisivi, reperique 33 differentes curvas esse, quarum nulla insuper plurium quam trium terminorum aequatione exprimatur, et quas aliquando cum suis flexibus et asymptotis delineatas exhibere possum, si Tibi operae pretium videatur, nemoque sit qui id laboris jam occuparit, quod quidem ex Te discere lubenter cupio. Vale interim, Vir Amplissime, faveque etc.

Basileae 28 Februarii 1705.

P. S. Cum haec absolvi, legendus mihi offertur Januarius Act. Lips. hujus anni, ubi video non sine stupore, D. Newtonum in speculatione Curvarum secundi generis non tantum praevenisse me, sed et praestitisse, quod ego impossibile judicabam, definiendo scil. numerum harum Curvarum ad 72, sed dubito tamen, annon multo sint plures? nam generalibus istis ideis, quibus utitur, caveri vix potest, quin aliquid praetereat inobservatum, et cum ad particularia devenitur, plerumque multo feracior deprehenditur Natura, quam initio videbatur. Avidissime itaque expecto librum, in quo haec fusius explicantur, visurus annon in meis 33 curvis quaedam occurrat, quae in illius 72 non contineatur.

XIX.

Leibniz an Jac. Bernoulli.

Libenter intellexi ex Tuis, negotium Patavinae professionis a me propositae spem successus ostendere Clmo. Hermanno nostro, et Dn. Abbatem Fardellam, virum doctissimum et humanissimum,

literas eam ob rem cum ipso commutare. Fascem Parisinum puto adhuc Basileam venturum, sed quaedam transmissionem distulere. Itaque si adveniet, utemur favore Tuo. Pro nihilo computo, quae ex scriptis meis habere Te ais, Artem Combinatoriam et Hypothesin physicam; pene enim puerilia sunt in prima adolescentia confecta, cum prior prodierit in lucem anno 1666, posterior puto anno 1670. Quae ab eo tempore edidi extra diaria, sunt diversi plane argumenti a Philosophia et Mathesi. Pensionarii Wittii scriptum nondum satis quaerere licuit inter chartas; non dubito tamen, quin sim tandem reperturus, ubi vacaverit. Sed vix aliquid in eo novum Tibi occurret, cum fundamentis iisdem ubique insistat, quibus cum alii viri docti jam erant usi, tum Paschalius in Triangulo Arithmetico, et Hugenius in diss. de Alea, nempe ut medium Arithmeticum inter aeque incerta sumatur; quo fundamento etiam rustici utuntur, cum praediorum pretia aestimant, et rerum fiscalium curatores, cum reditus praefecturarum Principis medios constituunt, quando se offert conductor.

Non possum non duo submirari in literis Tuis. Primum est, quod methodum quandam Tuam pro certi generis quadraturis involucro quodam tectam memoras, velut exploraturus, an eodem pervenire possim. Sed etsi id mihi admodum difficile foret, putabam tamen ea aetate iisque occupationibus frui me posse jure emeriti, cui quae vobis occurrerent, candide ac sine aemulatione communicari possent. Quia tamen aliter Tibi visum nunc fuit, non potui mihi temperare, quin recurrerem ad veteres schedas. Revera enim id, de quo agitur, satis facile et ejus est naturae, ut vix potuerit non exercere inquisitionem meam ante multos annos. Nec mirari debes, quod nondum edidi olim reperta. Sane Quadraturam Arithmeticam et Analysin infinitesimalem ex praecepto Horatii in nonum et amplius annum pressi, et quadraturarum rationalium methodum nuper demum editam habui jam in Gallia, id est ante annos triginta; et tamen non nisi biennium est, quod in lucem produxi, ac tum demum ostendi etiam usum imaginariarum, quem jam olim Hugenio etiam in Gallia a me communicatum literis ejus docere possum. Et jam tum repereram circuli aream per logarithmos imaginarios exprimi.

Habeo adhuc methodum pro radicibus irrationalibus altiorum aequationum, aliaque multa, quae elaborare non vacavit, quae colligam aliquando attingamque saltem ne pereant. Sunt enim nonnulla, quae non facile occurrunt. Sed quadratura figurae cujus ordinata est $♀\sqrt[e]{☽}$, posito e esse numerum, et ♀, ☽ esse formulas, in quibus una indeterminata x non occurrat, nisi rationaliter integre, ita ut vel absolute praestetur quadratura, vel reducatur ad simpliciores, quando id licet, plane difficultate caret, cum tantum formulam assumere liceat, qualis $♀\sqrt[e]{☽} + \int ♃\sqrt[e]{☽}\,dx$ (posito ♃ esse formulam simpliciorem, quantum satis est, quam ♀) ejusque differentiationem comparare cum data summanda, nam in comparando nulla plane occurrit difficultas. Ubi notandum, posse formulam ♃ sufficientem assumi variis modis, et non tantum posse eam intelligi gradus, cujus exponens sit binario inferior exponente gradus ipsius ☽, quemadmodum innuis, sed gradus cujuscunque non excedentis gradum ipsius ♀; numeri vero terminorum binario deficientis a numero terminorum ipsius formulae ☽. Terminos autem computo etiam intermedios, qui vacant, et in ☽ etiam postremos. Interim fateor ex ipsis ♃ assumibilibus eam fore simplicissimam formulam, in qua gradus quoque binario deficit a gradu ipsius ☽, tunc nimirum, cum termini ab x non habent exponentes, nisi affirmativos. Sed si occurrant negativi, res secus habet, interim numerus terminorum semper erit binario minor.

Caeterum methodum meam pro eo, de quo agitur, et canonem in tabulae modum in adjecta scheda*) sum complexus, gratumque erit, si examines, an Tuo consentiat, quo securiores simus, in calculo non esse erratum: gratiusque adhuc, si distinctius absolvas calculum et legem progressus prodeuntem explicatione literarum valoris assignati. Quia enim id non vacavit facere, ea fuit, credo, causa, quod tot annis neglectae jacuere schedae meae huc pertinentes, cum tot aliis, more meo, qui methodis contentus soleo parum curare, quae video esse in potestate. In adjecta charta monui etiam Analysin Quadraturariam hinc haberi (accedente nuper a me editorum auxilio) etsi ordinata esset $\frac{♀}{♂}\sqrt[e]{☽}$. Habeo et alias cogitationes quibus haec longius promoveri possint.

---

*) Siehe die Beilage zu diesem Schreiben.

Alterum est, quod submiror celere adeo judicium tuum de iis, quae circa dyadica scripsi. Dixeram Tibi in omnium potestatum dyadice expressarum utcunque altarum columnis quibuscunque esse periodos, idque potui dicere non temere, quia certa demonstratione comperi. Tu, re vix inspecta, negas, et in ipso quadrato putas quartam et sequentes columnas periodis carere; sed si paulo fuisses in meis considerandis attentior, contrarium ipsis oculis deprehendisses. Nam quarta periodus perpetuo utique recurrens est 10100000|10100000|10100000 etc. Et quinta periodus est 1101010110000000. Et tale quid etiam in sequentibus columnis locum habet. Equidem non dantur hic periodorum periodi, sed quin certa lege procedant, quae a nobis possit deprehendi, et utiliter quaeratur, non dubito: idemque sentio de progressu notarum ad Ludolphinae expressionis modum in dyadicis exhibitarum. Non semper serierum leges, etsi ad centum et ultra terminos perducas, sunt oculis obviae, aut nuda inductione facile deprehenduntur, sed tamen ex fonte analytico hauriri possunt. Porro etsi satis sciam, etiam decadicas et alias quascunque progressiones habere periodos quasdam, aut procedendi Leges (licet quodammodo per saltum, quoniam in iis quidam pro arbitrio assumuntur characteres, quod in dyadicis non fit, ubi omnis notatio redit ad prima elementa 0 et 1) hoc, inquam, etsi non ignorem, id tamen discrimen intercedere deprehendo, quod in dyadicis incomparabiliter major est facilitas pro legibus progressionum deprehendendis. Interim velim aliquando pergi a dyadicis ad triadica, tetradica, et ita porro, donec haec ipsa comparatio dederit legem pergendi; sed hoc tum demum tentare operae pretium erit, cum in dyadicis egregios progressus fecerimus, veluti cum periodos in columnis potentiarum ad leges reduxerimus. Idque ideo ad transcendentes quoque maximi momenti est, quia series infinitae per potentias ipsius x optimae quidem sunt ad valores generales, v. g. logarithmum quemcunque, arcum circuli quemcunque; sed pro determinatis quantitatibus, e. g. logarithmo binarii, arcu quadrantis etc. series tales non sunt optimae. Et licet in indefinitis satis habuerimus ipsam incognitam x, ejusque potestates occurrere rationaliter integre, seu extra vincula et denominatores; in ipsis determinatis tamen id non est satis, quoniam praeterea effici potest, ut ipsi numeri occurrant non nisi rationaliter integre. Idque ipsum fit dyadica vel alia hujusmodi expressione ad Ludolphinae modum;

ex quibus dyadica via, utique generatim loquendo, simplicissima est. Et hae series vel ideo praeferendae sunt, quia sunt unicae et invariabiles.

Etsi alio sensu, quam quem memoras, dixerim circa locorum doctrinam mihi non esse satisfactum; gaudeo tamen, quod tuo modo acceperis, eaque occasione in lineas altiores inquisiveris. Newtonius suae enumerationis linearum tertii gradus, quas 72 facit, demonstrationem non addidit, credo, ut aliorum quoque ingeniis exercendi se materiam relinqueret, nisi forte studio brevitatis et longi sermonis impatientia a se impetrare non potui, ut progressum inventionis describeret. Tuae interim 33 curvae pro lapide lydio inservient; quanquam Tibi non usque adeo difficile futurum putem, ubi animum applicueris, certum designare numerum curvis hujus gradus, praesertim si consideremus, quandonam una eademque linea aequationibus localibus diversae prorsus formae exprimi possit. Optassem Newtonum non tantum ordinatas, centra, diametros et asymptotos, sed et focos in consilium adhibuisse; sed cum hanc disquisitionem aliis reliquerit, hortatus sum Dn. de Tschirnhaus, qui huic doctrinae focorum dudum incubuit, ut supplere studeat hunc defectum.

Caeterum imperfectio doctrinae de Locis, vulgo prostantis, quam ego in mente habebam, cum ad Te scriberem, etiam ad loca plana et solida pertinet, quae veteres multa excogitavere, etsi non nisi paucas curvas contineant, ut viam aperirent ad constructiones geometricas commodas. Horum Locorum quaedam nobis conservavit Pappus, quaedam posteriores addidere; sed cum demonstrationes dedere locorum a veteribus enumeratorum, non satisfecere toti negotio; neque enim fontem inventionis aperuere, qua veteres pervenere ad has suas enumerationes, multoque minus dedere modum supplendi. Et omnino tota doctrina de constructionibus Geometricis commodis eruendis ad morem veterum, nondum satis exculta est. Fateor ea careri posse ad usum, nosque numeris incognitas quantitates potius in praxi quam linearum ductu determinare; sed pertinet tamen artis construendi promotio ad elegantiam, et hunc usum habet saltem, ut ars inveniendi promoveatur. Itaque molitus aliquando sum novam characteristicam situs, differentem a nostra analysi hactenus cognita, quae proprie est characteristica magnitudinis, quae tamen situs characteristice et ipsa quodam sui generis calculo constaret. Sed facilius est talia in-

venire quam elaborare. Illud ingenio, hoc tempore et labore constat.

Antequam hinc abeam, Tibi si placet ac Cl. Hermanno commendabo inquisitionem quandam circa series infinitas, quae nondum, quod sciam, habetur, et tamen ad earum sufficientem cognitionem est necessaria. Video enim Te peculiari studio in seriebus infinitis versari nec minore successu. Scis cujuslibet aequationis radicem facile exhiberi posse per seriem infinitam, modumque id praestandi generali canone a me datum aliquando in Actis, quando Dn. Facio respondi, statimque ibi valorem radicis prodire, si omnes coefficientes terminorum aequationis, in quibus est y, sunt aequales nihilo, manente sola indeterminata x. Verum cum extractio talis pertineat etiam ad eas aequationes, quae sunt impossibiles, deberet id ex ipso valore radicis per seriem infinitam rationaliter expresso posse internosci. Nempe tunc necesse est, ut series, si per partes sumatur, continueque producatur, quaesito non advergat, seu non ita accedat, ut ostendi possit differentiam tandem fieri minorem quavis data. Cum vero id non semper facile ex serie literaliter expressa appareat, opus est indicia posse constitui, ex quibus id colligatur, utrum nempe series sit advergens vel non: indicia, inquam, eruta ex ipsa serie, non ex aequatione, unde est deducta series, praesertim cum interdum ignoretur haec aequatio, et saepe series significet quantitatem transcendentem, quae ex nulla hujusmodi aequatione deducta est. Sed ubi rem in seriebus aequationum radices exprimentibus constituerimus, facilius idem et in ceteris efficiemus.

Cl. Dn. Hermannum rogo, ut a me salutes; literas nuper ad me datas recte ipsi redditas puto. Si quis imposterum, vel Tu, vel ille, ad me voletis, commendate quaeso literas Dno. Schrokio, Agenti Electorali Brunsvicensi apud Augustanos. Et hac via etiam fasciculi minores ad me curari possunt, non expectatis semper nundinis. Eademque ratione Wittianam schedam a me accipies, ubi primum eruere licuerit. Vale.

Beilage *).

Quadraturae Irrationalium simplicium.

Quaeritur $\int ♀\sqrt[e]{☽}\,dx$, posito ☽ et ♀ esse formulas rationales integras quoad x, veluti si ☽ esset $10+11x+12xx+13x^3+$etc. Quia igitur oportet quantitatem et ejus summatricem ejusdem esse ambiguitatis seu eandem ambiguitatem praestantis irrationalitatis, et quia quantitatis uno irrationali vinculo constantis, ut $\sqrt[e]{☽}$, differentiale per hanc ipsam irrationalem multiplicatur; ideo facio $\int ♀\sqrt[e]{☽}\,dx = e☿☽\sqrt[e]{☽} + \int ♃\sqrt[e]{☽}\,dx$, ponendo ♃ esse formulam simpliciorem quam ♀, quantum opus est, et licet, ut quaesita quadratura vel habeatur absoluta, vel reducatur ad simpliciorem ejusdem ambiguitatis. Ergo utrinque differentiando fiet

$$e☽d☿ + (e+1)☿d☽ + ♃dx - ♀dx = 0.$$

Quare cum formulae ☿ et ♃ sint arbitrariae, adeoque potentiae ipsius x in his formulis habeant arbitrarios coefficientes ex eo determinandos, quod quivis terminus est destruendus, hinc posito Exponentes graduum ad quos assurgunt ☽, ♀, ☿, ♃, esse α, β, γ, δ, oportet ut quantum satis arbitrariarum obtineatur, et ♃ tamen maneat quam licet simplicissima, fieri $\gamma = \beta + 1 - \alpha$, et ♃ constare ex numero terminorum, qui unitate sit minor ipso α, atque ideo posse habere terminos x^0, x^1, x^2 etc. vel x, xx, x^3 etc. vel xx, x^3, x^4 etc. imo et non continuos, sed tamen semper eodem manente numero ipsorum $\alpha - 1$, primum tamen casum esse simplicissimum; quo posito fiet $\delta = \alpha - 2$. Porro quantitas ♀ posset quidem esse Formula composita ex multis terminis, velut si esset $♀ = 20+21x+22xx+23x^3+$ etc. sed quia unusquisque ex his terminis in $\sqrt[e]{☽}$ ductus, qualis $x^3\sqrt[e]{☽}$, ordinatae est valor, cujus figura quadraturam recipit, vel absolute vel ope inferiorum ut $(20+21x)\sqrt[e]{☽}$, sequitur inventa singulorum terminorum in $\sqrt[e]{☽}$ ductorum, quales x^3, x^4 etc. summatione, etiam formulae ex ipsis conflatae summationem haberi.

---

*) Leibniz hat bemerkt: Hoc ad Jac. Bernoullium misi April. 1705.

Contenti ergo assumere ♀ unius termini, quo magis calculum contrahamus, ponatur exemplum, unde reliqua aestimentur. Et sit

data $\begin{cases} ☽ = 10+11x+12xx+13x^3+14x^4 \;*\;*\;*\;* \\ ♀ = \;*\quad*\quad*\quad*\quad*\quad*\;*\;*+x^8 \end{cases}$

quaesita $\begin{cases} ☿ = 30+31x+32xx+33x^3+34x^4+35x^5 \;*\;*\;* \\ ♃ = 40+41x+42xx \quad*\quad*\quad*\;*\;*\;* \end{cases}$

fiet $\alpha = 4$, $\beta = 8$, $\gamma = 5$, $\delta = 2$.

Compendii jam causa assumamus numeros novos, quales 130, vel 152, vel 173, et similes, qui significant $3e+0$, 10, vel $5e+2$, 12, vel $7e+3$, 13, ubi 0, 2, 3, 5, 7, sunt numeri veri, sed ipsi 11, 12, 13 etc. 30, 31 etc. 40, 41 etc. 130, 152, et similes sunt fictitii, loco literarum a me assumti, ut melius exprimant relationes coordinationesque quantitatum datarum vel quaesitarum.

Destructis igitur in Aequatione supradicta Terminis, determinantur arbitrariae assumtae 35, 34, 33, 32, 31, 30; et 40, 41, 42, hoc modo:

35 = + 1 : 194
34 = − 183 : 194 . 184
33 = − 184 . 172 + 183 . 173, : 194 . 184 . 174
32 = − 184 . 174 . 161 + 183 . 174 . 162 + 184 . 172 . 168 − 183 . 173 . . . . : 194 . 184 . 178 . 164
31 = − 184.174.164.150 + 183.174.164.151 + 184.172.164.152 + 184.174.161.153 − 183.173 . . . . . − 183.174.162 . . . − 184.172.163 . . . + 183.173 . . . . : 194.184.174.164.154.

Similiterque ascribi facile posset valor ipsius 30, et Regula generalis satis brevis hos valores inveniendi et continuandi est talis: Denominatores quidem per se patent, qui sunt 194, 194 . 184, 194 . 184 . 174 etc. ubi nota dextra semper est α, hoc loco 4, sinistrae vero (omissis 1 initialibus semper occurrentibus) $\gamma+\alpha$, $\gamma+\alpha-1$, $\gamma+\alpha-2$ etc. (hoc loco $5+4$, $5+4-1$, $5+4-2$ etc.). Quoad Numeratores in primo valore, nempe ipsius 3γ (seu 35 hoc loco) is numerator est + 1 seu unitas. De caeteris ex Numeratore qui est in valore jam invento Numeri, ut $3\varkappa$ (exempli causa 32, posito $\varkappa = 2$) potest inveniri Numerator qui est in valore sequenti ipsius Numeri $3|\varkappa-1$ (hoc loco 31) tali modo: in invento jam numeratore numerus quivis, cujus nota sinistra est inter caeteras minima (quae vocetur h, et est semper $= \alpha + \varkappa$) minuatur unitate et tantundem minuatur ipsi adhaerens nota dextra (itaque in numeratore valoris 32 ex 161, 162, 163 fiet 150, 151, 152) et quod provenit, multiplicetur per numerum cujus nota sinistra sit h, dextra