vero α (hoc loco per **164**, ubi nota sinistra est $h = \alpha + \varkappa$ seu $4+2$ et dextra est **4**) a producto auferatur aliud productum ex eodem valoris inventi seu ipsius $3\varkappa$ numeratore toto (qualis erat) multiplicato per numerum cujus nota sinistra sit $h-1$, dextra vero $\alpha-1$ (hoc loco per $1|6-1|4-1$ seu **153**). Ita tandem confectus est Numerator novus valoris $3|\varkappa-1$ (hoc loco **31**). Quod si contingat, notam dextram debere descendere infra 0 ad -1 seu $\overline{1}$, tunc quod provenire deberet, evanescere intelligitur, quod contingit in valore ipsius **30** deducto ex **31**. Nempe quia compendio

$$31 = -150l + 151m + 152n + 153p, : 194.184.174.164.154,$$

ideo fiet exinde per Regulam

$$30 = \frac{-14\overline{1}l + 140m + 141n + 142p - 143(-l+m+n+p)}{194.184.174.164.154.144}$$

ubi evanescet $-14\overline{1}l$.

Multae et singulares hic progressus et combinationis Leges observari possent, sed quas brevitatis causa nunc praetereo, una tantum notata, quod Termini Numeratoris habent numerum membrorum in progressione Geometrica dupla crescentem.

Inventis jam valoribus ipsarum **30, 31, 32, 33, 34, 35**, facile inveniri possunt valores ipsorum **40, 41, 42** etc. qui supersunt determinandi. Nam fit:

$$-40 = 111.30 + 110.31$$
$$-41 = 122.30 + 121.31 + 120.32$$
$$-42 = 133.30 + 132.31 + 131.32 + 130.33$$

et ita porro, si opus. Unde ex inventis ipsis **30, 31, 32** etc. etiam ipsas **40, 41** etc. haberi patet. Habitis jam singulatim Quadraturis quales $\int x^r \sqrt[e]{\text{☽}}\,dx$, patet etiam haberi $\int \text{♀} \sqrt[e]{\text{☽}}\,dx$, posito ♀ non esse x^r, sed ex pluribus hujusmodi conflari. Quanquam Tabula valorum quales pro simplice ♀ dedimus, etiam non abludente progressu staret pro ♀ composita, seu si ♀ esset $20+21x+22xx+23x^3$ etc. eadem prorsus calculandi ratione.

Eadem fere Methodus adhiberi poterit, si Elementum summationis sit non ut hactenus $x^r \sqrt[e]{\text{☽}}\,dx$, sed potius $\frac{1}{x^r}\sqrt[e]{\text{☽}}\,dx$. Ponamus

☽ esse $10x^\alpha + 11x^{\alpha-1} + 12x^{\alpha-2} +$ etc. usque ad x^0 inclusive
et ♃ esse $40x^{\alpha-1} + 41x^{\alpha-2} +$ etc. usque ad x^{-1} inclusive
☿ esse $\frac{31}{x} + \frac{32}{xx} + \frac{33}{x^3} +$ etc. usque ad $\frac{1}{x^{r-1}}$,

ita (ut prius) $e\,\text{☽}\,d\text{☿} + (e+1)\text{☿}\,d\text{☽} + \text{♃}\,dx$ aequando ipsi $\frac{1}{x^r}$ atque ita inveniendo assumtitias **30, 31, 32** etc. **40, 41, 42** etc. habetur quadratura $\int \frac{1}{x^r}\sqrt[e]{\text{☽}}\,dx$ vel absolute vel saltem praesupponendo eas tantum quadraturas, ubi x non est in denominatore, quas jam absolvimus, nisi quod una adhuc quadratura desideratur $\int \frac{1}{x}\sqrt[e]{\text{☽}}\,dx$, quae est omnium quantitatem indeterminatam x in Denominatore habentium simplicissima. Et ad hanc reducitur quadratura Figurae cujus ordinata est $\frac{1}{y+b}\sqrt[e]{\text{☽}}$, posito esse $\text{☽} = 10 + 11y + 12yy +$ etc. Nam tantum oportet facere $y+b = x$ seu $y = x-b$, et hunc valorem substituere in valore ipsius ☽, ut ita tantum quaeratur $\int \frac{1}{x}\sqrt[e]{\text{☽}}\,dx$.

Hinc patet tandem, si proponatur quadranda Figura cujus ordinata sit $\text{♀}\sqrt[e]{\text{☽}} : \text{♂}$, posito ☽, ♀, ♂ esse formulas rationales integras secundum abscissam x, omnem rem reduci ad Quadraturam Figurae cujus ordinata est $\frac{1}{x}\sqrt[e]{\text{☽}}$ vel $\frac{1}{x+b}\sqrt[e]{\text{☽}}$; et praeterea ad quadraturas figurarum aliquot, quarum ordinatae sunt quales $\sqrt[e]{\text{☽}}$, $x\sqrt[e]{\text{☽}}$, $xx\sqrt[e]{\text{☽}}$ etc. quarum numerus unitate differat ab α, exponente gradus ipsius ☽. Ostendi enim, cum Quadraturarum Rationalium Analysin ederem, Fractionem Rationalem quamvis, qualis

$$\frac{c + ex + fxx + gx^3 + \text{etc.}}{l + mx + nxx + px^3 + \text{etc.}} = \frac{\text{♀}}{\text{♂}}$$

posse divelli in partes quales 50, $51x$, $52xx$ etc. $\frac{60}{x}$, $\frac{61}{xx}$, $\frac{62}{x^3}$ etc. $\frac{71}{x+h}$, $\frac{72}{qu(x+h)}$, $\frac{73}{cub(x+h)}$ etc. Ubi jam potentias quotcunque ut x^r, cum r est numerus rationalis integer positivus, in quadrando ad pauciores reducendi modum hoc schediasmate ostendimus, sed et cum occurrant quotcunque quales $\frac{1}{x^r}$, novissime jam monstravimus, quomodo ad solas x^r accedente unica $\frac{1}{x}$ res reducatur. Ita Quadratura $\int (♀:♂)\sqrt[e]{☽}\,dx$ dependet ad summum ab aliquot quadraturis, qualis $\int x^r \sqrt[e]{☽}\,dx$, tot numero quot sunt unitates in exponente gradus ipsius ☽ demta una, et praeterea a Quadraturis qualis $\int \frac{1}{x+h}\sqrt[e]{☽}\,dx$. Caeterum haec Analysis amplius promoveri potest per vias singulis gradibus aut aliis varietatibus accommodatas, sed hoc loco generalia dare satis fuit.

XX.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Significavit mihi nuper D. Brosseau per literas, se 22. die praeteriti mensis geminum pro Te fascem Parisiis ad me direxisse, quos etiam cum accepissem, ad D. Schröckium Augustam curaturus eram, prout jussisti. Sed ecce! supervenit quidem Petrus Chiffelle Neocomensis, a servitiis, ut refert, Exc. Comitis de Platen, qui se in commissis habere ait, post reditum suum e patria, quo tendit, fasces hos secum asportandi Hanoveram. Et quia nihil habet, quo fidem mihi faciat homo ignotus, rogandum Te duxi, ut quid factum velis, ocius mihi perscribas. Si redux ille fuerit, et ego accepero fasces, priusquam responsum a Te obtinuero, cogor Tua venia aperire sarcinas, visurus, num insint, quae ille inesse perhibet; cum aliter mihi de hominis fide constare non possit. Vale et fave etc.

Basileae 25 April. 1705.

P. S. Jamjam clausurus eram istas, cum ecce ad ultimas meas responsum a Te accipio, sed cui nunc ob temporis et chartae angustiam reponere non possum. Has via ordinaria ad Te mitto, veritus ne non in tempore Tibi redderentur, si Augustam ad D. Schröckium dirigerem. Vale.

XXI.

Jac. Bernoulli an Leibniz.

Ipso demum die Pentecostes redux hic factus est D. Chiffelius, sed quem carpento aut rheda similique vectura instructum credebam, solo vectus equo iter prosequitur, ut neutram sarcinarum, quarum pondus junctim 200 libras aequat, secum sumere voluerit aut potuerit: cui rei sane multum indolui: hoc enim si indicasset antea, sarcinas integro mense maturius vix committere potuissem. Nunc illas Forum Tiberii, ubi mercatus annuus hac celebratur hebdomada, mittere cogor, inde porro Augustam ad D. Schrökium, Agentem Vestrum, curaturus: licet autem huic scribere non possim, quod mihi non constet de Viri professione, et utrum sit celebris ille medicus Schrökius, Praeses Academiae Leopoldinae et Com. Palat. Caes. an vero aliquis alius diversus ab isto; tamen filio meo Augustae commoranti scribo, ut de illo perquirat, eique ..... significet, ipsum tales talesque sarcinas a tali vel tali mercatore accepturum. Unum est, Vir Amplissime, quod me sollicitum tenet: nosti severum interdictum de non importandis et exportandis e Gallia in Germaniam mercibus: nosti etiam destitui has sarcinas literis salvi commeatus; quippe de quibus et nihil mihi mandasti, et quas mihi privato comparare multi temporis et magnae impensae res fuisset; itaque Tuum erit in omnem eventum mature prospicere, si quando contingat illas alicubi detineri, ut interveniente auctoritate principali ocyus relaxentur. Expensas in vecturam et alia, quas tulit Gener meus (ob varias enim aegritudines, quibus ab aliquo tempore sum conflictatus, opera hic sua me sublevavit, et omnem sarcinarum curam in se recepit) scheda haec exhibet, quam Tibi, jubente sic D. Brussello, his inclusam transmitto quo nomine tamen nescio, an dictus meus Gener in instanti mercatu sibi satisfieri curabit, necne.

Hermanus noster omnes D. Fardellae literas accepit, singulisque etiam statim reposuit, sed ad suas semper non nisi bimestri post responsum obtinuit, adeo ut culpa morae non stet penes Hermannum, sed penes ipsos Italos. In eo sane boni hominis vices doleo, quod video hac tergiversatione facile fieri posse, ut ipse cum Patavina etiam simul Marburgensi vocatione excidat.

Si rumor vera narrat, redibit certe frater meus Basileam, non tamen Graecam (cum ipse sit ἀναλφάβητος) sed meam potius stationem (quam brevi cum vita me derelicturum, forte non vane, existimat) occupaturus. De iniquis suspicionibus, quibus me immerentem onerasti in Tuis penultimis, alias, ubi plus otii nactus fuero. Nunc vale et fave etc.

Basileae 3 Junii 1705.

BRIEFWECHSEL

zwischen

Leibniz

und

Johann Bernoulli.

Johann Bernoulli*) wurde von seinem älteren Bruder Jacob in der Mathematik unterrichtet und namentlich in die Principien der höheren Analysis eingeweiht. Dies wird von dem letzteren in dem Schreiben an Leibniz vom 15. Nov. 1702 ausdrücklich versichert. Indess ist nicht zu verkennen, dass der jüngere Bruder vermöge seines ausgezeichneten Talentes den älteren, der ja nur auf sich angewiesen war und sich selbst bildete, bald einholte und in kürzester Zeit mit Meisterschaft ihm zur Seite trat. An dem Studium der Medicin, dem Joh. Bernoulli dem Wunsche seines älteren Bruders gemäss sich widmete, schien er keinen besondern Geschmack zu finden; nur zwei Schriften: Dissertatio de Effervescentia et Fermentatione nova hypothesi fundata, Basil. 1690, und: Dissertatio inauguralis physico-anatomica de Motu musculorum, Basil. 1694, zeugen von seiner Thätigkeit auf diesem Gebiet; vielmehr folgte er sehr bald ganz der Neigung, die ihn unwiderstehlich zu den mathematischen Wissenschaften hinzog. Beide Brüder arbeiteten anfangs in brüderlicher Eintracht zusammen; jedoch

*) Wie schon früher erwähnt, ist von dem für die Geschichte der schweizerischen Mathematiker rastlos thätigen R. Wolf in Bern ein von Joh. Bernoulli selbst verfasster Lebensabriss neulich bekannt gemacht worden. Darin zeigt sich ganz besonders der Charakter des Mannes; er strotzt durch und durch von ungemessenem Stolz und höchster Anmassung. In Bezug auf Hauptmomente in der Entwicklung seines Lebens, namentlich in Bezug auf die Verhältnisse mit seinem Bruder, ist Joh. Bernoulli sehr oberflächlich, unvollständig und gewiss unzuverlässig, so dass wir kein Bedenken tragen, den schlichten Aeusserungen Jac. Bernoulli's unbedingten Glauben zu schenken.

lockerten die durch übermässige geistige Anstrengung hervorgerufene, den innersten Lebenskern frühzeitig zerstörende Hypochondrie und Morosität des älteren Bruders auf der einen Seite, auf der andern das schnell zum Bewusstsein gekommene hohe Selbstgefühl Joh. Bernoulli's allmälig das innige Freundschaftsband und führten Verstimmung und gegenseitiges Misstrauen herbei, das zuletzt in die erbittertste Feindschaft ausartete.

Ehe es jedoch dahin kam, begann die Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli und zwar zu einer Zeit, in welcher die zwischen Leibniz und Jac. Bernoulli unterbrochen war. Sie wurde vermittelt durch Mencken, den Herausgeber der Acta Eruditorum Lipsiensium, an den sich, wie es scheint, Joh. Bernoulli wegen eines Unterkommens gewandt hatte. Dieser hatte ihn Leibniz empfohlen, der für die Akademie, welche der Herzog Anton Ullrich von Braunschweig-Wolfenbüttel zu gründen gedachte, einen Mathematiker suchte. Ehe jedoch Leibniz Schritte im Interesse Joh. Bernoulli's gethan hatte, zog dieser seine Bewerbung zurück und blieb vorerst in seiner Vaterstadt. Sowohl der Brief Joh. Bernoulli's an Mencken, als der erste an Leibniz sind voll der schmeichelhaftesten Lobeserhebungen des letzteren; er wird gefeiert als der Urquell, aus dem die ganze Wissenschaft fliesst und zu schöpfen ist, als der Mittelpunkt, von dem alle angezogen werden: kein Wunder, dass Leibniz, der für dergleichen durchaus nicht unempfänglich war, an Joh. Bernoulli mehr Gefallen fand, als an dem einfach schlichten, wegen seiner Gründlichkeit auch wohl unbequemen älteren Bruder. Dazu kam, dass Leibniz nicht unbekannt war, dass Joh. Bernoulli bereits für die Ausbreitung der höheren Analysis in Frankreich viel gewirkt, dass er den Marquis de l'Hospital und Varignon darin eingeweiht hatte; er durfte mithin in ihm einen rüstigen, muthigen Vorkämpfer für sein Werk erkennen, der immer bereit schien, stets auf ihn, den Altmeister, der wegen anderer überhäufter Geschäfte nicht mehr viel für seine Schöpfung thun konnte, etwas von dem errungenen Ruhm zurückstrahlen zu lassen.*)

*) Dies ist ohngefähr der Sinn der Worte, die Leibniz 24. Jan. 1695 an Joh. Bernoulli schreibt: Tuum ego pluris feci acumen maximum, quod conjunctum esse visum est cum candore et moderatione, quae saepe deesse solent juvenibus etiam praestantissimis, at nondum expertis, quantum sit momentum in recto videndi instituto.

Daher ist denn auch diese Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli die umfangreichste unter allen geworden; sie erstreckt sich ohne Unterbrechung von 1693 bis zum Tode Leibnizens. Sie ist vielleicht auch die wichtigste unter allen, denn an sie knüpft sich der Ausbau der höheren Analysis und besonders der Integralrechnung, derjenigen Disciplin, die Joh. Bernoulli den Namen und die namhaftesten Erweiterungen zu verdanken hat.*)

Leibniz, um diese Zeit viel beschäftigt und öfters von Krankheit heimgesucht, konnte nur wenige Stunden seinen Lieblingsstudien widmen. Um jedoch mit den Fortschritten der Wissenschaft bekannt zu bleiben, unterhielt er, wie es scheint, vorzugsweise gern und mit besonderer Sorgfalt die Correspondenzen mit Mathematikern; auch bot sich ihm so fortwährend neue Gelegenheit, über Methoden und Theoreme, die er durch frühere Studien gewonnen hatte, sich auszusprechen und namentlich die Lücken zu bemerken, die zur Vervollkommnung der Wissenschaft noch auszufüllen waren. So bezeichnet er sogleich in seinem ersten Schreiben an Joh. Bernoulli zwei Punkte, worin die Integralrechnung noch mangelhaft sei, dass nämlich zum Behuf der Construction der Curven es vorzuziehen sei, nicht die Quadratur, wie es gewöhnlich geschähe, als vielmehr die Rectification zu finden, und zweitens, dass die Inte-

*) Allgemein hält man Joh. Bernoulli für den Entdecker der Integralrechnung; er selbst sagt es ebenfalls in dem bereits oben erwähnten, von ihm selbst verfassten Lebensabriss: Après cette heureuse découverte (d. i. nach dem Eindringen in das Mysterium der Differentialrechnung) je fus le premier, qui songeoit à inventer quelque méthode pour remonter des quantités infiniment petites aux finies dont celles-là sont les élémens ou les differences. Je donnai à cette methode le nom de calcul intégral, n'en ayant point trouvé alors de plus convenable. Bei der genauen Durchsuchung der Leibnizischen Manuscripte ist indess das historisch denkwürdige Manuscript vom 29. Octbr. 1675 aufgefunden worden, in dem Leibniz zuerst den Algorithmus der höheren Analysis einführt; es ergiebt sich daraus, dass er zuerst die Integralrechnung fand, die er „Calculus summatorius" nannte, und alsdann den Algorithmus der Differentialrechnung ausbildete. Aus dem Grunde wahrscheinlich, dass er für die letztere sehr bald allgemeine Lehrsätze aufstellen konnte, und in derselben ein vorzügliches Mittel zur allgemeinen Behandlung des Tangentenproblems und der Frage über Maxima und Minima erkannte — aus diesem Grunde machte er allein die Differentialrechnung bekannt und hielt die Integralrech-

grale auf gewisse nicht weiter reducirbare Formen zurückgeführt werden müssten. Joh. Bernoulli erwiedert, dass eine allgemeine Regel, jeden Differentialausdruck zu integriren, niemals entdeckt werden würde, dass er jedoch mehrere specielle Methoden hätte, wodurch sehr viele Ausdrücke sich behandeln liessen. Ein vorzügliches Mittel zur Integration der Differentialgleichungen sei die Trennung der Veränderlichen. Er erwähnt ferner, dass er eine neue Art Curven aufgestellt hätte, die in der Mitte ständen zwischen den geometrischen und mechanischen (so hatte sie Descartes eingetheilt) und die er deshalb „curvae percurrentes" nennt; zur Behandlung derselben habe er eine neue Rechnung „calculus percurrens" erfunden. Es sind dies Curven, die durch Gleichungen von der Form $a^x = y$ ausgedrückt werden. Leibniz nannte die Rechnung „Exponentialrechnung" und hatte sie schon in der Correspondenz mit Hugens zur Sprache gebracht. Durch sie wurden die Logarithmen in das Bereich der Differential- und Integralrechnung eingeführt. Im Allgemeinen ist zu bemerken, dass sogleich in den ersten Jahren der Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli all' die Methoden, die gegenwärtig für die Integration der Differentialausdrücke im Gebrauch sind: Integration durch Substitution, durch Zerlegung, theilweise Integration, Integration durch Reihenentwicklung, erwähnt werden. Ferner theilt Leibniz in dem Schreiben vom $^6/_{16}$ März 1695 die Uebereinstimmung mit, die zwischen den Potenzen eines Binoms und den Differentialen eines Produkts zweier von einander unabhängigen Veränderlichen stattfindet, und fordert Joh. Bernoulli auf, etwas dem Aehnliches für die Integrale aufzustellen. Dieser war aber gerade in seiner Uebersiedelung nach Holland begriffen, wohin er auf Hugens' Empfehlung zur Uebernahme einer mathematischen Professur an der Universität zu

Gröningen berufen wurde; er konnte deshalb diesen Gegenstand nicht hinreichend genug verfolgen. Endlich theilt Leibniz selbst einen Ausdruck für das $n$fache Integral eines Produkts zweier unabhängigen Veränderlichen mit, den er aus der Formel für das n^{te} Differential eines solchen Produkts herleitet. Damit wird diese Frage verlassen, die zuletzt gegen die Discussion über das Princip der Dynamik, so wie es Leibniz in dem Streit mit den Cartesianern aufgestellt hatte, in den Hintergrund getreten war. Veranlassung zu dieser Discussion, die einen grossen Theil der Correspondenz in den Jahren 1695 und 1696 einnimmt, gab die Abhandlung Leibnizens: Specimen Dynamicum pro admirandis Naturae Legibus circa corporum vires et mutuas actiones detegendis et ad causas suas revocandis, die in den Act. Erudit. des Jahres 1695 erschienen war. Leibniz fand an Joh. Bernoulli einen hartnäckigen Gegner, der sich jedoch zuletzt zu Leibnizens nicht geringer Genugthuung für das Princip desselben erklärte. Ehe es jedoch dahin kam, brachte Joh. Bernoulli das denkwürdige Problem der Brachystochrone in dem Schreiben vom 9. Jun. 1696 zur Sprache, von dessen Schönheit Leibniz so ergriffen ward, dass er, ohngeachtet sein körperlicher Zustand ihm verbot, mit mathematischen Untersuchungen sich anhaltend zu beschäftigen, nicht eher ruhte, als bis er die Auflösung gefunden hatte. Er selbst hat darüber ausser der Lösung und der Construction der Curve in dem Schreiben vom 16. Jun. 1696 nichts bekannt gemacht; unter seinen hinterlassenen Manuscripten ist jedoch die Analyse dieses Problems noch vorhanden, und sie ist in sofern von dem höchsten Interesse, als daraus hervorgeht, mit welcher Meisterschaft Leibniz die von ihm so angelegentlichst zur Ausbildung empfohlene „ars inveniendi" handhabte. An das Problem der Brachystochrone knüpfen sich bekanntlich die Anfänge der Variationsrechnung; es darf indess nicht unerwähnt bleiben, dass Leibniz bereits in einem früheren Schreiben ($^6/_{16}$ Mai 1695) Joh. Bernoulli auf die Lehre von den Maximis und Minimis, als eine noch unerschöpfte und der Erweiterung fähige aufmerksam gemacht hatte. Er machte den Vorschlag, falls dergleichen Probleme sich nicht auf Differentialgleichungen zurückführen liessen, was öfters mit Schwierigkeiten verknüpft wäre, das Integral durch unendliche Reihen auszudrücken, deren Coefficienten auf eine sehr künstliche Weise bestimmt werden. Es muss ferner erwähnt werden, dass Leibniz sehr wohl die Neuheit von derglei-

---

nung zurück, für welche er solche allgemeine Methoden nicht aufstellen konnte. Erst später (Leibnizens Schreiben $^8/_{18}$ März 1696 und Joh. Bernoulli's Antwort 7. April 1696) einigten sich Leibniz und Joh. Bernoulli dahin, dass jener die Benennung „summatio" aufgab und dafür nach Joh. Bernoulli's Benennungsweise „integralis" sich gefallen liess, dieser hingegen das Zeichen Leibnizens $\int$ für das anfänglich gebrauchte I (den ersten Buchstaben des Wortes Integral) annahm.

chen Problemen und ihre Verschiedenheit von den gewöhnlichen Aufgaben über Maxima und Minima erkannte; in der Abhandlung: Communicatio suae pariter duarumque alienarum ad edendum sibi primum a Dn. Joh. Bernoullio, deinde a Dn. Marchione Hospitalio communicatarum solutionum problematis curvae celerrimi descensus a Dn. Joh. Bernoullio Geometris publice propositi, una cum solutione sua problematis alterius ab eodem postea propositi, durch welche er die eingegangenen Lösungen des Problems der Brachystochrone in den Act. Erudit. 1697 bekannt machte, sagt er: Est autem in hoc problematum genere, circa maxima et minima tali modo proposita, aliquid inusitatum et longe superans vulgares de maximis et minimis quaestiones, quibus solis Fermatius (primus aliqualis circa ipsa Methodi Autor) Cartesius, Huddenius, Slusius aliique methodos suas (de quibus quidem constat) aptavere. Nam in ipsorum quaestionibus res fere eo redit, ut quaeratur maxima vel minima ordinata alicujus curvae datae, quod non nisi corollarium est Methodi tangentium vulgaris seu directae. Sed hoc loco curva ipsa aliquid optime praestans quaeritur, cujus saepe adeo recondita est natura, ut ex datis conditionibus ne tangentium quidem proprietas appareat, adeoque nec ad methodum tangentium altiorem seu inversam facile quaestio reduci possit. Et ipsum problema Curvae Catenariae talis naturae foret, nisi praeparatione facta ad methodum tangentium inversam reducatur. Quaeritur enim ibi, quae sit forma curvae inter duo data puncta magnitudine data sic interceptae, ut ipsius centrum gravitatis maxime descendat. Unde apparet, quam longe hactenus Analysis a perfectione abfuerit, quicquid aliqui de Methodis suis jactarint.

Am Schlusse der Abhandlung über das Problem der Brachystochrone, die wir hier in der ursprünglichen Form mittheilen, so wie sie von Joh. Bernoulli an Leibniz übersandt wurde, legte derselbe zwei neue Probleme zur Lösung vor: 1) das Problem der Synchrone d. h. diejenige Curve zu finden, die alle von einem gemeinsamen Anfangspunkt ausgehenden Cycloiden rechtwinklig durchschneidet; 2) diejenige Curve zu finden, die gewisse über einer gemeinsamen Axe und durch einen gegebenen Punkt gehenden transcendenten Curven z. B. logarithmische Linien unter rechten Winkeln durchschneidet. Er suchte wiederholt die Aufmerksamkeit Leibnizens auf diese Probleme zu lenken; dieser ging jedoch, von vielen andern Geschäften überlastet, nicht darauf ein, worauf dann

Joh. Bernoulli selbst eine Lösung des obigen zweiten Problems gab (in dem Schreiben vom 27. Octbr. 1696). Bald bietet sich indess Joh. Bernoulli eine andere Veranlassung dar, Leibniz zur Erörterung mathematischer Probleme gewissermassen zu zwingen. Joh. Bernoulli war nämlich in den Besitz des Exemplars der Acta Eruditorum Lips. gekommen, das Hugens gehört hatte, und worin derselbe, namentlich bei den mathematischen Abhandlungen Leibnizens, zahlreiche Bemerkungen eingetragen hatte; unter andern war bei der Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus (Act. Erudit. 1682) zu den Worten: Et quoniam quotcunque terminorum numero finitorum progressionis harmonicae summa compendio aliquo iniri potest etc., von Hugens bemerkt: non novi hoc compendium. Joh. Bernoulli fragt nun an, wie es sich mit diesem „compendium" der Summation verhielte. Leibniz erwiedert, dass er sich hinsichtlich dieser Summation in einem Irrthum befunden habe; er erwähnt aber dafür die Summation der unendlichen Reihe $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$ etc. und dadurch wird die Correspondenz gegen Ausgang des Jahres 1696 auf die Integration logarithmischer Ausdrücke geführt. Joh. Bernoulli knüpft daran eine Methode, die Summen unendlicher Reihen durch Differentialgleichungen auszudrücken.

Zu Anfang des Jahres 1697 übersendet Joh. Bernoulli die falsche Auflösung des Problems der Brachystochrone von dem französischen Mathematiker Sauveur an Leibniz. Dieser Sauveur hatte nicht allein etwas Anderes gesucht, als das Problem verlangte, sondern auch in seiner Lösung eine falsche Anwendung der Differentiale gemacht. Dies giebt nun Veranlassung zu einer interessanten Erörterung zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli über die Natur der letzteren, namentlich ob die von Sauveur gebrauchten Grössen Differenzen der ersten oder zweiten Ordnung sind. Aus dieser Discussion geht recht deutlich hervor, auf wie schwankenden Bestimmungen damals die Entscheidung darüber beruhte, und wie nöthig es war, das Princip der Differentialrechnung für den grossen Haufen der Mathematiker deutlicher darzustellen und fester zu begründen. Die wiederholten Angriffe Nieuwentiit's auf die Richtigkeit des Fundaments der Differentialrechnung um dieselbe Zeit hätten ausserdem noch für die Mathematiker ersten Ranges eine Veranlassuug dazu sein sollen.

In Bezug auf das Problem der Brachystochrone waren Leibniz und Joh. Bernoulli übereingekommen, den Termin zur Einsendung der Auflösungen bis zu Ostern des Jahres 1697 zu verlängern, um den Geometern Zeit zur Behandlung desselben zu lassen und bei dieser Gelegenheit zugleich zu sehen, wer wohl fähig wäre dergleichen Aufgaben zu lösen. Joh. Bernoulli machte dies in einem besondern Programm (Jan. 1697) bekannt, in dem er am Schluss ein zweites Problem aufstellt: Invenire lineam, quam recta quaevis per punctum fixum transiens ita secet in duobus punctis, ut summa potestatum a segmentis, interceptis inter punctum fixum et alterutrum punctum curvae, aequetur quantitati constanti. Obwohl Leibniz die Einladungen Joh. Bernoulli's zur Lösung seiner Probleme mit Rücksicht auf seine Gesundheit fortwährend zurückwies, so konnte er sich doch nicht enthalten, die Lösung dieses Problems zu versuchen; er selbst hat nur die Gleichung der Curve bekannt gemacht (Act. Erudit. 1697), die vollständige Analyse desselben fand sich unter seinen Manuscripten nach vor und folgt als Beilage zu dem Schreiben vom 23. Febr. 1697.*) — Nach und nach erschienen die Auflösungen des Problems der Brachystochrone und des oben erwähnten zweiten vom Marquis de l'Hospital und Newton. Sie folgen hier als Beilagen zu den einzelnen Schreiben, in welchen sie erwähnt werden, nicht allein des hohen Interesses wegen, das sie als Produkte des Scharfsinns der grössten Mathematiker der damaligen Zeit darbieten, sondern auch weil die Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli in der ersten Hälfte des Jahres 1697 sich fast nur über die Vorzüge der einen oder der andern Lösung bewegt.

Endlich erschien im Maiheft der Acta Erudit. des Jahres 1697 die Auflösung des Problems der Brachystochrone von Jacob Bernoulli zugleich mit neuen Aufgaben, unter welchen die über die isoperimetrischen Figuren besonders hervorzuheben sind. Sie waren die Ergebnisse des angestrengtesten Nachdenkens und nirgends hat wohl Jac. Bernoulli seine durch eigene Kraft errungene Meisterschaft glänzender bekundet, als in der Behandlung dieser Probleme und in den Streitigkeiten, in die er dadurch mit seinem Bruder verwickelt wurde. Nicht allein das, dass Jac. Bernoulli gewagt hatte, seinem Bruder Aufgaben zur Lösung vorzulegen und das Talent desselben so auf die Probe zu stellen, sondern auch dass er, wie aus der Aufforderung indirect hervorzugehen scheint, an der Möglichkeit der Lösung durch denselben zweifelte, das, sage ich, brachte wahrscheinlich den äusserst reizbaren Joh. Bernoulli in die höchste Aufregung, und in allzugrosser Eilfertigkeit und in zu hohem Selbstvertrauen auf sein Talent übersah er die Schwierigkeiten, welche namentlich das isoperimetrische Problem darbot. Er gab die Construction der einen Aufgabe über die Cycloide des schnellsten Falles, die mit dem von ihm selbst früher aufgestellten Problem der Synchrone verwandt war, und meinte das über die isoperimetrischen Figuren bei weitem allgemeiner behandelt zu haben, als sein Bruder verlangt hätte. Leibniz, dem Joh. Bernoulli sogleich von seiner Lösung Nachricht gab, hatte die Probleme Jac. Bernoulli's nur sehr oberflächlich betrachtet, und er liess sich jetzt durch das Urtheil Joh. Bernoulli's bestechen, so dass er keine besondere Aufmerksamkeit weiter darauf verwandte und die unvollständige und fehlerhafte Behandlung des isoperimetrischen Problems von Seiten Joh. Bernoulli's nicht bemerkte. Kaum hatte aber letzterer seine Lösung bekannt gemacht, als Jac. Bernoulli das Mangelhafte derselben vollständigst aufdeckte und zugleich seinen Bruder aufforderte, seine Methode zu verbessern. Dies geschah, ohne dass jedoch Joh. Bernoulli den Grundfehler seiner Methode erkannte. Am 5. Juli 1698 sandte er diese revidirte Auflösung (sie folgt hier als Beilage zu diesem Schreiben) an Leibniz, der von ihm sogleich anfangs aufgefordert worden war, das Schiedsrichteramt in dieser Sache zu übernehmen. Dieser aber liess sich durch das übereinstimmende Resultat, das Joh. Bernoulli durch eine directe und indirecte Behandlung der Aufgabe gewonnen hatte, wiederum täuschen und hielt die Auflösung für richtig. Der weitere Verfolg der Streitigkeiten zwischen beiden Brüdern über die richtige Auflösung des isoperimetrischen Problems wird in der Correspondenz zwischen

*) Aus einem spätern Schreiben Leibnizens (26. Mai 1697) verdient hier seine Ansicht über den Nutzen der Lösungen von dergleichen Problemen hervorgehoben zu werden: Cum de problemate aliquo solvendo agitur, meus scopus non solet esse, quem memoras, explorare acumen solutoris, sed vel praestari aliquid utile aut elegans vel saltem augeri artem meditandi. Ferner bemerkt er in dem Postscriptum zu diesem Briefe in Bezug auf das isoperimetrische Problem: Judicabis ipse, an putes per problemata ejus (fratris) augeri posse artem inveniendi, quo casu Te digna erunt.

Leibniz und Joh. Bernoulli nur sehr beiläufig erwähnt; wir übergehen sie deshalb hier und verweisen auf die ausführliche Darstellung Bossut's in seiner Geschichte der Mathematik Theil II. S. 164—181 (deutsche Uebersetzung von Reimer).

Auf das wiederholte Geständniss Joh. Bernoulli's, dass es ihm unmöglich sei, das erste der Probleme seines Bruders, von dem er nur eine lineare Construction gegeben hatte, auf eine Differentialgleichung zurückzuführen, hatte Leibniz seine Aufmerksamkeit darauf gerichtet; er fand eine allgemeine Methode zur Behandlung von dergleichen Problemen, die „differentiatio de curva in curvam" genannt worden ist. Er meldete es unter 25. Juli 1697 an Joh. Bernoulli und erläuterte sie in dem nächsten Briefe durch ein Beispiel. Eine etwas weiter ausgeführte Darstellung dieses Verfahrens, von dem Leibniz selbst nichts bekannt gemacht hat, fand sich unter seinen Manuscripten; sie folgt hier als Beilage zu dem Schreiben vom 3. August 1697. Das Fundament dieser Methode besteht darin, dass bei der Differentiation und Integration einer und derselben Function ein Wechsel zwischen den vorkommenden Veränderlichen und Constanten stattfindet. In der erwähnten Beilage deutet Leibniz selbst an, welcher Fortschritt durch diese neue Methode für die höhere Analysis gewonnen sei, und es darf nicht unerwähnt bleiben, dass durch diese Methode Leibnizens eine Auflösung des später so viel bearbeiteten Problems der Trajectorien möglich ward. Durch die Neuheit derselben wurde Joh. Bernoulli so hingerissen, dass er in seinem Antwortschreiben das offene Bekenntniss ablegt: Incredibili gaudio perfusus sum, cum viderem eundem genium Tibi totum mysterium pandisse, sed indignor quod Te altius admiserit quam me; und er löst mit Hülfe dieser neuen Methode das Problem: Construere curvam datas ordinatim positione curvas sive similes sive non similes in dato angulo sive invariabili sive data lege variabili secantem.

Von der Mitte des Jahres 1697 ab nimmt die Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli auf längere Zeit einen durchaus veränderten Charakter an; es ist von solchen grossen Problemen, wie bisher, nicht mehr die Rede, dafür werden die neuesten Vorgänge auf dem Gebiet der mathematischen Literatur besprochen. Auf der einen Seite war Joh. Bernoulli, der zur Discussion jener grossen Probleme seither unablässig die Anregung gegeben hatte, durch die Streitigkeiten mit seinem Bruder über die richtige Lösung des isoperimetrischen Problems in Anspruch genommen; hierzu kam,

dass er von den Curatoren der Universität Gröningen verpflichtet wurde, mit Beginn des Jahres 1698 Vorträge über Experimentalphysik zu halten, die ihn von mathematischen Speculationen abzogen. Auf der andern Seite befasste sich Leibniz, wie noch nie, mit den verschiedenartigsten Gegenständen, so dass ihm keine Zeit und Neigung blieb, auf mathematische Probleme ernstlich seine Aufmerksamkeit zu richten. Es ist ferner zu erwähnen, dass Leibniz im Jahre 1698 eine neue Correspondenz mit dem Philosophen und Mathematiker de Volder anknüpfte, auf die er in den folgenden Jahren besondern Fleiss verwandte, da es ihm darauf ankam, de Volder, der hinsichtlich des Princips der Dynamik zu den Ansichten der Cartesianer sich bekannte, in diesem Punkte zu bekehren und für seine Ansicht zu gewinnen. Diese Correspondenz zwischen Leibniz und de Volder war durch Joh. Bernoulli, der bei einem Besuch in Leyden die Bekanntschaft des letzteren gemacht hatte, veranlasst worden; da sie nun auch fortwährend durch seine Hände ging und da in derselben sehr bald metaphysische Erörterungen über die Natur des Unendlichen, über die Monaden, über die Natur der Körper, über die Freiheit und Weisheit Gottes, über die Verbindung zwischen Körper und Geist u. s. w. eine Hauptrolle spielten, so interessirte sich Joh. Bernoulli lebhaft dafür, zumal weil ihm jene metaphysischen Erörterungen in dem Streite, in dem er damals mit holländischen Theologen verwickelt war (siehe das Schreiben Joh. Bernoulli's vom 5. Juli 1698) zu Statten kamen. Daher kommt es denn auch, dass die Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli in den Jahren 1698 bis 1700 vorzugsweise über dergleichen metaphysische Begriffsbestimmungen sich bewegt. Zwar bringt Joh. Bernoulli auch noch in den folgenden Jahren fast nur physikalische Fragen zur Erörterung, namentlich über die Verdichtung und Elasticität der Luft und über den von ihm entdeckten Posphorus mercurialis (d. i. das Leuchten des Quecksilbers an den Wänden eines luftleeren Glasgefässes); indess gaben die Angriffe, die von dieser Zeit an auf Leibniz als Entdecker der Differentialrechnung von England und Frankreich aus begannen, wiederum einige Veranlassung zur Discussion von Fragen aus dem Bereich der mathematischen Wissenschaften, indem Leibniz stets zur Abwehr derselben die Hülfe und den Rath Joh. Bernoulli's in Anspruch nahm. Der erste Angriff erfolgte bekanntlich bereits im Jahre 1699 von England aus, durch Fatio de Duillier, der in seiner kleinen Schrift: Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex, cui addita est investigatio geometrica Solidi rotundi, in quod minima fiat resistentia. Londin. 1699, die Behauptung aufstellte, dass Newton entschieden der erste Entdecker, hingegen Leibniz nicht allein als zweiter betrachtet werden müsse, sondern vielleicht sogar ein Plagiarius sein könnte.*) Den gereizten

---

*) Nicolaus Fatio de Duillier, geb. 1664 zu Basel (so R. Wolf in den „Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft zu Bern aus dem Jahre 1846, S. 135;“ sonst wird gewöhnlich Genf als Geburtsort desselben angegeben), besass nach dem Urtheil Joh. Bernoulli's glänzendere Fähigkeiten, als sein älterer Bruder Johann Christoph, der von letzterem während seines Aufenthaltes zu Genf in die höhere Analysis eingeweiht wurde. Mag nun Nicolaus Fatio mit Hülfe seines Bruders, oder selbstständig in die Principien der höhern Analysis eingedrungen sein, mit denen er sogar früher vertraut gewesen zu sein behauptete, bevor er von der Entdeckung Leibnizens etwas gewusst hätte — kurz Nicolaus Fatio stellte sich sehr bald den Mathematikern ersten Ranges der damaligen Zeit zur Seite; Hugens schätzte ihn hoch und arbeitete mit ihm, und Jacob Bernoulli schlug ihn zugleich mit Newton und dem Marquis de l'Hospital als Schiedsrichter in dem Streite mit seinem Bruder Johann vor. Gegen Ende des Jahres 1691 ging Fatio nach England; er erhielt Zutritt zu Newton, der ihn mit grosser Zuvorkommenheit aufnahm und ihm sogar Einsicht in seine Papiere gestattete. Von England aus schrieb Fatio in den Jahren 1691 und 1692 mehrere Briefe an Hugens, die von Uylenbroeck (Ch. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae, Hagae Comit. 1833 Fasc. II. p. 98 sqq.) veröffentlicht worden sind; in diesen behauptete er, dass nach seiner Ueberzeugung Newton unbestritten der erste Erfinder der höheren Analysis sei, dass durch Newton's Briefe aus den Jahren 1675 und 1676 Leibniz auf die Differentialrechnung geführt worden und dass Leibnizens Differentialrechnung zu den Fluxionen Newton's sich verhielte, wie ein Original zu einer verstümmelten, sehr unvollkommenen Copie, wodurch der Vorwurf des Plagiats schon hinreichend angedeutet ist. Hieraus erhellt, dass von den Freunden Newton's ein Jahrzehnt hindurch die Angriffe gegen Leibniz im Stillen genährt wurden, bevor der Kampf offen begann. Endlich bot sich dazu eine Gelegenheit. Leibniz hatte nämlich in den einleitenden Worten, mit welchen er die eingegangenen Auflösungen des Problems der Brachystochrone in der Act. Erudit. bekannt machte, gesagt, dass nur diejenigen das Problem zu lösen vermocht, von denen er es im voraus angenommen hätte (Et sane notatu non indignum est, eos solos solvisse hoc Problema, quos solvere posse conjeceram). Fatio, dessen übergrosse Empfindlichkeit schon dadurch gereizt worden, dass er nicht beson-

Ausfällen Fatio's gegenüber war die Antwort Leibnizens mit grosser Ruhe und Mässigung abgefasst. Sie wurde ihm Veranlassung, ein Ergebniss seiner früheren weitläufigen Untersuchungen über die allgemeine Auflösung der Gleichungen mitzutheilen; er giebt nämlich am Schluss derselben ein Verfahren, die Wurzel einer Gleichung durch eine unendliche Reihe auszudrücken. Er gebraucht dabei eine von ihm eingeführte eigenthümliche Bezeichnung der Coefficienten, wovon er sich nicht nur für die Behandlung der Gleichungen viel versprach, dessen er sich auch in allen seinen spätern Untersuchungen über Integrationen irrationaler Ausdrücke bediente. — Bald darauf folgte Rolle's Angriff im Schoosse der französischen Akademie auf die Zuverlässigkeit der Differentialrechnung. Der Hauptrepräsentant der neuen Analysis in Frankreich, der Marquis de l'Hospital, war bereits durch anhaltende Kränklichkeit, eine Folge seiner frühern äusserst angestrengten mathematischen Studien, genöthigt, auf eine fernere lebhafte Betheiligung an mathematischen Discussionen zu verzichten und war auch in der Sitzung nicht gegenwärtig, in

---

ders, wie die übrigen namhaften Mathematiker, zur Lösung des Problems eingeladen worden war, fühlte sich auf das schwerste getroffen, dass ihm nun auch die Fähigkeit zur Behandlung desselben abgesprochen würde. Er veröffentlichte deshalb die oben erwähnte kleine Schrift, in der er, voll Neid über das Ansehen Leibnizens und seiner Freunde auf dem Gebiet der mathematischen Wissenschaften, die lange zurückgehaltenen Behauptungen über den wahren Entdecker der höheren Analysis unverhohlen ausspricht. Quaeret forsan — so lauten seine Worte — Cl. Leibnitius, unde mihi cognitus sit iste Calculus, quo utor? Ejus equidem Fundamenta universa ac plerasque Regulas, proprio Marte, Anno 1687, circa mensem Aprilem et sequentes, aliisque deinceps Annis, inveni; quo tempore neminem eo Calculi genere, praeter me ipsum, uti putabam. Nec mihi minus cognitus foret, si nondum natus esset Leibnitius. Aliis itaque glorietur Discipulis, me certe non potest. Quod pius satis patebit, si olim Litterae, quae inter Cl. Hugenium meque intercesserunt, publici juris fiant. Newtonum tamen primum ac pluribus Annis vetustissimum hujus Calculi inventorem, ipsa rerum evidentia coactus, agnosco: a quo utrum quicquam mutuatus sit Leibnitius, secundus ejus Inventor, malo eorum, quam meum, sit judicium, quibus visae fuerint Newtoni Litterae, aliique ejusdem Manuscripti Codices. Neque modestioris Newtoni silentium, aut prona Leibnitii sedulitas, inventionem hujus Calculi sibi passim tribuentis, ullis imponet, qui ea pertractarint, quae ipse evolvi, instrumenta.

der der erwähnte Angriff geschah; deshalb musste der zweite Schüler Joh. Bernoulli's in Frankreich, Varignon, die Abwehr desselben übernehmen. Dieser Angriff Rolle's war so ungeschickt und zeugte von so grosser Unkenntniss des Wesens der Differentialrechnung, dass es Varignon nicht schwer fiel, die Vertheidigung zu führen; er wollte indess nicht ohne Zustimmung Joh. Bernoulli's und Leibnizens in dieser Sache handeln, deshalb theilte er seine Erwiderung Joh. Bernoulli mit, durch den Leibniz davon Kenntniss erhielt. Dieser wurde dadurch zu einigen weiteren Bemerkungen veranlasst, über welche er nach seiner Gewohnheit das Urtheil Joh. Bernoulli's einholte. Da unter andern Rolle behauptet hatte, dass die Differentialrechnung mit der Methode Hudde's hinsichtlich der Bestimmung der Maxima in Widerspruch stände, so ist namentlich das Wesen der letzteren längere Zeit der Gegenstand der Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli.*) Obwohl die Haltlosigkeit dieser Angriffe Rolle's auf die Zuverlässigkeit der Differentialrechnung zu offenbar war, als dass Leibniz grosses Gewicht hätte darauf legen können, so empfand er doch in Folge der wiederholten Anfechtungen recht lebhaft, wie nöthig es sei, der Differentialrechnung eine feste Begründung zu geben. Unter dem 31. Dec. 1700 schreibt er an Joh. Bernoulli: Hujusmodi adversarii, quales Nieuwentiit et Rollius et Cluverius (alias ceteris longe praeferendus) nostra non evertent, sed magis novis palmis decorabunt: interim perutile est os illi occludi per reductionem ad Demonstrationes Veterum more formatas, et egregiam ea in re operam navaturum puto Dn. Varignonium. —

Leibniz war zugleich mit Newton und Joh. Bernoulli im Jahre 1699 Mitglied der französischen Akademie der Wissenschaften geworden; um dieselbe Zeit ging mit dem Beginn des neuen Jahrhunderts einer seiner Lieblingswünsche durch die Munificenz des ersten Königs von Preussen in Erfüllung, die Errichtung eines ähnlichen Instituts in der preussischen Hauptstadt, des ersten in Deutschland, und er selbst wurde mit der weiteren Einrichtung und mit der Führung des Präsidiums beauftragt. Er begriff, wie es scheint, dass er

*) Eine ausführliche Darstellung dieser Angriffe Rolle's und des dadurch entstandenen Streites zwischen den Anhängern der neuen Analysis und ihren Gegnern in der französischen Akademie findet sich im Montucta hist. des mathémat. Tom. III. p. 110 ff.

als Mitglied dieser gelehrten Vereine auf dem Gebiete der exacten Wissenschaften sich bethätigen müsse; deshalb beschloss er, frühere Untersuchungen wieder vorzunehmen und sie so weit zu führen, dass sie veröffentlicht werden konnten. Er fiel zuerst auf die Dyadik, über die er das Urtheil Joh. Bernoulli's zu vernehmen wünschte; dieser fand jedoch keinen besondern Geschmack daran. Zugleich beklagt sich Leibniz bitter, dass Joh. Bernoulli ihm seine neuen Arbeiten auf dem Gebiete der mathematischen Wissenschaften beharrlich vorenthält und keine Mittheilung macht; er schreibt (20. Apr. 1702): Pene est, cur idem faciam quod Varignonius, id est querar, quod tamdiu me Tuas praeclaras cogitationes (quarum multas domi Tuae nasci in dies non dubito) vis ignorare, ita ut plerumque quae facis, demum ex Diariis vel aliunde discam. Um zu beweisen, dass er fortan der Mathematik eine grössere Aufmerksamkeit wiederum zuzuwenden sich entschlossen habe, versucht Leibniz sogleich die Probleme, die Joh. Bernoulli ursprünglich Varignon zur Lösung vorgelegt hatte. In dem Schreiben, das vom 24. Jun. 1702 aus dem Schlosse zu Lützelburg datirt ist, versichert er die Lösung der drei ersten zu haben; besonders aber nimmt er von dem sechsten Problem, in dem es sich um die Integration von Quotienten mit rationalen Ausdrücken in Zähler und Nenner handelt, Veranlassung, auf seine früheren Untersuchungen, die er für sein beabsichtigtes Werk: Scientia infiniti, bestimmt hatte, zurückzukommen. Er giebt hier nur in allgemeinen Umrissen den Gang seiner Untersuchungen an, denn er hatte sie, was die Integration von rationalen gebrochenen Functionen anlangt, bereits vollständig in einer Abhandlung zusammengestellt, die unter dem Titel: Specimen novum Analyseos pro Scientia Infiniti circa Summas et Quadraturas, in den Act. Erudit. des Jahres 1702 erschien; eine Fortsetzung davon folgte in derselben Zeitschrift im nächsten Jahre 1703. Im gegenwärtigen Briefe entwickelt Leibniz zugleich auch den Weg, den er zur Integration irrationaler Ausdrücke eingeschlagen, und die Ergebnisse, die er bereits gewonnen. Wie aus seinen hinterlassenen Manuscripten hervorgeht, beschäftigte dieser Theil der Integralrechnung ihn um diese Zeit vorzugsweise; unfähig gegenwärtig, weitläufige Rechnungen auszuführen, giebt er Joh. Bernoulli Weisungen, wie hier weiter zu verfahren sei, und empfiehlt ihm die Fortsetzung seiner Untersuchungen.

Im Anfange des Jahres 1703 war Joh. Bernoulli von einem in der Nähe von Gröningen wohnenden Mathematiker folgendes Problem vorgelegt worden: Une courbe algebraique (vulgairement appellée geometrique) étant donnée, la transformer en une infinité d'autres aussy geometriques, mais d'especes differentes, lesquelles soient chacune de même longueur que la proposée. Joh. Bernoulli theilte es Leibniz mit und dieser erdachte sogleich ein Verfahren zur Lösung desselben. Er betrachtete nämlich die gegebene Curve als Evolute, die gesuchte als die evolvirende Curve und vermittelte die Herleitung der einen aus der andern durch eine dritte algebraische Curve, die er als einen Hohlspiegel annimmt, von dem die von der gegebenen Curve ausgehenden Tangenten zurückgeworfen, die gesuchte Curve bilden. Indem er für die als Spiegel wirkende Curve ein brechendes Mittel setzte, erweiterte er das Problem und löste es noch für den Fall, dass die gesuchte Curve in irgend welchem Verhältniss zu der gegebenen steht. Chasles (Geschichte der Geometrie, in's Deutsche übersetzt von Sohncke S. 101 f.) vindicirt Hugens das Princip dieses Verfahrens, der es zuerst in seinem berühmten Werke über das Licht zur Anwendung brachte. Der berühmte Geschichtschreiber der Geometrie bemerkt bei dieser Gelegenheit, dass diese Theorie Hugens', nachdem sie über ein Jahrhundert in unerklärliche Vergessenheit gerathen, durch Fresnel's Arbeiten über die Polarisation des Lichtes aus ihrer Verborgenheit wieder hervorgezogen worden sei, ohne Leibnizens zu gedenken, der, wie es scheint, unbekannt mit der Theorie von Hugens, bei der Lösung des obigen Problems sie von neuem erdachte. Joh. Bernoulli, der wider Erwarten von Leibniz mit der Nachricht von der Lösung des Problems überrascht wurde, gestand offen seine Bewunderung der Neuheit des Verfahrens; er konnte jedoch seinem selbstsüchtigen Naturell gemäss eine Kritik nicht zurückhalten: er tadelte, dass die Lösung Leibnizens das zweite Differential bedürfe, anstatt die seine sich nur auf die ersten stütze. Er zögerte indess mit der Mittheilung seines Verfahrens, und da er zu Anfang des Jahres 1704 in eine schwere Krankheit verfiel und zugleich mit der Rückkehr in sein Vaterland umging, so geschah es, dass erst, nachdem er die durch den Tod seines Bruders erledigte Professur der Mathematik an der Universität zu Basel angetreten hatte, seine Methode zur Lösung des in Rede stehenden Problems in der Act. Erudit. des Jahres 1705 erschien in der Abhandlung: Motus reptorius ejusque insignis usus pro lineis curvis in unam omnibus aequalem colligendis etc. In derselben erwähnte Joh. Bernoulli, dass auch von Leibniz ein Verfahren zur

Lösung des Problems gefunden wäre, indess dürfte dasselbe bei Anwendung auf specielle Fälle zu einer sehr verwickelten Rechnung führen. Da diese Veröffentlichung ohne Leibnizens Wissen geschah und zugleich auch nicht eben zu seinen Gunsten ausfiel, so äusserte er mit Recht seinen Unwillen über eine solche Kritik, unterliess jedoch eine Bekanntmachung seiner Methode, wie er es anfangs beschlossen hatte. Er drängt jedoch Joh. Bernoulli seine Kritik zu begründen und so zeigt denn derselbe, dass auch die Kreislinie als spiegelnde Curve genommen werden kann, die Leibniz ausgeschlossen hatte, und dass die Lösung Leibnizens insofern nicht allgemein sei, als sie an die Bedingung geknüpft sei, dass die spiegelnde Curve von hinreichender Grösse und dass die Entfernung von der gegebenen Curve bis zur spiegelnden überall grösser sein müsse, als $\frac{1}{4}$ des Durchmessers des Kreises, falls ein solcher als zurückwerfende Curve angenommen würde. Leibniz hatte, um den Tadel Joh. Bernoulli's zurückzuweisen, sein Verfahren für den besondern Fall, dass eine Ellipse als spiegelnde Curve angenommen wird, erläutert; von ihm genöthigt giebt denn auch Joh. Bernoulli zu Anfang des Jahres 1707 nach seiner Methode eine Construction der transformirten Curve, wobei er zugleich noch zeigt, dass sich Kreise angeben lassen, zwischen denen als Gränzen die transformirte Curve liegt.

Durch die Abhandlung Joh. Bernoulli's über den Motus reptorius war Leibniz bewogen worden, Ideen über die Erzeugung der Curven mittelst Bewegung, die vielleicht schon seit langer Zeit in seinen Manuscripten niedergelegt waren, zusammenzustellen; er veröffentlichte den betreffenden Aufsatz in den Act. Erudit. 1706 unter dem Titel: De lineae super linea incessu ejusque tribus speciebus, motu radente, motu provolutionis et composito ex ambobus. In der Aufregung über das taktlose Benehmen Joh. Bernoulli's hatte er bei der Abfassung desselben nicht mit gewohnter Ruhe und Ueberlegung gearbeitet, und so kam es, dass er selbst bald nach der Absendung Fehler darin bemerkte, die denn auch von Joh. Bernoulli in seinen Briefen gerügt werden. — Ausserdem werden fortwährend in dieser Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli alle damaligen Erscheinungen in der mathematischen Literatur besprochen, worüber Leibniz in der Regel das Urtheil des letzteren einholt. Mihi, schreibt er den 27. Jun. 1708, ut facile judicas, talibus hodie vacare non licet.

Obwohl Leibniz in seinen letzten Lebensjahren immer mehr und mehr dem Geist seiner Zeit huldigte und dadurch, dass er alle Gebiete des Wissens umfassen wollte, seine Thätigkeit zersplitterte, so blieb doch die Mathematik seine Lieblingswissenschaft, deren Wachsthum und Blüthe ihm sehr am Herzen lag. Besonders verfolgte er die immer weitere Ausbreitung der höheren Analysis, so wie er sie geschaffen hatte, mit höchstem Interesse. Gegen Joh. Bernoulli war er fortwährend anregend und ermunterte ihn unablässig für die Wissenschaft thätig zu sein. Indess wird der Mangel eines Gegenstandes, der ein lebhaftes beiderseitiges Interesse für sich in Anspruch genommen hätte und an dem, wie an einem fortlaufenden Faden, die Correspondenz sich hätte fortspinnen können, immer fühlbarer; deshalb ist nicht zu verwundern, dass sie im Jahre 1710 beinahe zu erlöschen drohte. Leibniz war mit der Vollendung seines grossen historischen Werkes beschäftigt; dazu kamen diplomatische Geschäfte und zeitraubende Zerstreuungen an den Höfen von Berlin und Wolfenbüttel. Erst im Jahre 1712 findet sich ein Thema, durch dessen Erörterung wieder eine grössere Lebendigkeit in die Correspondenz kommt. Varignon hatte nämlich eine Recension von Guido Grandi's Schrift: De infinitis infinitorum et infinite parvorum ordinibus, Pisis 1710, an Joh. Bernoulli geschickt, der sie zur Aufnahme in die Acta Eruditorum an Leibniz sandte. Selbige gab Leibniz Veranlassung zu einer kurzen Abhandlung, die zugleich mit jener Recension in den Act. Erudit. 1712 erschien unter dem Titel: Observatio quod rationes sive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores etc. Er behauptet darin, dass die Proportion $1 : -1 = -1 : 1$ nicht richtig sei, obwohl die Produkte der Mittel- une Aussenglieder gleich wären; er begründet seine Behauptung mit Hülfe der Logarithmen, wobei er von dem Satz ausgeht: ratio, cui nullus datur respondens Logarithmus, ratio vera non est, und läugnet zugleich die Möglichkeit von Logarithmen negativer Zahlen. Dagegen meinte Joh. Bernoulli, dass man sich die logarithmische Linie, ähnlich wie die Hyperbel, aus zwei Zweigen auf beiden Seiten der Axe vorstellen könneund dass alsdann zu jeder Abscisse sowohl eine positive als negative Ordinate gehörte. Der Streit blieb unentschieden, ebenso wie später, als die Frage über die Existenz der Logarithmen negativer Zahlen zwischen Euler und d'Alembert von neuem zur Erörterung kam (siehe Klügel's mathematisches Wörterbuch Theil III. S. 571 ff.).

In demselben Jahre 1712 erschien das Commercium epistolicum Joannis Collinsii aliorumque de Analysi promota, das unter den Auspicien der Königlichen Societät zu London herausgegeben die Documente enthalten sollte, um die Frage über den eigentlichen Entdecker der höhern Analysis endgültig zu entscheiden, nachdem die Plänkeleien Fatio's und die Angriffe Keill's zu keinem Resultate geführt hatten. Die erste Kunde davon erhielt Leibniz durch Joh. Bernoulli, dem die Nachricht brieflich von einem befreundeten Schottländer Burnet zugekommen war, und der bald darauf durch ein Schreiben seines auf einer Reise durch England begriffenen Neffen, Nicolaus Bernoulli, über die Stimmung der Engländer in Betreff Leibnizens genauer unterrichtet wurde. Dieser verweilte in den Jahren 1713 und 1714 längere Zeit in Wien und bekam erst nach seiner Rückkehr nach Hannover ein Exemplar des Commercium epistolicum zur Einsicht. Indessen musste er sich auf die Mittheilungen Joh. Bernoulli's verlassen, der aus Rücksicht gegen Newton bei der Streitfrage sich nicht öffentlich betheiligen wollte, obwohl er bereits vor dem Erscheinen des letzt genannten Werkes, vielleicht aus Eifersucht über den wachsenden Ruhm Newton's, eine Kritik der Principia in ihrer ersten Ausgabe begonnen hatte. Um aber nicht ganz stillzuschweigen, erliess Leibniz noch von Wien aus anonym ein fliegendes Blatt vom 29. Jul. 1713 datirt, in welchem er besonders die Ansichten Joh. Bernoulli's über die Streitfrage aus den Briefen desselben anführte. Gegen Ende des Jahres 1714 kehrte Leibniz nach Hannover zurück; er beschloss anfangs zur Vertheidigung seiner Rechte ein anderes vollständigeres Commercium epistolicum dem englischen entgegenzusetzen und zugleich durch Probleme, zu deren Behandlung er und Joh. Bernoulli allein die Methoden besassen, Newton und seine Anhänger auf die Probe zu stellen, in wie weit sie ihre Fluxionentheorie zur Lösung derselben zu gebrauchen verständen.*) Das erste Vorhaben gelangte jedoch nicht zur Ausführung; seine Manuscripte und Briefschaften befanden sich nicht in der besten Ordnung und es fehlte ihm die Geduld, aus dem Chaos das erforderliche Material hervorzusuchen; dagegen zog er mit Unterstützung Joh. Bernoulli's gegen

*) Dabo etiam operam, ut quaedam edam, in quibus Newtono aquam haerere scio, schreibt Leibniz unter dem 30. November 1714 an Joh. Bernoulli.

die Engländer mit dem Problem der rechtwinkligen Trajectorien*) zu Felde, zu dessen Behandlung beide die noch nicht öffentlich bekannt gemachte Methode der differentiatio de curva in curvam besassen. Die Aufgabe wurde von Nicolaus Bernoulli, dem Sohne Johann's, für den Fall, dass die durchschnittenen Curven Hyperbeln von einerlei Mittelpunkt und einerlei Scheitel sind, gelöst; desgleichen wurde die Aufgabe von Nicolaus Bernoulli, dem Neffen Johann's, und von Hermann allgemeiner behandelt. Kurz vor Leibnizens Tode erschien Newton's Auflösung; er übersandte sie an Joh. Bernoulli, um sein Urtheil darüber zu hören. Ehe jedoch dessen Antwort eintraf, hatte Leibniz bereits der Tod überrascht. Nach seinem Tode wurde der Kampf von Seiten Joh. Bernoulli's offen aufgenommen und siegreich mit grosser Demüthigung der Engländer weiter geführt (siehe Bossut Geschichte der Mathematik, deutsch von Reimer, Theil 2 S. 226 ff.).

Von der Correspondenz zwischen Leibniz und Joh. Bernoulli erschien ein Abdruck noch bei Lebzeiten des letzteren im Jahre 1745 unter dem Titel: Virorum celebri. Leibnitii et Joh. Bernoullii commercium philosophicum et mathematicum, II Tom. 4. Man weiss nicht, wer die Herausgabe besorgt hat. Sie ist sehr lückenhaft und unvollständig; nur die wenigsten Briefe sind ohne Auslassungen abgedruckt, besonders aber fehlen viele Briefe Joh. Bernoulli's vom Jahre 1699 an. Die Lücken in den Briefen Joh. Bernoulli's sind grösstentheils dadurch entstanden, dass der unbekannte Herausgeber die harten und nicht eben auf feine Weise ausgedrückten Urtheile desselben über seine Zeitgenossen unterdrücken zu müssen glaubte. In dem vorliegenden Abdruck sind sie sämmtlich ausgefüllt; sie liefern ein treffliches Material, um ein deutliches Bild von dem Charakter Joh. Bernoulli's zu gewinnen. Desgleichen sind die fehlenden Briefe Joh. Bernoulli's, bis auf einen, nach den Originalen auf der Königl. Bibliothek zu Hannover ergänzt. Leider sind daselbst die Briefe Leibnizens, besonders aus den letzten Jahren, sehr unvollständig vorhanden, so dass dieselben grösstentheils so wiedergegeben werden mussten, wie sie in dem oben genannten Werke sich finden.

*) Invenire lineam, quae ad angulos rectos secet omnes curvas determinati ordinis ejusdem generis, exempli causa omnes hyperbolas ejusdem verticis et ejusdem centri idque via generali.

I.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nisi insignis Tua humanitas jam multis nominibus mihi esset comperta, merito haesitarem an gravissima negotia, quibus Te distractissimum esse non ignoro, praesentibus hisce interpellare liceret: Quicquid tamen temeritatis hac in parte commissum fuerit, pro more singularis Tuae erga me benevolentiae, quam saepius jam persentiscere mihi contigit, haud difficulter condonabis. Nihil unquam magis mihi cordi fuit, quam divinae Matheseos studium, quippe quod Medicinae, cui et ego aliqualiter addictus, plurimum lucis confert clavemque praebet ad reseranda abditissima Naturae claustra. Huic scientiae, praesertim penitiori ejus parti, a juventute sedulo incumbens tantos in illa ope divinae gratiae feci progressus, ut, si dicere fas est, jamjam mihi comparaverim praecipuorum Mathematicorum applausum, cumprimis Academiae Scientiarum Parisiensis, aliorumque quorum necessitudinem in Gallia nactus sum; et Tibi ipsimet, Vir Celeberrime, libuit tenuia mea inventa pluris quam par est aestimare, deque iis benigniorem sententiam passim in Actis Lipsiensibus proferre, quam sperare ullatenus ausus fuerim. Qualiacunque autem illa sint, profiteor et usque profitebor, ortus illorum unice deberi subtilissimis Tuis lucubrationibus quas cum Orbe literato subinde communicare non dedignatus fuisti, quae et satis ostendunt nihil prorsus in universa Mathesi tam absconditum esse, quod stupendam aciem ingenii Tui acutioris subterfugiat: Hoc ipsum in causa est, ut semper in votis abuerim et eo collimarim, quo Amplitudini Tuae aliquandiu propior esse possem, si modo exoptata occasio sese offerret, ut tanquam ex scaturigine ipsa haurirem, quae hucusque non nisi ex rivulis remotissimis haurire licuit, et, si magnis addere licet parva, arduum studium mathematicum ad majorem perfectionis gradum promovendum adjuvarem. Cum vero non sine summo delectamento intellexerim, quod utut saevientis Martis fax ubique fere locorum sit accensa, nihilominus bonae artes et literae Vestris in regionibus non parum vigeant et floreant, et cum fama ad aures nostras pervenerit quod Celsissimus et Serenissimus Dux Antonius Ulricus juxta gravissima regiminis negotia eorumque prudentissimam administrationem, etiam plurimam voluptatem capiat arcanis naturae et artis, eorum indagationem benignissime promoveat, omniumque scientiarum praecipue Mathematicarum Cultores clementissimo nutu foveat et protegat; quam sane Regiam Suae Celsitudinis generositatem totus Eruditus Orbis nunquam satis laudabit, ego autem humillimo juxta ac profundissimo pectore perpetim recordabor: Hoc, inquam, cum intellexerim, enixe Te rogatum cupio, ut authoritate qua polles ob incomparabilem Tuam Eruditionem, causam meam ita agas apud Celsitudinem Suam, ut ad scopum optatum pertingere possim, quod utique Tibi difficile non erit, velim credas mihi opus fere longe gratissimum, quodque aeternum obstringet etc.

Dabam Basileae d. 20 Decemb. 1693.

Salutem officiosissimam Amp. Tuae dicit Frater meus.*)

---

*) Um das nachfolgende Schreiben Leibnizens besser zu verstehen, wird der Brief Joh. Bernoulli's an Mencken hier eingeschaltet.

Joh. Bernoulli an Mencken.

Ex nuperrimis Tuis ad fratrem datis pergratum fuit intelligere, Celeberrimum Dom. Leibnitium animum non mutasse mihi in vicina sua stationem quandam conciliandi, quod utique veritus fueram ob dissidium inter Serenissimum suum Principem Daniaeque Regem subito obortum, in his enim casibus ut fieri solet studiorum parva cura habetur: bello autem hoc feliciter in partu extincto, eo libentius et quidem summa gratitudine oblatam Dom. Leibnitii conditionem amplector; quod si hac in re Tuam operam, ut hactenus fecisti, ita porro contribuere velis, me qui Tuus jam sum totum mancipatum habebis. Haud igitur gravatim Dom. Leibnitio constans meum propositum significabis, ejusque responsionem per brevissimam viam huc perscribes; quam si rescivero, sine mora iter aggrediar atque me quantocyus ad locum qui assignabitur conferam.

In ultimo ad nos delato Actorum mense Septem. videre licuit

II.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Percommode accidit, quod ante monstratas Serenissimo Duci literas Tuas, mutata consilia et patriam urbem Tibi manum injecisse intellexi. Habet illa jus retractus, quanto magis jus retentionis? Atque illi quidem recte consuluisti; precor etiam ut Tibi, cui omnia fausta opto. Cum suis esse, etiam minore emolumento, dulce est, praesertim indubia spe majorum. Praeterea meo judicio ac sensu vel sola Fratris Tui, insignis Viri, consuetudo poterat Te illic tenere devinctum, dum Vobis mutuo et auxilio estis et incitamento. Mihi certe, si quis Vestri similis adesset, multum ea voluptas aliis plerisque potior foret. Ceterum non humanitati tan-

---

Celeb. Leibnitii generalem tetragonismorum effectionem per motum, quam sane peringeniosam deprehendo; jam ab aliquo tempore similes fere habebam cogitationes ex occasione eorum quae Nob. Hugenius in Hist. Erudit. publicavit, intentio autem mea erat excogitare modum generalem, quo omnes curvae tam Geometricae quam mechanicae ex tangentium proprietate per motum describi possent; modus quippe Leibnitii quo mechanicae describuntur, supponit Geometricas jam descriptas, quarum autem pleraeque non nisi per inventionem infinitorum punctorum (id quod summe operosum) construi possunt. Interim multa et miranda praestitit Magnes noster Leibnitius eo quod generaliter spatiorum quadraturas et curvarum rectificationes primus per motum quasi Geometrice determinavit; hoc unicum incommodum reperio, quod ob compositum machinae apparatum in praxi vix adhiberi possit, nisi in quibusdam casibus ubi simplicior evadit; caeterum mihi videor jam habere modum, quo machinatio aliquantulum compendiosior reddi possit, si quidem totum negotium in unico plano absolvi posse deprehendo.

Solutio mea problematis in Diario Parisiensi publicati, cujus Te in postremis meis participem feceram, in eodem Diario jam apparuit; contra quam Auctor problematis movit quasdam objectiones sed brevis momenti, ad quas responsionem ante paucos dies Parisios transmisi; Auctor autem, ut Gallorum laudabilis mos est qui promissis stare ac praemium extraneis adjudicare in honestum ducunt, hic procul dubio non acquiescet, utpote qui captionibus Gallicis nunquam carebit.

Frater Tibi Tuoque Amplissimo et Honoratissimo Affini suam salutem dicit, cui et meam adjungam officiosissimum etc.

Dabam Basileae d. 18. Febr. 1693.

tum, sed et benevolentiae imputo verba Epistolae Tuae in me effusiora, quibus non inferiores etiam res expecto. Itaque, si scripseris in posterum crebrius, et meditationum vestrarum egregiarum subinde me participem feceris, hoc ego maxima affectus argumenta putabo, praesertim cum ego nunc multo plura a Te sperem, quam a me possint reddi. Itaque favore erga me supplere Vos opus est, quod utilitati Vestrae decedet. Tuum ingenium, natura vividum, florens aetate, exercitationibus mathematicis excolitur: mihi si qua naturae vis fuit, tempore plurimum imminuta est, et quod restat, fere alio verti debet. Si quid tamen, uti memoras, pristina mea studia Vobis profuere, ego vicissim quasi jure quodam postulo, ut Vestris praeclaris inventis frui detur, etsi praeter sinceri animi laetos plausus praestare vix quicquam ipse possim.

Cogitavi aliquando me utcunque absolvere his studiis conscripto libello, quem Scientiam Infiniti, non incommode inscribi posse putem, in quo superioris Matheseos principia traderentur: haec enim ubique infiniti considerationem involvunt, quemadmodum Geometria quae Algebrae innititur, Mathesim habet generalem quantitatum nonnisi finitarum. Putem autem non moli tantum, sed et multo magis pretio Operis plurimum accessurum, si vestra egregia reperta adjicerentur; vestra enim non minus haec methodus, quam mea est. Itaque et Tuam et Fratris Tui, Viri eximii, sententiam expecto. In candore certe meo faxo, ne quid desideretis.

Gaudeo meum Tetragonismum geneneralem per motum*) Tibi (quemadmodum intellexi) non mediocriter probari: minus est impeditus, quam prima specie videtur, et vix Algebraicae Geometriae constructionibus per regulas mobiles facilitate cedit. Usus sum curva rigida praedescripta, ut generalem methodum traderem, nam alioqui curvarum descriptrices rectae rigidae vicariam pro curva operam praestare possunt. In eodem omnia plano fieri posse, jam annotaveram et ipse in posteriore scheda Actis inserta: sed vel hinc agnosco rem a Te accurate consideratam, qui idem monuisti. Praeclarum erit, si aliis Tangentium Conversis aptae constructiones accommodentur, quod nemo Te melius posset. — Multa multis

*) G. G. L. Supplementum Geometriae dimensoriae seu generalissima omnium Tetragonismorum effectio per motum, similiterque multiplex constructio lineae ex data tangentium conditione. Act. Erudit. an. 1693.

modis fieri possunt, sed semper prae caeteris aptam rationem et velut in hoc destinatam, habet rerum natura. In Quadraturis ipsis duo adhuc potissimum desidero; unum pro Constructione, alterum pro Analysi. Nam etsi constructionem illam praedictam habeam, desiderarem tamen alias adhuc ad scientiae augmentum: et inter alia praestat reducere Quadraturas ad Rectificationes Curvarum, quam contra, ut vulgo fieri solet; eaque de re dudum cum successu cogitavi: nam simplicior utique est dimensio lineae, quam dimensio superficiei. Pro Analysi autem desidero reductionem Quadraturarum omnium ad certa quaedam genera, quae inter se invicem sint irreducibilia, aptasque in eam rem valorum expressiones velim.

Cum illustri Viro Dom. Marchione Hospitalio quae Tibi fuit liticula, compositam puto. Quanto pauciores sunt solidae scientiae cultores, eo magis eos inter se amicos esse convenit. Sunt tot alii, quos appello mercenarios in literis, qui nihil agerent, nisi vel necessitate, vel pravis cupiditatibus impellerentur. Hos inter se conflictari sinamus.

Vale et Dom. Fratrem Tuum, mihi aestimatissimum, a me officiose saluta.

Dabam Hanoverae 21. Martii 1694.

III.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si Patria mihi abiturienti manum injecit, hoc tanto indignius fero, quanto majori spe, quam de laribus vestris mihi jamjam invisendis conceperam alebar: Repeto et denuo repetam, nec aliter potero quam deplorare sinistram meam sortem, quae me ab Ampl. Tuae praesentia separatum tenet. Utinam consilium et medium superstes esset, quod me in viciniam vestram vocaret. Sane Patria neque retentionis, neque retractus jus in me haberet: nec ejus dulcedo, vel etiam ipsa Fratris consuetudo me teneret devinctum; sed Fata regunt omnia. Caeterum tot tantisque Tui erga me affectus testimoniis abundat nupera Ampl. Tuae epistola, ut tantum non pudibundus obmutescam. Quae mihi attribuis, Tibi debentur;

laudes in quas excurris non promerui; meditationum mearum leviuscularum vis particeps reddi, sed quasi vero Sol a Planetis lumen mutuetur et scaturigo aquam ex rivulis petat. Mihi insuper concedis potestatem Tibi crebrius scribendi, non igitur indignaberis, si praesentes molestiam creaverint.

Primum intellexi ex literis Menkenianis Ampl. Tuam ad prelum parare opusculum complectens Scientiam infiniti, et pridie ante acceptam epistolam Tuam Dno. Menkenio rescripsi, simulque unum et alterum Tibi significandum commisi. Nobis interim et toti Orbi Literario multum gratulamur de futuro isto opere, et jam in antecessum singulare quid nobis promittimus, non dubitantes quin ut caeterae Tui ingenii proles, ita et hoc sui aestimatores ubique nacturum sit, praesertim eos qui, quod subtile est, a communi norunt discernere. Non autem e re fore puto, Vir Celeb. exigua nostra inventa Tuis adjungere: dolerem si foetus hic qui dubio procul jam omni possibili perfectione gaudet, a nobis dedecoratus in lumen ederetur. Si tamen verum, quod ajunt, Opposita juxta se posita magis elucescunt, eo lubentius Amp. Tuam petiti compotem facere poterimus, quod evidentius Tua a nostris dignoscentur. Id saltem velimus, ut mentem Tuam apertius explices, qua ratione hoc factum a nobis velis: num scilicet ut notabiliora nostra inventa Tibi ocyus transmittamus; num vero, ut Msto. Tuo ad nostras prius delato manus, quaedam adjiciamus in modum adnotationum.

Gaudeo Te agnoscere Tuum Tetragonismum generalem per motum a me accurate fuisse consideratum: illum cum Fratri meo, qui de ejus obscuritate querebatur, forsan ob non adhibitam perlectionem satis attentam, explicuissem, idem mecum de eo sensit et hanc Tuam methodum non mediocriter probavit. Non spero methodum tangentium inversam generalem unquam detectum iri: mihi tamen sunt diversae regulae, per quas peculiaria exempla quamplurima resolvo: in aliis autem pro rerum natura et constitutione diversas tento vias et plerumque non infeliciter. Hoc enim unicum intendo, ut in aequationibus differentialibus indeterminatae x cum suis differentialibus dx separentur ab indeterminatis y et dy, quod palmarium est in hoc scrutinio, secus enim ad constructionem aequationis differentialis non pervenitur. Ad hoc autem praestandum multas habeo vias speciales. Ex. gr. si in aequatione differentiali nullae occurrunt quantitates constantes, quae dimensio-

num numerum adimplent, poterit illa, quantumvis perplexa, converti in aliam, ubi indeterminatae cum suis differentialibus unius nominis separantur ab indeterminatis alterius nominis, ponendo nempe $x = \frac{zy}{a}$, vel si mavis, $y = \frac{zx}{a}$. Si vero in aequatione differentiali sint etiam quantitates constantes, sed indeterminatae nonnisi ad unicam dimensionem ascendunt, res etiam facile mihi expedietur. Si aequatio differentialis eo reduci potest, quod plerumque fit, ut x sit = y multiplicato vel diviso per quantitatem aliquam, rationalem sive irrationalem, quomodocunque compositam ex differentialibus dx et dy, plus constante multiplicata vel divisa per quantitatem, si vis, aliter compositam ex differentialibus dx et dy, poterit illa aequatio semper construi; sed curva proveniens evadit interdum mechanica secundi generis, id est, quae requirit quadraturam mechanicae simplicis inquadrabilis: Contra vero interdum aequatio differentialis, licet secundi gradus, per mechanicam simplicem construitur, qualis illa $a\,ddx = dy^2$, cujus constructionem exhibui in schediasmate Fratris Actorum anni elapsi p. 254, quam etiam pridem, una cum Analysi, Dno. Marchioni Hospitalio communicaveram. Hac occasione oportune mentionem injiciam novae mihi repertae speciei curvarum percurrentium, quae quasi medium tenent inter geometricas Cartesii et inter mechanicas. Curvae geometricae vulgo dicuntur illae, quarum natura exprimitur per aequationem certi et determinati gradus: mechanicae, quarum aequatio constat ex differentialibus. Medias autem vel percurrentes appello, quarum aequatio est indeterminati gradus, id est, in qua literae indeterminatae et constantes ascendunt ad dimensionem indeterminatam, et proinde omnes possibiles dimensiones percurrunt. Hae aequationes a Tuis transcendentibus in eo differunt, quod numerus dimensionum in illis sit vagus et indeterminatus, in his vero determinatus sed incognitus. Cum autem hujusmodi curvae percurrentes peculiare requirant systema ad puncta in curvis, ad tangentes, ad quadraturas etc. definiendas, jam ab aliquo tempore mihi ideam formavi novi Calculi percurrentis, ubi modum trado sumendi differentialia aequationum percurrentium, et construendi omnes curvas percurrentes ope Logarithmicae vulgaris, quae, ut deprehendo, ipsa etiam est curva percurrens; ejus enim aequatio, positis abscissa x, applicata y et subtangente a, est haec $a^x = y$, adhibita nempe unitate, per quam dimensio x subintelligitur divisa, ita ut hic non lineam indeterminatam, sed numerum indeterminatum denotet. Levissimum hic exemplum adducam. Sit (fig. 19) curva quaedam FGH percurrens, cujus aequatio est haec $x^x = y$ (positis CI, x, et IH, y) quaeritur ejus constructio, subtangens, et quadratura. Constructa ad axem productum FCM Logarithmica vulgari ABN, cujus prima applicata CA sit = unitati assumtae, ducatur BIH parallela ipsi DC, et BD parallela ipsi CA, fiatque $CM = \frac{CI \times CD}{CA}$, et ductae applicatae MN sumatur aequalis IH, erit punctum H in curva quaesita. Fiat denique ut IB + subtang. Logarit. ad eandem subtangentem, ita AC ad IL, erit IL subtangens ad punctum H. Spatium curvilineum FGHIC exprimitur per infinitas series simul sumtas, excepto unico casu, cum I cadit in A, tunc enim spatium FCAG exprimitur per unicam seriem: est enim (posita CA = 1) $FCAG = 1 - \frac{1}{2 \times 2} + \frac{1}{3 \times 3 \times 3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5}$ etc. Tuam nunc expecto sententiam, Vir Ampl. num hujus Calculi percurrentis principia paulo fusius explicata mereantur publicari.

Recte, ut opinor, mones quod praestat reducere Quadraturas ad Rectificationes curvarum, quam contra; et hoc est quod etiam olim a me observatum fuit in constructione mea Catenariae, beneficio curvae parabolicae: mihi quoque plures sunt viae, quibus hoc in aliquibus casibus praestari potest: inter plures una prae aliis placet, per quam omnes illae Quadraturae curvarum, quarum applicatae in quantitatibus vel rationalibus vel saltem latus quadratum non excedentibus exprimuntur, ad Rectificationes aliarum reduci possunt. Quod reductionem quadraturarum ad certa genera spectat, de eadem re jam dudum quoque cogitavi, et quidem cum successu, quoad quadraturas circuli et hyperbolae, arbitror enim me omnes posse determinare quadraturas, quae ad praedictas reduci possunt; id quod jam Parisiis Dno. Hospitalio in meis, ipsius in gratiam compositis, lectionibus patefeci. Sic constructionem catenariae, quae prima fronte dependere videtur a quadratura curvae quatuor dimensionum, ad quadraturam hyperbolae reducere mihi facile fuit, quod tamen Nob. Hugenio satis arduum videbatur, ut conjicio ex iis quae dedit in Historia Operum Erudit. anno 1693, mense Febr.

A Fratre plurimum salutatus vale et fave etc.

Dabam Basileae d. 9. Maj. st. v. 1694.

IV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratissimae mihi fuere Tuae literae, vel ideo quod amissam Tui videndi spem utcunque solantur. Gaudeo de illo, quem observo, animorum ac methodorum consensu: video enim multa Tibi animadversa, in quae et ego incideram.

Superiore anno*) ad Dominum March. Hospitalium scribere memini, esse mihi rationem omnes aequationes differentiales primi gradus (seu carentes differentio-differentialibus) in quibus adest constans implens leges homogeneorum, reducendi ad quadraturas. Id nunc Tibi quoque innotuisse animadverto; quemadmodum et methodum meam quaerendi naturam et tangentes curvarum exponentialiter transcendentium; ubi scilicet in aequatione curvae ipsa indeterminata ingreditur exponentem, qua ego jam a multo tempore sum usus, et specimina etiam Hugenio miseram,**) cui insolens id calculandi genus videbatur. Ego sic procedo: Sit verbi gratia (1) $x^x = y$. Ergo (2) $x \log. x = \log. y$ seu (3) $x \int \overline{dx : x} = \int \overline{dy : y}$. Datur ergo log. y ex data x ejusque Logarithmo, adeoque datur et y. Porro differentiando ex aeq. 3 fit (4) $dx + dx \int \overline{dx : x} = dy : y$, seu $dy : dx = y, \overline{1 + \int \overline{dx : x}}$. Ergo habetur et ductus tangentium ex positis Logarithmis. De Quadratura Figurae res est altioris indaginis.

Ex transcendentibus aequationibus ego has ipsas semper judicavi simplicissimas. Nam tales aequationes finitae sunt, nec nisi ordinarias quantitates habent ingredientes; immiscet se tamen, profundiore quadam ratione, transcendentalitas seu infinitum. Aliquoties in Actis de illis mentionem injeci, sed Methodum calculo tractandi Operi meo reservaveram; tametsi res facilis sit animadvertenti connexionem cum Logarithmis.

Elegantissima videtur series illa tua $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4}$ etc. quae aream quandam dictae figurae exhibet. Quomodo inde oriatur, non video.

*) Siehe Band II. S. 218 ff.

**) Siehe Band II. S. 53. 56.

Si potes determinare omnes quadraturas, quae reducuntur ad quadraturam Circuli vel Hyperbolae, rem praestas egregiam, gratumque erit videre quid Dno. Marchioni Hospitalio communicaveris. Mihi ipsi nondum vacavit calculos instituere necessarios ad dijudicandum, annon curva Ellipseos vel Hyperbolae reduci possit ad Hyperbolae et Circuli quadraturas.

Curvas ex Tangentium proprietate invenio, peculiari calculi differentialis usu; ut si (fig. 20) data sit relatio inter Ap et pC normalem ad curvam; item si detur relatio inter Ap et Aπ, vel inter AΘ et AT. Eaque Methodus ad plura adhuc porrigi potest. Fundamentum est in iis, quae non ita pridem in Actis dedi April. 1692, nempe quod sic curva quaesita formatur linearum infinitarum positione datarum intersectione. Sic si pC detur ex Ap, formatur linea AC intersectione circulorum positione datorum, centris p, radiis pC descriptorum. Si detur relatio inter Ap et Aπ, dantur positione ipsae pπ, quarum concursu formabitur linea, cujus evolutione habebitur linea AC. Si detur relatio inter AT et AΘ, dabuntur positione ipsae TΘ, quarum concursu formabitur linea AC etc.

Illud adjiciam pro Quadratura figurae $x^x = y$ per seriem, non opus esse recurrere ad numerum infinitum Serierum infinitarum. Nam aequatio liberata a vinculis summatoriis, erit ($\odot$) $yy\,d\overline{x^2} + x\,d\overline{y^2} = yx\,ddy$, posito dx esse constantem; unde faciendo $y = b + cx + ex^2 + fx^3 + gx^4$ etc. habebitur etiam yy, et dy et $d\overline{y^2}$ et ddy, quibus valoribus substitutis in aequatione $\odot$, prodibit aequatio identica, seu cujus omnes termini erunt tollendi, et ita ad obtinendam destructionem invenientur ipsae b, c, e, f etc. quibus habitis, habetur et $\int \overline{y\,dx} = bx + \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{3}cx^3 + \frac{1}{4}fx^4$ etc. Ita quaevis hujusmodi facile ad commodam seriem revoco. Eamque methodum eo majoris faciendam puto, quod est generalissima praxique aptissima, et ad omnes differentialitatis gradus porrigitur, quemadmodum id explicavi in Actis.*) Pergratum quoque erit discere specialem tuam Methodum, qua construis curvam, cum datur $x = y$ (multiplicatae per quantitatem formatam ex dy, dx) $+$ a (multiplicatae per aliam formatam ex dy, dx).

*) G. G. L. Supplementum Geometricae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, ope Methodi novae generalissimae per series infinitas. Acta Erudit. 1693 April. p. 178.

Quae ab amicis Operi meo adjicienda suppeditabuntur, separari a meis aequissimum est, ut sua cuique merita in rem literariam constent. Non omnia unus possum agere, nec si possim, velim, satis per alia distractus.

Primae a me gratiae Bernoulliis debentur, vos enim primi effecistis, ut qualiacunque tentamina mea in usus publicos transferrentur. Et Tua opera Dominus Marchio Hospitalius nobis accessit. Hujus admonitu et Hugenius, quamvis ipse per se maximus Geometra, delectari nostris coepit. Nam etsi antea mecum commutaret literas, nondum tamen hoc Calculi genere capiebatur, quod vim ejus nondum propriis meditationibus comperisset. Quae cum ita sint, quod molior ego Opus, non magis meum quam vestrum erit; idque Titulus ipse ita profitebitur, uti vos probabitis. Meditata ergo Vestra speciminave parate, ut lubet, et prout videbitur indicate vel summittite. Prorsus utar conditione Vestra ex praescripto, aut certe nihil nisi Vobis consciis consentientibusque mutabo. Vale et clarissimum virum Fratrem Tuum a me saluta, qui sum etc.

Hanoverae 7. Jun. 1694.

P. S. Duos olim Helvetios novi in studiis quoque Mathematicis et Physicis egregios, Ottium et Scretam. Quid illi nunc agant scire pervelim, nam vivere et valere spero.

V.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Cum ante octiduum a rure (ubi per aliquot menses commoratus aquarum Fabariensium gratia mihi potandarum) in urbem reverterer, postremae Tuae gratissimae mihi demum tradebantur; quod causae est, ut ob ingruentes nundinas Lipsienses, ad quas Nostrates jamjam abituriunt, Te tui petiti omnino compotem reddere nequeam. Breviter tamen quantum per temporis augustiam licet, ad Tuas respondebo.

Gaudeo Tibi quoque esse consideratas curvas illas quas vocas exponentialiter transcendentes, ego autem percurrentes; quid peculiare in illis observarim, paucis exponam: Aequatio percurrens constat quantitatibus percurrentibus, quae sunt vel primi, secundi, tertii vel ulterioris generis; quantitas percurrens primi generis est, cum ejus exponens est numerus vel quantitas simpliciter indeterminata ut y^m; secundi vero generis, cum ejus exponens est quantitas percurrens primi generis ut y^{m^n}; et ita de aliis. Siquidem autem exponentes dimensionum sunt numeri, hic vero per literas indeterminatas quae lineas denotant exprimuntur, assumitur quaedam linea constans b pro unitate, per quam si lineae indeterminatae dividuntur proveniunt numeri, sic itaque $y^m = y^{\frac{m}{b}}$, pariter si aequationis percurrentis membra non ubique aequalem numerum dimensionum habeant, multiplicata intelliguntur per b ad sufficientem dimensionem elevatam ita ut numerus dimensionum compleatur, sic si proponatur aequatio $x^x = y$, intelligitur y multiplicata per b^{x-1}, et sic aequatio $x^x = b^{x-1} y$, utrobique aequales dimensiones habebit. His praeliminatis sit ABb (fig. 21) curva logarithmica in qua applicata $AC = b = 1$, subtangens a, et BD ordinata varians vel indeterminata $= x$, appello CD, lx id est logarithmum ipsius x: Si $BD = y$, m, n etc. erit pariter $CD = ly$, lm, ln etc.: Sit bd elementaliter distans, erit BD existente x, y, m, n etc. $bg = dx$, dy, dm, dn etc. $Dd = dlx$, dly, dlm, dln etc. id est = differentiali ipsius lx, ly, lm, ln etc. Quoniam autem ex natura logarithmicae $BD \times Dd = a \times bg$, erit $xdlx$, $ydly$, $mdlm$, $ndln$ etc. $= adx$, ady, adm, adn etc. ideoque dlx, dly, dlm, dln etc. $= \frac{adx}{x}$, $\frac{ady}{y}$, $\frac{adm}{m}$, $\frac{adn}{n}$ etc. Constat etiam quod logarithmus quantitatis ex multiplicatione progenitae sit = summae logarithmorum partium multiplicantium, ut $lxyz = lx + ly + lz$, et contra logarithmus quantitatis divisae = differentiae logarithmorum dividendae et dividentis, ut $l\frac{x}{y} = lx - ly$, $l\frac{xy}{z} = lx + ly - lz$, $l\frac{x}{zy} = lx - lz - ly$, item logarithmus quantitatis percurrentis = exponenti ducto in logarithmum radicis: sic $lx^m = mlx$, $ly^{m^n} = m^n ly$, $lx^m y^n = mlx + nly$, $l\frac{x^m}{y^n} = mlx - nly$.

Ostendendum nunc quo pacto quantitatum percurrentium differentialia sumenda sint: Sit quantitas percurrens primi generis m^n, quae ponatur $= s$; ergo $nlm = ls$, sumtisque per modum vulgarem differentialibus $ndlm + lmdn = dls$; per ea autem quae supra diximus $dlm = \frac{adm}{m}$, et $dls = \frac{ads}{s}$, ideoque $\frac{andm}{m} + lmdn = \frac{ads}{s} =$ (ob $m^n = s$) $\frac{ads}{m^n}$: invenitur itaque ds, id est diff. $m^n = nm^{n-1}dm + \frac{m^n lmdn}{a}$ Q. E. I. Esto nunc quantitas percurrens secundi generis m^{n^p}; cujus differentiale invenitur sic: Sit ut ante $m^{n^p} = s$, ergo $n^p lm = ls$, sumtis modo communi differentialibus $n^p dlm + lmdn^p = dls$, quoniam autem ut modo invenimus $dn^p = pn^{p-1}dn + \frac{n^p lndp}{a}$, et $dlm = \frac{adm}{m}$, $dls = \frac{ads}{s} = \frac{ads}{m^{n^p}}$, habebitur ds, hoc est $dm^{n^p} = n^p m^{n^p-1} dm + \frac{pn^{p-1} m^{n^p} lmdn}{a} + \frac{n^p m^{n^p} lnlmdp}{aa}$. Eodem modo inveniuntur differentialia quantitatum percurrentium tertii, quarti etc. generis. Non majori difficultate reperiuntur differentialia quantitatum quomodocunque compositarum ex percurrentibus ejusdem vel diversorum generum, nam $dm^n p^q = p^q dm^n + m^n dp^q$, et $\frac{dm^n}{p^q} = \frac{p^q dm^n - m^n dp^q}{p^{2q}}$ etc. in quibus si substituatur valor ipsorum dp^q, dm^n modo supra inventus, habebuntur differentialia quaesita.

Ut horum quae hucusque explicui, usus videatur, unum vel alterum problema resolvam circa curvas percurrentes. I. Quaeritur longitudo subtangentis curvae percurrentis $x^x = y$. Sol. Sumtis per methodum exhibitam utrobique differentialibus erit $x^x dx + \frac{x^x lxdx}{a} = dy$, vel (substituto y loco x^x) $ydx + \frac{ylxdx}{a} = dy =$ (ut dimensionis numerus compleatur) bdy, et ordinata aequatione $aydx + ylxdx = abdy$, ideoque $ay + ylx . ab :: dy . dx :: y$. subtang. quae proinde erit $= \frac{ab}{a + lx}$, et quia ob lx geometrice determinari non potest, ope logarithmicae facile sic construitur: Sit enim curva proposita (fig. 22) FGH, $CI = x$, $IH = y$, determinanda est tangens in puncto H. Fiat logarithmica AB, cujus subtangens

$= a$, et sumta in illa applicata $CA = b = 1$, producatur HI donec occurrat logarithmicae in B, erit $DB = x$, proinde CD vel $IB = lx$; si itaque fiat ut $IB +$ subtang. logarith. ad eandem subtang. ita AC ad IL, erit IL subtangens quaesita curvae. Coroll. Ex hac constructione patet subtangentem, quae respondet puncto G, esse ipsam AC. Curva autem ipsa FGH sic construitur: $x^x = y$ et proinde $x\,lx = ly = b\,ly$, erit $ly = \frac{x\,lx}{b} = \frac{CI \times CD}{CA}$; sumta ergo CM aequali $\frac{CI \times CD}{CA}$, erit $CM = ly$, et ideo $MN = y = IH$. Exinde sequitur $AG = AC$. Quadratura spatii CFHI peculiari artificio per seriem ita exhibetur: Quia $HI = x^x$, erit integr. $x^x dx =$ spatio quaesito; hoc autem integrale ita invenitur: $HI = MN$, $CA = b$, subtang. logarit. $= a$, CM (per constr.) $= \frac{CI \times CD}{CA} = \frac{x\,lx}{b}$, ex datis autem CA, CM et subtangente per modum aliunde cognitum invenitur applicata MN seu HI seu $x^x = b + \frac{x\,lx^1}{1.a} + \frac{xx\,lx^2}{1.2aab}$ $+ \frac{x^3\,lx^3}{1.2.3a^3bb} + \frac{x^4\,lx^4}{1.2.3.4.a^4b^3}$ etc. ideoque $x^x dx$ seu elem. sp.

$$CFHI = bdx + \frac{x\,lx^1 dx}{1.a} + \frac{xx\,lx^2 dx}{1.2aab} + \frac{x^3 lx^3 dx}{1.2.3a^3bb} + \frac{x^4 lx^4 dx}{1.2.3.4a^4b^3} \text{ etc.}$$

Hujus seriei terminorum singulorum integralia sumi poterunt, postquam ostenderim, quo pacto quilibet terminus in alios plures convertendus, quorum integralia haberi possunt, ut sequens laterculus ostendit qui supponit $d\,lx = \frac{adx}{x}$.

$$dx = dx$$

$$xlxdx = xlxdx + \tfrac{1}{2}xxdlx \,\big|\, - \tfrac{1}{2}axdx$$

$$xxlx^2dx = xxlx^2dx + \tfrac{2}{3}x^3lxdlx \,\Big|\, - \tfrac{2}{3}axxlxdx - \frac{2}{3.3}ax^3dlx \,\Big|\, + \frac{2}{3.3}aaxxdx$$

$$x^3lx^3dx = x^3lx^3dx + \tfrac{3}{4}x^4lx^2dlx \,\Big|\, - \tfrac{3}{4}ax^3lx^2dx - \frac{3.2}{4.4}ax^4lxdlx \,\Big|\, + \frac{3.2}{4.4}aax^3lxdx$$
$$+ \frac{3.2}{4.4.4}aax^4dlx \,\Big|\, - \frac{3.2}{4.4.4}a^3x^3dx$$

$$x^4lx^4dx = x^4lx^4dx + \frac{4}{5}x^5lx^3dlx \,\Big|\, - \tfrac{4}{5}ax^4lx^3dx - \frac{4.3}{5.5}ax^5lx^2dlx \,\Big|$$
$$+ \frac{4.3}{5.5}aax^4lx^2dx + \frac{4.3.2}{5.5.5}aax^5lxdlx \,\Big|\, - \frac{4.3.2}{5.5.5}a^3x^4lxdx$$
$$- \frac{4.3.2}{5.5.5.5}a^3x^5dlx \,\Big|\, + \frac{4.3.2}{5.5.5.5}a^4x^4dx$$

Sumtis itaque integralibus per partes duabus lineolis interclusas provenit

$$\text{int. } dx = x$$

$$\text{int. } xlxdx = \tfrac{1}{2}xxlx - \frac{1}{2.2}axx$$

$$\text{int. } xxlx^2dx = \tfrac{1}{3}x^3lx^2 - \frac{2}{3.3}ax^3lx + \frac{2}{3.3.3}aax^3$$

$$\text{int. } x^3lx^3dx = \tfrac{1}{4}x^4lx^3 - \frac{3}{4.4}ax^4lx^2 + \frac{3.2}{4.4.4}aax^4lx - \frac{3.2}{4.4.4.4}a^3x^4$$

$$\text{int. } x^4lx^4dx = \tfrac{1}{5}x^5lx^4 - \frac{4}{5.5}ax^5lx^3 + \frac{4.3}{5.5.5}aax^5lx^2 - \frac{4.3.2}{5.5.5.5}a^3x^5lx$$
$$+ \frac{4.3.2}{5.5.5.5.5}a^4x^5$$

Multiplicatis his integralibus per correspondentes terminos hujus seriei

b, $\frac{1}{1.a}$, $\frac{1}{1.2aab}$, $\frac{1}{1.2.3.a^3bb}$, $\frac{1}{1.2.3.4a^4b^3}$ etc. et positis seriebus quae sunt verticales horizontalibus proveniet int. $x^x dx$ seu spatium CFHI =

$$+ bx + \frac{xxlx}{1.2a} + \frac{x^3lx^2}{1.2.3aab} + \frac{x^4lx^3}{1.2.3.4a^3bb} + \frac{x^5lx^4}{1.2.3.4.5a^4b^3} \text{ etc.}$$
$$- \frac{xx}{2.2} - \frac{x^3lx}{1.3.3ab} - \frac{x^4lx^2}{1.2.4.4aabb} - \frac{x^5lx^3}{1.2.3.5.5a^3b^3} \text{ etc.}$$
$$+ \frac{x^3}{3.3.3b} + \frac{x^4lx}{1.4.4.4abb} + \frac{x^5lx^2}{1.2.5.5.5aab^3} \text{ etc.}$$
$$- \frac{x^4}{4.4.4.4bb} - \frac{x^5lx}{1.5.5.5.5ab^3} \text{ etc.}$$
$$+ \frac{x^5}{5.5.5.5.5b^3} \text{ etc.}$$

Hinc si $x = b = 1$, erit $lx = 0$, proinde quoque lx^2, lx^3, lx^4 etc. $= 0$, spatium autem CFHI degenerabit in CFGA, quod itaque evanescentibus singulis serierum terminis exceptis primis erit $= 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5}$ etc.

Modus hic quadraturas determinandi per series infinitas non solum succedit in curvis percurrentibus, sed nonnunquam aliis quoque adhiberi potest.

II. Quaeritur subtangens curvae $c^x = y$. Sol. $xlc = ly$, $lc\,dx = dly = \frac{ady}{y}$, $ylc\,dx = ady$, ergo $ylc \,.\, a :: dy \,.\, dx :: y \,.\, s$ ideoque $s = \frac{a}{lc} =$ constant; quod indicat ipsam curvam quaesitam esse Logarithmicam, et vice versa Logarithmicam esse curvam percurrentem.

III. Determinanda est subtangens curvae $x^x = c^y$. Sol. Sumatur utriusque differentiale et habebitur $x^x dx + \frac{x^x lx\,dx}{a} = \frac{c^y lc\,dy}{a}$, vel (ob $c^y = x^x$) $dx + \frac{lx\,dx}{a} = \frac{lc\,dy}{a}$, aut $adx + lx\,dx = lc\,dy$; ideoque $a + lx \,.\, lc :: dy \,.\, dx :: y \,.\, s$, ergo $s = \frac{ylc}{a + lx}$. Quadratura facile ita invenitur: quoniam $ylc = xlx$, erit $y = \frac{xlx}{lc}$, et $ydx = \frac{xlx\,dx}{lc} = \frac{xlx\,dx}{lc} + \frac{\frac{1}{2}xx\,dlx}{lc} \Big| - \frac{\frac{1}{2}ax\,dx}{lc}$, ideoque integr. $ydx = \frac{\frac{1}{2}xxlx}{lc} - \frac{\frac{1}{4}axx}{lc}$.

Methodus haec applicari etiam potest ad curvas percurrentes, quarum aequationes pluribus quam duobus terminis constant, qualis est haec $x^x + x^c = x^y + y$: sumtis enim separatim differentialibus cujusque termini per modum generalem exhibitum, prodibit aequatio differentialis, in qua si fiat ut summa terminorum cum dx ad summam terminorum cum dy multiplicatorum ita y ad s, habebitur valor subtangentis quaesitae: Diff. $x^x = x^x dx + \frac{x^x lx\,dx}{a}$, diff. $x^c = cx^{c-1}dx$, diff. $x^y = yx^{y-1}dx + \frac{x^y lx\,dy}{a}$, diff. $y = dy$, ergo in aequationem redactis habebitur $x^x dx + \frac{x^x lx\,dx}{a} + cx^{c-1}dx - yx^{y-1}dx = \frac{x^y lx\,dy}{a} + dy$, ideoque $s = \frac{yx^y lx + ay}{ax^x + x^x lx + acx^{c-1} - ayx^{y-1}}$ quae quantumvis composita ope logarithmicae construi potest, quia quaevis quantitas percurrens separatim sumta per illam construi potest.

Eadem haec methodus etiam locum habet in curvis percurrentibus altioris generis, omniaque quae dicta sunt de aequationibus

percurrentibus primi generis applicari possunt ad cujuscunque generis percurrentes.

Diutius quam par est, Vir Celeberrime, his immoror, quae forsitan jam me melius nosti; interim meas super hac materia meditationes tecum communicare volui, ut quousque cum Tuis conspirent videas; id unicum adhuc addere liceat, quod caetera quae circa hujusmodi curvas invenienda restant, ut earum applicatae maximae et minimae, puncta flexus, causticae et evolutae aliaque ope calculi percurrentis etiam facile expediantur.

Egregium est (ut ad alia pergam) quod annotasti, curvas interdum ex tangentium proprietate describi posse per intersectiones infinitarum curvarum; ratio modi quem tradis, cuivis attendenti manifesta fit; interim observo istiusmodi curvas plerumque esse algebraicas vel saltem ex algebraicarum evolutione generari, quorum proinde puncta etiam algebraice determinari possunt. Sic si (fig. 23) PC normalis ad curvam detur ex AP, i. e. si PC sit aequalis applicatae PR curvae datae AR, determinabitur punctum C, abscindendo subtensam PC aequalem PR ex circulo PCΘ descripto subtangente PΘ tanquam diametro; hinc et ipsa ducta ΘC erit tangens curvae AC. Si detur relatio inter (fig. 24) AT et AΘ, i. e. si AT sit = applicatae ΘR curvae AR datae, habebitur punctum C, sumendo ΘC quartam proportionalem ad AP, PΘ, et ΘT.

Circa quadraturas quae reduci possunt ad quadraturas circuli vel hyperbolae, hoc habeo: Omne spatium cujus elementum exprimitur per quantitatem differentialem, quae per aliam factam positionem literarum reducitur ad $dx \times x^p\sqrt{aa \mp xx}$ vel $\frac{dx \times x^p}{\sqrt{aa \mp xx}}$, erit aut quadrabile aut dependet a quadratura circuli aut hyperbolae, quod demonstrare possum; sed vice versa si aliquod spatium est quadrabile vel si dependet ab alterutra istarum quadraturarum, ejus elementum necessario quidem mutari posse debet in aliud, quod exprimatur per alterutram expressionem differentialem ope novae cujusdam suppositionis literarum; regulam autem generalem pro hac suppositione generaliter instituenda adhucdum desidero, nec unquam inventum iri spero; saltem non magis quam illam, per quam cognosci posset, num aequatio algebraica quantivis gradus et quantumvis composita deprimibilis esset nec ne. Si quis enim quantitatis alicujus irrationalis vel valde compositae sumeret differentiale (quod facile fit) illudque mihi integrandum proponeret, nescio sane an non diu ipsi inhaererem et tandem non nisi casu et palpando vel etiam nunquam eo pervenirem. Id saltem asserere ausim, rectificationem ellipsis et hyperbolae ad earundem quadraturas reduci non posse, harum quippe curvarum elementa ad neutram dictarum formularum redigi possunt, facile enim omnes possibiles et necessariae suppositiones instituuntur.

Quod concernit reductionem quadraturarum ad rectificationes curvarum, aliqualis modus prodibit in Actis, ubi curvam aequabilis accessus et recessus a puncto dato, ut et elasticam construo per rectificationem curvae algebraicae, quod frater meus non nisi per quadraturam spatii et rectificationem mechanicae construxit. Simulque generalem adnecto ideam constructionis cujusvis datae aequationis differentialis primi gradus nulla adhibita separatione indeterminatarum.

Mirifice placet methodus Tua in Actis jam explicata, per quam quamvis quadraturam ad seriem revocas, generalissima enim est et in praxi facilis, id tamen incommode habet, quod si in aequatione differentiali reperiatur y et dy vel x et dx duarum pluriumve dimensionum, series inde orta nullam manifestam legem progressionis observet, uti accidit in quadratura figurae $x^x = y$: meae autem series licet numero infinitae, si modo inceptae fuerint, quantumvis continuari possunt quia evidente lege progrediuntur: adde et hoc, quod per aggregationem terminorum homogeneorum in unicam seriem converti possent.

Commode hic mentionem injiciam seriei universalissimae non ita pridem mihi repertae, quae omnes quadraturas et rectificationes generaliter exprimit, quaeque methodo tangentium inversae aptissima est: Proposita enim quacunque differentiali integranda ndz (per n intelligo quantitatem quomodocunque formatam ex indeterminatis et constantibus) erit posita dz constante, ejus integrale aequale huic seriei $nz - \frac{1}{1.2} zz \frac{dn}{dz} + \frac{1}{1.2.3} z^3 \frac{ddn}{dz^2} - \frac{1}{1.2.3.4} z^4 \frac{dddn}{dz^3}$ etc. quae si applicetur in proposito quodam exemplo, destruentur dn, ddn, $dddn$ etc. per dz, dz^2, dz^3 etc. totaque series consistet terminis pure algebraicis. Universalis hujus seriei ope facile invenio sinum rectum ex dato arcu et radio, caeteraque problemata solvo, quae solvisti per Tuam methodum in Actis mens. April. 1693 explicatam. Modus quo ad hanc seriem perveni, apparebit in Actis, cujus usum fusius ibi explicatum videbis.

Haec quidem sunt, Vir Celeberrime, quae raptim conscribere potui, brevitas temporis plura inpraesentiarum non permisit: pleraque eaque nobiliora quae feci inventa mihi non sunt in scripto, sed in aliorum manibus versantur, in quorum gratiam ea scriptis mandaveram, quae si de novo concinnanda essent, non parvum laboris mihi facesserent, qui nunc alia prorsus ago, ea nimirum, ad quae Magistratus noster me destinavit. Breves omnino horulae meditationibus mathematicis impendendae supersunt mihi, quod mecum multoties reputans non possum non optare quandam occasionem etiamsi extraneam, ubi me totum studio mathematico applicare possem: Ea enim capacitate qua Tu polles pluribus totoque coelo differentibus incumbendi inque iis simul excellendi, ego non soleo, sed cui me addico, id me totum requirit.

Tuum opus de Scientia infiniti impatientes expectamus, faxis rogamus ut propediem lucem videat; Tu Tibi ipsimet satis suppeditatis materiae, et si quaedam adjicies de nostris, urbanitati Tuae, non necessitati tribuimus. Vale et Fave etc.

Basileae d. 2 Septbr. 1694.

P. S. Eodem hoc momento quo praesentes hasce obsignaturus sum, adfertur mihi Actorum mensis Julius, in quo Novam Tuam calculi differentialis applicationem et usum video. Quantum fugitiva adhuc perlustratione cernere licet est, quod eas curvas quarum in postremis Tuis ad me datis mentionem fecisti et quarum unius vel alterius constructionem supra dedi, artificiose describere earumque calculum ad certas regulas revocare doceas; ex quo sane non parum delectamenti capio, et omnia studiose perlegam. Memini me olim Genevae similes fere speculationes habuisse, ex occasione insignis problematis quod mihi Dr. Fatio de Duillier, frater Nicolai, proposuerat, de invenienda curva, quae singulas parabolas a globis ex singulis elevationibus mortarii ejectis descriptas tangit, quam deprehendi et ipsam esse parabolam: simulque modum inveni, per quem hujusmodi problemata per vulgarem Geometriam Cartesianam solvi possunt, quorum exemplum de determinandis Causticis in Actis Jan. 1692 exhibui. Aliud nunc jam pridem etiam mihi consideratum problema non minus utile quam elegans ob summam affinitatem, quam cum hisce habet, proponam: Datis infinitis curvis positione invenire curvam quae omnes ad angulos rectos secat; vel ut Ampl. Tuae verbis utar Lineis propositam normaliter secantibus, positione ordinatim datis, invenire propositam. Si positione ordinatim datae sint parabolae eundem axem et eundem verticem, sed parametros variabiles habentes, curva optata erit Ellipsis. Si positione ordinatim datae sint parabolae eaedem eundem axem, sed variabiles vertices habentes, curva quaesita erit logarithmica vulgaris. Sic in quovis exemplo peculiari rem facile expedire possum, Tibi autem difficile non erit generales pro hoc excogitare regulas. Caeterum hoc problema insignem usum praestat indeterminanda curvatura radiorum lucis per medium inaequaliter densum transeuntium juxta hypotheses Dn. Hugenii, siquidem radius nihil aliud est, quam linea undulationes ad angulos rectos secans (voyez Son traité de la lumiere pag. 44) ubi quidem radium AHEB undulationes BC normaliter secantem incurvari ostendit, sed qualem proprie curvaturam induat non invenit.

Posset praesens problema adhuc latius extendi, nempe sic Lineis propositam ad angulum datum secantibus, positione ordinatim datis, invenire propositam. Si lineae datae sunt rectae in puncto coëuntes, curva quaesita erit (ceu manifestum est) loxodromica plana. Sed Lator harum in puncto discessurus me abrumpere facit.

VI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Triduum est quod Tuae mihi ab itinere aliquo reverso sunt redditae, quod amicus qui Lipsia attulit, non recta huc venisset et me deinde non invenisset. Gratias ago, quod de Calculo mearum Exponentialium vel Tuarum percurrentium aliisque id genus rebus egregiis ad me scribis. Tametsi enim ex prioribus meis facile judicaveris, Principia illa Exponentialium et mihi familiaria esse a multo tempore, Calculum tamen circa altiores earum species non ita longe produxi; et saepe ita distrahor, ut propemodum his studiis valedicere cogerer, nisi mihi plus ab amicis in posterum quam a meis meditationibus pollicerer. Unde illud quod de infiniti scientia cogito Opusculum, si Vestris (ut Tuae innuere videntur) auxiliis destitueretur, vereor ut mature prodeat in lucem, aut

omnino ut prodeat. Quanquam etiam id parum vestra referre judicem, qui ope amplius mea adeo non indigebitis, ut mihi potius opus sit vestra.

Quadraturam figurae cujus ordinata sit x^x, vellem citra Seriem posse dari, in quo esset aliquod scientiae incrementum. Certe ad quaedam vicina gradum dudum promovere memini, sed non vacat inter chaos schedarum inordinatarum inquirere aut actum agere. Non improbo, quod ipso lx in serie uteris valorem ipsius $x^x = y$ exprimente. Et elegans est, quae inde ducitur specialis series $\frac{1}{1} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3}$ etc. Si tamem abstineas ab lx solaque x vel ejus potentiis utaris, prodibit opinor series generalis non minus simplex, aut certa lege procedens, quam est generalis tua. Nam ob aequationem $-dy + ydx + \overline{ylx.dx}:a = 0$ sic explicatam, ut faciamus $x = 1 + z$ et $a = 1$ et $y = 1 + cz + dz^2 + ez^3 + fz^4$ etc. cum lx sit $\frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4$ etc. fiet aequatio, in qua, ut identica sit, omnes terminos destruendo prodeunt aequationes destructitiae, satis ordinatae, nempe $c = 1$, $d = \frac{\frac{1}{1} + c}{2}$, $e = \frac{-\frac{1}{2} + \frac{1}{1}c + d}{3}$, $f = \frac{+\frac{1}{3} - \frac{1}{2}c + \frac{1}{1}d + e}{4}$, $g = \frac{-\frac{1}{4} + \frac{1}{3}c - \frac{1}{2}d + \frac{1}{1}e + f}{5}$ etc. quae eo ipso regularem atque universalem exhibent constructionem numerorum c, d, e, f etc. idemque est in caeteris seriebus quas mea methodo invenio; nec potentiae altiores ipsius y vel dy etc. regulares progressus impediunt, etsi magis compositos reddere soleant.

Sed si adhibere velimus ipsam quantitatem Logarithmicam, res simplicissima ratione hoc loco fiet, quaerendo non y sed ly. Sic quoties variant morbi, variabimus artes. Quaerendo igitur non ordinatam, sed ejus Logarithmum, sic procedo: quia posui $x = 1 + z$, ut fiat $lx = \frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3$ etc. et $xlx = lx + zlx$; et, ob aequationem $y = x^x$, est $ly = xlx$, seu $(\odot)\ -ly + lx + zlx = 0$, faciamus $ly = nz + pz^2 + qz^3 + rz^4$ etc. et explicatione aequationis $(\odot)$ prodibit.

$$0 = \left\{ \begin{array}{lllllll} -ly = & -nz & -pz^2 & -qz^3 & -rz^4 & \text{etc.} \\ +lx = & \frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & -\frac{1}{4} & \text{etc.} \\ +zlx & & +\frac{1}{1} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & \text{etc.} \end{array} \right\} = 0$$

Ergo $n = r$, $p = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$, $r = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, $s = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}$

et ita porro. Adeoque fiet $ly = z + \frac{1}{1.2}z^2 - \frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1}{3.4}z^4 - \frac{1}{4.5}z^5$ etc. quemadmodum et sine hoc calculo, primo obtutu haberi poterat; sed malui formam generalem inquirendi servare. Atque haec est ordinata artificialis (ut Angli solent loqui) magna simplicitate expressa. Unde ex Tabulis Logarithmorum habetur facile ordinata naturalis. Idque sufficit in praxi, cum de area figurae similibusque non quaeritur. Sed si quaeratur ipsa y per seriem, licebit uti serie a me adhibita pro inveniendo numero ex dato Logarithmo. Sit log. l, erit numerus $1 + \frac{1}{1}l + \frac{1}{1.2}l^2 + \frac{1}{1.2.3}l^3 + \frac{1}{1.2.3.4}l^4$ etc.

Hinc quia ly (seu l) hoc loco est xlx, fiet $y = 1 + \frac{1}{1}xlx + \frac{1}{1.2}x^2 l\bar{x}^2 + \frac{1}{1.2.3}x^3 l\bar{x}^3$ etc. Dum haec scribo, ad Tuam Seriem respiciens video plane hanc ipsissimam esse, nam ante, quod impeditior calculus videretur, fugiente tantum oculo lustraveram. Ubi illud praeclarissime a Te animadversum video, quod termini $\overline{xlx}^e$ possunt summari, quod per se egregium est, etsi ad inveniendum $\int y\,dx$ non serviret. Sane tales Quadraturas et mihi dudum fuisse cognitas dicere ausim, Te non invito, sed tamen et hoc ausim addere, facile obvias non esse.

Originem Quadraturarum hujusmodi adscribam, saltem ut videas, an Tuae conspiret. Nempe differentiando $x^h l\bar{x}^r$ prodit (1) $h.x^{h-1} l\bar{x}^r dx + r.x^{h-1} l\bar{x}^{r-1} dx$. Hinc si $r = 1$, fiet (2) $h\int\overline{x^{h-1}lx\,dx} = x^h lx - \frac{1}{h}x^h$. Ergo si $h - 1 = m$, patet utique summari posse omnes $x^m lx\,dx$, seu dari $\int\overline{x^m lx\,dx}$. Sed hinc rursus, ope aequationis (1) inveniri potest etiam $\int\overline{x^m l\bar{x}^2 dx}$. Nam si in aequatione (1) ponas $r = 2$, fiet (3) $d\overline{x^h l\bar{x}^2} = h.x^{h-1} l\bar{x}^2 dx + 2x^{h-1} lx\,dx$. Unde (4) $h\int\overline{x^{h-1} l\bar{x}^2 dx} = x^h l\bar{x}^2 - 2\int\overline{x^{h-1} lx\,dx}$. Sed datur $\int\overline{x^{h-1} lx\,dx}$ per aequationem (2). Ergo datur et $\int\overline{x^{h-1} l\bar{x}^2 dx}$ seu

datur (5) $\int\overline{x^m l\bar{x}^2 dx}$. Hinc vero jam iterum ope aequationis (1) inveniri potest etiam $\int\overline{x^m l\bar{x}^3 dx}$. Nam si in aequatione (1) ponas $r = 3$; fiet rursus (6) $d\overline{x^h l\bar{x}^3} = hx^{h-1} l\bar{x}^3 dx + 3x^{h-1} l\bar{x}^2 dx$. Unde (7) $h\int\overline{x^{h-1} l\bar{x}^3 dx} = x^h l\bar{x}^3 - 3\int\overline{x^{h-1} l\bar{x}^2 dx}$. Unde cum detur $\int\overline{x^{h-1} l\bar{x}^2 dx}$ per conclusionem (5), dabitur et $\int\overline{x^{h-1} l\bar{x}^3 dx}$ per (7), adeoque dabitur (8) $\int\overline{x^m l\bar{x}^3 dx}$. Et ita porro pergendo dabitur generaliter $\int\overline{x^m l\bar{x}^e dx}$, et quidem per seriem finitam, si e sit numerus integer. In nostro autem casu m et e sunt aequales et quidem integri.

Sic etiam cum varia olim circa variorum graduum differentias tentarim, in seriem alterius Tuae ex illis ductae similem incidere memini. Imo fuere hae cogitationes inter meas primas Parisienses, cum summas tantum Dettonvillaei vel Pascalii meditarer. Sit

series decrescens	a	b	c	d	etc.
ejus differentiae primae	e	f	g	h	etc.
secundae	l	m	n	o	etc.
tertiae	p	q	r	s	etc.
quartae	t	u	v	x	etc.
quintae	β	γ	δ	ϑ	etc.

$a = e + f + g + h$ etc. $= 1l + 2m + 3n + 4o$ etc. $= 1p + 3q + 6r + 10s$ etc. $= 1t + 4v + 10w + 20x$ etc., et ita porro. Rursus $e = e$, $f = 1e - 1l$, $g = 1e - 2l + 1p$, $h = 1e - 3l + 3p - 1t$; et ita porro. Et semper ordine prodeunt numeri, qui figurati dicuntur vel combinatorii. Hos valores ipsarum e, f, g etc. substituendo in aequatione $a = e + f + g + h$ etc.

fit $a = 1e$

$1e - 1l$

$1e - 2l + 1p$

$1e - 3l + 3p - 1t$

$1e - 4l + 6p - 4t + 1\beta$

etc. etc. etc. etc.

Atque haec quidem procedunt tam in ordinariis seriebus, quarum termini sunt quantitates ordinariae, quam in iis, ubi sunt infinite parvae.

Jam [illegible]m ad Calculum differentialem, in infinite parvis nobis usitatum, accommodando, pro a ponatur y, et pro e, l, p, t, β, etc. poni poterit respective dy, ddy, d^3y, d^4y, d^5y etc. Ipsa autem quantitas constans pro unitate sumpta sit dx infinite parva. Et $1+1+1+1$ etc. in infinitum, erit x, et ideo $1+2+3+4$ etc. erit $\int x$, et $1+3+6+10$ etc. est $\int\int x$, et $1+4+10+20$ etc. est $\int\int\int x$ etc. Ergo fit a seu $y = dy.x - ddy\int x + d^3y\int\int x - d^4y\int^3 x + d^5y\int^4 x$ etc. Sed $\int x = \frac{1}{1.2}xx$ et $\int\int x = \frac{1}{1.2.3}x^3$ et $\int^3 x = \frac{1}{1.2.3.4}x^4$ etc. Ergo (et quidem supplendo legem homogeneorum per dx unitatem) fit tandem $y = \frac{1}{1}x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1.2}xx\frac{ddy}{\overline{dx}^2} + \frac{1}{1.2.3}x^3\frac{d^3y}{\overline{dx}^3} - \frac{1}{1.2.3.4}x^4\frac{d^4y}{\overline{dx}^4}$ etc. sive ut ad rem (opinor) tegendam ponere maluisti, promovendo y, dy, ddy etc. in $\int y, y, dy$ etc. respective, quod hic eodem redit, fiet $\int\overline{y\,dx} = \frac{1}{1}xy - \frac{1}{2}xx\frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2.3}x^3\frac{ddy}{\overline{dx}^2}$ etc. Series autem Harmonica id habet peculiare, ut termini a, b, c, d etc. coincidant ipsis a, e, l, p etc. De Reductione Quadraturarum ad Quadraturam Circuli vel Hyperbolae adhuc amplius inquirendum censuerim. Quomodo ego Curvam Isochronam Paracentricam per rectificationem construxerim, in Actis videritis.

Doleo temporis non satis Tibi suppetere ad praeclaras meditationes mathematicas prosequendas pro voto tuo, quibus prae aliis plerisque Te parem esse constat. Itaque non sine multo scientiae detrimento alia subinde a Te agi debere video. Ego ipse pro affectu, quo praeclaros viros complector, obviam ire cogitaveram, sed consilium Tuum ornandae patriae non potui non lau-

dare. Interea junior Sturmius locum obtinuit, qui Tibi paratus erat, et lauta satis conditio est. Nicolaus Fatius Duillerius in Anglia, ut accepi, non incommodam stationem invenit. Ejus Fratrem fratrissare ex litteris tuis intelligo, Tuo opin[illegible] exemplo.

Pene exciderat Problema inveniendi curvam, quae ordinatim positione datis occurrat ad angulos rectos. Cujus Methodus meo judicio consistit in duabus aequationibus, una continente relationem inter x, y et constantem quamdam in curva positione data, sed pro diversis talibus ordinatim datis variabilem b; altera continente valorem ipsius $dy:dx$ in curva quaesita, expressam ex proprietate perpendicularium in curva positione data, cujus aequationis ope datur ipsius b valor per $dy:dx$, y, x pro re nata, quarum duarum aequationum ope tollendo b, habetur aequatio differentialis primi gradus pro relatione inter x et y. Sic si positione ordinatim datae sint Parabolae verticis communis, quarum semiparametri b, fiet aequatio $2bx = yy$. Jam ex conditione problematis, seu perpendicularitate ad parabolam fit $b = -ydx:dy$. Unde tollendo b fit $-2xydx = yydy$, seu summando $aa - xx = \frac{1}{2}yy$, quae utique est ad Ellipsin, et satisfaciunt Ellipses infinitae. Et has ordinatim positione datas manifestum est vicissim a Parabolarum unaquaque normaliter secari. Caeterum praeclare a Te notatum est, hoc Problema usum habere in Dioptricis, pro curvatura radii in medio continue variante. Nihil potuit dici aptius.

Postremo Fratrem Tuum Celeberrimum Virum rogo ut a me officiosissime salutes. Boisotius Abbas ex Comitatu Burgundiae, vir egregius, spem mihi fecit monumentorum quorumdam Historicorum: rogavi, ut Basileam ad Dominum Fratrem Tuum (a cujus benevolentia id humanitatis spero et mereri conabor) mitteret, quoniam locorum situs ita ferre videtur. Inde Lipsiam, occasione nundinarum deferri poterunt ad communem amicum Dnum. Menckenium. Vale.

Dabam Hanoverae $\frac{6}{16}$ Decembris 1694.

P. S. Duos noveram olim Eruditos Schafhusinos, Ottium et Scretam. Audio Scretam obiisse diem suum. Quid Ottio factum sit, scire gratum foret.

VII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quoties literas Tuas adspicio, toties amissa Tui videndi spes reacerbat dolorem; sistunt enim profundissimi ingenii amplam imaginem, sed tanto pejus quod ipsius Archetypi fruitione destituor. Invitus et invidus intelligo juniorem Sturmium obtinere locum qui mihi paratus erat. Si qua alia commoda occasio pace aliquando Europae reconcessa sese offerret, eam avide acciperem, si modo Tibi me propiorem redderet: hic enim quia alia omnino agere debeo, vereor quod et ipse vereris, ne tandem studiis mathematicis valedicere cogar.

Non video, qua ratione quadratura figurae cujus ordinata est x^x possit citra seriem dari. Si vero in serie abstinendum ab lx, per Tuam methodum inveniuntur quidem aequationes destructitiae, satis ordinatae, ipsa autem quae inde emergit series non ita evidenter procedit, ut sepositis aequationibus destructitiis, a quovis alio continuari posset. Recte mones, quod si adhibere velimus ipsam quantitatem logarithmicam h. e. ordinatam artificialem, res simplicissima ratione fieri possit: interim etiam observo, quod, sine calculo et formatione aequationum destructitiarum, primo intuitu habeatur: etenim $ly = x\,lx$ et $x = 1+z$, $lx = \frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3$ etc. ergo multiplicando x per lx, habetur $ly = \frac{1}{1}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4$ etc.
$$+\tfrac{1}{1} \quad -\tfrac{1}{2} \quad +\tfrac{1}{3} \text{ etc.}$$
$= z + \frac{1}{1.2}z^2 - \frac{1}{2.3}z^3 + \frac{1}{3.4}z^4$ etc. quae eadem est quae Tua.

Integrale termini $x^m\,l\overline{x}^e\,dx$ unica operatione invenio per additionem et subtractionem terminorum aequalium, nempe sic:

$$x^m\,l\overline{x}^e\,dx = x^m\,l\overline{x}^e\,dx + \frac{1}{m+1}\,x^{m+1}\,dl\overline{x}^e - \frac{e}{m+1}\,x^m\,l\overline{x}^{e-1}\,dx$$
$$- \frac{e}{\overline{m+1}^2}\,x^{m+1}\,dl\overline{x}^{e-1} + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^2}\,x^m\,l\overline{x}^{e-2}\,dx + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3}\,x^{m+1}\,dl\overline{x}^{e-2}$$
$$- \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^3}\,x^m\,l\overline{x}^{e-3}\,dx - \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4}\,x^{m+1}\,dl\overline{x}^{e-3} \text{ etc.}$$

Nam termini 2^{dus} et 3^{ius}, 4^{tus} et 5^{tus}, 6^{tus} et 7^{mus} etc. se destruunt ob $dl\overline{x} = \frac{dx}{x}$: verum 1^{mus} et 2^{dus}, 3^{ius} et 4^{tus}, 5^{tus} et 6^{tus} etc.,

simul sumti per constructionem summari possunt, fiet itaque

$$\overline{\int x^m\,lx^e\,dx} = \frac{1}{m+1}\,x^{m+1}\,l\overline{x}^e - \frac{e}{\overline{m+1}^2}\,x^{m+1}\,l\overline{x}^{e-1} + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3}\,x^{m+1}\,l\overline{x}^{e-2}$$
$$- \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4}\,x^{m+1}\,l\overline{x}^{e-3} = x^{m+1}.\ \frac{1}{m+1}\,l\overline{x}^e - \frac{e}{\overline{m+1}^2}\,l\overline{x}^{e-1}$$
$$+ \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3}\,l\overline{x}^{e-2} - \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4}\,l\overline{x}^{e-3}$$

etc. ubi statim patet, quod si e sit numerus integer et positivus, series futura sit finita et quidem tot terminorum, uno subducto, quot in e continentur unitates.

Integrale ejusdem quantitatis $x^m\,l\overline{x}^e\,dx$ aliter insuper inveniri potest, sed per seriem infinitam in quocunque casu; ponatur enim $\overline{m+1}\,lx = s$, erit $x^{m+1} = ns$ (per ns intelligo numerum ipsius s) et $l\overline{x}^e = \frac{s^e}{\overline{m+1}^e}$: est autem $ns = 1 + \frac{1}{1}s + \frac{1}{1.2}s^2 + \frac{1}{1.2.3}s^3 + \frac{1}{1.2.3.4}s^4$ etc. et differentiando hanc seriem habebitur $d\overline{ns}$ seu $\overline{m+1}\,x^m\,dx = ds \times 1 + \frac{1}{1}s + \frac{1}{1.2}s^2 + \frac{1}{1.2.3}s^3 +$ etc., ideoque multiplicando illud per $\frac{l\overline{x}^e}{m+1}$, et hoc per aequale $\frac{s^e}{\overline{m+1}^{e+1}}$ erit $x^m\,l\overline{x}^e\,dx = \frac{ds}{\overline{m+1}^{e+1}} \times s^e + \frac{1}{1}s^{e+1} + \frac{1}{1.2}s^{e+2} + \frac{1}{1.2.3}s_{e+3} + \frac{1}{1.2.3.4}s^{e+4}$ etc. ergo sumendo integralia terminorum singulorum proveniet $\int x^m\,l\overline{x}^e\,dx = \frac{1}{\overline{m+1}^{e+1}} \times \frac{s^{e+1}}{e+1} + \frac{s^{e+2}}{1.\overline{e+2}} + \frac{s^{e+3}}{1.2.\overline{e+3}} + \frac{s^{e+4}}{1.2.3.\overline{e+4}}$ etc. $=$ (substituto loco s ejus valore $\overline{m+1}\,lx$) $\frac{l\overline{x}^{e+1}}{e+1} + \frac{\overline{m+1}.\,l\overline{x}^{e+2}}{1.\overline{e+2}} + \frac{\overline{m+1}^2\,l\overline{x}^{e+3}}{1.2.\overline{e+3}} + \frac{\overline{m+1}^3\,l\overline{x}^{e+4}}{1.2.3.\overline{e+4}}$ etc. Haec itaque series erit etiam aequalis illi supra inventae $x^{m+1} \times \frac{1}{m+1}\,l\overline{x}^e - \frac{e}{\overline{m+2}^2}\,l\overline{x}^{e-1} + \frac{e.\overline{e-1}}{\overline{m+1}^3}\,l\overline{x}^{e-2} - \frac{e.\overline{e-1}.\overline{e-2}}{\overline{m+1}^4}\,l\overline{x}^{e-3}$ etc. quod hic obiter tanquam consectarium dictum velim. Caeterum speculationes istae adhuc ulterius extendi possunt, si nempe quantitates logarithmicae $l x$, $l \overline{x^2}$, $l \overline{x^3}$ etc. cum numeris x vel xx, x^3 etc. vel constantibus, quodmodocunque componantur et compositae sint comprehensae sub signis radicalibus; possunt enim plerumque summari vel per vel citra series, vel etiam per extensiones curvarum, ex. gr. $\overline{I\, dx \sqrt{xx + l\overline{x^2}}}$ est = curvae extensae cujus coordinatae sunt $\frac{1}{2} xx$ et $x\, lx - x$. Plura alia, eaque non contemnenda circa hanc materiam animadvertere possem, quae vero brevitatis erga omitto, Tuae relinquens industriae, cui nihil effugere potest: nondum satis tentavi extensionem ipsam curvae $x^x = y$, num commode per seriem vel etiam sine serie exhiberi posset; vellem ipse disquireres, meretur enim Tuam applicationem.

Quod concernit alteram meam seriem et quidem universalissimam pro omnibus quadraturis et integralibus $I\, \overline{y\, dx} = \frac{1}{1} xy - \frac{1}{2} x^2 \frac{dy}{dx} + \frac{1}{1.2.3} x^3 \frac{ddy}{dx^2}$ etc. jam forsan in Actis *) videbis, me ejus originem non ita longe accersere, cum in eum finem nihilo alio opus sit, quam continua additione et subtractione terminorum aequalium, ceu supra feci: praeclarissime tamen eandem deducis ex serie Tua decrescente ejusque differentiis primis, secundis, tertiis etc. quo non parum gaudeo; multas enim proprietates de quibus antea non constabat circa numeros figuratos exinde detexi. Observo etiam quod si series decrescens sit harmonica, non solum coincidunt termini a, b, c, d etc. ipsis a, e, l, p etc. sed etiam e, f, g, h etc. ipsis b, f, m, q etc. et l, m, n, o etc. ipsis c, g, n, r etc. et ita consequenter. Item, si progressio harmonica $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc. continuetur, ut numerus terminorum sit x, erit summa progressionis $= x - \frac{x.\overline{x-1}}{1.2.2} + \frac{x.\overline{x-1}.\overline{x-2}}{1.2.3.3} - \frac{x.\overline{x-1}.\overline{x-2}.\overline{x-3}}{1.2.3.4.4}$ etc. Hinc tamen nondum perspicio, quomodo summa progressionis harmonicae finitae expedite per compendium exhiberi possit, uti exhibentur summae progressionum figuratarum, vel etiam arithmeticae et geometricae: si quem noveris modum pro hoc, mecum haud gravatim communicabis.

*) Act. Erudit. 1694 p. 437.

Dum haec scribo, recipio literas a Dno. Marchione Hospitalio, in quibus mittit novam solutionem cujusdam problematis, quod mihi jam ante bimestre communicavit, una cum sua tum inventa solutione *), quam ut quantocyus Lipsiam mitterem rogavit, quod etiam feci sine mora, adnectens schediasmati Hospitaliano animadversionem meam, ubi exhibui aliam solutionem ejusdem problematis, sed generalem, quam per communem Geometriam et simplicissime inveni, cum tamen Hospitaliana, quae specialis est, multo differentialium calculo opus habeat. Quod cum Dn. Hospitalio indicassem, problemati se de novo applicuit, invenitque etiam generalem solutionem, quam nunc mittit **), quamque a mea parum differre reperio; optaret ut prior sua, ut et mea supprimerentur et nova sua substitueretur, sed cum hanc Lipsiae non satis mature appulsuram putem, rogo Dnum. Menckenium per literas quibus praesentes hae inclusae, ut hanc novam solutionem Hospitalii priori subnectere vel saltem subsequenti Actorum mensi inserere velit; qua ratione ipsi quodammodo satisfieri spero. Problema autem est tale: Sit (fig. 25) pons sublicius A B convertibilis circa Axem A, sitque trochleae C circumductus funis BCM, cujus una extremitas sustinet pontem, altera pondus vel sacoma M: quaeritur qualis debeat esse curva CMN, sic ut ubicunque existens pondus M in curva, semper aequilibrium faciat cum ponte AB. Hoc Problema ita generaliter propono: Data (fig. 26) in plano verticali curva quavis AB, quaeritur in eodem plano altera curva LM, ita ut duo pondera data B, M, communi funiculo BCM trochleam positione datam C ambienti alligata, et curvis ubicunque imposita semper sibi mutuo aequilibrentur, vel quod tantundem est, ut minima vi moveri possint. Prius comprehendi sub hoc posteriori evidens est, gravitas enim dimidia pontis sublicii concentrari intelligitur in extremitate B, et sic curva data AB in hoc casu est peripheria circuli. Ubi hoc animadversione dignissimum reperio, quod in speciali casu curva CMN sit cyclois ex rotatione circuli

*) Ill. Marchionis Hospitalii Solutio Problematis Phisico-Mathematici, ab Erudito quodam Geometra propositi. Acta Erudit. 1695 p. 56. 59.

**) Act. Erudit. Suppl. Tom. II. Sect. VI. p. 289.

super circulo aequali descripta. Caeterum ex occasione hujus aliud mihi venit in mentem problema, quod etiam ad calcem novae solutionis Hospitalii Geometris solvendum propono; vellem horulam otiosam ipsi impenderes, ut viderem an solutio Tua meae corresponderet: Quaero (fig. 27) in plano verticali curvam ABC, secundum quam pondus B libere descendendo semper aequali vi tendat filum annexum BE, quod ex evolutione curvae DE describit quaesitam ABC; vel, si mavis curvam ABC concipere rigidam, ut pondus B non annexum filo et propria gravitate descendens illam quovis momento premat aequali vi centrifuga. Reperio curvam ABC posse esse transcendentem et algebraicam trium dimensionum, et etiam rectam.

Nicolaum Fatium Duillerium in Anglia stationem invenisse lubenter audio; lubentius tamen ipsi aliquam in Patria sua optarem, ubi mihi vicinior foret: sed vel hinc intelligo, in Anglia alibique Mathemata pluris aestimari quam hic loci, quod ille apud exteros commorari malit, quam in patria, in qua omnibus bonis abundat. Fratrem ejus Johannem Christophorum, qui natu major est, familiariter novi Genevae: tanto autem judicii acumine non gaudet ac Nicolaus; hinc practicis magis delectatur quam theoreticis: nihilominus fundamenta penitioris Geometriae a me Genevae edoctus, nunc paulo diligentius nostra colit: hunc in finem, quas ipsi feceram Lectiones sedulo conscripsit, ut volumen satis amplum efformarent. Cum Parisiis agerem, inter alios Mathematicos intimum mihi reddidi Dnum. Varignonium, cui auctor extiti, ut ineffabilem voluptatem caperet ex Tuo differentialium calculo, testibus literis nuper ad me datis, in quibus ita erumpit: „Je ne sçaurais du tout perdre de vûe le charmant et merveilleux calcul differentiel de M. Leibnis, de sorte qu'il se passe peu de jours que je n'en fasse quelque chose: devinez si avec cet invincible penchant, j'ay pû lire sans transport les Actes de Leipsic de l'année passée qu'on m'a prété il y a quelques jours" etc. Alii insuper quam plures Galliae Mathematici imbiberunt principia hujus calculi, qui cum ante meam peregrinationem Gallicam neutiquam innotuisset, nunc (absit jactantia dictis) ibi passim inclarescit. Hinc vides, Vir Celeberrime, mihi semper summae curae fuisse, ut inventa Tua, tam utilia, propalarem novisque propagarem, non melius talentum meum collocasse credens, quam si aliis prodesse potuissem; non enim

nobis, sed aliis sumus nati, quod saepissime ex ore R. P. Malebranchii audivi. Hac autem in parte frater meus omnino est contrariae naturae, quippe qui omnia summo studio celare et logogriphis suis involvere conatur, ex quo nescio quam vanam gloriolam et sui admirationem captat, meque propterea (quod pudet dicere) clandestino odio fervide prosequitur, nec nisi torvis oculis aspicit favorem, quo ob ingenuitatem istam meam Illustris Hospitalius me amplectitur. Et si quem affectum Mathematici erga me testantur vel per literas vel publice, id invida mente patitur. Hac de causa famam meam quantulacunque sit arrodere non veretur, ut jam satis patet ex ultimo Actorum Junio, ubi quam contemtim de me meisque inventis, de suis vero quam superciliose loquatur ipse videas, et quidem in rebus levissimis, quales sunt theoremata sua nova aurea sibi dicta de inveniendis radiis circulorum osculantium, de quibus mihi non constare dicit, cum tamen facillime inveniantur et jam ante sesquiannum a Dn. Hospitalio inventa fuerint, de quibus in literis suis jam tum datis tanquam de re levi mentionem fecerat, etiamque illa in Memorabilibus Academiae Parisinae publicarat. Sed quo magis in me saevit frater, eo minori jure id facit, nam licet Explicatorem sex priorum Elementorum Euclideorum jam ante decennium habuerim fratrem vel potius Instigatorem, audacter tamen asseverare possum, illum forsan absque meo adminiculo communis Geometriae pomoeria nunquam praetergressum fuisse: primus enim cogitavi de inverso Tui calculi differentialium (quem etiam integralium nomine quamvis minus congrue insignivi, quia de Tuis summatricibus nihil adhucdum nobis constabat) super quo ipsi fideliter aperui cogitata mea, cujusque primum exhibui specimen per solutionem problematis catenarii, quod ille diu ante frustra tentaverat. Haec Tibi dico saltem ut videas, illum nullam me persequendi rationem habere; quod quidem publice ostendere deberem, sed fraternitatis leges melius observo et primogeniturae aliquid defero.

Quid D. de Tschirnhaus agat, scire percuperem; miror nunquam amplius in Actis apparere. Injurius es tam in Te ipsum quam in totum Orbem literatum, quod opus Tuum de Scientia infiniti, quod sub manibus habes, eidem diutius invideas; si quando publicatum fuerit, possem aliquas notulas in modum commentarii adnectere, si Tibi ita visum fuerit, ipsum enim opus jam per se satis completum erit. Scretam audio mortuum. Ottius qui de

Vitiis oculorum scripsit, fuit Senator Schafusinus, sed perjurii illicitarumque machinationum reus et convictus, jam ab aliquo tempore sua dignitate motus fuit; nunc autem extra urbem in suo praedio particulariter vivit. Vale et fave etc.

Basileae d. $\frac{2}{12}$ Febr. 1695.

VIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Utinam quam gratae sunt mihi Tuae, imo proficuae, possem ego vicissim referre par pari: sed tot laboribus distrahor, et valetudine sum tam dubia, ut cogar attentiores meditationes praesertim abstractas fugitare, quantum possum. In aestate 1693 febri tentatus fueram: superiori aestate, pro febri, cujus jam initia aderant, venere mirabiles quaedam phlogoses, ut nulla statuta hora, jam a multo tempore, plerisque diebus sentiam extraordinarium quemdam dolorem, blandum quidem et nulla ratione molestum, timendum tamen in futurum; praesertim cum illis, qui me aliquandiu non videre, visus sim macilentior factus, ipse jam sum satis natura macilentus. Porro calor ille inprimis acriore meditatione manifestissime excitatur; quae res facit, ut aegre ad problemata solvenda accedam, optemque saltem perficere atque in ordinem redigere posse dudum a me effecta; quid de tali effectu sentias, nosse velim . . . .

Pulcherrima mihi profecto Tua seriei obtinendae ratio visa est, quam in Actis*) explicuisti, et inexpectata.

Fateor et ego, nec mihi occurrere rationem x^x summandi, nisi per seriem; et summationem terminorum numero finitorum progressionis harmonicae (nam si infinitus sit numerus, et summa infinita est) non possum exhibere, nisi forte per approximationes.

Elegantissimum est Problema Hospitalianum cum augmento tuo. Utinam me quoque in talibus exercere liceret. Nunc quidvis potius cogitare cogor. Nolim tamen hoc interpreteris, quasi ego

---

*) Act. Erudit. 1694 p. 437.

jactem, me statim ista solvere posse, si attingerem. Nam eo sum ingenio, ut gaudeam me a vobis superari, cum scientiae profectu. Idem dico de Tuo Problemate circa vim centrifugam. Et gratissimum erit Vestro beneficio intelligere tales solutiones.

Ingratus sim, si non agnoscam quantum Tibi debeam, quod plurimum ad meditationes meas qualescunque, apud egregios Viros, Parisiis et alibi commendandas, suffragio et exemplo Tuo consuluisti; aut ut verius dicam, quod illis ex ingenio Tuo, usuque felicissimo pretium addidisti. Dnum. Varignonium quoque nostrorum gustum habere, hactenus ignorabam. Nosse velim quinam sint alii, et an inter alios sit Dnus. Ozanam, qui non admodum bene se erga me gessit, ut fortasse noveris.

Caeterum plane probo optimi Malebranchii nostri, quam memoras sententiam; omnino occasione similia inculco, ut quisque intelligat, se (quod jam et Cicero dixit) sibi natum non esse. Imo hoc meum dogma est, quanto quisque ardentius sinceriusque quaerat commune bonum, eo magis felicitati suae consulturum: quod sane invictis argumentis ostendi potest. Itaque laudo admodum, quod ad alios juvandos, augendasque generis humani opes propensum Te ostendis; praesertim cum prae aliis plurimis facere operae pretium possis.

Fratrem tuum egregiae sane doctrinae Virum semper conatus sum habere amicum et faventem; nec puto quicquam a me profectum, de quo queri possit. Nescio quomodo tamen ille visus est se subinde ostendere, si non aversum, certe nonnihil alienum. Neque vero illa designo, quae aliquando objecit in Actis; id enim summo jure potest: sed illud potius non potui non mirari quod ad literas quasdam meas, olim satis prolixe scriptas, quibus quaesitis ejus utcunque satisfaciebam, non respondit. Fateor ultra annum responsionem meam haesisse; sed hoc contigerat ob absentiam: nam cum ejus literae huc venissent, ego in Italiam iveram, easque demum reversus inveneram, et tunc quidem nullam feceram respondendo moram. Quae ad schediasma*) ejus Junio ultimo insertum responderim, videris nunc haud dubie, gratumque mihi erit intelligere judicium Tuum.

De radiis osculorum observabis, quomodo ex meo calculo differentiali reciproco (ubi x et y considerantur ut indifferentiabiles)

---

*) J. B. Curvatura Laminae Elasticae etc. Act. Erudit. 1694 p. 262.

talia multo generalius et tribus verbis deriventur. Dedi etiam constructionem Isochronae per rectificationem curvae ordinariae, sed Vestra constructio postea data est simplicior. Notavi etiam per quodvis datum punctum duci posse talem Isochronam, non, ut illi visum, unicam esse, eadem scilicet altitudine lapsus primi. Denique ea occasione addidi aliquid de controversia inter illum et me, circa numerum radicum in casu osculi; quin et explicui modum generalem per polygona, seu appropinquationem, construendi curvam ex data tangentium proprietate, seu aequatione differentiali, diversissimum ab eo quem postea vidi a Te datum*). Tuum notavi derivari ex ea consideratione, quod, data tangentium curvae quaesitae proprietate, ordinatim positione dantur infinitae numero curvae ipsi quaesitae occurrentes in punctis, ubi curvae, seu tangentis ejus inclinationes, sive anguli ad axem dantur. Hanc rem saepe consideravi, ut viderem an aliquid inde possem ducere, et videtur adhuc nonnihil subesse nondum satis exploratum.

Aemulationem Fraternam notatam in Actis putabam nihil prorsus affectui mutuo officere. Sed homines sumus, difficileque est aequo animo ferre, ut alii nos praecurrant vel saltem aequent, qui longissime antea post nos fuerunt. Quod ego aequius animatus sum, causa fortasse est diversitas materiarum, in quibus habeo campum exercendi me consolandique. Sunt enim in quibus sperem praestare aliqua, Calculo differentiali non inferiora, si vel sanitatem, vel auxilia amicorum mihi spondere possem . . . .

Quod scopum nos videndi proprius consecuti non sumus, forte ambo nonnihil in causa sumus, dum non satis omnia prolixe utrinque exposuimus. Quid! si alia sese aliquando offerat non inferior occasio. Nosse velim, an, quam in Tuis memoras, pacem Europae sis necessario expectaturus. Hoc anno vix audebo manum admovere meae Scientiae infiniti; nam alii a me labores exiguntur Superiore jussu. Ubi habebo delineatam, Tuis animadversionibus libentissim submittam. Vale et fave etc.

Hanoverae 28. Febr. 1695.

P. S. Tametsi plane constituissem temperare mihi nonnihil valetudinis causa ab analyticis meditationibus, non potui tamen im-

---

*) Modus generalis construendi omnes aequationes differentiales primi gradus, auctore Joh. Bernoulli. Act. Erudit. 1694 p. 435.

petrare a me, quin pulcherrimam illam rationem, qua seriem generalem indagasti, considerarem attentius. Quo facto vidi, altero termino destructo, simili methodo talem seriem haberi:

Posito $ddz = 0$. Nota $d^2 n$ est ddn, $d^3 n$ est $dddn$,

$$\int n = \int (dzn) \text{ et } \iint n = \int (dz(dzn)), \text{ posito } dz = 1$$

$$\int (z^e d^m n) + e\int (z^{e-1} d^{m-1} n\,dz) = z^e d^m n$$

$$- e\,dz \int (z^{e-1} d^{m-1} n) - ee\,dz \int (z^{e-2} d^{m-2} n\,dz)$$

$$= - e z^{e-1} d^{m-1} n\,dz$$

$$+ ee\,dz \int (z^{e-2} d^{m-2} n) + e^3 dz^2 \int (z^{e-3} d^{m-3} n\,dz)$$

$$= + e^2 z^{e-2} d^{m-2} n\,dz^2,$$

ergo

$$(1) \int (z^e d^m n) = z^e d^m n - e z^{e-1} d^{m-1} n\,dz + e^2 z^{e-2} d^{m-2} n\,dz^2$$

$$- e^3 z^{e-3} d^{m-3} n\,dz^3 \text{ etc.}$$

ubi notandum, posse quidem e esse numerum non integrum, sed m semper integrum esse; nisi quis ad instar metaphysicarum potentiarum (seu Logarithmorum) etiam metaphysicas nescio quas differentias (vel summas) fingere vellet.

Etsi autem sic exhauriri m videatur, posito esse iutegrum affirmativum, non tamen hoc fit, nam $d^0 n = \int^0 n = n$ et $d^{-1} n = \int^1 n$ et d^{-2} est $\iint$ seu $\int^2$.

Hinc, posito exempli gratia $m = 1$, et posito esse $dz = 1$, ex aequatione (1), fit (2) $\int z^e dn = z^e dn - e z^{e-1} n + e^2 z^{e-2} \int n - e^3 z^{e-3} \iint n + e^4 z^{e-4} \int^3 n$ etc. et (3) $\int z^e ddn = z^e ddn - e z^{e-1} dn + e^2 z^{e-2} n - e^3 z^{e-3} \int n + e^4 z^{e-4} \int^2 n$ etc.: ex quibus etiam intelligitur, quam apte ponatur summa differentiis reciproca, adeoque summa summarum reciproca differentiis differentiarum. Idem ex seriebus patet in infinitum decrescentibus

Termini a, b, c, d, e etc. summae
Differentiae l, m, n, p, q etc. Termini

nempe l diff. inter a et b; m diff. inter b et c, et ita porro. Sed a summa $l+m+n$ etc. et b summ. $m+n+p$ etc. et ita porro.

Unde Tibi deliberandum relinquo, annon, pro Integralibus vestris, praestet in posterum uniformitatis et harmoniae gratia non inter nos tantum, sed in ipsa doctrina adhiberi Summatorias expressiones, ita ut, exempli gratia, $\int y\,dx$ significet summam omnium y in dx respondentes ductorum, seu summam omnium hujusmodi rectangulorum: praesertim cum tali ratione summationes geometricae seu quadraturae optime cum arithmeticis seu serierum summis conferantur. Nolim tamen vobis praescribere quicquam; sed tantum ejus, quod maxime rationi consentaneum videbitur, putem rationem maxime habendam. Ego certe in totam hanc methodum me fateor, ex hac consideratione reciprocationis inter summas differentiasque, incidisse, et a Seriebus numerorum ad linearum seu ordinatarum considerationes processisse.

Unum addam, quod etiam hanc reciprocationem confirmet. Si ponamus in aequatione (1) m esse numerum negativum seu $m = -r$, fore $d = \int^{r}$, unde ex aequatione (1) fiet (posita $dz = 1$)

$$(4)\ \int\left(z^{e}\int^{r} n\right) = z^{e}\int^{r} n - e\,.\,z^{e-1}\int^{r+1} n + e\,.\,e\,.\,z^{e-2}\int^{r+2} n - e^{3}\,.\,z^{e-3}\int^{r-3} n \text{ etc.}$$

Semper tamen Series tales infinitas ita decrescere intelligendum est, ut termini continuando fiant quibusvis datis minores.

Venere etiam nonnulla adhuc in mentem, quae Te rogarem. In celsissimi Principis Abbatis St. Galli Bibliotheca extare Chronicon Alberici Monachi Trium fontium, in literas relatum est. Ita enim Vossius narrat in libro de Historicis latinis. Habemus idem in his regionibus ab anno 960 inclusive, usque ad finem seu annum 1241; sed desunt praecedentia ab initio mundi usque ad annum 960; minus quidem necessaria, quia antiqua melius in aliis habentur, sed quae tamen suppleri desideramus. Similiter habemus Historiam Johannis Vitodurani, quae itidem in Monasterio S. Galli extare dicitur. In nostro codice habentur quidem omnia ab initio, sed desunt postrema ab anno 1277 ad annum 1348, in quo finire scriptor dicitur. Obstringeres me Tibi magis magisque, nec mediocriter, si e vicinia per amicum aliquem apud Celsissimum et Reverentissimum Principem, vel saltem Monasterii illius principalis Bibliothecarium, descriptionem nostris sumptibus impetrares.

Cui si simile beneficium addi potest, per aliquem amicum cui occasio esset, sollicitandi pro me Dnum. Abbatem Boisot, qui abbatiae S. Vincentii prope Vesontionem praeest, ut mitteret, quorum spem fecit; cumulus accederet his desideratis meis. Iterum vale.

IX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Tarde quidem advenerunt postremae Tuae, quod forsan moram fecerint Lipsiae; mature tamen significatrices fuere vacillantis Tuae valetudinis, de qua non sum parum anxius. Optimus Deus avertat mali incrementum faxitque, ut hae praesentes pristinae exoptataeque sanitati Te restitutum offendant. Non est insolens, quod qui febre laborarunt, si non radicitus curetur, singulis annis novos et inordinatos paroxysmos sentiant: eandem forte ob rationem, ob quam vina quandoque, praesertim tempore vindemiarum, de novo ebullire et fermentari deprehenduntur. Sic nullus dubito, reliquias febriles in corpore tuo adhucdum hospitari, quae cum manifestum paroxysmum producere non valeant, excitant saltem phlogoses illas mirabiles. Illis itaque tempestive remediis idoneis occurrendum, ne, quod multoties accidit, quartanam vel etiam hecticam post se trahant. Interim a vigiliis et occupationibus nocturnis omnino abstinendum, et recte facis quod attentiores meditationes fugitas; nihil enim est, quod humores pravos, tartareos et viscidos, alimentum nempe febrium intermittentium magis foveat et cumulet, cruditates pariat et coctionem impediat: dissipant enim laudabiles, tenuiores et spirituosas humorum partes, crassiora vero sedimenta relinquunt. Hic autem medicum agere nolim; habetis enim, haud dubie, expertos practicos, quos consulere poteris. Memini, cum Parisiis agerem, P. Malebranchium, qui etiam natura est valde macilentus sed procerus, simili fere affectu aliquandiu laborasse; is sibi ipsi est medicus et mirabilem medendi methodum habet: quemadmodum enim unicam causam primariam omnium morborum, depravationem nempe massae sanguineae, statuit, sic unicum remedium, idque simplicissimum agnoscit. Quotiescunque aegrotat, singulis mane jejunus ingurgitat magnam quantitatem aquae fontanae purissimae, incipiendo primis vicibus a minori, et postmodum augendo numerum haustuum ad-instar acidularum, ad duas vel tres usque mensuras Parisienses: aqua autem non debet esse calida, ne nauseam moveat, nisi forsan ventriculum data opera per vomitum purgare velit, nec etiam debet esse frigida, ne fibrarum stomachalium et intestinalium tono noceat; sed eam nonnihil tepidam assumit. Principium, quo nititur, non adeo absurdum est; cum enim aqua omni sapore careat, debitamque habeat consistentiam, nec nimis crassam nec nimis fluidam, ideoneam esse dicit ad omnia sanguinis vitia corrigenda, dum ejus particulas acriores infringit, nimis crassas et viscidas diluit; nimis tenues et volatiles coercet, tandemque omnem materiam morbificam abstergit, et per urinam educit. Et revera per iteratam istam potationem aquae omnino se liberaverat a molestissimo affectu, a quo detentus fuerat, mihique affirmavit se nullo alio remedio per totam vitam usum fuisse. Postea ab Ill. Hospitalio intellexi, conjugem suam eodem hoc remedio ab angina et inflammatione faucium curatam fuisse. Quantum ad me, nemini id consulerem, nisi prius complexionem suam probe exploratam haberet, et securus esset vires suas tot aquis perferendis pares esse, alioquin natura succumbere et quasi suffocari posset, praesertim si non eadem quantitate statim per urinam redderentur.

Cum Tua mihi sit carior sanitas quam mea, ei hac vice rebus mathematicis non ero molestus: id saltem monebo, quod in Tuis ultimis annotavi. Egregia sunt quae ex ratione mea seriem generalem indagandi deduxisti; mihi sufficit, si inventa mea, utut tenuia, magnis viris occasionem dederint ad majora. Interim in calculo Tuo lapsum reperio, quem haud dubie praecipitanter commiseris, quique facit ut series pro $\int\overline{z^e d^m n}$ sit longe alia et notabilior,

quam ipse putaveris. Ut discrimen videas, calculum Tuum hic repeto. Posito $ddz = 0$

$$\int\overline{z^e d^m n} + e\int\overline{z^{e-1} d^{m-1} n\,dz} = z^e d^m n$$
$$- e\,dz\int\overline{z^{e-1} d^{m-1} n} - ee\,dz\int\overline{z^{e-2} d^{m-2} n\,dz}$$
$$= - e\,.\,z^{e-1} d^{m-1} n\,dz$$
$$+ ee\,dz^2\int\overline{z^{e-2} d^{m-2} n} + e^3 dz^2\int\overline{z^{e-3} d^{m-3} n\,dz}$$
$$= + ee\,.\,z^{e-2} d^{m-2} n\,dz^2$$

ergo

$$\int\overline{z^e d^m n} = z^e d^m n - e\,.\,z^{e-1} d^{m-1} n\,.\,dz + ee\,.\,z^{e-2} d^{m-2} n\,.\,dz^2$$
$$- e^3\,.\,z^{e-3} d^{m-3} n\,.\,dz^3 \text{ etc.}$$

Haec, meo judicio, ita corrigi debent. Posito $ddz = 0$, erit

$$\int\overline{z^e d^m n} + e\,.\int\overline{z^{e-1} d^{m-1} n\,.\,dz} = z^e d^{m-1} n$$
$$- e\,dz\int\overline{z^{e-1} d^{m-1} n} - e\,.\,\overline{e-1}\,.\,dz\,.\int\overline{z^{e-2} d^{m-2} n\,dz}$$
$$= - e\,.\,z^{e-1} d^{m-1} n\,.\,dz$$
$$+ e\,.\,\overline{e-1}\,.\,\overline{dz}^2\int\overline{z^{e-2} d^{m-2} n} + e\,\overline{e-1}\,.\,\overline{e-2}\,\overline{dz}^2\int\overline{z^{e-3} d^{m-3} n\,.\,dz}$$
$$= + e\,.\,\overline{e-1}\,.\,z^{e-2} d^{m-2} n\,\overline{dz}^2,$$

ergo vera Series

$$\int\overline{z^e d^m n} = z^e\,d^{m-1} n - e z^{e-1} d^{m-2} n\,dz + e\,.\,\overline{e-1}\,.\,z^{e-2} d^{m-3}\,\overline{dz}^2$$
$$- e\,.\,\overline{e-1}\,.\,\overline{e-2}\,.\,z^{e-3} d^{m-4} n\,\overline{dz}^3 \text{ etc.}$$

Unde liquet, si e sit numerus integer et affirmativus, quantitatem $z^e d^m n$ (quod memorabile prosus est) esse summabilem: eo enim in casu e exhauritur, proindeque series abrumpitur, et fit finita; id quod per Tuam non fieret: oportet autem ut m sit major quam e: secus enim unus vel plures seriei termini involverent summas ipsarum n, quia tunc d^{-1}, d^{-2}, d^{-3} etc. degenerant in $\int, \int\int, \int^3$ etc. ceu Tu ipse annotasti. Hinc posito, ex. gr. $e = 1$, $m = 2$, et $dz = 1$, erit $\int\overline{z\,ddn} = z\,dn - n$, et posito $e = 1$, $m = 3$, erit $\int\overline{z\,dddn} = z\,ddn - dn$, et posito $e = 2$, $m = 3$, erit $\int\overline{zz\,dddn} = zz\,ddn - 2z\,|\,dn + 2n$, quod etiam olim Parisiis, sed alia via inveneram, et Dno. Hospitalio tanquam singulare quid communicaveram. Hinc etiam insignes proprietates circa quadraturas spatiorum eliciuntur. Data ex. gr. (fig. 28) curva quacunque AB, sive Algebraica sive trañscendente sive etiam libera manu ducta, si ad illius axem AC construatur alia curva AD, cujus ordinatae DC sint in ratione composita ex abscissis A C ad potestatem quamcunque elevatis, et ex differentiis cujuscunque gradus (ad minimum unitate excedentis numerum potestatis) applicatarum B C: dico spatium curvilineum A D C semper esse quadrabile. Caeterum, quod nomenclationem differentialium summae attinet, lubentissime pro integralibus nostris Tuas in posterum adhibeo summatorias expressiones; quod diu ante fecissem, si nomen integralium non adeo invaluisset apud quosdam Geometras, qui me hujus nominis authorem agnoscunt, ut satis obscurus visus fuissem, unam eandemque rem, nunc hoc, nunc alio nomine designans. Fateor enim nomenclationem istam (quae, considerando differentialem tanquam partem infinitesimam totius vel integri, mihi non ulterius cogitanti, venit in mentem) rei ipsi non apte convenire.

Non memini me unquam vidisse Dn. Ozannam, nisi forsan in conferentiis apud P. Malebranchium hebdomadatim haberi solitis: eo enim tempore quo Parisiis agebam, versabatur totus in practicis, quibus non admodum delectabar. Quid Tibi rei cum illo fuerit, plane ignoro et nosse percuperem. Hoc scio, quod in compendio suo Geometriae practicae methodum tradit quadrandi circulum per seriem, quae methodus, ni fallor, Tua est; ejus vero inventionem sibi arrogavit. Alii, quos noveram, Mathematici, qui nostris delectabantur, non sunt celebres per literas, adeoque nescio an Tibi sint noti: inter alios fuerat P. Bysance, ordinis qui vocatur Oratorii, cujus etiam est Malebranchius: is in juventute a Mahometano Christianus factus est, hunceque ordinem adoptavit. Cum apud Dn. Marchionem Hospitalium in Arce sua prope Blesium sita commorarer, visum nos venerat. P. Reyneau ejusdem ordinis, Professor Mathematum Angerensis et Presteti successor, qui mirum quantum delectamenti capiebat ex paucis, quae ipsi ostenderam de differentialibus: hoc calculandi genus ipsi omnino insolitum et divini quid in se continens videbatur. Dn. Abbas Catelanus talia scire etiam valde gestiit, quem autem frequentare non audebam, quia tum temporis in dissidio fuerat cum Dn. Hospitalio, ob tractatum quemdam, quem ille composuerat, hic autem refutarat ob plurimos quibus scatebat paralogismos et errores, quorum amplius non memini. Nunc, ut audio, reconciliati sunt.

Inter scribendum afferuntur mihi literae omnino ignotae; quibus resignatis, video nomen Dn. Chirac, Professoris Regii Anatomiae Monspeliensis, nunquam mihi antehac noti; is Dissertationem meam

de **Motu musculorum** legisse quidem, sed ob inusitatum calculandi modum maximam et praecipuam partem non intellexisse queritur, meque propterea humanissimis verbis et multis in Calculum differentialem elogiis rogat, ut ex quibus Auctoribus principia hujus calculi haurire possit, viamque qua ego ad illius cognitionem pervenerim significem. En propria verba: „Il faut s'il est possible que j'entre dans cette Analyse, mais comme je suis en pays, où malaisément on trouve des Algebristes, voudriez-vous bien ajouter à la grace que je vous ay demandée celle de m'apprendre les routes que vous avez tenues pour arriver à la connaissance de cette excellente methode. Que faire pour abreger le tems? Quels autheurs seront les plus propres? etc.“ Quid illi hac super re consuleres, nosse vellem. Nulli, ut credo, libri reperiuntur, qui de nostro supputandi genere ex professo agant. Integram autem methodum ex Actis ediscere velle difficile erit, dum pleraque absque demonstrationibus ibi proponantur.

Literas Tuas Fratri meo legendas exhibui, ut culpam suam ipse videret; est sane non leve morositatis signum, quod Tibi non respondit: aegrotavit quidem aliquandiu, quo se quadantenus excusabit. Certus nunc sum ipsum propediem ad Te literas daturum esse, sed non adeo honorifice, ut metuo, mei mentionem faciet; omnia autem aequitati Tuae relinquo, eique vero condono. Vestra disceptatio de natura osculi, me judice, mera est logomachia, praesertim cum in indagatione longitudinis radii circuli osculantis uterque conveniatis. Quid itaque de verbis disputandum, quando constat de re? Verum est ex Tuo calculo differentiali reciproco hunc radium paucis verbis derivari, non minus tamen expedite invenitur differentiando ipsas differentiales, hoc enim modo unica proportione eo pervenitur.

Optime notasti, et ipso Hugenio teste, per quodvis punctum datum infinitas duci posse isochronas, eadem scilicet altitudine lapsus primi, quod etiam affirmavi nupero Actorum Februario; ubi haud dubie jam videris meam solutionem problematis Hospitalizni et fraternam; vellem examinares utra sit succinctior et naturalior, et etiam generalior. Judicium quoque Tuum optarem de Craigii tractatu novo, annon legitime objecerim ea quae ibidem in Actis annotavi. Non laudo, quod ita graviter invehatur in Dn. Tschirnhaus; minus autem, quod hic illi ansam dedit; injuriosa enim litigatio viros bonae educationis minime decet. Utique in modo construendi generaliter aequationes differentiales per appropinquationem seu polygona, adhuc nonnihil desidero, quod nondum satis est exploratum, et hoc est, quod publicationem ejus adhuc retardavit: diu enim ante in hanc speculationem incideram: interim methodus quam inde deduxi determinandi curvam transeuntem per puncta flexuum omnium curvarum eidem aequationi differentiali satisfacientium, non adeo invenusta est, quam curvam ostendi perpetuo esse algebraicam.

Quod mihi in commissis dedisti, ad amussim executus sum. Ad Vesontionem scribi curavi, ut per occasionem Dn. Abbas Boisot promissorum Tuo nomine admoneretur. Et per amicum, cui cum Bibliothecario Monasterii S. Gallensis, nomine P. Burckardo Herr commercium literarum intercedit, eundem humaniter rogavi, ut eorum quae Tibi desunt descriptionem concedat. Non dubito, quin eam facile impetraturus sis: est enim, ut mihi depingitur, vir officiosissimus et comitatis plenus. Interim statim ac quid rescivero, Tibi notum faciam.

Dn. Marchio Hospitalius nuper de Professione Mathematica, vacante in Hollandia scripsit, quam mihi se procuraturum sperat. Ipsi respondi, ut conditiones aliasque circumstantias hujus Professionis, et in quo loco sit, mihi quantocyus rescriberet; etenim mihi deliberandum est, an conditio sufficiens sit, ut cum uxore illuc abeam. Vale et fave etc.

Basileae d. $\frac{20}{30}$ Aprilis 1695.

X.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Multum Tibi debeo, quod in mei gratiam Vesontionem et ad Sangallensis Monasterii Bibliothecarium P. Herr scribi curasti. Quanquam de Vesontione vereor ne frustra mihi aliquid promiserim, quoniam Dn. Abbatem Boisotium obiisse ex Gallia nuper intellexi.

Gratias etiam ago, quod valetudinis meae curam Tibi esse testaris, perscriptis ad me monitis minime vulgaribus neque spernendis, de quibus cogitabo diligentius. Omnino enim tempus esse video, ut majus aliquod malum praeveniam.

Recte correxisti calculum meum. Nam dum festinabundus in chartam conjicio, quod literas scribenti calculus suggerit, errorem admisi seriemque male expressi. Multa adhuc in istis summarum et differentiarum progressionibus latent, quae paulatim prodibunt. Ita notabilis est consensus inter numeros potestatum a binomio, et differentiarum rectanguli; et puto nescio quid arcani subesse. Exempli gratia

$\boxed{1}\,\overline{x+y} = 1x + 1y$, vel $1x^1y^0 + 1x^0y^1$, $\quad d^1,xy = 1ydx + 1xdy$, vel $1d^1xd^0y + 1d^0xd^1y$

$\boxed{2}\,\overline{x+y} = 1x^2 + 2xy + 1y^2$ $\quad d^2,xy = 1yddx + 2dydx + 1xddy$

$\boxed{3}\,\overline{x+y} = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1x^3$ $\quad d^3,xy = 1yd^3x + 3dyd^2x + 3d^2ydx + 1xd^3y$

$\boxed{4}\,\overline{x+y} = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$ $\quad d^4,xy = 1yd^4x + 4dyd^3x + 6d^2yd^2x + 4d^3ydx + 1xd^4y$

et ita porro, ubi perfectissimus est consensus. Nempe ubi ab una parte ponitur $x^m y^n$, ab altera ponitur $d^m x d^n y$. Ita respondent sibi x^2 et $yddx$; nam x^2 est x^2y^0 et $yddx$ est d^0yd^2x. Nam $d^0y = y$. Atque ita realis quidam consensus inter potentiarum indices seu logarithmos et nostros differentialium quasi-logarithmos reperitur, qui etiam ad polynomia et multirectangula seu rectangula solida et supersolida extenditur, ut si conferamus $\boxed{m}\,\overline{x+y+z}$ et $d^m xyz$. Quod si occurrat potentia ipsius x, ut $d^m x^2 y$, considerari debet ut rectangulum solidum xzy, consentientibus eo casu x et z, unde operae pretium erit prosequi comparationem inter $\boxed{m}\,\overline{2x+y}$ ex. gr. (seu $\boxed{m}\,\overline{x+x+y}$) et inter $d^m xxy$. Nam, ubi succedit extractio, succedet et summatio. Quin et $\boxed{m}\,\overline{x-y}$ et $d^m \frac{x}{y}$ seu $d^m xy^{-1}$ poterunt comparari. Imo videndum, annon in summationibus concipere aliquid liceat respondens radicibus irrationalibus, imo affectis. Excogitavi autem olim mirabilem regulam pro numeris coefficientibus potestatum, non tantum a binomio $x+y$, sed et a trinomio $x+y+z$, imo a polynomio quocunque, ut data potentia gradus cujuscunque v. gr. decimi, et potentia in ejus valore comprehensa, ut $x^5y^3z^2$, possim statim assignare numerum coefficientem, quem habere debet, sine ulla Tabula jam calculata; quam considerationem puto huic quoque meditationi profuturam, est enim genesis potestatum generalis.

Video et novam meditationem superesse circa Maxima et Minima, materiam nondum exhaustam. Neque enim semper facile est problema reducere ad tangentium inversam seu differentiales. Exempli causa, in inquisitione Catenariae, si non per theoremata mechanica aliunde novissemus proprietatem tangentium ejus dari respectu centri gravitatis, difficile fuisset obtinere lineae constructionem. Nempe datis punctis A et C, et longitudine catenae vel funiculi A C, quaeritur natura curvae talis, ut A F sit omnium possibilium minima. Hoc profecto problema deberet analytice solvi posse, recta via; etiamsi ignoretur Tangentes A T et E T concurrere in T sub G centro arcus A C vel aliquid simile. Quam ergo quaeso methodum adhibendam putas, si ipsum problema in terminis propositis consideremus?

Inter alias cogitationes haec mihi in mentem venit, per quam problema saltem videtur posse reduci ad seriem infinitam: A B sit x, et arcus A C sit z et fiat (1) $z = ax + bxx + cx^3$ etc. et A F erit (2) $\overline{\int x\,dz} : z$ = minimo possibili. Et quia z longitudo curvae est constans in omnibus diversis curvaturis, ex quibus ea eligitur, per quam maximus centri gravitatis descensus obtinetur; ideo etiam (3) $\overline{\int x\,dz}$ = minimo, seu erit (4) $\overline{\int x\,dz} = \frac{1}{2}axx + \frac{2}{3}bx^3 + \frac{3}{4}cx^4$ etc. $= m$ (5) posito m significare minimum valorem. Sed quaeruntur coefficientes a, b, c etc. Harum inventionem puto tentari posse per unicam literam quaerendam e, unamque datam r, faciendo (6) $a = 10e + 11a$, (7) $b = 20ee + 21ea + 22aa$, (8) $c = 30e^3 + 31e^2a + 32ea^2 + 33a^3$, et ita porro, ubi numeros 10, 11, 20 etc. adhibeo loco literarum; praeterea explicabo x, faciendo (10) $x = y + r$, cujus rationem postea dicam. Explicando jam aeq. (5) per (6), (7), (8) etc. et per aeq. (10) et ordinando secundum y, habebo aeq. (11) cujus forma est $\ldots y^0 + \ldots\ldots y^1 + \ldots y^2$ etc. $= m$. Hanc jam oportet differentiari, sed ita ut sola litera e in ipsa consideretur ut differentiabilis; ita habetur aequatio nova duodecima, in qua sublata est m. Sed oportet etiam in ea tolli y, quod fit divellendo ipsam in tot aequationes destructitias, quot sunt termini, quae omnes, cum sint secundum unam incognitam e, debent coincidere inter se, id est arbitrariae 10, 11, 20 etc. ita explicandae sunt, ut quaevis harum aequationum dividi possit per eandem aequationem finitam valorem ipsius e exhibentem; quo invento, ad seriem infinitam pro curva quaesita perventum erit, sed praestaret si semper talia problemata possent reduci ad aequationes differentiales. Caeterum nisi explicuissem x per $y + r$, vel

simile, non potuissem instituere divulsionem, quia numeri ipsius aequationis (5) non fuissent ingressi calculum. Et in universum artis foret, mihi nondum satis cognitae, posse seriem infinitam revocare ad aequationem finitam differentialem, cujuscunque ea demum sit gradus, quoties nempe res fieri potest. Nam dubito an semper sit possibilis.

Talia adhuc plura habeo desiderata, ex quibus apparet quantum Analysi adhuc desit, cujus defectus supplere, ingenio Tuo inprimis dignum videtur; quemadmodum illud quoque cujus mentionem in Actis injeci*), cum de Isochrona Paracentrica nuper agerem, ut prosequamur illas curvas transcendentes, quarum puncta quotvis per communis Geometriae constructiones inveniri possunt ad imitationem sectionum anguli et rationis. Integralium appellatio mihi non displicet, et a me quoque interdum Tui imitatione adhibita est; plerumque tamen summationis vocabulo uti malo, quia magis luciferum est, et originem ipsam meditationis ostendit.

Gaudeo intelligere, quae Dn. Chirac Tibi scripserit, et quae de R. P. Reyneau refers. Domino Chirac nemo, credo, Te melius consuluerit. Dnus. Catelanus minus sincere egit, quemadmodum et Dnus. Ozanam. Ille enim Calculum differentialem, hic meam circuli seriem, pro parte cum percepissent, laureolam in mustaceo quaesivere, cum nihil de suo addidissent. Catelanus vero, alioqui mihi contrarius, etiam mea haec qualiacunque deprimere, ut audio, conatus est. Ante paucas septimanas Lipsiam scribens adjeci schediasma, Te quasi invitante, sed brevissimum**); ibi notavi etiam sine consideratione centri gravitatis, uno velut momento, ad praedictam illam constructionem Tuam perveniri posse, ope solarum differentialium. Nam descensus vel ascensus verticales ponderis et contrapondii sunt elementa ordinatarum; ut ergo maneat aequilibrium in motu, debent assensus hi vel descensus elementares esse ponderibus reciproce proportionales. Ergo et summae eorum, id est, ipsae ordinatae, quae est ipsissima constructio Tua.

Quod Dnum. Craigium attinet, notavi ea occasione, verissimum mihi videri, quod terminus summator termini irrationalis debeat

---

*) Act. Erudit. 1694 p. 366.

**) G. G. L. Notiuncula ad constructiones lineae in qua sacoma, aequilibrium cum pondere moto faciens incedere debet etc. Act. Erudit. 1695 p. 184.

continere eandem irrationalitatem. Cujus rei demonstratio, quam innui, pendet ab hac consideratione generalissima, et, ni fallor, momentosa; quod terminus integralis et differentia, vel summa et terminus debent habere eundem numerum radicum seu valorum; quoniam quivis valor termini suum habebit valorem differentiae respondentem. Hinc etiam duxi considerationes, quibus multum contrahitur quadraturarum inquisitio; sed prosequi non vacavit, etsi talia dudum consideraverim. Si Tibi aliquando vacavit eo advertere animum, libenter mittam qualescunque meas in eam rem considerationes. Notavi sane ibidem osculationes revocari ad differentias differentiarum; visus tamen est usus calculi reciproce differentialis hic non contemnendus.

Non miror, si diu pressisti considerationem Tuam aequationum differentialium mechanice construendarum*); possum dicere me quoque ibi speravisse aliquid ad constructionem plusquam mechanicam. Videbam scilicet generaliter, data aequatione differentiali primi gradus, dari curvas algebraicas quaesitae occurrentes in punctis, ubi curva quaesita inclinationes habet datas, seu angulum datum facit ad horizontalem vel verticalem. Sperabam ergo motum excogitare puncti per has curvas secundum leges inclinationis trajicientis; sed nondum successit. Res huc redit: Curvis ordinatim positione datis punctum ita per eas continue trajicere, ut ubi illis occurrit, habeat angulos ordinatim datos ad horizontem. Hoc effecto, haberetur constructio omnium curvarum datarum per aequationem differentialem primi gradus.

Egregie notasti, more Tuo, posse definiri lineam ordinatarum transeuntem per omnia puncta flexus omnium curvarum differentialitate eadem datarum; quin et poterit linea definiri transiens per omnia puncta maximae earum vel minimae latitudinis; nam eo casu evanescunt differentiae, angulusque nullus est vel rectus. Eamque in rem complura notare memini, sed non tamen ideo ipsum curvae transcendentis quaesitae punctum incognitum definitur; puto tamen aliquando rem successuram, ubi constabit, lineae ex. gr. per omnia puncta maximae latitudinis transeuntis concursum cum curva quaesita, cujus est ea latitudo, non intersectionem esse simplicem, sed contactum vel osculum vel saltem esse anguli dati.

---

*) Modus generalis construendi omnes aequationes differentiales primi gradus. Auctore Joh. Bernulli. Act. Erudit. 1694 p. 455.

Quod Dominus Frater Tuus in meis notavit circa numerum radicum osculi, non displicuit; nihil enim mihi gratius quam doceri; puto tamen nos non admodum dissentire, ut Tute indicas; interim gratissimum erit judicium super ea quaestione Tuum. Officiosam ipsi a me salutem nuntiari peto.

Gaudeo Tibi aliquam conditionem offerri apud Batavos, quae non contemnenda videtur. Scito me quoque nuper Illustrissimo viro Eberhardo Dankelmanno, intimo Potentissimi Electoris Brandeburgici Ministro, per amicum Te nominari curasse ad Professionem Mathematicam novae apud Halas Saxonum Academiae, rescriptumque mihi est, dedisse illum in mandatis, ut de Te et fortasse apud Te quaereretur: quae causa quoque est, ut hoc ad Te responsum maturandum putarim. Saltem ergo electionem puto habebis. Utrovis modo viciniorem Te habere gaudeo, si modo Tibi in ea re aeque ac nobis consulatur. Vale etc.

Hanoverae $\frac{6}{16}$ May 1695.

XI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Vesentione responsi nihil adhuc accepi, sed cum ex postremis Tuis D. Abbatem Boisotium mortuum intellexerim, amplius haud sollicitabo. Quid P. Herr rescripserit, ipse videas ex adjunctis hisce ad Bibliopolam exaratis. Est ut opinor speciosus praetextus, quo petitum Tuum honeste declinet; quoniam forsan ex Bibliotheca sui Principis descriptionem concedere non audet. Doleo sane vicem meam, quod mea Tuis commodis inserviendi promtitudo non ex voto cesserit. Optime facis, si valetudini Tuae consulis: Deus det ut omnia prospere cedant.

Nihil elegantius est, quam consensus quem observasti inter numeros potestatum a binomio et differentiarum rectangulo; haud dubie aliquid arcani subest. Nondum satis vacavit examinare an quid inde pro summationibus elici possit. Videtur tamen quantitatem propositam differentialem cujusvis gradus summari posse, eam primo differentiando, et dein sumendo tertiam proportionalem hujus novae quantitatis differentialis ad differentialem propositam, consideratis interim d, d^2, d^3, d^4 etc. tanquam quantitatibus algebraicis et non ut literis tantummodo caracteristicis. Sic, ex. gr. tertia proportionalis d^3 ad dd erit d, et d^4 ad d^3 erit dd, et ita de aliis. In hunc finem esto proposita quantitas differentialis tertii gradus haec $xd^3y + dxddy$, cujus summa invenienda sit; differentietur ea, et habebitur $xd^4y + 2dxd^3y + ddxddy$; posito pro x, d^0x sumatur tertia proportionalis $d^0xd^4y + 2dxd^3y + ddxddy$ ad $d^0xd^3y + dxddy$, quae erit d^0xddy vel $xddy$. Dico itaque $xddy$ esse summam vel integrale quantitatis propositae $xd^3y + dxddy$; quod quidem ante calculum primo intuitu patebat; non tamen incongruum est ostendisse, quomodo per methodum eo perveniri possit. Nota, quod in hoc scrutinio literae ipsae, quae alias quantitatem denotant x, y, non considerandae sunt ut tales, sed duntaxat quatenus determinant d, d^2, d^3 etc. Hoc modo quadratum ipsius d^3y non est d^3yy, sed d^6y; cubus ipsius d^3y non d^3y^3, sed d^9y: Idem puta de multiplicatione, divisione et extractione radicum $d^2y \times d^3y = d^5y$, $\sqrt[3]{d^6y} = d^2y$; item $\frac{d^2y}{d^2y} = d^0y = y$, et hac ratione $\frac{x}{x}$ non est $= 1$, sed $= \frac{d^0x}{d^0x} = d^0x = x$; quoniam autem $d^{-m} = \int^{+m}$, erit ex. gr. $\frac{d^4y}{d^5y} = d^{-1}y = \int y$, et $\frac{d^3y}{d^2x} = d^3yd^{-2}x = d^3y\int^2 x$: idem intelligendum, si plures sint indeterminatae x, y, z etc. Accidere potest, ceu praevideo, ut summa quantitatis differentialis propositae, hoc modo inventa, exprimatur per seriem; tunc nempe quando proposita differentialis non est summabilis. Ex. gr. summanda sit $xd^3y + 2dxddy$; si differentiatur, prodibit $xd^4y + 3dxd^3y + 2ddxddy$: Ergo tertia proportionalis hujus ad illam, more nostro sumta, erit $\frac{d^0xd^6y + 4dxd^5y + 4ddxd^4y}{d^0xd^4y + 3dxd^3y + 2ddxddy}$; instituta itaque divisione continua, incipiendo a primo denominatoris membro, prodibit haec series $d^0xddy + dydx - d^0yddx + d^{-1}yd^3x - d^{-2}yd^4x + d^{-3}yd^5x$ etc.

$$= xddy + dydx - yddx + \int yd^3x - \int\!\!\int yd^4x + \int^3 yd^5x \text{ etc.}$$

quae proinde aequalis est $\int \overline{xd^3y + 2dxddy}$. Alia invenitur series incipiendo divisionem ab ultimo membro, nimirum haec $2d^0xddy - d^{-1}xd^3y + d^{-2}xd^4y - d^{-3}xd^5y + d^{-4}xd^6y$ etc. vel $2xddy - \int xd^3y + \int\!\!\int xd^4y - \int^3 x d^5y + \int^4 xd^6y$ etc. adeoque priori aequalis est. Video me hic inter scribendum, et quidem ex insperato, incidisse in methodum universalem summandi vel per vel citra seriem, quantitatem differentialem cujuscunque gradus; video etiam infinita alia adhucdum abscondita hic latere; ea autem eruere, et studiosius excolere nunc non vacat: ita enim distractus sum aliis his minime affinibus cogitationibus, ut mirer sufficientem pro his attentionem mihi, nescio qua inquietudine agitato, superesse.

Caeterum consensus quem observasti inter $\boxed{m}\,\overline{x+y}$ et $d^m\overline{xy}$ vel etiam inter $\boxed{m}\,\overline{x+y+z}$ et $d^m\overline{xyz}$, non succedit, uti putabas, ubi occurrit potentia ipsius x. Ratio operanti patebit; si enim comparatio fiat inter $\boxed{m}\,\overline{2x+y}$ seu $\boxed{m}\,\overline{x+x+y}$ et inter $d^m\overline{xxy}$, locum illa non habebit, nisi confundatur ddx cum $dxdx$, id est differentia secunda cum quadrato differentiae primae dx. Sumatur ex. gr. potestas secunda ipsius $2x+y$, et differentia secunda ipsius xxy, habebitur $4xx + 4xy + yy$, comparanda cum $2yxddx + 2ydxdx + 4xdxdy + xxddy$; quod fieri nequit, quia ibi tria tantum, hic autem quatuor diversa membra reperiantur: sin autem $4xx$ dispescatur in duas partes $2xx$ et $2xx$, poterit prior conferri cum $2yxddx$, et posterior cum $2ydxdx$, quia utrobique litera d cum x affecta bis reperitur: sed, uti jam dixi, ddx et $dxdx$ sumendae sunt pro quantitatibus homogeneis, ceu supra feci. Idem etiam sentiendum de comparatione inter $\boxed{m}\,\overline{x-y}$ et $d^m\frac{x}{y}$ seu $d^m xy^{-1}$; aliter enim, quam conditione dicta non succedit.

Regula mirabilis, quam Tibi esse ais pro inveniendis numeris coëfficientibus potestatum, non tantum a binomio, sed et a trinomio, imo polynomio quocunque, fecit ut et ego aliquam tentarem; video enim summum suum usum habere posse expedite elevandi quantitatem aliquam ad certam potentiam. Et reapse, perlustratis quibusdam proprietatibus numerorum, aliqua illico mihi venit in mentem. Esto enim polynomium quodcunque $s + x + y + z$ etc. elevandum ad potentiam quamcunque r; quaeritur coefficiens termini $s^a x^b y^c z^e$ etc. Dico coefficientem illum fore

$\dfrac{r.r-1.r-2.r-3.r-4.....a+1}{1.2.\ \ 3....b\times1.2.3....c\times1.2.3..e \text{ etc.}}$ id est, productum omnium terminorum progressionis arithmeticae, a numero potestatis multinomii incipientis et unitate descrescentis, usque ad numerum unitate auctum potestatis primi nominis, productum, inquam, hoc divisum per productum omnium terminorum tot progressionum arithmeticarum unitate ascendentium usque ad numerum sui respective nominis potestatis, quot sunt reliqua, praeter primum, nomina, dabit coefficientem quaesitum. Ubi notandum quod taediosa divisio et maxima pars multiplicationis evitari potest, destruendo ante operationem partes multiplicantes numeratoris, quae sunt communicantes cum partibus multiplicantibus denominatoris. Exemplum sumamus, quod Tu ipse proponis: Quaerendus nimirum coefficiens termini $s^5x^3y^2$ comprehensi in valore trinomii $s+x+y$ ad decimam potestatem elevati: substituantur in formula generali valores, nempe pro r, 10; pro a, 5; pro b, 3; pro c, 2; habebitur pro coefficiente quaesito $\dfrac{10.9.8.7.6}{1.2.3.\times1.2} = 10.9.4.7 = 2520$. Si quadrinomii $s+x+y+z$ ad 20 potentiam elevati quaeratur numerus coefficiens termini $s^8x^6y^4z^2$, erit = $\dfrac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10.9}{1.2.3.4.5.6.\times1.2.3.4.\times1.2} = 19.17.5.7.13.12.11.10.9$ $= 1745944200$. Gratissimum esset Tuam nunc videre regulam, ut expediri liceret, an inter se consentiant. Tua fortasse simplicior erit; interim saltem, nec mea opus habet Tabula jam calculata.

Nova Meditatio, quam affers, circa maxima et minima, mihi certe non est nova; quinimo prima fuerat speculatio, per quam solutionem problematis curvae catenariae tentaveram; sed optatum successum tum non assecutus, diu post plenariam solutionem inveni, et quidem non ex proprietate tangentium ejus, respectu centri gravitatis, sed ex eo quod infimum, vel aliud quodvis punctum B catenulae, in E et F suspensae, semper eamdem vim firmitatis requirit, in quocunque demum alio puncto S suspendatur. Consule, si placet, schediasma meum Actis anni 1691, juxta Tuum et Hugenianum insertum, et videbis inter proprietates, quas ibi recensui, hanc ultimam: Si super EF infinitae intelligantur descriptae curvae ipsi funiculariae EBF aequales, illaeque in rectas extendantur, et in singulis singulae ex-

tensae punctis applicentur rectae ipsis respective distantiis a linea EF aequales, erit omnium spatiorum, quae sic efficiuntur, illud, quod a funicularia ingignitur, maximum. Ex quibus luculenter apparet, me innuere voluisse, inter omnes curvas aequales super linea data EF descriptas, funiculariam habere centrum gravitatis remotissimum ab EF, et consequenter horizonti proximum. Hactenus, ut fatear, hujusmodi problemata insolubilia mihi visa fuere, et etiamnum videntur; nec mihi ratio Tua, ea ad series reducendi, plene satisfacit. Videris enim unam eandemque literam, nunc constantem, nunc differentiabilem supponere, quando dicis z longitudinem curvae esse constantem (quod volo, sed certo modo consideratam) et paulo ante ponis $z = ax + bxx + cx^3$ etc. quam seriem (ideoque ipsam z) differentiasti et multiplicasti per x, eamque iterum summasti ponendo $\int x\,dz = \frac{1}{2}axx + \frac{2}{3}bx^3 + \frac{3}{4}cx^4$ etc. ex qua operatione simul apparet coefficientes a, b, c etc. Tibi hucusque fuisse constantes; postea vero easdem differentiabiles ponis, faciendo $a = 10e + 11a$, $b = 20e^2 + 21ea + 22aa$, $c = 30e^3 + 31e^2a + 32ea^2 + 33a^3$; ubi literam e proindeque ipsas coefficientes a, b, c etc. ut differentiabiles consideras. Plura alia sunt, quae non satis capio; videtur etiam series, quae inde nasceretur, prolixissima fore, ita ut optem Methodum Tuam applicatam videre in leviori quodam exemplo, quale est hoc: Invenire (fig. 31) naturam curvae ABC, datae longitudinis, super recta data AC descriptae, quae cum recta data AC includit maximum spatium possibile ABCA. Demonstrare possum curvam ABC esse circularem; sed per quam methodum analytice eo perveniendum sit, ne minimum quidem lumen affulget. Caeterum, multa olim circa maxima et minima observabam, quae nondum animadversa reperio, quae tamen in potestate sunt; quandoque nempe infinita maxima vel minima in eodem problemate occurrunt, quorum illud quod maximum vel minimum est (hoc est maximum maximorum, vel minimum minimorum) determinandum sit: Ut si quaeratur (fig. 32) triangulum vel aliud polygonum ABC, omnium curvae cuidam ellipticae datae inscriptibilium maximum. Ad hoc solvendum video supponi debere duo puncta A et C data, ex quibus quaerendum tertium B, ita ut duae ductae BA, BC faciant cum data assumpta AC maximum triangulum saltem eorum quae super data AC describi possunt, verticem habentia in curva elliptica: et sic triangulum ABC esset *maximum* simpliciter dictum vel *primi gradus*. Postea pono unicum punctum A datum et quaero alterum C, et ex hoc B, ita ut triangulum ABC sit omnium maximorum maximum, vel maximum *secundi* gradus. Denique et ipsum A quaero, et ex hoc C, et ex hoc B, et habebo triangulum ABC omnium maximorum secundi gradus maximum vel *maximum tertii gradus*. Sic si loco trianguli aliud quodvis polygonum, omnium in hoc ordine maximum, inscribendum esset, haberetur *maximum* tanti gradus, quantus foret numerus laterum polygoni: et hac ratione spatium ipsum ellipticum est *maximum gradus infinitesimi*. Eodem modo se res habet cum determinatione minimi polygoni curvae ellipticae inscribendi.

Habeo et aliam speciem maximorum et minimorum; nimirum quando quantitates non elementaliter, sed saltatim crescunt et decrescunt, quod contingit in seriebus, in quibus termini aliquousque crescunt, postea vero descrescunt, vel contra; oporteat analytice maximum vel minimum terminum invenire, ut in hac $\frac{a}{b} + \frac{a\,.\,\overline{a+1}}{b^2} + \frac{a\,.\,\overline{a+1}\,.\,\overline{a+2}}{b^3} + \frac{a\,.\,\overline{a+1}\,.\,\overline{a+2}\,.\,\overline{a+3}}{b^4}$ etc. quaeritur quotus sit terminus minimus; dico, si series continuetur ut numerus terminorum sit $b - a + 1$, fore duos ultimos terminos omnium totius seriei minimos: sunt enim aequales. Data progressione arithmetica, ab unitate incipiente et eo modo disposita

A	$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$
B	$7 + 8 + 9 + 10 + 11$
C	$12 + 13 + 14 + 15$
D	$16 + 17 + 18$
E	$19 + 20$
F	21

quo hic vides, determinanda est generaliter series transversalis C, cujus summa sit omnium maxima. Sit numerus terminorum primae seriei transversalis $A = a$, numerus quotus seriei quaesitae $= x$, dico x fore $= a + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}}$. Si haec quantitas est numerus rationalis et integer, erunt duae series transversales maximae aequales, nempe illa quae inventa est, et quae immediate sequitur: sin vero quantitas inventa sit numerus irrationalis vel fractus, erit ille sumendus integer qui proxime major

est, et erit unica series maxima. Esto ex. gr. $a = 6$, erit $a + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}aa + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}} = 6\frac{1}{2} - \sqrt{14\frac{1}{4}}$, cujus numerus integer proxime major $= 3$: dico itaque seriem transversalem tertiam C esse omnium maximam: si $a = 30$, invenietur series maxima esse decima tertia; et sic quantuscunque sit numerus a, e vestigio quasi assignari potest, quota sit maxima transversalium series: quod certe plures alii non reperirent nisi forsan mechanice, id est, operatione taediosa, et ipsa formatione omnium numerorum.

Multa adhuc adducere possem, quae olim circa maxima et minima meditatus fueram, quaeque non contemnenda videntur. Et sane, non ita pridem hujusmodi materia commercium literarium, quod mihi cum D. Hospitalio intercedit, diu satis alebat, ubi inter alia vidimus, quod in vulgari differentialium methodo, differentiale *maximi* vel *minimi* non semper sit nihilo aequale faciendum, cum quandoque possit esse infinitum, imo in quavis ratione cum caeteris differentialibus. Ostendi enim potest curvas illas (fig. 33) ABC (quas ego Gallice *courbes rebroussantes*, et punctum B *point de rebroussement* nuncupo, in quarum censu habetur parabola cubicalis secunda) habere maximam applicatam BD, cujus elementum vel differentiale non solum est infinitum, sed simul in quavis alia ratione cum differentiali abscissae AD, quod cuipiam paradoxum videretur. Notavimus etiam, ut id obiter innuam, in puncto flexus curvarum radios circulorum osculantium non semper esse infinitos, ut hactenus creditum est, et ut Tute alicubi in Actis supponere videris; dantur enim curvae, ubi evidentissime demonstrari potest, quod radius circuli osculatoris in puncto flexus omnino evanescat. Interim et hoc verum est, quod radius ille semper sit aut infinitus aut nullus, nunquam autem finitae magnitudinis. Sed properandum ad alia.

Summo jure objecisti Fratri meo, quod putaverit unicam tantum dari transcendentem, videl. Logarithmicam, cujus puncta quotvis per communem Geometriam inveniri possint; egregie enim notasti alteram transcendentem pro sectionibus Anguli, cujus puncta etiam per communem Geometriam facillime habentur. Ergo nullus dubito, plures alias hujusmodi dari, pro quibus autem methodum excogitare nondum vacavit: saltem jam video illam in eo consistere, ut inveniatur aequatio differentialis constans duobus membris omnino inter se similibus et non integrabilibus, quae tamen aequatio sit pro curva algebraica, qualis est haec, $\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}} = \frac{dy}{\sqrt{aa+yy}}$, ubi duo membra $\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}}$ et $\frac{dy}{\sqrt{aa+yy}}$ sunt similia, id est, dx cum a et x, eodem modo componitur, ac dy cum a et y; non autem sunt integrabilia, quia eorum integralia vel summae dependent a quadratura hyperbolae. Interim aequatio differentialis comprehendit (praeter rectam, quam omnes hujusmodi aequationes necessario comprehendunt, quam autem hic non puto) aliam curvam algebraicam, quam sic invenio: $\frac{dx}{\sqrt{aa+xx}} = \frac{dy}{\sqrt{aa+yy}}$, ergo $\frac{y.xdx}{\sqrt{aa+xx}} = \frac{x.ydy}{\sqrt{aa+yy}}$ eorumque summae $y\sqrt{aa+xx} - \int dy\sqrt{aa+xx} = x\sqrt{aa+yy} - \int dx\sqrt{aa+yy} \pm bb$. Est autem $dy\sqrt{aa+xx} = dx\sqrt{aa+yy}$ per aequationem datam: ergo etiam $\int dy\sqrt{aa+xx} = \int dx\sqrt{aa+yy}$: illis itaque destructis, manebit aequatio algebraica $y\sqrt{aa+xx} = x\sqrt{aa+yy} \pm bb$, quae determinat modum spatium hyperbolicum dividendi algebraice in quotvis partes aequales; ex qua divisione ipsa Logarithmica producitur. Sic ex aequatione differentiali membrorum similium et non summabilium $\frac{dx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$ invenio curvam algebraicam $y\sqrt{aa-xx} = x\sqrt{aa-yy} \pm bb$, qua ostenditur etiam circuli divisiones producere curvam transcendentem, cujus puncta quotvis algebraice possunt inveniri, quae ipsa Tua est curva sectionum anguli. Idem praestari potest, si inveniatur curva algebraica, quando alterum membrum aequationis differentialis similis per quemvis numerum multiplicatur, ut si fiat $\frac{ndx}{\sqrt{aa-xx}} = \frac{dy}{\sqrt{aa-yy}}$.

Optime notasti in Actorum Aprili, constructionem meam curvae aequilibrii immediate inveniri posse ope solarum differentialium; sed hoc ipsum est, quod mihi ansam dederat cogitandi, annon hujusmodi perbrevis constructio per vulgarem Geometriam elici posset;

quod commodissime fieri posse videbam per notissimum illud axioma mechanicum, quod jam ab ipso Archimede, ni fallor, fuit receptum; et hac ratione ostendere volui, quod mediocris etiam Geometra, differentialium calculi omnino ignarus, genuinam problematis solutionem invenire potuisset; itaque non satis possum mirari, qui acciderit, ut Frater meus ad tam prolixam, etiam pro specialissimo casu, pervenerit solutionem. Eandem difficultatem moves contra objectionem meam Craigio factam, quam jam et D. Hospitalius mihi movit; verum video, quod ambo meam mentem non recte percepistis; verissimum enim et mihi videtur, quod terminus summator termini irrationalis debeat continere eandem irrationalitatem; contra quod non fuit objectio mea, sed illud non verum mihi videtur, quod Craigius tacite supponit, terminum summatorem non solum idem signum radicale (quod verum esset) sed etiam semper eandem quantitatem sub signo radicali contentam habere, quam habet terminus summandus; posterior enim hujus propositionis pars falsa est; in quam rem D. Hospitalio dedi exemplum, et complura alia dare possem, in quibus methodus Craigii manifestissime non succedit ob solam suam falsam hypothesim. Forte occasio dabitur, de his in Actis aliquid publicandi.

Caeterum, quod dicis observationem meam, quod nempe summatio ordinatarum $\sqrt{a^4 + x^4}$ pendeat ex dimensione curvae parabolicae cubicalis primae, etiam Tibi fuisse factam a Marchione Hospitalio, scias quod illam a me primo habuerit, cujus forte alias Te non admonuisset. Interim vix credo summationem dictam connexionem habere cum dimensione curvae hyperbolicae. Considerationes Tuas, quas pro contrahenda quadráturarum inquisitione detexisti mihique communicandas promisisti, grato animo recipiam, quandocunque venerint.

Totus persuasus sum, osculum circuli cum curva esse concursum trium intersectionum in eodem puncto, nisi in vertice curvae, ubi aliquando quatuor concurrunt. Concipe enim punctum aliquod, tanquam centrum, fluere in recta indefinita perpendiculari ad curvam; nunquid circulus, centro ubivis existente descriptus, tangit curvam alibique adhuc bis secare poterit: punctum vero contactus est concursus duarum intersectionum, sed unicum est punctum, in quo centro circuli existente, tertia intersectio coincidat cum duabus permanentibus; est enim accidens, si quarta simul concurrit. Ex. gr. sectionem conicam circulus in pluribus quam quatuor punctis secare non potest, ut demonstratur in doctrina Conicorum; evidentissimum autem est circulum radii evolutae, id est, ipsum osculatorem, praeter quam in puncto osculi, adhuc alibi secare sectionem conicam: sic itaque, si osculum esset concursus quatuor intersectionum, revera sectio conica quinquies a circulo secaretur. Hoc interim verum est, quod quaevis curva in se rediens ideoque et ipse circulus aliam curvam quamcunque in punctis imparibus secare nequit; et ob hanc rationem osculum non datur absque quarta intersectione alibi facta. Plura de hac materia addere non possum; eorum enim quae vestram disputationem concernunt, nunc non recordor, nec Acta Lipsiensia mihi sunt ad manus, ut ea relegere possem.

Jucundissimum fuit legere meditationes Tuas metaphysicas, quas sub Specimine Dynamico, in eodem Actorum Aprili, publicasti. Ejusdem Tecum sum opinionis, quod corporum natura primario non consistat in extensione; haec enim et ipsi vacuo competit, sine quo sane motum concipere nequeo. In quo autem corporea natura praecise consistat, hoc utique facile dictu non est. Tu quidem illam ponis in Vi naturae ubique ab Authore indita, quam primitivam appellas; ipsam autem extensionem in continuatione sive diffusione hujus substantiae nitentis vel vi primitiva instructae; sed videris mihi supponere id quod est in quaestione. Subjectum enim vis, in quo nempe ea inhaeret, est ipsum corpus, et sic corpus tanquam praeexistens concipi debet; nisi forte distinctionem feceris inter vim potentialem et actualem; illam, quae animabus competit corpora ad nutum voluntatis movendi, hanc, quam corpora a priori vi commota sibi invicem communicant; et sic eo redires quod, nisi vehementer fallor, a Te olim statutum alicubi me legisse memini, corpus esse mentem momentaneam. Unde conjicio Te nunc eo collimare, quando dicis Vim primitivam respondere Veterum formae substantiali.

Optime notasti contra Cartesianos, quod factum ex mole corporis in velocitatem non sit quantitas motus, sed quantitas impetus seu, ut postea appellas, motionis, ex quarum aggregato nascatur quantitas motus. Quae dein dicis de tubo circa centrum rotato, de globo in cavitate ejus existente, de nisu seu sollicitatione, de vi viva et mortua etc. verissima debent videri iis, qui ex nostra interiori Geometria norunt, qua ratione quodlibet quantum

ex infinitis differentialibus, et quodlibet differentiale ex infinitis aliis, et quodlibet horum aliorum adhuc ex aliis infinitis, et ita in infinitum, componi intelligendum sit; quibus consideratis, certe destruitur unico ictu Atomistarum opinio.

Haec et alia similia, quae in Mathesi abstracta attentius consideranti obvenerunt, olim etiam mihi ansam dederunt ad plurimas speculationes Tuis non multum absimiles, circa rerum exordia et proprietates, quarum aliquae si publicarentur, procul dubio quam plurimis pro mero lusu ingenii, ne dicam pro ridiculis, haberentur, quae tamen rationi quam optime consentaneae mihi videntur. Quod vero sub finem de virium aestimatione dicis, fateor Tuas rationes me nondum convincere, non ideo, quod opinio Tua sit prorsus nova et contra eam, quae hucusque fuit ubique recepta et nunquam in dubio posita, sed ideo quod eam ab effectu deducas, qui tamen non perpetuus et constans est. Quod enim corpora ascensus faciant quadratis celeritatum proportionales, non ideo etiam vires erunt in hac ratione, existentibus corporibus aequalibus; ascensus quippe isti, licet sint homogeneum quid, non sunt effectus, nisi ut ita dicam, accidentales, qui solummodo dependent a legibus gravitatis et motu materiae aethereae, quas utique summus rerum Arbiter si aliter constituere voluisset, etiam corpora celeritatibus suis iisdem, et proinde viribus iisdem, facerent ascensus omnino in alia ratione; unde constat hujusmodi effectus non immediate et unice provenire a viribus corporum motorum, quae procul dubio pergerent moveri in infinitum, si ab alio peregrino non impedirentur, quod itaque ad certam tantum altitudinem ascendant, potius est effectus retardationi materiae ambientis adscribendus. Sed quid multis opus; idem Tuum argumentum in Te retorqueri potest, quo ostendam vires corporum aequalium esse in ratione celeritatum ipsarum. Concipiamus enim duo corpora aequalia, A celeritate ut 2, et B celeritate ut 1, moveri, si vis horizontaliter in vacuo, et nunc in via simul offendere medium aliquod uniformiter densum et retardans, quod ingrediuntur; nunquid in medio uniformi celeritates utriusque corporis successive imminuuntur, et imminutiones sunt in ratione spatiorum percursorum. Sic itaque ambobus corporibus tandem ad quietem redactis corpus A nonnisi duplo altius in medium penetraverit, quam corpus B. Ergo, Tuo more loquendo, vis corporis A est ad vim corporis B, ut effectus illius ad effectum hujus, id est ut 2 ad 1. Eodem omnino modo ostendere possem, vires corporum motorum esse in alia quavis ratione, si medium non uniformiter penetrabile supponatur: in quavis enim suppositione corpora vires suas convertunt in penetrationem vel potius in superationem resistentiae continuae medii. Multa alia super hac materia dicenda haberem, sed epistolae forma jam praeter spem nimis excrescit.

Ex quo ultimas meas ad Te dedi, jam ter literas (quarum postremas nudius-tertius) accepi a D. Braunio Theol. Doctore et Professore Groningensi, qui mihi dicit, me forte brevi a Proceribus Academiae suae invitatum iri ad Mathesin publice ibi docendam, sed eos velle certiores esse de adventu meo, ideoque a me quaerit, num hanc spartam acciperem cum stipendio annuo mille et ducentorum florenorum Hollandicorem praeter emolumenta academica. Et sane respondi ante acceptas Tuas ultimas verbumque dedi, ut vix retrahere possim, nisi forte novum aliquod incidens interveniat. Interim plurimum Tibi debeo pro cura quae Tibi mei est, dum laborasti ad obtinendam pro me Professionem Mathematicam novae apud Halas Saxonum Academiae. A longo jam tempore, non diffiteor, nova haec Academia mihi appetitum movit. Quid autem nunc, rebus sic stantibus, faciendum, Te ipsum consulo, qui meus es patronus, et in quem omnem fidem pono; quidnam mihi utilius, et utrum alteri praeferendam censes, indica. Vale et ama, ut soles etc.

Basileae d. $\frac{8}{18}$ Junii 1695.

P. S. Audio hac ipsa hora, ex literis D. Hospitalii, Nob. Hugenium obiisse. Heu! quantus dolor, si verum esset, me circumdaret; fuit enim, ut audivi a Marchione, promotor meus, qui primus ad professionem Groningensem me commendavit. Sola fere ejus futura conversatio me illuc trahebat, nunc eheu! omne meum solatium cecidit; forsan vivit adhuc; dic quaeso veritatem.

XII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratias ago, quod apud Sangallenses inquisisti. Non dubito quin R. P. Herr candide scripserit quod res est. Vitodurani postrema

tantum mihi desunt, quae fortasse non difficulter ab Einsidelensibus impetrari possent. Sed nolim Tibi negotium facessere, quem distractum video, praesertim cum de familia transferenda sit cogitandum. Idem dicam de Abbate Boisotio. Obiit ille, non ideo minus tamen Dn. Praeses Boisotius, Frater ejus, talia ad me libenter mittet; praesertim cum in Elogio Abbatis, typis edito, facta sit perhonorifica mentio concilii mei, et voluntas defuncti in me juvando inter laudes ejus referatur. Ipsum elogium mihi missum est. Quanquam et translata inde in Diarium Eruditorum viderim, quae me tangebant. Sed quid commode facere possis, judicare Tuum est, meum vero de Te (si possem) ornando, potius quam onerando cogitare, quem quanti faciam, mallem rebus quam verbis ostendere.

Non sine admiratione vidi, quam facile et quam alte penetraveris in ea quae proposueram de singulari calculi genere, quo rectangulorum differentiales cum polynomiorum potentiis conferuntur, tantum pro literae x exponentibus substituendo exponentes ipsius d ipsam x afficientis. Et pulchre notasti, hoc modo ipsas d tractari quasi literas, non considerando ipsas x vel y, nisi tanquam afficientes literam d, versa rerum vice, cum alias d sit tantum nota quaedam syncategorematica, x autem et y sint quantitates. Quod seriem infinitam attinet, poterit ea interdum commode finiri, aliquam ex ipsius d quasi-potentiis ponendo nihilo aequalem, quemadmodum et per alias hypotheses variari calculus potest, quoniam alicui quasi-potentiae ipsius d valorem pro arbitrio tribuere licet. Ex his jam magis intelligi arbitror, quanto jure dudum differentias potentiis, summas radicibus comparaverim; quod nunc reali harmonia comprobatur, praesertim respectu termini ipsius seu summae primae, quae etiam quasi extractione quadam invenitur. Et omnino, quae in geometrica progressione et logarithmis operationes locum habent, eas hic imitari licet, quod sane ingeniosissime in rem contulisti. Nec dubito, quin egregium aliquid in animo habueris, cum scribis Te, inter scribendum, ex insperato incidisse in methodum universalem, vel per seriem vel citra seriem summandi quantitatem differentialem cujusque gradus, infinitaque alia adhucdum abscondita hic latere, quae nunc excolere non vacet. Quodsi mihi eam methodum et quae alia in his occurrent, communicaveris, habebis me praeclarorum inventorum Tuorum praeconem candidissimum. Succedit consensus etiam inter $\boxed{m}\,\overline{x+x+y}$ et inter $d^m\,\overline{xxy}$, modo scribas $\overline{\boxed{m} x+\xi+y}$ et $d^m \overline{x\xi y}$; ita enim si m sit 2, fiet $x^2 + \xi^2 + y^2 + 2x\xi + 2xy + 2\xi y$, et $d^2x + d^2\xi + d^2y + 2dx\,d\xi + 2dx\,dy + 2d\xi\,dy$. Sic enim manet comparatio, modo x et ξ non confundamus, etsi coincidant. Hic libertas variandi, quae poterit prodesse ad summandum.

Regula pro coefficientibus potestatum a polynomiis, seu generalis potestatum generatio, quae mihi aliquando naviganti in mentem venit, non abludit a Tua. Soleo tamen enuntiare, ad evitandam divisionum mentionem, per numeros combinatorios, veluti in decimaseptima potentia existens forma $a^5 b^4 c^3 d^3 e^2$ habet coefficientem, qui fit, cum in se invicem ducuntur numeri exprimentes 17 rerum quaterniones, 17 — 4 rerum terniones, 17 — 4 — 3 rerum terniones, 17 — 4 — 3 — 3 rerum biniones. Sed numeri combinatorii rursus ex productis arithmetice progredientium fiunt, ut constat; unde res in effectu cum Tua forma coincidit.

Problemata, in quibus quaeritur ex lineis omnibus una praestans aliquid in desideratis maximum, non possunt Tibi esse nova. Sed novum fortasse est, rem methodo quadam aggredi, qualis illa est, quam ad Te nuper perscripsi, in qua quae contra moves, non obsunt. Cum curvam quaesitam assumo ut datam, eique assigno certam seriem, utique quamdiu hanc unam respicio, sumo x et z pro variabilibus, et a, b, c etc. pro constantibus. Sed hoc modo semel assecutus aequationem a differentialibus liberam eamque jam ad maximam accommodans, considero plures tales series potuisse intelligi, eas autem habere x et z communes, sed a, b, c etc. sunt variantes; has ergo tunc differentiari oportet, non illas. Et omnino res se habet, ut in meo calculo differentiali reciproca, ubi aliquando non ordinatae, sed parametri differentiantur. Itaque non est quod mireris, eandem quantitatem a me, nunc ut constantem, nunc ut variabilem sumi. Etsi autem via ad seriem perveniendi prolixiuscula videatur, fortasse tamen series ipsa satis simplex fiet, cum ipsa curva quaesita est simplex. Quanquam hic id tantum quaeratur, ut certam ad haec perveniendi methodum obtineamus.

Arcum, qui maximum segmentum data longitudine includat, esse circulum, non alia methodo quaerere instituebam, cum haec meditarer. Oportet veniri ad aliquid omnibus curvis commune, ut inde fiat electio, nec aliud hactenus occurrit aptum, quam series infinita, quae verum est ad talia Analyseos supplementum. Inquisitione Maximae inter maximas (repetita etiam replicatione) interdum

et in mechanicis problematibus opus habui. Inquisitio Tua maximae inter terminos serierum, ad imitationem maximae inter ordinatas figurarum, non videtur contemnenda. Verissimum est esse in curvarum punctis quibusdam quasi-irregularitates circa maxima vel minima, flexus et tangentes; et saepe fit, ut curva in uno puncto infinitas habeat tangentes, ut si in curvis, qualis adjecta est (fig. 34), caput continue minuatur tandemque evanescat in punctum; tunc enim infinitae illae tangentes, quarum totum caput erat capax, in unum illud punctum quadrant.

Subtilissima mihi visa sunt, quae commentus es, circa usum aequationum differentialium, inter terminos similes, ad inveniendas curvas transcendentes, quarum puncta haberi possint algebraice, quae velim prosequaris. Optime feceris, si ad Acta miseris, in quibus Craigium putas errasse. Non observavi Circulum Conicam, praeter osculum, adhuc alio in puncto secare solere, et regulariter, ni fallor, in osculo concurrunt duo contactus, id est, quatuor radices. Duae normales ad curvam regulariter se secant ut (fig. 35) BA et CP in P; accedente autem C ad B, variatur ipsum P, donec ad ultimum P, nempe B deveniatur, quod est centrum osculi in B. Haec ut conciliemus cum Tuis, ad exemplum quod innuis sed non exponis, in Conica venire utile erit. Et gratum erit, si mihi Tuam sententiam uberius perscripseris, cui eo libentius deferam, quo minus mihi tribuo, quoties rem satis examinare non possum. Quod vero meum Specimen Dynamicum attinet, puto Te vicissim non satis meditatum, quae scripseram, judicasse paulo festinantius. Eandem conclusionem consecutus sum, non tantum ab affectu, sed et a priori, ut innuisse me observabis, etsi non posuerim modum, qui habet aliquid elegans et inexpectatum. Minime autem putare debes effectum, quo usus sum, relatum ad gravitatem, habendum pro accidentali. Sume quemcunque effectum vim habentem, cujus adeo productione vis consumitur, idem prodibit; gravitatem autem elegi, quia aptissima est ad aestimationem, ut explicui. Et nihil refert, quomodo fiat gravitas, cujus causam esse ab ambiente non nego. Quod de medio affers, vim in se penetrantis absorbente, non facit ad rem nostram, quia vim, quam absorpsit, non reddit, seu non est effectus vim habens. Ast ambiens, quod est causa gravitatis, vim quam absorpserat, restituere potest, et tali effectu ego utor ad aestimandum. Pro medio igitur ut in eo quoque Tibi satisfaciam, fingamus (fig. 36) seriem elastrorum aequalium et similium et aequaliter dispositorum, quae transitu corporis sint flectenda seu deprimenda, et acceptam flexionem retineant, objecto velut pessulo, adeoque sint tensa; reperies corpus A librae unius, celeritate ut 2, et corpus B, librarum quatuor, celeritate ut 1, aequaliter in tale medium penetrare, seu vim suam consumere, aequali elastrorum numero depresso; adeoque cum vim suam consumerint, aequali vi producta (aequali scilicet tensione) etiam aequalem vim habuisse. Nam effectum integrum, vim producere aptum, causae aequipollere suppono. Ex his intelliges, me non tam perfunctiorie in statuendis hujusmodi versari, quam Tibi (quod miror) persuasisti. Hugenius quoque a mea sententia non est alienus. Nec minus miror, quod putas me supponere quod est in quaestione, dum corporis naturam in vi primitiva nitendi retinendique colloco. Esto subjectum illud, cui vis inhaeret vel cui attribuitur esse ipsum corpus, non ideo tamen sequitur corpus concipi debere ut praeexistens; pari enim jure etiam Ens esset prius essentia, quia haec ei inhaeret. Et quicquid demum pro primario praedicato afferri posset, talem objectionem pateretur. Quin potius hoc praedicatum, sumtum cum praedicato communi Entis, substantiae, vel subjecti, constituit corporis notionem. Sed etsi attulissem aliquid posterius corporis essentia, non ideo principium petiissem, si modo attulissem attributum aliquod reciprocum intelligibile, quod a me factum puto, ab aliis non item. De Commercio Animae et Corporis mirabilem habeo sententiam, per quam puto omnia intelligibiliter explicari; eam nunc Tibi perscriberem, si tempus pateretur, faciam tamen prima quaque occasione, Tibi gratulatus, quod etiam his meditationibus non indelectaris. Ita enim judico, praeclara agitantem non solis mathematicis circumscribi debere: imo hunc usum debere esse Matheseos, ut etiam ad caetera acuat mentem. Vacuo non puto esse opus, non magis quam atomis, nec arbitror Te dissensurum, ubi rationes meas intellexeris.

Perturbasti me mirifice, dum nuntiatam Tibi incomparabilis Hugenii mortem scribis. Cum nihil tale ad me pervenerit, erratum spero. In eo eram ut darem ad eum literas. Aliquoties mihi infausta obtigit literarum mearum remissio, ob extinctos, quibus destinabam, velut Ernestum, Hassiae Landgravium, Seckendorfium, alios. Pelissonius et Abbas de la Roque, Diarii Gallici pristinus autor, meas accepere pene moribundi. Si obiisset Hugenius, maximam jacturam passi fuissemus. Frustra precaremur, ne

obierit; sed si vivit, ut spero, precabimur Deum, ut diu vivat, ipsumque rogabimus ut praeclaras cogitationes edere maturet.

Groningensem Professionem non possum Tibi dissuadere, re praesertim eo usque provecta, eoque magis, quod non plane exploratum habeo, quantum Halis Saxonum detur. Quidquid statues, opto ut ex sententia procedat, quo ingenium Tuum ad ea convertere totum possis, quibus Scientias augeas, ut praeclare coepisti.

Pene oblitus eram dicere Bernardum Nieuwentiit, Mathematicum Batavum, duos libros contra nostrum Calculum scripsisse, quos et mihi misit; sed cum honorificam nostri mentionem faciat, respondebo in Actis, et par pari reddam. Putat dx esse aliquid, sed $dxdx$, item ddx esse nihil, nec iteratas differentiationes capere potest; pro dx, dy utitur literis a, e, etc. et ita nostra primi gradus, aliis tantum notis in suam rem transferre studet. Sed quantos usus habeant nostrae notae, pulchre admodum ostendunt, quae inter nos inde ab aliquot mensibus per literas sunt agitata. Putat etiam nostrum calculum non porrigi ad $z = y^x$, si x, y, z sint indeterminatae. Hunc, quem credit, defectum ut suppleat, comminiscitur aequationem mirabilem, quae meo more erit $y^{\overline{x+dx}} + x y^{\overline{x+dx-1}} dy - y^x = dz$. Sed ex tali aequatione nulla potest duci constructio, cum non servet leges homogeneorum transcendentium. In responsione mea ostendam, quod nos huic, quem sibi persuasit, defectui dudum et melius providerimus, et quod Tu etiam per Te ad idem, quod ego in eo negotio repereram, perveneris. Eo enim ingenio sum, ut libenter suum cuique tribuam. Abutitur interdum nostris ratiocinationibus, ut tales calculos non esse tutos probet; velut, cum ex eo quod ipsae dx constantes assumuntur, secundum nos sequi putat etiam ipsas dy fore constantes. Quare breviter indicabo, in quo peccaverit, etsi omnia non sim persecuturus.

Puta ad Te pervenisse secundam editionem Medicinae Mentis Domini de Tschirnhaus; miror quod ne nunc quidem recte dederit modum enumerandi lineas Algebraicas cujusque gradus, et quod nostra evitare affectet, spe (quam frustraneam puto) ex vulgaribus notis omnia non minus commode ducendi: quanquam fortasse facile ad haec perventurus, nonnisi quia nostra admonuere.

Constitui numerum curvarum cujusque gradus foret operae pretium. Ubi illud dispiciendum esset, an umbilici seu foci, et rectarum ab iis ad curvam ductarum summa vel differentia sufficerent ad omnes curvas enumerandas. Domino Fratri, egregio Viro, rogo ut me commendes. Ego, tametsi visus sit paulo frigidius agere, non ideo minus ingenium ejus et doctrinam maximi facio, speroque vobis convenisse. Ita autem animatus sum, ut optem omnes, quibus serio cordi est profectus solidarum Scientiarum, animis non minus quam ingeniis consentire, nihilque omittere quod alere amicitiam queat; cui consequens est, omnibus modis et captare quod conciliare, et evitare quod offendere possit, ita tamen ut veritatis jura non laedantur. Prosunt vero imprimis favere mutuis conatibus, uti mutuo inventis; tum summa in dissentiendo moderatio, candor in consentiendo, ut agnoscamus ingenue, quid cuique debeamus; postremo communicare libenter, et facere vicissim, ne alium poeniteat communicasse. Haec sunt, quibus mire augeri posse putem et perfectionem inventionum, et voluptatem invenientium. Passim autem peccatur etiam ab egregiis hominibus, dum vel gloriolam in reprehendendo captant, vel alienae laudi, etiam tacitis actibus,¹ detrahunt. Utrumque rectis ingeniis indignum, praeclaris etiam supervacuum censeo, imo gloriae quam expetunt noxium. Nam qui aliquid egregii possunt, vereri non debent, ne materia praeripiatur, cum potius juvari eos certum sit aliorum inventis, ut tanto meliora per se possint. Tuum ego pluris feci acumen maximum, quod conjunctum esse visum est cum candore, et moderatione, quae saepe deesse solent juvenibus etiam praestantissimis, at nondum expertis, quantum sit momentum in recto vivendi instituto. Cui si insistis, de quo dubitare non possum, nihil est quod a Te non expectem ad incrementum Scientiarum. Optarim autem ut nonnihil temporis etiam Medicinae meditandae conserves, quae vel maxime indiget ingenio Tuo, et vides quo applausu Tua de musculis*) fuerint accepta. Vale etc.

Dabam Hanoverae 24 Junii 1695.

*) Joh. Bernoulli dissertatio de Motu musculorum.

XIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum amicus nuper ex Batavis veniens mihi inter alia narravit, se Groninga transeuntem intellexisse una die tres Professores vocatos, atque inter illos Te, cujus nomen enuntiabat; ego Tibi ex animo gratulor, nec dubito quin, ita ferente ipsa itineris Tui ratione, videndi Tui copiam nobis sis facturus, cujus tamen rei tempus praenosse velim, quia saepe aliorsum mihi est excurrendum, ne casu aliquo spe gratissima excidam.

Nunc illud rogo, ut ante discessum a Domino Fratre Tuo, Celeberrimo Viro, multa salute a me nuntiata succedaneam Tuae curam mihi impetres, circa ea quae rogavi, sive a Domino Praeside Boisotio aliqua adveniant, sive ex Einsidelensi Caenobio obtinere liceat Vitodurani quae mihi desunt, sive quid aliud occurrat, in quo favore ejus sit opus, quem vicissim officiis demereri velim, si qua occasio offeratur.

Johannis Vitodurani Chronicon habeo ab initio usque ad haec verba: „Innocentio V. successit Johannes XXI, natione Hispanus, qui sedit pauco tempore, nam cum Camera, quam ipse pro se in Viterbii circus Palatium construxerat solum corruit, et intra ligna et lapides collisus, die VI post casum, Sacramentis omnibus perceptis, expiravit. Sedit autem anno 1277.“ Hic finit Chronicon meum. Secundum Vossium autem (in libro de Historicis Latinis) continuari debet usque in Seculum sequens. Quod si extat illa continuatio, eam mihi communicari rogo; paucarum sane plagularum erit, cum integrum Chronicon non sit admodum prolixum.

Quod caetera attinet, me ad priores refero, Tibique iter felix et caetera quoque omnia prospera precor.

Hanoverae 5. Jul. 1695.

XIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Denuo Vesontionem scribi curavi, ad sollicitandum Dn. Praesidem Boisotium, Fratrem Abbatis defuncti, ut monumentorum, quae hic Tibi promiserat, Te compotem reddat. Hactenus occasionem nullam nactus fui scribendi ad Einsidelenses, quam tamen jam ante acceptas postremas Tuas diligenter quaerebam. Interim spero me tandem quandam impetraturum, et quidem per amicum, qui eo literas ferri curabit. Nihil enim non tentabo, quando agitur de Tuis desideriis explendis, et libenter omnia seponam negotia, mei licet ipsius incommodo, si Tuis commodis obstetricandum sit. Apud mercatores nostros inquisivi, quanti constet vectura centenarii Lipsia Basileam mittendi, quem ad 12 florenos imperiales ascendere dicunt, praeter alios exiguos quosdam sumtus hisce temporibus bellicis faciendos. Brevissima via est, ut Libri dirigantur Ulmam vel Norimbergam ad Bibliopolam quendam amicum (quorum Dn. Menckenius plures novit, hacque in re officia sua contribuere poterit) qui eos ulterius ad aliquem Bibliopolam nostratem transferri curabit. Ut autem periculum publicationis vel, uti vocant, confiscationis evitent, eos muniri oportet literis, quas nuncupant, attestatoriis a nostro Archigrammateo petendis, Ulmamque vel Norimbergam mittendis: is autem qui hasce attestaterias petit, juramento asseverare debet, non esse Libros in Galliam vehendos; sic itaque haec via difficilis Tibi erit, quia eos revera Lugdunum curandos dicis. Tutiorem quamvis paulo prolixiorem viam ego consulerem, quae Francofurtum instituitur, inde enim merces absque hujusmodi literis secure transportantur, ceu Mercatores mihi dicunt, interim vectura paulo pretiosior erit.

Nudius tertius iterum literas accepi a D. D. Braunio, in quibus significat rem feliciter confectam, meque ab Ampliss. Curatoribus ad Professionem Mathematicam destinatum, a Celsiss. Ordinibus vero approbatum et confirmatum fuisse, ita ut forte, ante octiduum, Publicas Vocationis Literas sim accepturus; simulque de rebus meis, tanquam cito Basileam deserturum, disponere me jubet, quod jam mense Octobri Groningae desiderer. Expeditam adeo itineris aggressionem a me exigi certe non expectabam, quia ad minimum hyemen adhuc Basileae sperabam transigere. Citissimus iste discessus me non mediocriter turbat, praesertim cum hactenus de transferendo domicilio nondum cogitaverim, nec uxorem meam, cui patriam, parentes, consanguineos, imprimis filiolum nostrum nondum semestrem, qui pro itinere perferendo nimis delicatus est, deserere moles insuperabilis videtur, ad iter mecum suscipiendum proclivem reddere potuerim. Verbo, mille me curae et sollicitudines, ceu

hisce casibus fieri solet, obruunt: ignosce igitur, si ad tempus meditationibus mathematicis valedixero, dum fata quietiorem reconsesserint statum. Non possum tamen quin ad singula ultimarum Tuarum puncta breviter respondeam.

Quanquam egregium aliquid in animo habuerim, et peculiare compendium sperarim pro summationibus, et imprimis pro methodo tangentium inversa, ex iis quae in prioribus meis animadverti, circa comparationem rectangulorum differentialium cum polynomiorum potentiis, non tamen per otium hucusque licuit ea ulterius prosequi. Et sane multarum imagine rerum ita sum confusus, ut, nonnisi in ipso scribendi articulo, hisce animum adhibeam, et quidem satis oscitanter. Memineris me seriem universalem invenisse pro quadraturis et rectificationibus, per continuam additionem et subtractionem quantitatum aequalium, quae Tibi non displicuit: En nunc aliam non minus curiosam. Quaerenda esto $\int ndz$; differentietur ndz, habebitur $nddz + dndz$; ergo, modo meo, sumenda est tertia proportionalis ipsius $d^0 nddz + dndz$ ad $d^0 ndz$, quae itaque erit $\frac{d^0 nddz}{d^0 nddz + dndz}$ = (dividendo numeratorem et denominatorem per dz) $\frac{d^0 ndz}{d^0 ndz + dnd^0 z}$: facta divisione continua, inchoando a priori denominatoris membro, proveniet $\int ndz = d^0 n d^0 z - dnd^{-1} z + d^2 nd^{-2} z - d^3 nd^{-3} z$ etc. $= nz - dn \int z + d^2 n \int^2 z - d^3 n \int^3 z$ etc. inchoata vero divisione a posteriori membro, erit $\int ndz = d^{-1} ndz - d^{-2} nddz + d^{-3} nd^3 z - d^{-4} nd^4 z$ etc. $= dz \int n - d^2 z \int^2 n + d^3 z \int^3 n - d^4 z \int^4 n$ etc. quoniam nunc (posita dz constante) $\int z, \int^2 z, \int^3 z, \int^4 z$ etc. aequantur ipsis $\frac{zz}{1.2.dz}, \frac{z^3}{1.2.3.dz^2}, \frac{z^4}{1.2.3.4dz^3}, \frac{z^5}{1.2.3.4.5dz^4}$ etc. prior series $\int ndz = nz - dn \int z + d^2 n \int^2 z - d^3 n \int^3 z$ etc. convertetur in hanc $\int ndz = nz - dn \frac{zz}{1.2dz} + d^2 n \frac{z^3}{1.2.3dz^2}$.

$-d^3n\,\frac{z^4}{1.2.3.4\,dz^3}$ etc. quae omnino eadem est, quam in Actis publicavi, quod valdopere miror; hunc enim eventum, cum haec inciperem scribere, non sperabam, putans longe aliam seriem hac methodo proventuram. Elegans iste consensus mirifice methodorum probitatem, praesertim hujus posterioris, ubi tam mirabiliter et contra omnem consuetudinem cum literis d proceditur, confirmat. Sic etiamnum sum in opinione, infinita alia et inaudita inde erui posse, dummodo aliquis attentiori scrutatione illa prosequi vellet, quod certe a me nunc exigi non potest. Ceterum si ponamus dn constantem, erunt $\int n,\ \int^2 n,\ \int^3 n,\ \int^4 n$ etc. $= \frac{nn}{1.2.dn}, \frac{n^3}{1.2.3.dn^2}, \frac{n^4}{1.2.3.4.dn^3}, \frac{n^5}{1.2.3.4.5.dn^4}$ etc. hocque modo altera series $\int ndz = dz\int n - d^2z\int^2 n + d^3z\int^3 n$ etc. mutabitur in hanc $\int ndz = dz\frac{nn}{1.2.dn} - d^2z\frac{n^3}{1.2.3.dn^2} + d^3z\frac{n^4}{1.2.3.4.dn^3}$ etc. ubi pariter in applicatione dz, d^2z, d^3z etc. destruuntur per dn, dn^2, dn^3 etc. ita ut proveniant quantitates pure algebraicae; quae series itidem per additionem et subtractionem reperitur.

Eodem modo, quo ego, concipis curvam retrogradam (fig. 33) quae punctum habet, in quo infinitae lineae tangunt, et proinde dx ad dy omnes habet possibiles rationes; illud enim punctum nihil est quam evanescentia capituli, quod considerari potest, vel sic (ut in fig. 34) vel sic (ut in fig. 37); id quod manifeste patet in cycloidibus et conchoidibus interioribus; cycloïs enim protensa refert speciem primi, et contracta secundi, coalitus vero protensae et contractae facit curvam retrogradam. Interim difficultas hic se prodit, quam nondum mihi eximere potui. Concipiatur enim (fig. 38.) curva ABC evolvi, et evolutione describi curva AFGH; filum utique evolvens evolutione semper crescit, ita ut curva AFGH sit una continua curva. Intelligatur nunc caput BC evanescere, proindeque BF, CG evadere aequales, quo fit ut portio curvae FG degeneret in semiperipheriam circuli, adeoque continua curva AFGH constet tribus diversis portionibus AF, FG, GH. Ex hac consideratione sequitur (siquidem ab universali ad particulare sit argumentandum) si (fig. 39.) $\alpha\beta\varepsilon$ sint ex. gr. duae semicycloides communes, curvam ex evolutione genitam non esse cycloidem integram $\alpha\varphi\varepsilon$ ut hactenus creditum est, sed esse $\alpha\varphi\gamma\zeta$ compositam ex semicycloide $\alpha\varphi$, ex semicircumferentia $\varphi\gamma$, et ex portione $\gamma\zeta$. Hae cum sint diversae curvae, quomodo unicam et continuam curvam producere censendae sint, non video.

Jam satis ostendi D. Marchioni Hospitalio, ubi erraverit Craigius; verum illud publice faciendum non puto, antequam ipse Craigius ad priores meas objectiones responsionem fecerit. Praeter illas curvas transcendentes, quarum in ultimis meis mentionem feci, nimirum quarum puncta possunt algebraice haberi, video omnes esse in earum censu, quarum natura exprimitur per aequationem ad dimensionem indeterminatam ascendentem, qualis est $x^x = y$, quibus etiam accenseri possunt Quadratrix, Spiralis Archimedea, Loxodromica plana aliaeque. Possunt enim etiam in his curvis puncta quotvis geometrice determinari. Hinc Tibi deliberandum relinquo, annon jure hujusmodi curvas peculiari nomine Percurrentium nuncupaverim, ad distinctionem earum quae omnino sunt transcendentales, id est, quarum ne unicum quidem punctum algebraice invenitur; et annon medium tenere censendae sint inter algebraicas et transcendentes: cui et D. Tschirnhaus suffragari videtur, in nova editione Medicinae Mentis et Corporis pag. 109 et seqq. ubi etiam aliquas harum curvarum species profert, quas vero absolute inter Geometricas Cartesianas referri debere contendit.

Libenter concedo in osculo concurrere duos contactus, ea ratione qua Tu intelligis; adeoque certamen Te inter et Fratrem meum est pura puta logomachia, ut jam in praecedentibus meis innui; sed nego eapropter osculum esse concursum quatuor radicum: duo enim isti contactus non sunt unius ejusdemque circuli, sed duorum diversorum qui in unum coalescunt; sic in problemate quodam possent ex. gr. sex circuli curvam quamdam certa ratione tangere, qui tamen in certo casu omnes sex coalescerent; anne ideo contactus iste censendus esset concursus duodecim intersectionum unius circuli, vel cencursus duodecim intersectionum unius circuli, vel concursus duodecim radicum? Absonum utique hoc foret; posset enim circulus hac ratione quamlibet curvam secare in tot punctis quot liberet.

Ego osculum sic concipio: Esto (fig. 40.) curva quaedam ABCDE, ex cujus puncto quopiam C indefinita ducta intelligatur perpendicularis CG; centro alicubi G sumpto, satis a C distante, describatur circulus BCD, qui utique simpliciter tangit curvam in C, et alibi adhuc bis secat curvam in B et D: intelligatur nunc centrum G paulatim moveri versus punctum C mobile, quo fiet, ut etiam duae intersectiones B, D magis accedant ad idem punctum C, donec tandem alterutrum earum B vel D (utrumque enim simul impossibile est, nisi forsan partes curvae CB, CD sint similes, id est si punctum C sit vertex summus) coincidat cum puncto contactus C; hoc casu dico GC esse radium circuli osculatoris BCD. Manifestum autem est, hocce modo osculum esse concursum trium tantum intersectionum, nimirum contactus simplex C, qui aequivalet duabus intersectionibus, coincidit cum tertia intersectione B vel D; et quia hae intersectiones omnes semper in eodem circulo considerantur, ubicunque existat centrum G, erit osculum revera concursus trium et non plurium radicum.

Nisi candorem meum et ingenuitatem, ut ipse fateris, jam satis compertam haberes, subdubitarem sane annon aegre tuleris, quod fecerim quasdam objectiunculas, vel potius difficultates contra Specimen Tuum Dynamicum. Stylus enim, quo uteris, ad sententiam Tuam defendendam solito nervosior videtur. Mihi sane nunquam persuasi Te tam perfunctorie in statuendis hujusmodi versari; sed si non satis meditatus sum quae scripseras, sique judicavi paulo festinantius, condonabis; quae enim dixi, non minus mature mihi perpensa existimaveram. Interim persuasum Te velim, nullam contradicendi libidinem, sed merum veritatis amorem me eo impulisse; et credas ejusmodi pruritum, qui omnibus Philosophastris communis est, quia quod aliud agant non habent, ab indole mea longe esse alienum. Patere ergo ut scrupulum, discendi gratia, proponam, quem in responsione Tua reperio. Dicis duo corpora A et B, quae sint mole ut 1 et 4, celeritate vero ut 2 et 1, aequaliter in medium uniformiter elasticum penetrare, seu vim suam consumere aequali elastrorum numero depresso. Supponamus autem corpora A et B aequalia, sed celeritatibus moveri ut 2 et 1: secundum opinionem Tuam, corpus A quadruplo altius penetrabit in medium quam corpus B; videor autem mihi posse demonstrare profunditates corporum aequalium in medio uniformiter elastico peractas esse in ratione subduplicata, non vero duplicata celeritatum. Sit enim (fig. 41) corpus A, quod penetret in medium AB uniformiter elasticum, id est, cujus quodlibet

punctum C aequali elastro sit praeditum, adeoque ut omnes elasticitates simul sumptae in abscissa AC designentur per applicatam CF trianguli ABG: et sit corporis A celeritas prima AD. Si itaque invenienda sit ejus celeritas CE, quam in puncto C habebit, construenda est curva DEB, cujus differentiales applicatarum CE sint ut applicatae trianguli CF, id est, ut retardationes sint elasticitatibus proportionales: demonstratur autem facile, quod curva DEB sit parabola, cujus vertex D et axis DA. Habeat nunc corpus A celeritatem aliam primam Ad; ad inveniendas celeritates ceteras Ce haud dubie construenda est altera parabola deb, verticem d et axem dA habens, quae sit eadem cum priori DEB, quia utrobique elasticitates sunt eaedem. Est autem, ob identitatem parabolarum, $AB . Ab :: \sqrt{AD} . \sqrt{Ad}$. Ergo numerus elastrorum depressorum celeritate AD, est ad numerum elastrorum depressorum celeritate Ad, in subduplicata ratione celeritatum ipsarum: ideoque juxta hanc demonstrationem corpus A requireret celeritatem quadruplam ad producendum effectum duplum, loco quod secundum Te requiritur celeritas tantum dupla pro effectu quadruplo.

Quae mihi narras de Bernhardo Nieuwentiit, omnino lepida sunt. Ecquis a risu abstinere posset, cum ille tam ridicule de nostro Calculo, velut caecus de coloribus, ratiocinatur? Quid, quaeso, sibi vult mirabilis ista aequatio, quam comminiscitur? Erunt sane irriti conatus, quos intendit contra aliquid cujus nequidem ideam habet; nec felicius ipsi cedet, quam Catelano aliisque, qui deprimere voluerunt Calculum differentialem eam ob causam tantum, quia illum assequi non poterant. Ars enim non habet osorem, nisi sui ignorantem; aggressores autem diversi sunt, alii modesti, alii vehementes, ad quos priores refero Nieuwentiit, eumque laudo, quod ita moderate procedit. Optarim interim ut mihi contingat videre ejus duos Libros.

Forte fortuna in manus meas incidit secunda Editio Medicinae Mentis D. Tschirnhausii; miror et ego, qui fieri potuerit ut insufficientem dederit enumerationem curvarum algebraicarum, siquidem statim ad oculos cuilibet patet, omnes illas omisisse, quarum aequationem ingrediuntur diversae potentiae ipsius y. Caeterum ejus librum obiter quidem perlustravi; modus tamen scribendi non ubique placet, dum suos errores olim commissos palliare, propria inventa, utut satis communia, exaggerare, aliorum vero imminuere tam scite novit. Non puto ope focorum, ut quidem jactat, omnes curvas et vel solas algebraicas construi posse.

Frater meus profectus est ad acidulas, quarum usu liberari sperat ab affectu hypochondriano, quo frequenter vexatur; vides exinde cujus sit naturae. Non possum non approbare, quae adducis monita pro incremento et promotione solidarum scientiarum. Utinam omnes qui eruditi haberi volunt, eorum meminissent! Non majus puto vitium imo peccatum, quam si quis lumen suum quod ab Altissimo mutuo quasi accepit, abscondere et aliis invidere velit; ac si de eo pro lubitu disponere possit, cum tamen nihil habeat quod proprium et cujus rationem Datori suo non redditurus olim sit. Plerique de his quidem non cogitant, sed illos si non Theologica saltem politica ratio movere deberet, si serio perpenderent, se gloriae suae, cui adeo litant, in tantum detrahere, quantum illam adaugere student; quis enim non odit parcum datorem? Qui mihi aliquid invideat, quod citra damnum suum mecum posset communicare, eum sane amare non possum, multo minus laudare. Praeter haec omnia tota quam hujusmodi docti pro se sibi acquirunt laus est, quod eorum scientia ab omnibus annihilatur, secundum Persii dictum: Scire tuum nihil est, nisi te scire hoc sciat alter. Quod ego e meliore luto ficta habeam praecordia, non levis est causa, quod in tempore cum hominibus vivere didici; id quod quam plurimis deesse video, qui non attendunt attritum illud quod homo sit animal sociabile.

Caeterum optime me mones, ut nonnihil temporis etiam Medicinae meditandae conservem; sed excusabis me, cum noveris meditationibus assiduis a tenera aetate adeo me tradidisse, ut inde mea constitutio corporis delicata admodum facta sit, quae non permittit ut actionibus, quae non quidem mentis, sed corporis applicationem postulant, diu immorer. Hinc (quod doleo) aegre feror ad diuturnam lectionem librorum, ad scribendum, ad calculandum, verbo, ad omnia quae corpus et inprimis oculos fatigant. Ob hanc rationem paucos omnino evolvi authores, imo nequidem Cartesii Geometriam attente me perlegisse asserere possum; praecipua namque quae in Mathesi facio inventa, inter nocturnas horas (quas jam lecto decumbens somno suffurari soleo, quod meditationibus commodissimae videantur) mihi sola attentio suggerit, nullo plerumque arrepto calamo ad faciendum calculum, quem licet prolixissimum, sola mente, longe expeditius instituo, quam si notas in chartam conjicerem.

Cum nuper meditarer super rectificatione Curvarum, inveni modum generalem et promptum, data curva qualibet construendi curvam aliam, quae cum proposita sit aequalis arcui circulari. Unde determinare me posse puto, utrum curva aliqua sit rectificabilis vel saltem cum circulo comparabilis necne. Si mihi tempus suppetierit, aliquid de hoc ad Acta referri curabo. Ex Hollandia intelligo, Nob. Hugenium non quidem mortuum, sed per integrum quadrimestre jam graviter decumbere; ex Gallia vero mihi scribitur, illum in mentis impotentiam incidisse, quod ipsi jam olim etiam solemne fuisse Parisiis audivi. Precor Deum, ut incomparabili Viro et mentis et corporis sanitatem quamprimum restituat. Vale et ama etc.

Basileae d. 17. st. v. Julii 1695.

P. S. Hasce jamjam itineri traditurus, Tuas 5. Julii datas accipio. Gratias debitas refero pro congratulatione, qua vocationem meam comitaris; Tibi vicissim prospera quaeque precor. D. Marchioni Hospitalio dudum promisi, me, si absque uxore proficiscar, iter suscepturum Parisios. Dicas mihi, quaeso, qua ratione nunc fieri possit, ut et Tua praesentia mihi sane super omne gratissima frui detur, ita tamen ut immensas itineris ambages evitem; quae quidem me non impedirent, si modo id commode et sine periculo fieri posset. Caetera quae me jubes omnia fideliter exequar, ut jam supra innui. Optarem ut Fratrem aeque ac me semper paratum invenires, Tuaeque civilitati ille responderet. Nosse cuperem, an ad Te nondum literas dederit.

XV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Te discessum e patria meditantem oporteat occupatissimum esse rebus necessariis et propriis, intempestivum, imo iniquum foret ingerere Tibi aliena et pertinentia ad internum illud mentis theatrum, quod externa quiete indiget. Itaque pleraque hujus Epistolae differas licet, dum vacabit examinare. Tantum scribo Tuisque heri acceptis statim respondeo, inexpectatae illius difficultatis causa, quam de libris Basileam mittendis objecisti. Unde sequitur nec Bibliopolis vestris liberum fore commercium librorum ex Germania, si non sit integrum ipsis mittere eos deinde quo velint. Verendum etiam est, ne pari cautione opus sit in his, quae Francofurto ad vos deferrentur, neve omissa illa libri sint in periculo simili. Quare rogo ut inquiras tum in hoc, tum et in pretium vecturae Francofurtensis. Et si forte mature Tibi discedendum sit, rogo amicum aliquem mihi nomines, per quem confici talia possint, et qui mecum de his communicare non aspernetur. Sumtus literarum libenter feram, et quia non possunt literae uno impendio ad vos liberae curari, restituam.

De me in itinere adeundo non erit cur sis sollicitus, quoniam ubi Groningae eris, satis ad ea sese per otium occasio dabit, cum non adeo magno hinc intervallo tunc sis abfuturus. Itaque quanquam non facile venire huc possit hospes gratior, ferenda tamen est mora necessaria. Ubi ad Illustrissimum Hospitalium perveneris, cultum a me Tuo, quaeso, testimonio confirma. Mirum est solum ipsum in Gallia in Geometriae profundiora penetrasse, dum tot alii, qui ab his studiis etiam praesidia vitae petunt, inter vulgares notitias torpent. Itaque magna nobis ab ejus ingenio adhuc promitto.

De Medicina optarim ut sis sollicitus, vel Tui ipsius causa, non quasi ego Te velim ad praxim illam fastidiosissimam damnari, sed quod putem meditando a Te magna quaedam erui posse ad interiora naturae cognoscenda, quibus praxis ipsa juvetur. Nam quae hactenus Cartesius vel alii in Physicis dedere, parum admodum ad usum faciunt.

Mathematicis nolim ut nunc mentem occupes; volo tamen paucis tangere loca literarum Tuarum, quae id postulare videntur; de quibus aliquando cogitabis, cum plus otii nactus eris. Ubi comparationem illam inter polynomii potentias et rectanguli differentias porro prosecutus fueris, spero Te nos reperta Tua ignorare non passurum. Ego quoque per otium de re tanti momenti cogitabo. Elegantissima interim methodi hujus nostrae mirabilis confirmatio, novo hoc seriem tuam prodeundi modo, sese prodit. Quod difficultatem attinet lineae unius continuae ex circulari et cycloidali compositae, non puto nos ea re turbari debere, cum revera unius lineae perfecta generalisque notio non detur, quae vetet partem ipsius A uniri cum parte ipsius B, et quae naturae sunt diversissimae, certis describendi modis, saepe unam componant. Ubi suo

tempore Tibi vacaverit, gratum erit nosse paullo distinctius, quae contra Dnum. Craigium ad Dnum. Marchionem Hospitalium scripseris.

Cogitandum puto, annon omnes lineae transcendentes sint simul percurrentes, licet nondum id nobis semper sit exploratum; quemadmodum certe omnium illarum, quae a Circuli et Hyperbolae quadratura pendent, nota nobis est ratio percursus. Artis jam foret, simile quiddam et in aliis invenire. Estque id ipsum ex meis desideratis unum, quae vobis valentioribus perspicacioribusque commendo.

Quod controversiam de radicibus osculi attinet, scito me jam dedisse manus, et ante dies complures iis quae Frater tuus, vir egregius, responderat, olim perfunctorie, sed nunc occasione praecedentis Epistolae Tuae curatius inspectis, omnino deprehendisse verissima ejus monita fuisse: jamque Dno. Menckenio scripsisse, ut retractationem meam inserat Actis, quo Frater tuus candorem meum intelligat. Vereor enim ne sequius de me existimaverit, quem forte credidit palliare errorem voluisse; cum tamen dilatae agnitionis non alia fuerit causa, quam distractio animi, longe diversa studia plerumque volventis. Hoc rogo, ut ei cum salute plurima significes. Nullas equidem hactenus ab eo accepi literas; sed tamen nec velim ei laborem scribendi fortasse ingratum imponi.

Si rationem invenires determinandi, quae curva sit rectificabilis vel per se vel saltem cum circuli arcu, rem maximi momenti in hoc negotio praestares. Itaque hortandus es, ne hujus meditationis obliviscaris.

Aliquid egregium dedisset Dnus. Tschirnhausius, si ostendisset modum, data linea algebraica, inveniendi ejus focos seu modum describendi lineam per fila circa quaedam puncta fixa per convergentes aut divergentes aut vicarias iis parallelas, aut ostendendi impossibilitatem. Equidem potest eo perveniri, si calculo deducamus curvas ex focis, et aequationes ad curvam inventas comparemus datae, sed ego optarem Methodum directiorem et breviorem. Modus, quo ipse percurrentes cum algebraicis comparat, coactus est, et in speciem detortus. Ego majores ex nova Libri ejus Editione progressus expectabam. Praeclara tamen in Physica experimentali observasse puto, quae vellem ut ederet potius quam Geometricis solis immoraretur, in quibus mihi optimas vias ingredi non videtur, dum commodas meditandi rationes ab aliis monstratas evitare affectat. —

Nunc venio ad controversiam inter nos agitari coeptam de aestimatione potentiae motricis, speroque nos rectissimam viam terminandae ejus ingressos, per penetrationem scilicet in medium Elasticum, aliterve aequaliter ubique resistens. Sed opus est, ut rem ordiar paulo altius. Ajo igitur in universum Artem [ae]stimandi in eo consistere, ut omnia reducamus, quoad licet, ad mensuram quandam congruam, cuius simplici repetitione sit opus, ut in numeris est unitas. Itaque concipiamus jam corpus B in medio liberrimo sine ullo impedimento moveri, certa velocitate, ut a, et successive aliquot globis inter se aequalibus et ejusdem materiae, nempe L, M, N etc. eundem dare gradum velocitatis, ut e, atque hoc effectu eoque solo peracto, conquiescere, omni vi agendi omissa et huc impensa; tunc dico unum ex globis, motum celeritate e, quam accipit, posse haberi pro mensura potentiae; et cum omnium globorum L, M, N, aequalis sit potentia, et aggregatum potentiae omnium, id est, totus effectus causae toti seu potentiae corporis B, in hunc quippe effectum impensae, aequetur (quod unum suppono, sine quo nulla erit possibilis virium aestimatio) sequitur potentiam corporis B, velocitate a praediti, exprimi per potentiam globi L, moti velocitate e, numero globorum multiplicatam, seu potentiam corporis B esse ad potentiam globi L, ut numerus globorum est ad unitatem. Hinc porro, si aliud sumatur corpus C, motum celeritate h, quod itidem vim suam exacte consumat in globorum dictorum numerum certum, dando cuivis velocitatem e, tunc dicam ego potentias corporum C et B ita esse inter se, ut sunt numeri globorum aequalium in velocitatem e concitatorum. Sed jam pro globis aequalibus, certa velocitate praeditis, assumamus alios effectus aequales repetitos, ex. gr. certa pondera ad certam altitudinem elevanda, dico nos eam proportionem potentiae, quam per viam praecedentem globorum, pure mechanicam, nihilque physicum involventem consecuti sumus, etiam consecuturos, si jam gravitatem adhibeamus. Nempe finge (fig. 42.) λPL normam seu angulum rectum, ita ut pertica λP sit verticalis et PL horizontalis, sustinens grave L, idemque esse in normis μQM, νRN etc. sustinentibus gravia M et N; quae gravia sint aequalia et per omnia similia inter se, ceu globi, qui ante; et normae sint etiam per omnia sesе eodem modo habentes, ita ut

λ, μ, ν sint in eadem recta horizonti parallela, et L, M, N itidem in eadem; patet corpus B incurrens successive in perticas λP, μQ, νR, quas fingimus esse lineas rigidas, ponderis et resistentiae expertes, elevare hos globos graves L, M, N ad eandem altitudinem, veluti L ad altitudinem (L) unde globus L elevatus ad (L), et delabens per arcum (L) S deveniet in horizontem TS vel LQM; ibique procurret ea velocitate, quam postulat descensus altitudo, et quam adeo dedit ipsi corpus B elevando; idemque erit in caeteris M, N, adeoque perinde est, ac si aestimemus numerum gravium aequalium ad eandem altitudinem elevatorum, an vero corporum aequalium numerum eandem velocitatem nactorum, si scilicet tantus sit ascensus, ut praecise illam velocitatem producere possit. Unde intelligitur posse nos tuto adhibere gravium aestimationem ad aestimandam potentiam. Est autem gravitatis consideratio pulchre apta ad hanc aestimationem, quia in homogeneas partes commodissime dividi potest. Finge scilicet B consumere potentiam suam incurrendo in duas perticas λ et μ, sed C incurrendo tantum in unam λ, utique dupla erit potentia ipsius B, at potentia ipsius C erit tantum simpla. Hinc patet potentiam ipsius B, quae elevat duas libras L et M, ad altitudinem unius pedis (si (L) vel (M) ponamus pedali altitudine esse super horizontem LM), esse duplam potentiae ipsius C, quae elevat solum unam libram L ad altitudinem unius pedis. Similiter etiam hinc sequitur, potentiam, quae elevat libram ad duos pedes, esse duplam potentiae quae elevat libram ad unum pedem. Nam finge grave L elevatum incursu ipsius B in normam λ, tradi in (L) ipsi normae μ, facili quadam connexione seu machinatione, ut ejus ope rursus tantundem elevetur, ubi B in μ incurrit, patet B non minus integram suam vim consumere hoc modo quam ante; nihil enim refert, sive (L), sive M, ad pedem secundo incursu elevet, cum a normae ipsius, machinationisve resistentia animus abstrahatur. Itaque potentia ipsius B consumitur in elevationem ipsius librae ad pedes duos; unde sequitur porro etiam ejusdem potentiae esse elevare libram ad duos pedes, cujus est elevare duas libras ad pedem unum.

Jam veniamus ad elastra, seu ad medium elasticum; vides facile quo tendam; nempe finge (fig. 43.) Lλ, Mμ, Nν esse elastra aequalia et similia, eodem modo tendenda procursu mobilis B: utique (ex principio aestimandi nostro) potentiam ipsius B aestimabimus numero talium elastrorum aequaliter tendendorum, totam ejus potentiam in hoc unum consumentium. Pono autem ejusdem potentiae esse elastrum aliquod tendere, et grave quoddam attollere ad altitudinem, ex qua cadens id ipsum elastrum sic tendere possit; sive ejusdem esse potentiae Elastrum aliquod mediate vel immediate ad determinatum tensionis gradum producere: ex principio scilicet nostro, quod effectus integer suae causae aequipolleat, seu quod aequipollentia sint, quae idem possunt. Hinc necesse est, ut pro elastris substitui possint pondera, aut vice versa.

Itaque ut nunc ad id veniamus, de quo proxime inter nos agebatur, necesse est corpus B, habens celeritatem ut 2, quadruplo altius penetrare posse in medium, talibus elastris aequabiliter disseminatis instructum, quam corpus aequale D, habens celeritatem ut 1. Nam si corpus D potest attollere unam libram ad altitudinem pedis, potentiam scilicet suam consumendo, poterit corpus B duplae celeritatis attollere unam libram ad quatuor pedes, vel quatuor libras ad unum pedem, vel ut utrumque una locutione complectar, poterit quater attollere unam libram ad unum pedem, antequam vim suam consumat; vel quod idem est, si unum elastrum possit intendi lapsu librae ex pede, consequens est B celeritate dupla posse quatuor elastra intendere; si D aequale, celeritate simpla, tantummodo intendat unum.

Hae ratiocinationes semper sibi respondent et satisfaciunt. Si vero non procederent, et alia proportio virium inter duo corpora datae celeritatis oriretur, consumendo ipsa in Elastris intendendis, quam prodiret in ponderibus attollendis, aut in motibus imprimendis, caderet tota Scientia Dynamica, seu impossibile esset vires aestimare: imo potentia non esset quantitas certa, sed quiddam vagum et absonum. Sed haec fusius explicui, ut aliquando per otium examinares. Res enim magni momenti est.

Caeterum, si ad Tua priora nuper respondere visus sum solita excitatius, hoc studio augendi utriusque nostrum attentionem factum, Tibi facile spero, re considerata, persuadebis. Ego facillime objectiones fero; a Te vero adeo non refugio, ut potius expetam, quod sciam mihi fructuosas esse solere, praesertim ubi animum intenderis. Et quanquam in re, diu a me considerata, aliquid praestitisse sperem, facile tamen agnosco, eo Te ingenio esse, ut diuturnos labores nostros brevi non aequare, sed et vincere possis. Puto autem Dynamices negotium a Te festinatius tractatum fuisse, quod omnia tam pulchre determinata haberi posse, quam mihi deprehendere visus sum, non suspicabaris. Quod superest, vale, et ubicunque sis, me ama, et felicibus utere fatis.

Dabam Hanoverae 29. Jul. 1695.

P. S. Incomparabilem Hugenium obiisse haud dubie intellexisti. Quanta haec sit jactura, dici satis non potest, ob summum viri judicium, cum maxima profundissimaque rerum notitia conjunctum. Utinam, quemadmodum spero, reperiantur in ejus schedis, ex quibus pars eorum, quae meditatus est, erui et publico commodo produci in lucem possit. Dolendum est quod vis morbi, quae mentem obfuscaverat, non permisit ut ipse, quod optimum visum fuisset, ea de re non statuerit atque ordinarit. Nisi forte (ut fieri solet) paulo ante mortem ad se rediit ultimamque voluntatem suam aperuit, quod si factum est, non diu latebit.

XVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum forte Berolinum nuntiassem Te a Groningensibus vocatum esse, jussu Illustrissimi Danckelmanni mihi commissum est, ut inquiram, annon commode effici possit, ut Halam Saxonum potius accedas. Itaque volui hoc Tibi significare, ut mihi, si videbitur, mentem Tuam amica fiducia aperias, statumque Professionis Groninganae atque emolumenta indices; ita enim fortasse in Te exorando elaborare majore cum fructu possem. De caetero, me ad praecedentes meas refero, incertus an hae Te Basileae sint inventurae. Vale.

Dabam Hanoverae $\frac{5}{15}$ Septembr. 1695.

P. S. Ubi mea de penetratione in medium elasticum responsa expendere vacaverit, sententiam nosse velim.

Nolim, ut mea de quibus ad Te in prioribus scripseram, vel minimum officiant tempori Tuo, cujus nunc potissimum habenda ratio est, dum iter magnum paras. Itaque si (quod ex silentio suspicor) Tibi nunc ad hoc animum adhibere non licuit, scito ea me aequitate esse, ut nolim commoda mea cum aliorum incommodo conjungi. Fortasse aliquid ex Te didicero, cum tempus et locus scribere patientur.

XVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Publicas Vocationis literas, quod bono sit omini, accepi ipso meo natali die, vigesimum nonum aggrediens annum. In eo sum, ut nunc quovis die relicturus sim patriam, quod sane intra octiduum fiet: tandem uxorem induxi, ut se mihi praebeat comitem in itinere, una cum puerulo nostro et famula. Hanc ob causam iter non suscipiemus per Galliam, sed recta Francofurtum petemus. Cum advenero Groningam, de adventu meo Te quantocyus certiorem reddam, ideoque responsionem Tuam eousque differas. Vitodurani Chronicon nec apud Einsidelenses reperire est, ut ex Bibliothecarii, cui ipsemet ego scripsi, responsione quam Tibi mitto videre poteris. Jam tertia vice Vesontionem scribi curavi, sed nihil adhuc responsi venit. Caetera quae me jussisti, diligenter curavi; iterum apud diversos mercatores inquisivi, quid faciendum sit, ut merces tuto ad nos perveniant ex Germania, sed omnes unanimiter confirmant, attestatoriis illis omnino opus esse, nisi velint periculum publicationis incurrere; quae Francofurto ad nos deferuntur, pari quidem cautione opus habent, sed ut plurimum transeunt sine attestatoriis, non quod iis non indigeant, sed quod telonarii non ita diligenter inquirant. Poteris itaque exiguo cum periculo hac via transitum tentare neglectis attestatoriis. Vectura centenarii Lipsia Francofurtum mittendi constat 8 fl. et Francofurto Basileam 6 fl. Si vero omni periculo vacare velis, iter per Italiam suaderem; sunt enim ex nostratibus, qui eadem via utuntur, si quid ex Germania in Galliam curari volunt. Substitui amicum qui me absente omnia, quae desiderabis, exacte conficiet; est ille Dn. Battier Med. Doctor, vir honestus et officiosus, multa eruditione pollens praesertim in philologicis et linguis, nec mediocrem etiam notitiam habet in mathematicis; calculum differentialem ex nostra manuductione jam mul-

tum sibi familiarem sibi reddidit. Non dubito si alicubi locorum se occasio praeberet talentum suum collocandi, quin eam acciperet. Velim Te inter et illum commercium literarum iniri, habebis eum ad omnia officia paratissimum.

Ubi Groningae fuero, omnia tentabo ut mihi aliquando Te videndi copia detur; hoc enim unicum est, quod ardenter desiderem. Si solus profectus fuissem, multos Patronos, quos in itinere adiissem, mihi proposueram. Sic spe excidi perveniendi ad Dnum. Hospitalium, quem etiam propediem rus abiturum intelligo. Mirum non est illum solum in Gallia in Geometriae profundiora penetrasse; ideo enim tot alii, qui his studiis incumbunt, inter vulgares notitias torpent, quod nostra non putent esse de pane lucrando. Quis unquam sordidi lucri causa literis se accingens aliquid egregii praestitit? Praeter hoc optime nosti, Gallorum indolem esse, omnia quae ab Exteris proveniunt inventa aspernari. Bono oportet sint signo nati Dni. Hospitalius, Varignonius et pauci alii, quod aequius sint animati; plurimos enim alios novi, inter quos etiam Dn. de la Hire, qui aegre et indigne sane ferebant, cum de nostris loqueremur, ut torvus eorum vultus satis indicabat: nescio annon me juvenem, cum hominibus gravibus ita loquentem, audire dedignati fuerint, ita ut inventa Tua forte ab illis benignius recepta fuissent, si praeconem habuissent graviorem.

Vix puto omnes lineas transcendentes esse simul percurrentes; omnes enim percurrentes, ope Logarithmicae, construere possum; et hoc modo quadraturae circuli et hyperbolae, imo omnium spatiorum ab invicem dependerent, quod egregium inventum esset.

Gaudeo Te nunc nobiscum in eadem esse opinione circa numerum radicum osculi: certe credideram aliud quid subesse, quod ita firmiter contrariae sententiae inhaeseras; saepe enim contingit, ut rem diversimode considerantes, etiam eam diverso modo concipiamus, licet in puncto quaestionis conveniamus. Hujusmodi controversia agitata fuit inter Clavium et Peletarium, de angulo contactus, quamvis, quod verius videtur, neutrum ejus naturam bene percepisse crediderim. Dnus. Hospitalius etiam in nostram opinionem transiit, et miratus est Te in re tam clara a nobis discrepare. Fratri reduci ex acidulis retractationem hanc, cum salute a Te significavi; se proxime Tibi scripturum dicit. Ex quo reversus me ex patria abiturum audiit, paulo humaniorem se gerit erga me, unde colligo quod quem odit praesentem, absentem me forte sit amaturus. Tantum abest ut ipsi ideo male cupiam, ut potius omnia luber obliviscor. In hunc finem nolui ipsum latere, quae hactenus inter nos agitata fuere, quorum novitate non parum illum commotum sensi; praesertim eorum quae de polynomii potentiis et rectanguli differentiis comparandis invenimus: his enim plane nihil simile quid antea inaudierat.

De ratione comparandi curvas cum arcubus circularibus aliquid ad Acta*) misi; sed speculationem illam de comparandis polynomii potentiis cum rectanguli differentiis nunc prosequi plane non licet, ob plurima alia negotia quibus distringor.

Nescio cuinam causae tribuam, an stupiditati ingenii mei, an vero distractionibus animi, quod modum Tuum aestimandi potentias motrices nondum capiam; tertium enim Te hallucinari, absit ut dicam. Verissima mihi videntur principia Tua, nempe effectum integrum suae causae aequipollere; item corporis B, cujus velocitas est a, potentiam mensurari debere per numerum globorum L, M, N etc. quibus eodem velocitatis gradu e impresso, illud quiescit. Hinc potentiam corporis B, velocitate a moti, esse ad potentiam corporis C, velocitate h moti, ut numerus globorum ab illo, ad numerum globorum ab hoc, in velocitatem e concitatorum. Haec, inquam, omnia concedo; imo et hoc, quod pro globis aequalibus certa velocitate praeditis, assumi possint alii effectus aequales repetiti, nempe certa pondera ad certam altitudinem elevanda; et proinde duplam potentiam elevare duplo plura pondera aequalia ad eandem, puta, altitudinem; triplam, triplo plura; quadruplam, quadruplo plura, etc. Vel quod eodem redit, si loco ponderum aequalium, quae successive elevanda sunt, sumamus idem pondus, sed quod toties elevandum sit, quot fuerunt pondera, habebimus utique eundem effectum et proinde aequalem potentiam: nihil enim refert, sive semper idem pondus successive novum ictum recipiat, sive aliud aequale substituatur. Sic facile concedo potentiam ex. gr. quadruplam elevare unum pondus, quater ad eandem vel aequalem altitudinem, id est, pondus illud ascendet *per vices* ad altitudinem quadruplam; sed (in quo controversiae cardo versari videtur) nego, illud pondus, si potentiam motricem, quam per vices exhauriebat, uno ictu absumat, ad altitudinem tantum quadruplam *uno saltu*

*) Meditatio de Dimensione linearum curvarum per circulares. Act. Erudit. 1695 p. 374.

ascendere. Differentiam omnino faciendam puto inter elevare pondus aliquoties ad altitudinem, et inter elevare idem pondus ad eandem altitudinem toties sumptam; non enim eadem potentia utrobique requiritur; contra quam Tu statuere videris, quando dicis: *Unde sequitur ejusdem potentiae esse elevare libram ad duos pedes* (ego addo duabus vicibus) *cujus est elevare duas libras ad pedem unum.* Aliter se habet in medio aequaliter elastico; cum enim in eo elastra aequalia et similia aequalibus intervallulis sint disseminata; haud dubie, dupla potentia duplo plura elastra deprimentur, et proinde spatia percussa erunt in ratione potentiarum. In hoc itaque convenimus; sed et hoc ipsum arguit, elevationes ponderum aequalium uno saltu factas non esse horum ponderum potentiis proportionales. Nam si gravitatis causam elastrorum resistentiis comparemus, videbimus elastra ista, id est, sollicitationes ad gravitatem, non fieri spatiolorum percursorum, sed tempusculorum intervallulis aequalibus; ita enim gravitas explicatur: ceu notum est Galilaeum accelerationes gravium descendentium deduxisse ab impulsionibus materiae ambientis, singulis momentis aequalibus grave stimulantis. Hoc posito, evidentissimum est, pondus ascendendo ad quadruplam altitudinem, non nisi duplo plures impulsiones superare; siquidem etiam nonnisi duplum tempus requiratur, et tempora sint ut numerus impulsionum. Ergo, si superatio unius impulsionis sumatur pro communi mensura potentiarum, juxta Tuum ipsum principium, sequitur ad elevandum pondus uno jactu ad altitudinem quadruplam, duplam duntaxat requiri potentiam; adeoque elevationes esse in ratione duplicata potentiarum: et cum elevationes etiam sint in duplicata celeritatum, potentias esse ut ipsas celeritates, et non ut quadrata harum. Sed diutius his immorari non possum, quia aliae cogitationes me ab his abducunt; quamquam plurima adhuc alia habeam, quae mihi in Tuas partes transire non permittunt. Optarim ut scrupulum hunc meum diluas et ingenue dicas, in quo me errasse putes; a Te enim doceri mihi semper summa voluptas fuit. Interim quae a me Tibi objectiones fiunt, non objiciendi, sed discendi gratia, factas puta: non dubito, quin et Tibi interdum utiles esse possint.

Tristissimum nuncium de obitu Incomparabilis Hugenii jam ex Belgio acceperam. Ego, ut puto, prae aliis summam feci jacturam, si vel solam eum videndi spem amissam considerem. Dnus. Hospitalius mihi scribit habuisse illum 66 annos, et Fratri suo exheredato substituisse heredes nepotes suos. Solatium nobis est, quod ante mortem de Manuscriptis suis optime disposuerit: nominavit enim, ut audio, duos Mathematicos Batavos, quibus schedas suas committi jussit, ut praestantiora typis mandentur. Quantum damnum, si ea intercidissent!

Vale et fave etc.

Basil. d. $\frac{24 \text{ Aug.}}{3 \text{ Septembr.}}$ 1695.

XVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Haud mirabere silentium meum, ubi ex hisce intellexeris me jam prope sex septimanas esse in itinere, quod ob tenellum nostrum infantem satis lente procedit. Interim ego miror, quod ultimas meas quas octiduo ante discessum Tibi scripseram, nondum acceperis, prout ex honoratissimis Tuis $\frac{3}{13}$ Septembr. datis mihique huc transmissis colligo. Spero eas nunc ad Te recte pervenisse, ex iisque vidisse novas meas difficultates quas in responsis Tuis de penetratione in Elasticum medium repereram, rogo eas aequi bonique feras. Miseram etiam literas Bibliothecarii Einsidelensis, quae Vitoduranum nec apud Einsidelenses haberi ferebant. Sub abitum Bibliopola Basiliensis mihi monstrabat literas Vesontione, ubi monumenta historica a Boisotio Tibi promissa Abbati Nicaise tradita dicuntur, ut eorum Te compotem reddat. De caetero Tibi commendavi Dn. Samuelem Battier Med. D. qui Tua me absente optime curabit. Velim ipsum quae facta voles libere jubeas.

Quae mihi narras de Professione Halensi, multum placent, sed doleo quod res non amplius sit in integro; essem enim Tibi propinquior, si ibi starem. Promisi Groningensibus et nescio quo pacto absque violatione honestatis ab iis liberari possem, nisi forsan postquam aliquot annos illis inserviero. Stipendium annum est quingentorum thalerorum solidorum seu argenti unciarum, praeter emolumenta academica et institutiones privatas, quae eandem fere summam conficiunt. Heri fui Hagae Comitum, ubi Illust. Danckelmannum ipse alloquutus fuissem, si a Te habuissem literas

commenditias. 24^{to} hujus vendentur ibi auctione publica Nob. Hugenii libri omnes. Lugduno Bat. transii, ubi Volderum Mat. P. adii, quem breve post colloquium reliqui, praesertim ubi illum non ita bene de nostra methodo sentire audirem, quam totam ex Slusiana deductam dicebat. Dn. Nieuwentiit etiam libenter viderem, sed extra urbem nescio ubi degit. Vale etc.

Dabam Amstelodami $\frac{8}{18}$ Octobr. 1695.

P. S. Responsionem Tuam si qua me dignaberis Groningae expectaturus sum; dirigere eam poteris ad Dn. Braunium Doct. et Prof. P. S. T.

XIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quod vigesimum nonum aetatis annum ingredienti Tibi, ipso natali die, vocatorias Groninganorum literas redditas scribis, facit ut Tibi gratuler de tempore hactenus tam bene collocato. Itaque optima quaeque porro non possum non ominari ac vovere. Gratias ago, quod Vesontionem pariter et ad Einsidelenses scripsisti aut scribi curasti. Abbas Nicasius, Divionensis Canonicus, Vir doctus et clarus, mihi Praesidis Boisotii literas ad se pollicitatorias nuper misit. Nec dubito quin sit promissis staturus. Si Basileam destinet, quae exspectare me jussit, utar beneficio Tuo, et D. Doctoris Battierii, experientissimi viri, procurata mihi a Te benevolentia, quem a me ut officiose salutes rogo.

Nondum pro certo possum affirmare, omnes transcendentes simul esse percurrentes, ut appellas, id est, per puncta secundum Geometriam ordinariam designata descriptibiles; est tamen cur de plurimis suspicer ita esse, nec dum video quid de reliquis probibeat. Id fateor, fastigium foret Geometriae transcendentis, si huc res actu ipso deducta haberetur, ut alias dicere memini. Nondum tamen ostensum est, necesse esse ut omnes percurrentes ad quadraturam Circuli et Hyperbolae reducantur, cum sint resolutiones algebraicae, quae nec per anguli nec per rationis sectionem construi possunt; quibus duabus Circuli et Hyperbolae quadratrices per puncta describuntur, et caeteras tamen itidem ad curvarum per puncta inventionem adhiberi, transeundo de gradu in gradum, non video quid prohibeat.

Quod ad aestimationem potentiae attinet, videris mihi tam prope nunc accessisse ad mentem meam, ut tenue illud velum intergerinum, quod nos separat, facile tolli posse videatur. Hoc unum Te moratur, quod aliam potentiam requiri putas pro elevando pondere (fig. 44) L ad altitudinem P Q quater repetitam, seu ad altitudinem P T quadruplam ipsius P Q, percursam *quatuor vicibus*, quam quae requiritur ad idem pondus A elevandum ad altitudinem P T (vel ei aequalem) percursam *una vice*. Sed ubi aliquando de his meditari attentius vacaverit, ipse credo miraberis hic Te discrimen suspicari potuisse. Ita enim comparata est natura, ut sive per vices, sive uno tractu agere aliquid coneris, nunquam majus eadem vi efficias; alioqui nihil foret facilius motu perpetuo mechanico. Nec plus interest, quam inter pecuniam minutatim per obolos, sed saepe repetitos expensam, et eandem magnis summis ac per talenta effusam. Ipse etiam vides pondus L ad altitudinem P T uno tractu ascendens, revera non simul, sed per gradus P Q, Q R, R S, S T eo devenire; nec aliud esse discrimen, quam quod nullum ita est intervallum inter vices. Possum autem intervalla inter ascensiones interponere, ut tamen fateri oporteat nullum nasci discrimen; veluti si idem grave L primum horizontaliter currat per 1, 2; inde inclinate assurgat per 2, 3, cujus altitudo perpendicularis aequet P Q; deinde rursus horizontaliter eat per 3, 4, et inclinate assurgat per 4, 5, cujus altitudo perpendicularis aequet Q R; et ita porro per 5, 6; 6, 7; 7, 8; 8, 9. Sed novam distinctionem, opinar, afferes dicesque, hoc Te concedere, si primo impetu concepto pondus L rem peragat; secus vero, si denuo sit nova impressione excitandum. Equidem ratio aliqua distinctionis hujusmodi expeti possit, quam ego nullam video, nisi quod permissum est respondenti rigore summo argenti τὴν θέσιν διαφυλάττειν, quamdiu etiam citra verisimilitudinem potest. Unde vel ideo quod alias admittenda mea conclusio foret, distinctionem Tibi adhibere licere putabis, donec a me locum eam non habere ostendatur. Volo tamen hac quoque in re agere liberaliter, ut demonstratio tanto sit certior, nec tantum probabilibus argumentis nitamur.

Equidem cum concesseris globum majorem aequipollere globis minoribus simul sumtis, quibus in motum concitatis quiescit, posses agnoscere nihil interesse ad potentiam, conjuncta sint quae producuntur, an disgregata. Sed placet tamen id de quo inter nos agitur, ita per se demonstrare. Ajo igitur, ejusdem potentiae esse, efficere ut pondus L (fig. 45) continuo tractu ascendat ad altitudinem P T, et efficere ut ad eam ascendat quatuor vicibus repetitis PQ, QR, RS, ST, nova semper excitatione. Ponamus pondus L tantam celeritatem habuisse, dum in horizonte movebatur, ut impetu inde concepto assurrexerit continuo tractu ad altitudinem P T, jamque inde rursus descendere, et filum secum trahere, incidens per trochleolas x et y, et postremo volutum circa trochleam z; quo attracto, simul trahatur stylus F depressurus elateria G, H, I, K. Ponamus autem pondus L cadens ex altitudine T S praecise tantum acquirere impetus, quantum opus est, ut stylus F superans elaterium G perveniat ex $_1F$ in $_2F$; similiter Elateria H, I, K superari transitu styli $_2F$ $_3F$, $_3F$ $_4F$, $_4F$ $_5F$, orto ex descensibus S R, R Q, Q P; ita ut praecise, ubi pondus pervenit in T, impetu ejus per descensum concepto, rursusque per tensionem elastrorum exhausto stylus pervenerit in $_5F$. His positis, patet mox, unoquoque Elastro successive liberato, posse per vices globum L rursus ad altitudinem P T restitui, cum unumquodque ad quartam altitudinis partem attollendi grave vim habeat, ex qua scilicet, ipso labente, fuit tensum; idque ope hujus ipsius fili et trochlearum praestari, si elastrum K, liberatum rursus ac sese erigens, reducat stylum a $_5F$ ad $_4F$, elastrum I a $_4F$ ad $_3F$ etc. Cum igitur potentia globi gravis L, in horizonte procurrentis, ante omnem ascensum tanta sit (ex hypothesi) ut possit elevare pondus L ad altitudinem P T, eademque tanta sit, ut possit praecise tendere quatuor elastra G, H, I, K; erit ipsius L potentia ante ascensum potentiae tensionis quatuor elastrorum aequalis; sed haec potest praecise, per vices, elevare pondus L ad eandem altitudinem P T. Ergo potentiae pondus L elevandi ad altitudinem P T uno tractu aut per vices, sunt aequales. Et generaliter hanc aequalitatem tam certam arbitror, ut judicem alioqui, quemadmodum jam innui, nihil facilius fore, quam motum perpetuum mechanicum obtinere, si alterutrum altero praevalere dicas, ut Tibimet consideranti manifestum fore arbitror, cum alterum alteri, nullo negotio, substitui possit. Quod si haec nondum persuadent, opus erit ut