

siquando paulo distinctius explicis mentem Tuam, et certo casu ac schediasmate declares. Fateor enim me in dictis ne minimam quidem dubitandi rationem videre. Prosumt tamen, quae opprimis vel ideo, quod ita melius video, quibus praedictis imprimis sit occurrendum. Nam quae Tibi negotium facessere possunt, multo magis alius poterunt. Caeterum ipse rei summam tot modis examinatam habeo, et tam diversis rationibus atque applicationibus ad consensum perveni, ut hic paralogismum amplius metnere non possim. Non eo minus tamen libenter monita, a Te imprimis, audio.

Objectionem sumis a gravitatis causis, sed esse, ut saepe monui, nil obstant. Verissimum quidem est, quolibet temporis momento aequalem fieri impulsioem, sed sciendum est eam non producere aequalem vim in impulso (quippe aliter atque aliter disposito, prout plus minusque virium jam habet) etsi aequalem producat gradum celeritatis, quia haec duo non coincidunt. Itaque haec objectio principium petit. Nam, ut jam publice monui, corpus bis A motum celeritate e, duplum est re et potentia corporis A praediti celeritate e, quia bis in eo occurrit Ae, seu adest Ae + Ae. Sed corpus A motum celeritate bis e (seu A bis e) non est duplum ipsius Ae, quia, etsi duplicata sit celeritas, non tamen simul duplicatum est corpus: potentiam autem tum demum multiplicatam pideo, cum aliquid reale, potentiam habens, exacte repetitur, vel multiplicatur: veluti cum (sive interrupte sive continue) datum pondus ad multiplicatam altitudinem, vel multiplicatum pondus ad datam altitudinem elevare licet; unaquaeque enim repetitio, pro separato effectu, exacte congruo, haberi potest. Itaque quod, secundum meum principium, superationem alicujus impulsioem pro mensura sumi putas, non concedo, nec concedere debeat, ut, eo attentius considerato, ipse animadvertes, nisi scilicet omnia sint in impellente et impulso sit eodem modo se habentia. Opus est pro mensura repeti realem alicujus potentiae productionem vel destructionem. Intellego autem potentiam suam subjectum includentem seu realem repeti, velut pondus elevatum esse, elastrum tensum, grave in motu positum, ut repetitio sit omnimoda. Non vero sufficit aliquid modale repeti, verb. gr. gradum velocitatis repetitum, corpore non repetito, seu plures gradus velocitatis poni in eodem corpore simul existentes. Et senties experiendo si utaris repetitione reali, omnia consentire etiam secundum diversas assumptiones; si modali, non item: quoniam in mo-

dali repetitione non omnia paria seu exacte repetita reperiuntur. Et suspicor caetera omnia, quae Tibi adhuc scrupulum movent, ex hoc uno non observato profluere, quod apud me veluti primum est principium Artis aestimatoriae in universum, seu scientiae de quantitate in genere. Certè hactenus in hac materia vix quicquam mihi fuit objectum, quod non jam tum praeverissem, aut quod per se non dispareat, meditationem prosequendo.

Reapse etiam comperi, in solvendis problematibus intactis, nonnisi secundum principia mea exitum dari. Non tantum enim nascuntur inde mihi, quae ali experimentis dicere, aut ex principis aliis magis limitatis deduxere, sed et ultra pergere possum ad ea, in quibus ipsorum principia desinunt. Veluti si (fig. 46.) globus A simul incurrat in duos globos B et C, possum demonstrare quid sit futurum, idque (quod mireris) ex hoc solo principio, quod aliqui causa et effectus non futuri sint aequipollentes, seu quod tunc, certis hypothesis factis, non possit post concursum tantumdem ponderis elevari ad datam altitudinem, quantum ante concursum, vel contra.

Solatio aliqua certe nobis esse debet, quod scribis Hugonem ante obtatum de Manuscriptis suis edendis constituisse; gratum erit aliquando intelligere, quosnam constituerit ejus rei Curatores. Unum ex iis Volderum esse credo, non medicorum doctrinae Virum, idque literis ex Batavis acceptis mihi confirmatur.

Rectissime factum, quod Fratri Tuo, ingeniosissimo Viri; nostri commercii copiam fecisti. Ita enim communi ope melius proficiemus.

Quoniam, ut scis, potentis analogae sunt differentiae, hinc et serie pro potentis duxi seriem pro differentis, hoc modo:
$$\overline{m} \overline{x+y} = x^m y^m + \frac{m}{1} x^{m-1} y^m + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} x^{m-2} y^m \text{ etc.}$$
 Ergo fit
$$d^m \overline{xy} = d^m x d^m y + \frac{m}{1} d^{m-1} x d^m y + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} d^{m-2} x d^2 y \text{ etc.}$$
 Ubi vertendo d in \int , ut sit $d^m = \int^m$, posito $n = -m$, fiet $\int^m \overline{dxy}$
$$= \int^{n-1} x d^n y - \frac{n}{1} \int^n x d^{n-1} y + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} \int^{n+1} x d^{n-2} y - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \int^{n+2} x d^{n-3} y$$
 etc. ubi, posito dz constante, summae singularem iniri possunt,

et quidem finite, si n integer. Similia pro trinomio vel aliis polynomiis fabricare licet, absque omnigenis analogiis comminisci.

Has jam scriptas dimittere distuleram, donec discerem ubi ageres. Nunc cum ex Tuis Amstelodamo datis libens intellexerim, Te in Batavis recte feliciterque appulisse, eas ut jussisti, Groningam mitto.

Boisotium quaedam ab Abbate Nicasio accepi.

Facile judicare poteram, quid de Halensi negotio dicturus esses, jamque in eam fere sententiam Berolinsensibus responderam de meo.

Vulderi, Viri licet egregie docti, judicium de nostris Methodis non est quod nos magnopere moveat. Videtur enim in hanc Analyseos partem minus inperxisse. At Hugenius ipse, quo nemo melius ista djudicare poterat, et cui Salsiana et multo ampliora erant perspectissima, de praestantia nostrae methodi magnifice sentiebat; idque testatus est, non tantum literis ad me privatim datis, sed et publice in Lipsiensium Actis. Hujus sententiam Volderianae opponi suffecerit. Si excerpta desideras ex literis Hugenii, mittam.

Quod Nieuventium in transitu non vidisti, non magna opinor, jactura erit, neque enim Tibi prodesse colloquium poterat, sed illi tantum ad conversionem. Quod superet, gaudeo Te nobis propiore, ut crebrius Tuis fruar, quibus auxilium spero in multis, quae adhuc diversi generis molior incremento harum literarum.

Dabam Hanoverae ²⁰/₃₀ Octobr. 1695.

P. S. Tuam nunc apud Forderatos Belgas habitationem magni usus fore arbitror ad Methodi nostrae propagationem. Cum enim plurimi in Batavis Algebrae colant, multa utilia dabunt, ubi hic animos converterint. Interim de mea Infiniti scientia delineanda cogitabo.

XX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ecce me tandem aliquantulum liberum a multitudine negotiorum tam domesticorum quam publicorum, quibus hucusque adeo

obrutus fui, ut postremarum Tuarum, quas sub adventum meum quam rectissime accepi, pene oblitus fuissen. Nondum tamen ea tranquillitate fruor, quam optarem, ad Studia Mathematicis incumbendum, tanta cum libertate, qua olim Basiliae feceram: nec enim meus amplius sum, sed si Mathesis hic maxime mihi exercenda sit, erit id dumtaxat studiosorum in gratiam, quibus, ut jam provideo, Elementa inculcando maximam temporis partem teram, adeo ut, quo plures forsant studiosi, ego eo pauciores facturus sim progressus. Quos putas in Batavis Algebrae colentes, hic sane non reperiuntur; imo ne unicum quidem videre adhuc mihi contigit, qui vel mediocri Mathematici nomen mereatur. Ultimus Matheseos Professor Borgerius jam ante 25 annos, nimirum eodem, ni faller, anno quo hanc ego ingressus vitam terrenam, ille egressus est; post cujus obitum Sedes Mathematica in nostra Academia in hunc usque diem vacavit; hinc judica, quantum haec studia florere poterint. Si vel unicum habere causam, cur Hallensem, quam obtulisti, vacationem huic anteponerem, esset profecto liberior et commodior Tecum conversandi copia. Ex quo patriam deserui, nihil plane Actorum tidi; scire cuperem an quid novi in istis prodierit, quod nostra concernit; et num, inter alia etiam, Marchionis Hospitali Generalis quadratura Cycloidum, cui ego subjunxeram quaedam de reducendis curvis ad arcus circulares.

Procul dubio fastidium Geometriae foret, si transcendentes curvae ad percurrentes reduci possent, id est, ad tales curvas, quarum aequationes constant terminis ad dimensiones indeterminatas ascendentes. Sic etiam sum in opinione omnes percurrentes construi posse, ope quadraturae Hyperbolae: verum Tu illas latiori sensu sumis. Quadratrix enim Circuli mihi non est percurrentis, quoniam ejus natura per talem aequationem exprimi non potest.

Quae de aestimatione potentiae adducis, multum mihi placent, meque proin in Tuam tandem trabunt sententiam. Aliqui adhuc mihi haerent scrupuli, quos admihi mihi velle. Dicis impulsiones materiae gravitatem causantis, utri aequales et aequalem celeritatem in pondere producentes, non tamen producere vim aequalem; interim, si consideretur materia subtilis, quae gravitatis causa est, moveri celeritate adeo magno, ut pro infinita haberi possit (revera talis supponi debet, alias enim accelerationes gravium cadentium

non in infinitum auferentur) respectu illius quam pondus ascendens vel descendens habet; considerandum erit pondus tanquam in quiete, quemcumque habeat celeritatis gradum, ita ut hac ratione impulsiones etiam semper aequalem vim in pondere producere censendae sint; eodem plane modo, quo concipio globum scopetor explosum testudinem aliquam aequae fortiter ferre, sive quiescat omnino sive proropat, nunc celerius, nunc lentius; omnis enim testudinis celeritas nihil est, respectu celeritatis globi.

Secundo concedo pondus il. (fig. 44.) ascendens uno impetu per 2, 3, 4, 5; 6, 7; 8, 9 et dein iterum descendens, posse tot elastra G, H, I, K, deprimere, quot sufficiunt ad idem pondus ad eandem altitudinem per intervalla attollendum, quo quodlibet elastrum depressum, sese restituendo, eam transit ponderi vim, quam ab illo accepit, et sic gradatim assurgit per altitudines PQ, QR, RS, ST, per quas prius descendit. Sed hoc demonstratum mihi cuperem, quod grave L eodem impetu, quo ascendit per altitudinem 2, 3; 4, 5; 6, 7; 8, 9 etiam possit deprimere totidem elastra, quot nempe descendendo depressit: hoc si demonstraveris, omnino in Tuas transibo partes. Possibilitas motus perpetui mechanici, quam ex negatione hujus deducis, nihil facit ad rem: rigorosus enim adversarius illam possibilitatem stare tuere possit.

Tertio omnes regulae communicationis motus, a Cartesio aliisque exhibitae et lucisque receptae, a Tua hypothese subvertuntur. Ex. gr. si globus incurrat in alium aequalem et quiescentem, celeritate ut 1; post ictum ambo juncti pergerent moveri celeritate non ut $\frac{1}{2}$, eam hactenus creditum est, sed ut $\sqrt{\frac{1}{2}}$; hac enim celeritate uterque ad dimidiam ascenderet altitudinem, ad quam totam prior globus, integra sua celeritate, ascendisset: sic pro omnibus aliis novae regulae communicationis motus fabricari deberent, servando Tuum principium, vires esse in ratione compositi ponderum et altitudinum, ad quas celeritatibus suis ascendere possent. Sic facile divinare poterò, quid sit futurum si globus A simul incurrat in duos globos quiescentes B et C; si enim celeritas globi A sit ut 1, erit celeritas postfutura cujusque globi ut

$$\sqrt{\frac{A}{A+B+C}}$$
 supposito globos nullam habere elasticitatem, et omnes tres esse in recta linea. Illos autem in schemate Tuo non ponis in recta linea, et sic problema mihi non videtur determinari.

tum, si globus impingens oblique incurrat in reliquos duos; aut saltem mentem Tuam non satis assequor.

Quarto distinctio Tua inter potentiae productionem realem et modalem valde placet, ingeniose namque ostendis, quod pro mensura potentiae repetitio illius, non autem hujus, sumenda sit. Interim non video, quid impediat, quominus penetrationes globi in medium non elasticum, sed tantam frictione resistens, sumi possint pro mensura potentiae; nihil enim refert, sive potentia absorbeatur, sive restituatur; saltem potentia est causa penetratio-nis; et prout penetratio illius effectus, sicque repetitio effectus, repetitur etiam causa. Ex quo sequitur, globum aliquem, celeritate dupla, quadruplo altius penetraturum esse in medium aliquod molle, veluti in lutum, quam alius globus aequalis celeritate simplici; id quod adhuc ostendendum est: credo enim penetrationes fieri ut celeritates.

Quo Hugenius constituerit Curatores pro edendis suis Manuscriptis, hactenus ignoro. Excerpta, quae mihi offers, ex literis ejus ad Te datis, in quibus methodi nostrae praestantiam agnoscit, lubenti et grato animo accipiam, ut si aliquando occasio dabitur, ea Voldero, minus aequae de nostris sentienti, aliisque objiciam.

Ex analogia potentiariarum et differentiarum facile deducitur series pro $d^m \sqrt{x}$ quam adducis. Interim si m sit numerus fractus vel irrationalis, dicas mihi quaeso quid sit $d^m \sqrt{x}$, an quantitas, an quid aliud? De his die est, quod non cogitaverim, quoniam nondum ad me rediit. Et difficulter a me impetrabo, ut hisce quae jam fere mihi exciderunt, de novo animam advertam. Accepi heri literas a Dno. Marchione Hospitalo, in quibus sibi eandem hanc seriem Te communicasse dicit, et simul meae, quae super hac materia me detexisse, a Te intellexerit, petit.

Frater meus junior ex Suecia nuper veniens me accessit, qui in Pharmacopoeis Regis Stockholmiensis et Hafniae per triennium ministravit, et antea diu in aliis Germaniae locis; nunc ut Patriae propinquior sit, iterum in Germania conditionem ad futurum Pariret, ubi in Te haberet Patronum, et noster quasi intermutuus esset, quod lubens inquit mihi quae novit Pharmacopoeos ministravit, Dn. Placotomum et Jaegerum, apud quorum alterutrum illi.

vere, num ad dictum tempus alterius officinam ingredi possit, et ipsum et me non mediocriter obstringes, mihi praesertim facies rem gratissimam. Possum de illius diligentia et peritia praeprius in Chymicis spondere, ut honorifica testimonia quae a suis quibusvis Patronis habet, satis ostendunt.

Nosine certum quendam Germanum, qui se nominat Johann August Haberstroh, a quo etiam huius literas accepi Lugduno Bat. datas, ubi juvenis alicujus nobilis R. Tschirnhausii cognati se Epilorum agere et non ita oridem Te in acadibus Tuis allocutum fuisse scribit, me rogans ut cum ab ipso Dn. Tschirnhausio Geometriam Cartesii jam edoctus fuerit, sibi futura aestate, quo tempore huc venturus esset, Matheseos secretiora, praesertim vero Calculum differentialem explicem. Interim ex me quaerit, quod ridiculum mihi videatur, quanto tempore se profectum mathematicum evasurum ego putem; num id fieri possit brevi, quia a juvene suo non du possit abesse. Sed vereor ut ipsi satisfacere possim; deest enim mihi infundibulum Norimbergense.

Literas Tuas impostorum ad me mittendas immediate mihi inscribas; jam enim satis in urbe notus sum.

Vale et ama etc.

Groningae 17 Decembr. 1695.

XXI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gaudeo Te saluum Groningam appulisse, et rite auspicii publici numeris perfunctum fuisse. Omnia tempus faciliora reddit, et quod studiosis docendis Tibi peribit, poterit vicissim accrescere, si quae invenias nit facias, qui Te juvare possint. Nullam esse regionem credidi hactenus, in qua magis floreat Algebra, etiam inter plebejos homines, quam in Batavis. Certè vix alibi plures libri tales vernacula lingua scripti extant.

Dn. Haberstroh apud me fuit; petit nuper per literas Tibi commendari, quod nunc facio, sed monebo ubi iterum ad me scripserit, ut cogitet rebus egregiis non perfunctoriam operam

dandam, nec quicquam magni praestitutum, qui talia in transitu libare velit, ut canis aquam Nili.

Scrupulos, qui Tibi supersunt circa Dynamice meam, puto adimi posse. Prima obiectio omnium quae in hoc negotio fieri possunt, est speciosissima: Celeritatem materiae gravificae esse incomparabiliter majorem, quam corporis gravis, ita ut grave, ejus comparatione, semper quiescere videatur, uti testudo respectu ictus sclopeti. Respondeo verissimum hoc esse, et effectum qui producitur in mobili tardo, talem esse, si comparetur motui illi velocissimo, ut sive tardum quiescat plane, sive jam sit in motu, discrimen non fiat notabile. Si scilicet oculus positus sit sive in globo sclopeti, sive in testudine, et ex uno horum respiciat alterum, non notabit in resultante discrimen inter casum quietis et motus tardi. Sed si effectus novus, qui per ictum producitur in ipso corpore tardo, comparetur cum priore motu vel effectu, qui in ipso jam est, omnino ille respectu hujus notabilis est, adeoque hac ratione multum interest inter id quod idem ictus, licet celerimus, producit in corpore quiescente, et quod producit in corpore tardo; nec possumus asserere recipiens semper se eodem modo habere ad ictus. Et tametsi eundem semper imprimat vel adimat velocitatis gradum, non tamen semper dat vel adimit eundem gradum virtutis; sed majorem dat obsequenti seu in eandem partes tendenti, adimit resistenti seu in contrarium nitenti.

Secundo loco non bene intelligo quid Tibi adhuc velis demonstrari, cum ostendi postulas, quod grave L eodem impetu quo ascendit per altitudinem 2, 3; 4, 5; 6, 7; 8, 9, etiam possit deprimere totidem elastra, quot nempe descendendo depressit. Nam, quantum judico, semper facile ostenditur, grave idem posse efficere ascendendo vel descendendo, quantum nec satis videam cur hoc petas. Ab eadem causa se totam consumente vel impendente aequalis semper producet effectus, quemodocumque ad esse consumendum causa applicetur, ascendendo vel descendendo.

Quod vero tertio, modum deducendi ad motum perpetuum, tanquam ad absurdum, quo subinde utor, a rigido adversario rejici posse putas, id ego nimis in hac scientia rigoris fore arbitror, et tuto assumi hypothesein hanc, quippe et rationi consentaneam, et infinitis experimentis comprobata. Qui motum perpetuum me-

chanicum possibilem defendit, etiam fieri posse putabit, ut aqua sponte ascendat in montem.

Quarto quod communicationis motuum regula atinet, concedo, si corpus A celeritate ut 1, incurrat in aequale B quiescens, et ambo post concursum simul ferantur, nec pars potentiae absorbeat, aggregatum latum iri celeritate ut $\sqrt{2}$. Sed sciendum est hunc casum non occurrere. Nam si corpora sint elastica, non ibunt simul post impactum; sin sint mollia, ut argilla, magna pars virium in ipso ictu absorbebitur et transferetur in partes insensibiles materiae molles, nec restituetur corporibus integris, ut fit in casu elasticitatis.

Quinto recte iudicas, ex meis principiis sequi corpus duplo celerius quadruplo amplius penetraturum in materiam mollem, modo scilicet seponatur condensatio, quae contingit in molli, ut scilicet initio cedat facilis, postea difficilior, ob partes posteriores ipso priorum impactu redditas magis compactas; et modo consideretur sola difficultas, quae est in separatione partium tenacium, excluso motu partium in molli, qualis est in aqua, seu excluso eo, quod in schediasmate De resistentia medii vocavi resistentiam respectivam, retenta sola absoluta. Haec enim, quae exclusi, efficere possunt et debent, ut regula illa non exacte observetur; pato tamen nihilominus, adhibitis cautelis debitis, ab experientia ei futum iri.

Quod quaeris de differentia, cujus exponens est fractus vel irrationalis, etiam notavi in literis ad Dnum. Marchionem Hospitalium, simulque addidi modum, per quem talis differentia potest alteri ordinariae comparari. Ex. gr. $d^{1/2}x$ sit differentia proposita. Sint x progressionis geometricae; assumpta differentiali constante dh , ut fiat $x dh : a = dx$, erit $d^2x = dx dh : a = x dh dh : aa$, et similiter $d^3x = x dh^2 : a^2$, et generaliter $d^n x = x dh^n : a^n$, adeoque $d^{1/2}x = x dh^{1/2} : a^{1/2}$ seu $d^{1/2}x = x \sqrt{dh} : a$ (1:2 mihi est idem quod $\frac{1}{2}$; et $dh : a$ idem quod $\frac{dh}{a}$). Unde vides talium differentiarum valores hoc modo haberi posse per radicem vel potentiam ordinariae differentiae. Quod cum memorabile sit. Tibi non ingratus fore poto. Easdem extraordinarias differentias per seriem infinitam ex ordinariis conflata exprimi posse, me non monente, vides, id adeoque suo modo reales esse, etiam hinc patet.

Vale, feliciaque festa age, et cum anno novo novum rerum prosperarum cursum ingredere.

Dabam Hanoverae 28. Decembr. 1695.

XXII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nuperas gratissimas ignota manu scriptas rectissime accepi, quas quod nomine Tuo subscripto carebant pro Tuis non agnovissem, nisi paucae quas propria manu admixeras lineae errore praecavissent.

Nescio, annon crebrae meae objectiones contra Dynamicen Tuam tandem Tibi molestiam creaverint, quod fere conjicio ex eo, quod more Tuo solito, non ad omnia, quae Te in prioribus meis rogabam, ita exacte respondisti: sed novi Tuam aequitatem et animi candorem; si quid, haec in parte, a me commissum fuerit, quod minus ardeat, mihi condonabis. Nihil sane a natura mea alienius est, quam pravus iste contradicendi pruritus, et nihil eidem convenientius quam veritatis amor, quam usque adeo deperere, ut acquiescere minime possim in re aliqua, nisi omnis obscuritatis nebula mihi sit discussa. Est haec praecipua causa, cur in rebus dubiis ad Te recurram, tanquam ad naturae oraculum, cui in abstrusissimis nunquam lamen deest, cum aliis quoque communicandum, quod jam abunde compertum habeo. Vides itaque, quo incitamento difficultates Tibi subinde proponam; adeo tamen iniquis non sum, ut promptam nimis propositionem ad eas exigam; sufficere si summa Tua commoditate id fiat.

Paucis abhinc diebus noster Academiae Rector mihi suggestit libellum a Dionysio Papino, proxime elapso anno editum, cui titulus, Fasciculus dissertationum de novis quibusdam machinis etc. ubi inter alia exhibet synopsis controversiae inter vos agitatae circa rationem aestimandi vires motrices, in cujus fine dicit, quod Te rogaverit, ut etiam tale extractum scriberes, quo possint Lectores omnia pro et contra certius perspicere. Miror quod me nunquam oblegaveris ad Acta Eruditorum; video enim ex hac synopsi, quod praecipuae meae objectiones jam in Actis a Dno. Papino prodierint, ut et Tuas responsiones ad illas, de qui-

bus certe nihil mihi constabat; alias labori inutili eas de novo repetendi, qui hucusque calamos nostros exerceuit, pepercissem. Eo enim tempore, quo haec inter vos ventilabantur, in Gallias versabar, ubi nihil quicquam Actorum ad me perveniebat. Nunc Acta, in quibus haec extant, a quodam Collegarum meorum mihi comparavi, ubi summo cum fructu rationes utriusque perlustravi, quibus, ut et meis, quas super hac re inveni, diligenter expensis, Tuam nunc opinionem, in quam jam ab aliquo tempore inclinavi, sed, ob leves, qui mihi supererant, scrupulos, iudicium tantisper suspendens, omnino pro vera agnosco, quae me proin in posterum non solum non adversarium, sed sui defensorem quavis occasione habebit.

Doleo vires Dni. Papini, qui in falsa sua opinione persistit; videtur ille mihi aut rem non satis examinasse, aut sibi non gloriosum dicere, revocare errorem popularem quem in Cartesianorum gratiam sibi defendendum suscepit. Quod enim dicit, potentiam corporis majoris non posse totam transferri in minus quiescens, et deinde aliquam partem potentiae non quidem perire (quod ex Cartesianorum mente necessario aequi lapsissime ostendisti) sed impendi et communicari materiae ambientis in ipse ictu; item nulla dari corpora perfecte rigida, mihi videntur mera effugia quibus suae opinioni, jamjam labenti, asylum struere conatur. Quis enim non videt, translationem istam potentiae totius ex corpore majori in minus non supponi tanquam actu possibilem, sed quatenus, sine ulla simplicitate contradictione, mente substitui potest potentia minoris corporis in locum aequalis potentiae corporis majoris; sufficit namque hoc, ut si absurdum aliquid, mediante ista suppositione, ex aliena sententia sequatur, etiam ipsam sententiam absurdum esse dicamus. Et apposite notasti, quod si adversarius hoc neget, perinde sit, ac si quis Archimedi postulanti negasset aliquam rectam alicui curvae aequalem esse, quia nullam poterat geometricè exhibere. Atque, quod plus est, si quis mihi ad oculum ostenderet se reperisse motum perpetuum, si modo haberet metallum aliquid gravius auro, dicentem, sane summo jure, eum hominem revera invenisse motum perpetuum, licet metallum gravius auro non inveniat et vix inventum iri sperandum sit; ostendisset enim mihi possibilitatem motus perpetui, si non practicam, saltem theoreticam.

Optime dicit objectionem a celeberrimo motu materiae gravificae.

ut vocas, petitam, esse speciosissimam, quam etiam maximopere urget Dnus. Papinus; nec Tua responsio mihi omnino satisfacit; videtur enim quod non solum velocitates singulis momentis corpori impressae, sed etiam ipsi effectus, quos impulsiones materiae gravificae in corpore producant, debeant esse aequales, sive dein comparentur motui materiae velocissimo, sive comparantur motui priori, qui in corpore jam est: comparatio ista hic non habet locum; effectus enim considerantur absolute, idque solommodo quaeritur, annon inter se comparati omnes sint aequales? Facile enim demonstrari potest, quod globus A incurrens celeritate infinita in globum B; huic semper aequalem vim imprimat, sive sit in motu sive in quiete, ita ut adversarius constanter perseverare possit in eo, quod potentia corporis ascendens non per ascensus, sed per temporis spatium mensurari debeat; ex quo dein sequitur corpus ascendens ex gr. ad altitudinem quadruplam, non nisi duplo plures ictus aequales recipere, quam aliud aequale corpus ascendens ad altitudinem simplicem, ideoque potentias illorum corporum esse ut 2 ad 1, non autem ut 4 ad 1. Difficultas haec, fateor, me diu multumque vexavit (videbam enim hic non esse petitionem principii uti dicebas, sed praecipuum argumentum Tui vim directe impognari) donec tandem extinde ita me extricare putaverim, dicendo: Verum quidem esse, quod effectus in corpore ab impulsione materiae gravificae producti, initio cuiusvis momenti, sint semper aequales, sive corpus quiescat sive moveatur; sed et hoc verum est, quod corpus descendens vel ascendens occurrat uno momento certo numero particularum perpendiculariter dispositarum, qui numerus erit in ratione celeritatum corporis moti; singulae autem hae particulae sumum peculiarem faciunt ictum aequalem in corpus ascendens vel descendens. Et hac ratione effectus materiae gravificae non initio tantam momenti, sed per totum momentum productus, computandus esset per quantitatem spatii uno momento percussis: hinc augmentum momentaneum potentiae corporis ascendens vel descendens semper variatur pro ratione celeritatum, et erit infinites majus, quam vis impulsione quam recipit quiescens a materia gravifica.

mentem meam melius schemate aperiam: Repraesentet (fig. 47) AB lineam descensuum in qua 01, 02, 03, 04, 05 etc. percurrentur momentis aequalibus 1, 2, 3, 4, 5 etc. applicentur ad 0, 1, 2, 3, 4, 5 etc. aequales 0a, 1b, 2c, 3d, 4e, 5f etc. quas

denotent vires impulsioinum materiae gravificae, initio conjuxis momenti corpori impressas. Nunc, per naturam gravium cadentium, altitudo AS est quadrupla ipsius A4, quamvis nonnisi duplo plures impressiones aequales 0a, 1b, 2c, 3d, 4e, 5f, 6g, 7h, 8i in illa continentur quam in hac 0a, 1b, 2c, 3d, 4e, hinc cum Dno. Papino crederem, sufficere ut grave ascendat per altitudinem 4A subquadruplam ipsius 8A, ad superandam dimidiam partem resistentiae, quam superaret ascendenda per 8A, non animadvertens errorem, qui in eo consistit, quod summarum impressionum momentorum initiales 0a, 1b, 2c, 3d, 4e etc. loco impressionum continuarum 0b, 1c, 2d, 3e, 4f etc. quae utique non amplius sunt aequales. Oppido inde liquet veritas asserti Tui, quod nempe potentiae corporum aequalium sint in ratione altitudinum percussarum: est enim summa omnium impressionum $0b + 1c + 2d + 3e + 4f + 5g + 6h + 7i$ id est, rectangulum Ai, ad summam omnium impressionum $0b + 1c + 2d + 3e$, id est, ad rectangulum Ae, ut altitudo AS ad altitudinem A4. Rogo mihi sincere dicas, annon rem acu tetigerim. Hoc argumento, arbitrator, Dnus. Papinus optime convinci posset, quamvis alias in eodem libello contra Guilelmoium disputans, de fluentium aquarum mensura, proprium gladium suppeditet quo jugulari potest. Ex is enim quae pag. 77. legitime contra adversarium suum infert, apertissime sequitur vires motrices vel potentias ponderum aequium esse in ratione ascensus, id est, in quadrata celeritatum. Tibi haec dubie non ingratum erit, si quae ad rem faciunt, hic excerptam, cum forsitan hunc libellum Tibi nondum videre contigerit. „Constat quod gravia, si motu a gravitate accepto sursum versus reflectantur, ascendendo motum amittunt: finito autem ascensu ipsorum centrum gravitatis non potest reperiri altius quam antequam coepissent moveri: alioquin daretur motus perpetuus mechanicus. Sit ex. gr. (fig. 48) funis ABD supra trochleam BC transiens, cuius alteri extremo A una libra, alteri vero extremo D duae librae appendantur, sitque AE dupla ipsius ED: centrum gravitatis erit in E. Supponamus jam pondus D descendere in d, debeat pondus A tantumdem ascendere, nempe ad a, et tunc centrum gravitatis reperiretur in e. Facile est autem demonstrare, quod descensus Eae est tantum $\frac{1}{2}$ descensus Dd. Ergo corpus illic delatum, si sursum versus reflecteretur, non ascenderet nisi ad $\frac{1}{2}$ altitudinis dD ut in f, et corpus A continuando suum motum sursum versus

tantundem spatii percurreret usque ad G; tunc enim centrum gravitatis in eadem qua prius altitudine, nempe in E reperiretur etc.“ Quid haec ad confirmationem Tuae sententiae contribuant, facile perspicies. Libra enim una, descendens ex altitudine Dd, efficere potest ut tres librae ascendant ad $\frac{1}{2}$ ejusdem altitudinis. Ergo quaelibet trium librarum ascendentium habebit $\frac{1}{2}$ potentiae librae descendentes (siquidem effectus sit aequalis cause) unde constat propositum, nempe potentias ponderum aequalium esse in ratione ascensus vel descensus, id est, in quadrata celeritatum. Sed reget forsitan Dnus. Papinus, unam illam libram, quod cum reliquis duabus conjuncta sit, non efficere eandem vim, ac si in aère libero per eandem altitudinem sola descenderet, praesertim cum in illo casu plus temporis et proinde plures impulsiones materiae gravificae durante descensu recipiat quam in hoc. Verum hoc obijciens pariter ad motum perpetuum mechanicum deduceretur, ubi non opus haberemus supponere translationem totius potentiae corporis majoris in minus, adeoque Dnus. Papinus solitis suis effugiis, nimium negatione illius translationis et perfectae rigiditatis, amplius evadere non posset.

Haec omnia cum perpensissem et vidissem tam luculenter confirmare novam Tuam vires motrices aestimandi rationem et destruere vulgarem illam Cartesianorum opinionem, quae coeque in Philosophorum Scholis invaluit et radices egit, ut quamplurimum caeco ductu maluit credere rem, in omnium quotquot sunt Philosophorum modernorum ore versantem, quam eam paulo attentius et penitus examinare; Ego, impulsus, postquam haec probe perpensissem, tandem errorem vulgarem omnino deserti, mihi quae ipsimet iratus fui, quod illum apud me tamdiu foreverim. Interim mentem meam subit, annon nova haec ratio potentias aestimandi, demonstrari posset directe et ἀποδεικτικῶς ex ipsa nempe motus natura et lege, supponendo corpora moveri in vacuo, in quo in alia vires suas exerant. Demonstrata enim per deductionem ad motum perpetuum, tanquam ab absurdum quod, pertinacem Cartesianum novis potius involvit scrupulis, quam ab erronea opinione deflectit.

Post leviorem meditationem vidi id directe posse probari per principium aliquod, quod ipse Cartesius admisit, nempe per compositionem motus, et quidem sic: Moverat (fig. 49) globus A celeritate et directione AB, et impingat oblique in alium globum aequallem B quiescentem, ita ut angulus incurisionis ABD sit $\frac{1}{2}$ semirectus:

nunc quaeritur, quid post ictum sit futurum, supposito totam potentiam corporis alicujus directe incurrentis posse transferri in aliud corpus aequale quiescens? Considero motum AB tanquam compositum ex duobus aliis aequalibus AC, BC, quorum directiones angulum faciant rectum ACB: nunc statim patet, quoniam AC est parallela ipsi BD, et EC ad eandem perpendicularis, quod globus A secundum directionem AC nihil globo B communicet, sed quod tota vis secundum BC transferatur in globum B (si modo globi perfecte aut saltem admodum elastici supponantur, ut globi in ludo ludiculario) ita ut post ictum globus B moveatur in directione BE, velocitate BC, et globus A in directione BF velocitate AC. Quoniam autem tam globi, quam velocitates sint aequales, erunt eorum potentiae aequales, et ambae simul sumtae, tanquam effectus aequales causae, id est, toti potentiae quam habebat globus A ante ictum. Ergo potentia globi A ante ictum est ad potentiam globi B post ictum ut 2 ad 1, ut $(AB)^2$ ad $(BC)^2$, ut quadratum velocitatis A ad quadratum velocitatis B. Q. e. d.

Idem generaliter potest demonstrari, si globus A alia quavis obliquitate intelligatur incurvere in globum B; tunc enim semper globus B recipiet velocitatem BC, et globus A perget moveri velocitate AC; et hoc modo, quia potentiae duae partiales, simul sumtae, constituent totam, erit potentia globi A post ictum ad potentiam globi B, ut $(AC)^2$ ad $(BC)^2$, id est ut quadrata globorum celeritatum.

Nescio quid huic demonstrationi objici possit, nisi fortasse quod nulli globi tam perfecte elastici reperiantur, qui omnem suam potentiam in alios aequales directe impingentes transfundere possint. Hoc profecto demonstrationem nostram minime libefacit: etiamsi enim concedamus illam perfectam elasticitatem non dari, scimus tamen per experientiam dari corpora ita prompte se resistentia, ut nullum sensibile discrimen intersit inter velocitatem globi incurrentis ante ictum et inter velocitatem globi aequalis percussus post ictum, adeoque et hoc contra demonstrationem nostram nihil valet. Supponamus tamen in favorem adversarii tantummodo partem celeritatis BC (fig. 50) communicari globo B, nihilominus ex Cartesii opinione sequetur aliquid absurdum. Esto enim, et acquirat globus B ex percussione globi A partem celeritatis BC, puta BG; ergo, secundum Cartesium, remanebit globo A in directione CB residua celeritas CG (supponuntur enim globi aequales). Quo-

niam autem juxta directionem AC, integram velocitatem AC servat, habebit globus A post ictum, ex compositione motus AC et CG, velocitatem AG. Ergo, si quantitas motus ante et post ictum esset aequalis, foret $A \times AB = A \times AG + B \times BG$, et quia $A = B$, foret $AB = AG + BG$. Q. e. a.

Quid ad haec reponi possit ab acerrimo quoque Cartesiano, non video; compositionem enim motus non negabit, nisi simul coryphaei sui explanationem reflexionis et refractionis radiorum destruere velit, aliaque, in quibus compositio haec admodum solemniss ipsi fuit: dicit forsam, post ictum directionem mutari; hinc globos A et B celerius moveri, quam si ille in hunc directe impingeret, ut nempe quantum a prima directione deflectuntur, compensentur per augmentum celeritatis. Sed quid, quaeso, directio ad quantitatem motus vel ad quantitatem virium? sive corpus aliquid huc, sive illuc feratur, retinebit, credo, semper eandem vim, si modo celeritas eadem maneat. Numquid ridiculum esset dicere singula, quae in toto Universo moventur, semper eandem directionem servare; secus juxta mentem adversarii quantitas motus variaret.

Aliud adhuc superest argumentum non contemnendum, quo probatur vires corporum aequalium esse in ratione quadrata velocitatum. Constat quod vires centrifugae corporum in gyrum motorum sint in ratione composita ex quadrata celeritatum et reciproca longitudine radiorum (facile hoc demonstrari potest) ergo, existentibus radiis aequalibus, erunt vires centrifugae, vel vires fila, quibus corpora detinentur, tendentes in ratione quadrata celeritatum. Sic quia vires istae tendentes sunt inadaequate quidem effectus corporum motorum, satis probatur propositum.

Jam nimium fere huic materiae immeror; patere tamen, ut quae ex nova Tua sententia nunc satis stabilita legitime fluere videntur, paucis proponam, super quae mentem Tuam desiderarem. Videtur centrum percussiois corporum aliter nunc se habere, quam hactenus creditum est, siquidem vires percutientes elementorum corporis aestimatae sunt a mole elementorum et a velocitate eorundem, loco quod quadrata velocitatum, juxta novam hypothesein, sumenda essent. Hoc modo centrum percussiois lineae rectae rigidae, circa alterutram extremitatem motae, non esset ibi, ubi est centrum gravitatis in triangulo, nempe $\frac{2}{3}$ longitudinis lineae distans ab extremitate quiescente; sed esset, ubi est centrum gravitatis

in pyramide, nempe $\frac{1}{4}$ axis distans a centro rotationis; et sic in aliis. Praeterea videntur resistentiae mediâ, quas vocas respectivas, sepositis absolutis, non esse in duplicata ratione velocitatum, sed in triplicata. Corpus ex. gr. aliquid motum, in liquido tenacitate notabili carente, duobus velocitatis gradibus, certo tempore duplo majorem quantitatem liquidi penetrat, et duplo celerius quam aliud corpus aequale, motum uno velocitatis gradu; quoniam vero quantitatum aequalium vires sunt, ex nova hypothesisi, in duplicata ratione velocitatum, vires resistentiae corporis illius octupla resistentiae hujus: contra quod Tu statuere videris in Actis ann. 1691 pag. 177. Dices forsitan, differentiam esse, quando corpus cum omnibus suis partibus, simul et uno instanti, in alterum corpus, ut globum in globum, impingit, et quando per partes et successive appellitur, ut fluidum contra obicem; sed si ita distinguis, optarim ut explicares rationem distinctionis. Desiderarem etiam rationem exactam, cur nova Tua hypothesis tantum locum habeat in velocitatibus actualibus, non autem in conatibus, siquidem conatus nihil aliud est quam motus infinite parvus. Cur ex. gr. ad aequilibrandas quatuor libras in una distantia ab hypomochlio vectis appensas, non etiam requiratur ab altera parte vectis tantum una libra in duabus distantis appendenda, sed duae librae. Et deinde concessio, hujus posse rationem reddi, videtur quod si duabus istis libris, quae cum quatuor libris oppositis aequilibrium faciunt, vel minima velocitas actualis imprimatur deorsum versus, illico praeponderare deberent et magno impetu descendere: duae enim istae librae, habentes duos gradus velocitatis, habent diplomajorem vim, quam quatuor librae cum uno gradu velocitatis. Hoc tamen est contra experientiam, nam lente admodum nec consueque quo possent, descendunt. Explicationem etiam sciscitor experimenti illius quod, recensente in Epistolis Cartesio (ut Dnus. Varignonius in Actis Erudit. an. 1691 pag. 300 memorat) Pater Mersemmus cum Dno, Petito saepius iterata vice instituerat circa majus tormentum bellicum, quo perpendiculariter erecto et disposito, globum ejusve vestigia frustra in terra quaesivere: argumento eum non recidisse, sed etiamnum in aere haerere suspensum. Hoc, si non sit figmentum, multum etiam Tuae demonstrationi, quam ab impossibilitate perpetui motus petis, derogat.

Quando dicis, quod qui motum perpetuum mechanicum possibilem defendit, etiam fieri posse putabit, ut aqua sponte ascendat

in montem, facile julico quorsum digitum intendas: nimirum ad meam, olim in Actis insertam, inventionem perpetui mobilis, filtri ope comparandi, per quam perennem aquarum per poros terrae, instar filtri, ascensum, et sub forma furviorum et fontium descensum explicabam. Certe hujusmodi perpetuum mobile non tam absonum esse et contra naturae leges cuius, vel leviter ad pressiones fluidorum attendenti, patet: namquid enim, si possemus efficere, ut centrum gravitatis alicujus corporis sponte vel ob motum quendam particularum intestinum ascenderet, haberemus motum perpetuum mechanicum? Ast, si saper liquorem graviorem in vasculo quodam contentum, superfundatur alius levior cum priori perfecte miscibilis, commune duorum liquorum centrum gravitatis infimum locum non occupabit, sed necessario ascendet: alias liquores non miscerentur. Quod si ais hanc permixtionem non duraturam, sed tractu temporis particulis liquoris gravioris iterum ad fundum subsidere, regabo Te, ut consideres quem minutim dissolvatur mercurius a liquore quodam corrosivo, velut spiritu nitri, et ita intime cum illo miscetur, ut, nisi affundatur sal quoddam, permixtio illa in perpetuum duratura sit, manente interia liquore adeo limpido et fluido, ut si ex gravitate id non conjiceretur, nihilo impraegnatum illum esse dices. Quid igitur impedit, quominus ope filtri, quod separaret istas duas substantias, leviorum a graviori, haberi possit motus perpetuus; filtratione enim ista commune centrum gravitatis, quod non est in sua sede naturali, descendere conatur, quia tamen descendere non potest ob delatentem ex tubo materiam secretam, quae, ut suppono, iterum sese perfecte miscet cum substrato liquore, conatus iste et proinde filtratio continua perseverabit: unde objectio ista, quod gravioris liquoris actio per filtrum intercipiatur, ita ut solus levior in eum, qui in tubo jam est, gravitet, nihil valet: ipse enim levior, qui extra tubum est, etiam a graviori premitur, et ita junctis viribus eum qui in tubo est premunt. Non itaque mirum, multo minus absurdum esse debet, si tali modo, ubi natura motus (motus nempe intestinus) jurat, motum perpetuum obtineri possit dicam. Non enim minor absurditas esset dicere centrum gravitatis posse ascendere, quod tamen hic contingere videmus. Interim Tecum sentio, impossibile esse motum perpetuum per machinam quendam corporum solidorum procurandum, quae solo artificio et industria humana operatur. Sed quia literae jam praeter spem Tibi forsân ad nauseam excre-

verunt, hic abrumpo, et differentialium materiam in proximam scribendi occasionem differo.

Vale, et votum pro voto habe. Perage laetus et inconcussa sanitate novum hunc annum et quam plurimos subsequentes, ut ego cum toto Orbe mathematico ingenii Tui fructibus, ut hactenus, ita proporro quamdiutissime frui possim. Iterum vale et ama, qui se sincero corde dicit etc.

Groningae $\frac{1}{2}$ Jan. 1696.

XXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quod ad nonnulla Tuarum anteriorum visum sum respondisse paulo brevius, non ideo factum est, quod Tuae objectiones mihi fuerint ingratae, sed quia judicavi, quod res est, eo Te esse ingenio, ut non habeas opus multis verbis. Fortasse etiam fuere tunc, quae scribentem coegerunt festinare. Et nunc quoque sunt, quae me avocant a meditando laboribus, quorum potissimum est catharrus gravis, qui adjunctam habet febriculam, quae ne quid altius in recessu habeat, cavendum est.

Dnus. Papinus libellum suum, quem vidisti, ubi primum fuit editus, ad me misit. Ex eo renovata est inter nos concertatio per literas, quam totam Tibi communicabo; cui enim meliori possem iudici atque etiam defensori? Videbis antiquum obtinere virum, nec facile gloriam veritati daturum esse, non considerantem, quod ipse Deus est veritas. Gaudeo Te, repetitis meditationibus pro acumine Tuo perspexisse et pro candore agnoscere sententiae meae vim ac firmitatem, quod paucis contigit: adeo difficile, nec fere nisi meliorum ingeniorum proprium est, praesudicia exuere. Quod ad Acta Eruditorum Te non remisi, causa in promptu est, quia Tibi lecta non dubitabam.

Quae de ictibus materiae gravificae habes, sunt ingeniosissima, nempe quod numeri ictuum, qui quolibet tempusculo imprimuntur corpori gravi, non sint aequales, sed ejus celeritati proportionales; quo quidem admissio, sublata esset difficultas Dni. Papini, etiamsi ipsi concederemus, quemlibet ictum aequalem vim imprimere. Alterutrum igitur nobis faciendum superest, vel quaerent-

modus ostendendi quod notas de numero ictuum, vel neganda ictuum aequipollentia. Fateor nondum mihi modum occurrere ostendendi, quod numeri ictuum in aequalibus momentis sint celeritatibus proportionales, quia adversarius negabit de eo quaeri, quot occurratur corpusculis, cum non ab horum numero, sed velut a numero totidem flatuum venti (bouffées de vent) res pendeat, quemadmodum in navi velis acta, qui numerus est aequalibus tempusculis aequalis, adeoque temporibus proportionalis. Hoc igitur rogo, ut porro mecum considerare velis, quemadmodum et alterum membrum dilemmatis, utrum scilicet globus A incurrens celeritate infinita in globum B, aequalem ei vim imprimat, sive globus B quiescat sive moveatur, quod facile demonstrari posse ais; ego fateor me nondum eam demonstrationem videre. Jungemus igitur meditationes, ut videamus an nobis in his rebus liquido satisfacere liceat; quo facto haud scio an deprehensurus sis, subesse aliquid solidi meae responsioni ad elegantem difficultatem de globo scelopetario in testudinem impacto. Et considerandum videtur, non omnimode esse verum, quod continuatis impressionibus infinite celeribus in B inde a quiete, semper idem celeritatis gradus denuo imprimi debeat mobili, tempusculo quovis, sed tum demum, cum etiam feriens infinities minus censetur, quam mobile continue percussum; ubi etiam in impulsibus materiae gravificae vel venti navem impellentis, reapse ita contingit, ob materiae percutientis maximam tenuitatem vel raritatem. Sed si feriens percusso aequale ver. gr. vel notabiliter comparabile esset, ac se haberet velut aqua ad lapidem et infinito impetu feriret, manifestum est, primo statim ictu, quiescenti percusso imprimendam fore celeritatem infinitam, quem gradum continue denuo imprimi non posse est manifestum. Unde vides, non posse generaliter pronuntiari, quod continuo aequalem velocitatis gradum imprimat medium aequaliter agens, si infinita celeritate agere ponatur; sed et in eo casu, quo revera aut circiter idem semper gradus velocitatis imprimitur, non video quomodo inde possit inferri, sine petitione principii, eundem imprimi gradum virtutis seu eundem in patiente produci effectum; cum non concedam, vires esse velocitatibus proportionales, imo contrarium mihi sit pro demonstrato.

Quae habes de incurso obliquo, egregia sunt et prorsus ad sensum meum. Imo si in plano aliquo (fig. 51) tres sint globi aequales A, B, C et globus A in duos quiescentes B et C simul

incurrat, ita ut centra eorum in momento concursus faciant triangulum, quod sit rectangulum ad A; demonstro quieturum corpus A in $2A$, corpora autem B et C omnem vim esse receptura et quidem itura celeritatibus $2B_2B$, $2C_2C$, quae sint latera quadrati, cuius diagonalis sit $4A_2A$ celeritas ipsis A ante ictum. Hinc jam duxi consequentiam, qua rursus constrictus tenetur Dnus. Papinus. Ponamus corpora B et C in $3B$ et $3C$ parieti immobili Elastico directe occurrentia, repercuti celeritate et itinere quo venerunt, et reduentia prouide simul ad $4B$ et $4C$, ibi rursus simul incurrere in A, loco quietus resumo; tum ambo B et C resumunt quietem, et corpus A suam celeritatem recipiet. Hinc porro sequitur, idem futurum, si B et C in quiescens A veniant ex locis $3B_2C$ celeritate abunde accepta, quam ab A aut pariete elastico; nihil enim refert, unde habeant, postquam semel habeant. Ergo aequales globi B et C et aequivoceles, simul incurrentes in tertium cuiilibet eorum aequalem A, situ centrorum faciente triangulum ABC rectangulum in A, quiescent post ictum, et totam suam vim in A transferent, eique dabunt celeritatem $3A_2A$, quae sit ad celeritatem ipsorum $3B_2B$ vel $3C_2C$, ut diagonalis ad latus quadrati. Unde jam habemus simplicissime, quod Papinus fieri posse negarat, ut in concursibus ex maiore massa in minorem tota vis transferretur; quod tamen hic contingit ex B+C in A. Idque in literis ad Papinum scriptis inani a me reperimentum per concursum unius cum duobus, non tamen exposui, quod videretur mihi inconvertibilis demonstrationibus quantiscunq̄ue.

Sed quoniam Te in nostris castris video, lubenter communicabo principium meum a priori demonstrandae verae aestimationis viricum, quod mihi in prompta esse aliquoties indicavi, nondum tamen lactenus produxi. Tibi autem communicare est frugiferae maxime terrae commendare gramum, et in magnam plantam surgat. Petitur autem ex principis maxime primis et abstractis, nempe notione temporis, spatii et actionis. Unde etiam patet tantum abesse, ut quod aliqui putarunt, negligatur a me debita temporis consideratio, ut potius sit totius aestimationis basis.

Ecce Argumentum:

I. Actio faciens duplum, tempore simplo, est dupla (virtualiter) actionis facientis idem duplum tempore duplo; seu percursio duorum miliarium intra horam est dupla (virtualiter) percursionis duorum miliarium intra duas horas.

2. Actio faciens duplum tempore duplo, est dupla (formaliter) actionis facientis simplicium tempore simplo; seu percursio duorum miliarium intra duas horas est dupla (formaliter) percursionis unius miliaris intra unam horam.

3. Ergo Actio faciens duplum tempore simplo est quadrupla Actionis facientis simplicium tempore simplo; seu percursio duorum miliarium intra unam horam est quadrupla percursionis unius miliaris intra unam horam.

4. Si pro duplo substituimus triplum, quadruplum, quintuplum etc., prodiiisset actio noncupla, sedescupla, 25p̄la; et generaliter patet, actiones motrices aequales, aequitemporaneas, aequalium mobilium esse ut quadrata celeritatum, vel quod idem est, in eodem vel aequali corpore vires esse in duplicata ratione celeritatum. Q. E. D.

Hoc argumentum, quo est brevis et petium ex magis obvis, hoc puto fore inexpectatum, et nonnullos etiam sese in eruendo aliquo ejus paralogismo frustra fatigaturos. Suspiciamur enim nos decipi, quoties brevis et facilibus argumentis vel circumvenimur. Nobis tamen illos dignari haec liquida luce veritatis, qui argumenta illa, ab affectibus gravium vel aliorum corporum sensibilibus petita, non ut par est accipere; unde nec publice extare volui, ut esset, quod illis communicarem, qui sese aequos iudices praebuissent.

Verissimum est, quod ais, et a me quoque comprobatum in Tentamine de Motuum Coelestium causis, vires centrifugas in ratione composita esse ex duplicata directa celeritatum et reciproca simplice radiorum; neque id contemnendum est in rem nostram, etsi enim haec vires vel potius sollicitationes differant a viribus ipsis per se circulantis; sufficit quod illis sunt proportionales. Interim revera nihil aliud sunt quam celeritates elementares. In centro percursionis indagando peculiaris oritur subtilitas, quam alia vice exponam; tunc enim valetudinis ratio magnam attentionem non fert. Memini etiam me olim examinare resistantiam respectivam ad meae aestimationis leges, et tamen veramprehendere, quod et ipsum resumtum lubentissime exponam. Cur autem in vulgari Mechanica aequilibrium sit, cum velocitates descendendi infinite parvae seu initiales sunt ponderibus reciproce proportionales, causa est (quemadmodum etiam indicavi in Actis) quod initio etiam descensus vel ascensus sive altitudines sunt ve-

jocitatibus istis elementaribus proportionales. Generaliter autem gravium vires sunt in ratione composita corporum et altitudinum, ad quas vi ipsarum ascendere possunt corpora, vel ex quibus descendendo eas acquirere. Caeterum pro objectione non habeo quod notas, si una libra a fulcro duplo remotior cum duabus libris sit in aequilibrio, supervenientem velocitatem actualem ex parte unius librae descensum ejus facturam, non tamen magno impetu semper, sed pro ratione impressae velocitatis, cum et apposita duae librae, una illa descendente, sint elevandae; nec puto experientiam a nostris principibus dissensuram.

Mersenni experimentum vereor ne sit erroneum; si tamen verum esset, globum erecto perpendiculariter tormento excussum non recidere, sequeretur gravitatem, in brevi distantia a terra, vim perdere, et terram esse instar magnetis, qui acns nonnisi valde propinquus attrahit. Neque id nobis officeret; rem tamen ita sese habere non facile credo. Miror experimentum a nemine, inde a Mersenni temporibus, fuisse sumptum.

Velum Tibi persuadeas, cum contra motum perennem mechanicum nuper Tibi scriberem, plane me in animo non habuisse, quae olim ope filtri propositas; alioqui dixissem aperte et candidè nec Te verbis aculeatis papugissem, quod a meo more est alienum. Et non ero adversus, cum declares debere accedere motum intestinum ex aliam quam gravitatis principis ortum, veluti si fermentatio durabilis aut periodica esset in liquore, atque non nisi motum physicum perennem intendas. Nam optime ais, liquore leviori super gravieren posito et deinde cum eo perfecte mixto, commune eorum gravitatis centrum ascendere; unde adeo vi quadam extranea vel physica ad hanc mixturam opus esse constat. Forte et alia postea vi physica opus erit ad procurandam filtrationem seu ad vincendam causam mixtionis conservatricem, quae causa conservans fortasse esse posset vel sola partium tenuitas. Itaque ingeniosam Meditationem Tuam sogillare in animo non fuit.

Atque ita jam omnis Tua attigisse credo, etsi omnibus non sit satisfactum, quod tamen spero me alias, Deo dante, facturum, ubi valetudo sibi recte constabit. Interea parabilioribus meditationibus semper promptissime inservire conabor. Et sunt omnino in hoc negotio Dynamices nostrae, quae adhuc Tibi exponi debent, quia publice nondum prostant; cum enim a multis annis ista ver-

saverim, mirum non est, si nonnulla constitui, quae primo aspectu sese offerre non possunt. Quanti autem momenti sit, recte constitui principia hujus *Matheseos*, vel Physico-Matheseos tam late patentis, quae considerationem virium (rem imaginationi non subditam) addit Geometriae sine scientiae imaginum universalis, facile intelligis. Libentissime autem Tibi exponam sententias meas, vel ideo ut cogitis illis, facilius deinde per Te superes difficultates, neque necessitate haec diutius meditando leves. Nam multa mihi elaboranda supersunt adhuc altiora, si Deus vires vitamque concedat, quae vellem non interire.

Cum Cursor publicus abiisset ante has expeditas atque adeo tempus adhuc superasset, nonnulla subiungenda putavi, ne qua in re Tibi satisfacere negligerem. Et quidem circa demonstrationem meam ex principis primis petitam, notatu dignum est et imprimis memorabile, hinc sequi revera eandem semper quantitatem Actionis motricis absolutae conservari; sed in eo fuisse peccatum a Cartesio, quod eam non recte accepit et cum ea, quam vocat, quantitate motus confudit, praedicta recepta secutus. Deinde sciendum est, a me distingui vim absolutam a directiva, quantum et directivam ex sola consideratione potentiae absolutae deducere et demonstrare possim. Et quidem demonstro non tantum eandem conservari vim absolutam seu quantitatem actionis in mundo, sed etiam conservari eandem vim directivam eandemque quantitatem directionis ad easdem partes, seu eandem quantitatem directionis ad easdem partes seu eandem quantitatem progressus, sed progressu in partibus computato, ducta celeritate in molem, non quadrato celeritatis. Haec tamen quantitas progressus in eo differt a quantitate motus, quod duobus corporibus in contrarias partes tendentibus pro habenda quantitate motus totali (sensu Cartesiano) debent addi quantitates motus singulorum (seu facta ex celeritate in molem) sed pro habendis quantitate progressus debent a se invicem detrahi; differentia enim quantitatum progressus debent in tali casu erit quantitas progressus, quod anima quidem non augcat vel minuat quantitatem motus in mundo, augcat tamen vel minuat quantitatem directionis spirituum, lapsus est ignoratione hujus legis nostrae novae de conservanda quantitate directionis, quae non minus pulchra est et inviolabilis, quam conservatio virtutis vel actionis absolutae. Haec autem lex directionis vel potius

consectaria ejus, mire decepere plerosque, ut videntes ibi locum habere aestimationem ex ductu celeritatis in molem, ubique illi locum facerent, etiam cum agitur de vi absoluta. Exempli causa experimentis constitit, si duo globi duri seu Elastici, A et B, directe et centraliter concurrant inter se celeritatibus, quae sint reciproce proportionales corporibus, eos se mutuo repellere, ita ut ambo redeant ea qua venere celeritate. Hujus rei necessitas sequitur ex nostro principio conservandae directionis. Nam, ante concursum, progressus eorum seu quantitas directionis est aequalis nihilo; ergo talis etiam debet esse post concursum. Cum vero etiam vis eorum absoluta debeat conservari, demonstratur has duas conservationes virtutis absolutae et directionis simul non posse obtineri, nisi dicta repercussione. Simili methodo demonstratur, quod supra asserui, de globo A cum B et C concurrente per triangulum rectangulum, et regulae etiam concursus duorum corporum statim definiuntur. Verissimum est etiam ipsam vim directivam haberi ductu molis in quadratum celeritatis, ut aliquando apparebit. Interim, eo seposito, illa simplex consideratio directionis seu progressus etiam facit, ut in aliis multis opus sit celeritate ducta in molem; verissimaeque maneant theorematum receptae Mechanicae, item oscillationis vel percussiois, imo et resistentiae mediis respectivae. Reperi enim, si ponamus corpus in medio ferri, et medium constare ex innumeris globulis, per spatium tanto rarius disseminatis, quanto medium est tenuius, celeritatum decremента, in quovis ictu amissa, esse celeritatibus proportionalia; et cum aequalibus temporibus, numeri ictuum hoc loco sint ut celeritates, fore decremента ut quadrata celeritatum, aequalibus temporum elementis. Idque ex ipsis illis meis principii de conservanda tam virtute absoluta, quam directione, demonstro. Unde vides, quanta hic cautione sit opus in recto usu principiorum nec iri debere per saltum, nondum omnibus rite examinatis. Sed haec altiora objectoribus, in quibus non satis docilitatis apparuit, exponere non sum dignatus, tametsi principium hoc generale de conservanda etiam directione contra Cartesianos non dissimularim. Tibi vero vellem haec omnia uno oculi obtuta paterent. Atque ita jam ea dedi, ex quibus omnibus Tuis difficultatibus (etiam supra dilutis) satisfit. Hoc tantum addo, re considerata, non esse quod quaeramus demonstrationem hypoteseos illius, quasi grave descendens vel ascendens plures ictus

a materia gravifica recipiat, eodem tempusculo, proportionem celeritatis, neque enim veram puto: et si esset vera, celeritates non crescerent aequaliter seu ut tempora. Interim minime concedendum est, quod aequalis gradus virium absolutarum, quovis ictu gravi, addatur vel auferatur; etsi enim materia gravifica semper aequaliter agere ponatur, tamen grave patiens non manet aequaliter dispositum. Longe enim alia ejus est dispositio cum quiescit, quam cum jam vim accepit. Imo, eo ipso, dum additur eadem celeritas celeritati alicui jam inexistenti, demonstratum habetur ex nostris principiiis addi vim majorem, quam cum additur quieti; seu plus esse celeritatis gradum addere jam moto vel magis moto, quam addere quiescenti vel minus moto: ut ita argumentum contrarium sit demonstrative revictum, et alia solutio non sit quaerenda. Vale.

Dabam Hanoverae 28. Januar. 1696.

P. S. Curavi nuper edi relationem ex Gallia mihi missam de novo illo et admirabili Anulidysenterico, quod mercator quidam ex Hispania attulit, et jussu Regis innumeris successibus comprobatum est. Non dubito quin Tibi, in Gallia versanti, dudum innotuerit. Sed quoniam nunc compertum est, nihil aliud esse quam remedium a Pisone descriptum in Historia naturali Brasiliae, et quae antea velut arcana premebantur, jam emanavere, in usum nostrorum edi curavi. Credo hoc remedium plus adhuc habere in recessu, nec ad solus dysenterias valere. Apud Pisonem vocatur Ipecacuanha

De caetero magna me voluptate afficies, si me crebro, et si vacat, septimanatim scribas, etsi ego fortasse semper septimanatim respondere non possim. Iterum vale.

XXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Vix credideris, quanto me moerere afficiat dubia Tua valedo; faxis, rogo, omnibus modis, ut graviori malo in tempore occurras. Spero tamen catharrum, quo natura subinde, praesertim hoc anni tempore, utitur ad expellendum quod sibi molestum

est, Tibi pariter in firmiorem sanitatem esse cessurum; quod ut ita fiat, Deum animatus precor.

Dominus Papius, ut video, manus victas nunquam dabit; jam nimis aperte Cartesianae opinionis defensionem suscepit, quam ut ab ea deflecti possit, suae magis consulens gloriae (si qua gloria dicenda est a praecipuis non desistere velle) quam veritati. Quin si errorem tandem videret, non tamen cum agnosceret, multo minus publice fateretur. Interim gaudes, quod nunc ego Texum in summa rei conveniam, et pleraque, quae in prioribus meis notabam, ad stabilendam novam Tuam hypothesein, Tibi non displicent. Miror vero etiam, a Te non approbari modum meum explicandi ictus materiae gravificae, qui quolibet tempusculo corpori gravi imprimuntur; certe si velimus aequos iudices agere, oportet ut cuique suum tribuamus. Equid clarius est, quam quod duae quantitates fluidorum aequivelocium incurritum in duo corpora aequalia, ipsis inferant vires, quae erant in ratione ipsarum quantitatum fluidarum; est enim et hic repetitio effectuum homogeneorum, quam adeo commendas pro aestimatione causarum; ita ex. gr. quantitas fluidi, ut $2A$, celeritate ut C , productus duplo majorem vim quam quantitas ejusdem fluidi, ut A , celeritate eadem C , quod enim potest unum A , idem poterit etiam alterum A , caeteris paribus; ergo geminata causa, geminatur effectus. Hinc siquidem minus arideat quod dixerim, numeros ictuum, qui quolibet tempusculo imprimuntur corpori gravi, esse ejus celeritati proportionales, ponamus unicum esse ictum, quovis tempusculo impressum (quamvis, ut verius dicam, nullus sit ictus, sed potius una continua pressio per totum descensum gravis) nunquid ipsi ictus diversis tempusculis impressi erunt, (quandoquidem celeritas materiae gravificae maneat semper eadem) ut quantitates fluidi seu materiae gravificae illis tempusculis percursae seu penetratae; verum ac quantitates sunt ut spatiola descensuum momentaneorum, id est, ut celeritates gravis; ergo etiam ictus, vel potius vires ictuum diversis tempusculis gravi impressae, erunt ut celeritates. Id quod apertius liquet ex ipsa figura in ultimis meis adjecta, quam, si placet, aspicias; ubi si supponatur grave descendens per AB esse ex. gr. in 2 , facturum uno tempusculo descensum $2, 3$; nunc autem esse in 6 , et aequali tempusculo percurrere $6, 7$; illico huparet majorem copiam materiae gravificae aequali tempusculo appellere ad grave, quando est in 6 , quam cum est in 2 ; quae

quidem copiae erunt ut spatiola percursa, id est, ut $5, 6$ ad $1, 2$; id est, ut celeritates in dictis locis acquisitae. Sed rogo ut haec paulo attentius mecum consideres; non enim dubito quin is tandem assensus tribuas, cum adeo apprime et rationi et experientiae conveniant; licet verum sit, me minus congrue dixisse grave descendens vel ascendens plures ictus a materia gravifica recipere, eodem tempusculo, proportionem celeritatis; est enim, ut jam dixi, unica continua pressio; interim per numeros ictuum illorum celeritatibus proportionales, intelligere volui pressiones uno tempusculo inductas, quae sint celeritatibus proportionales, ideo quod grave in illa proportionem materiae gravificam penetret, ut ego puto, non autem quod grave nunc tardius, nunc celerius moveatur, ut Tu statuis. Unde cerasis meam sententiam plane nil offecere opinionum receptae, celeritates crescere aequaliter seu ut tempora. Ne autem quid desit, ostendam alterum dilemmatis membrum, quod scilicet globus A , incurrens celeritate infinita in globum B , aequalem ei vim imprimat, sive globus B quiescat sive moveatur; ad quod demonstrandum haec duo tanquam concessa praemittam. 1. Si duo globi moveantur in plano, quacunq; celeritate, et sibi mutuo occurrant, erit quantitas ictus eadem censenda seu erit ictus aequae fortis, sive planum, super quo moveantur globi, omnino quiescat, sive alia peculiari celeritate moveatur; hoc utique nemo negabit; alias corporum actiones in terra non eadem dicendas essent in Hypothesi Ptolemaica et Copernicana, vel ex. gr. oporarius in navi laborans, non eadem vi clavum impelleret, si navis quiescat quam si sit in motu. 2. Corpus motum celeritate infinita eundem effectum praestabit, quem praestat, si ejus celeritati superaddat finitus celeritatis gradus; sit enim Corpus A , celeritate infinita (∞) et idem corpus A celeritate $\infty + 1$, erunt effectus ut quadrata celeritatum, id est, ut ∞^2 et $\infty^2 + 2\infty + 1$; verum haec duo quadrata censentur aequalia, quoniam $2\infty + 1$ pro nihilo habetur respectu ∞^2 .

Quibus praemissis supponatur globus A moveri in plano aliquo quiescente, celeritate ∞ , et incurrere in globum B quiescentem; nunc vero intelligatur planum simul etiam moveri in eadem partes, celeritate ut 1 , habebit hac ratione globus A velocitatem $\infty + 1$, et globus B velocitatem 1 , atque adeo, per lemma primum, globus A , celeritate $\infty + 1$, tantundem valet in globum B , celeritate 1 , quam idem globus A , celeritate ∞ , in globum B , cele-

ritate 0 seu quiescentem. Verum per Lemmas secundum effectus globi A, celeritate ∞ , est aequalis effectui globi A, celeritate $\infty + 1$; ergo etiam globus A, celeritate ∞ , tantundem valet in globum B, celeritate 1, quam in eundem globum B, celeritate 0 seu quiescentem; id est, vis impressa globo B erit aequalis, sive moveatur, sive quiescat. Q. E. D. Hinc, ni fallor, veritas illius, quod de globo selopeti in testudinem impacto retuli, satis asseritur.

Dum haec scribo, non possum quin ob similitudinem materiae aliquid moneam, quod mihi post scriptas deum priores meas occurrit in perfectione Schediasmatis Tui Actis Erud. Anno 1689 p. 40 inserti De resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente, ubi, quae de Resistentia absoluta Art. I. habes, nimis festinanter a Te scripta videntur, ut pro ingenitate Tuae ipse fateberis, si ea relegere placuerit. Dicis enim

1. Decrementa virium sunt proportionalia incrementis spatiorum; quod utique ita debet esse, etenim ad superandum duplo majorem frictionem, id est, ad percurrendum duplum spatium, etiam impenditur duplo major vis etc. sed quod subnectis

2. Velocitates sunt proportionalia spatiis, perditae percursi, residuae adhuc percurrendis, hoc ipsi Tuae hypothese de aestimatione virium minus consentaneum videtur. Ratio quam addis ibidem: Ponantur incrementa spatii esse aequalia, erunt decrementa virium aequalia (per prop. 1): nam si ejusdem mobilis decremента virium sint aequalia, etiam decremента velocitatum sunt aequalia (sunt enim vires ut quadrata velocitatum; aequalibus autem existentibus quadratis, etiam aequalia sunt latera) itaque Elementa velocitatum amissarum sunt ut elementa spatiorum percursorum-residuorum ut adhuc percurrendorum. Ergo velocitates sunt ut spatia etc. In hoc praeprius vacillat, quod consideras velocitates amissas, quae utique amplius non existunt et proinde ad aestimationem virium perditarum nihil faciunt, leco quod considerari debuissent velocitates residuae ad aestimandas vires residuas, ex quibus deinde decremента illarum et harum innotuissent; sunt enim velocitates reales, quae determinat vires. Hinc, si in figura tibi opposita (fig. 52) velocitas initio sit AE, spa-

tium integrum in medio percurrendum sit recta AB, ejus pars jam percursa AM, adhuc percurrenda MB, velocitas residua MC (vel AF) amissa FE, erit ECB non recta, sed parabola, cujus vertex B et axis BA: quod quidem ex hoc solo etiam patet, quod si spatium percursum AM sit ex. gr. $\frac{1}{2}$ partes axis AB, perdidit mobile etiam $\frac{1}{2}$ suae vis (quia spatia percursa sunt ut vires impensae) remanebit ergo mobile $\frac{1}{2}$ vis initialis, et cum vires sint (juxta hypothesein novam) ut quadrata celeritatum, habebit mobile in M, $\frac{1}{4}$ celeritatis initialis, id est BM. BA :: MC². AE². Praeterea huic meae objectioni ipse apertissime suffragaris in penultimis Tuis ad me datis, ubi ais, me recte judicare, ex Tuis principiis sequi corpus duplo celerius quadruplo amplius penetraturum in materiam mollem, modo consideretur sola difficultas, quae est in separatione partium tenacium, id est, considerata sola resistentia absoluta etc. Quae cum ita se habeant, peraeque cadunt, quae in dicto Schediasmate ex praemis illis deducis, ut curva AL cujus abscissae et applicatae BM, ML denotant spatia residua, et tempora insomta, non erit logarithmica, sed parabola communis, contra reg. 3 et 5 Art. I. Ideoque mobile M absolvit spatium percurrendum integrum AB tempore finito, contra reg. 4 ibidem. Sequentia etiam quoad maximam partem subvertuntur. Qua de causa Tibi deliberandum relinquo, annon haec corrigere operae pretium esset. Interim enixe rogo, ut hanc meam admonitionem serena fronte accipias; vides enim unicum meum scopum esse studium veritatis, et procedi a me distare morem illorum, qui aliorum scripta cavillandi unice causa suas objectiones statim divulgant publice; si vicissim a me in aliqua re peccator, non solum neque fero correctionem, sed insuper obstrictum me fateor illi qui me ab errore liberaverit; quo nomine Tibi plura, quam ullatenus demereri possim, debeo.

Modus transferendi totam vim ex majori massa in minorem, quem ex his, quae de incurso obliquo globorum dixeram, deduxisti, mihi perhibet; nec dubito quin Du. Papinum, et vel invitum, ad assensum coegerit; prgratum tamen esset intelligere, quid responderit. Meo arbitrio non male ageres, se responsionem Tuam ad ultimas ejus objectiones etiam publici juris faceres, cum ille in libello suo eo Te invitare videatur; alias nulli rem a Papino egregie defensam putarem.

Argumentum a priori petitum, quo demonstras principium Tuum, est sane speciosissimum, et ut dicis, omnino inexpecta-

tum: quod illud mihi communicare volueris, haud parvas refero gratias. Non video quid ab adversario in contrarium dici possit; nisi forte quod actio virtualis confundi videatur cum actione formali, negando scilicet consequi A esse quadruplam ipsius C, et eo quod A sit dupla ipsius B virtualiter, et B dupla ipsius C formaliter. Haec dicit tibi modo ratiocinari licere, si utraque actio esset homogenea, id est, utraque ut virtualis aut formalis; sed utrumvis sumamus, delabemur semper in *quærens quædams*; quod scilicet actio faciens duplum, tempore simplo, non esset quadrupla, sed dupla tantum actionis facientis simplum tempore simplo. Ecce imitor argumentum Tuum.

1. Actio faciens duplum tempore simplo est dupla virtualiter actionis facientis idem duplum tempore duplo.

2. Actio faciens duplum tempore duplo est simpla virtualiter actionis facientis simplum tempore simplo.

3. Ergo actio faciens duplum tempore simplo est dupla actionis facientis simplum tempore simplo. Vel sic

1. Actio faciens duplum tempore simplo est simpla formaliter actionis facientis idem duplum tempore duplo.

2. Actio faciens duplum tempore duplo est dupla formaliter actionis facientis simplum tempore simplo.

3. Ergo etc.

Vides duo argumenta, quae idem plane concludunt, sed Tuae conclusioni omnino contrariam, et vulgato illo nituntur axioma, quae eidem sunt aequalia, illa sunt inter se aequalia; quod quidem tantummodo locum habet in quantitibus homogeneis, ut hic comparando actionem virtualem cum virtuali, et formalem cum formali non nitentur cum hac. Quid ad hanc objectionem responderi debeat, ipse dispicias; nolui ego Tibi quid objicere, sed potius quid ab aliis objici possit, sincere moneo, quod a Te etiam ita acceptum iri spero.

In Actis Februarii Anni 1659 vidi Tibi quoque compertum fuisse vires centrifugas seu, ut vocas, conatus excussorios esse in ratione composita ex duplicata directa celeritatum et reciproca simplice rationum. Hinc si velis paulo attentius considerare problema meum, quod ante annum in Actis proposui, illud non adeo inelegans reperies, quin Tuam applicationem mereatur. Grave nempe in plano verticali libere descendens et evolvens curvam aliquam quaesitam acceleratur, et provine vis centrifuga hac ratione auge-

tar. Quoniam autem filum evolvens, cui grave alligatum est, elongatur, vis centrifuga hac ratione minuitur. Quaeritur itaque constructio curvae, ut decremenda vis centrifuga ab elongatione illi profecta, compensetur per incrementa ejusdem vis ab acceleratione provenientia, id est, ut tensio illi semper eadem maneat, vel ut filum semper vi eadem extendatur.

Quenam in centro percussiois indagando alia oriatur subtilitas, quam illa, ut considerentur quadrata celeritatum actualium, ceu in prioribus meis inmi, lubentissime mihi exponi cuperem.

Ais Te etiam elim examinasse resistantiam respectivam ad Tuae aestimationis Leges, et tamen veram deprehendere; sed nescio utrum verum putes, an quod resistantiae respectivae sint ut quadrata, an vero ut cubi celeritatum; illud vulgaris est opinio, hoc autem ex existimationis Tuae lege consequitur.

Mirum quantum me delectarunt, quae habes de vi directiva et quantitate directionis ad easdem partes seu quantitate progressus: ubi pulchre detoxisti, quid Cartesio alisque ad errorem ansam deberit, scilicet quod cum viderent aestimationem ex ductu celeritatis in molem alicubi, ut in duobus globis perfecte elasticis, inter se celeritatibus quae sint reciproce proportionales corporibus concurrentibus, qui post ictum, pristina celeritate repercutiuntur, locum habere, fallaciam committentes inductionis ubique illi locum facerent. Recte dicis, quod vis directiva ex sola consideratione potentiae absolute deduci et demonstrari possit; sed non ita facile est demonstrare, semper eandem quantitatem directionis seu progressus conservari. Interim scias me jam a longis anni sine formasse principium, quod, ex occasione Tui, iterum in memoriam revocari, et post institutum examen mirifice cum Tuo conspirare deprehendi. Illud autem est tale: Si corpora quocumque, in motu constituta, sibi quomodocumque occurrant, habebit se centrum commune gravitatis post concursum eodem modo quo ante concursum, id est, post mutam actionem corporum, centrum commune gravitatis eandem directionem et eandem celeritatem servabit, quam habebat ante actionem. Possum autem demonstrare, quod id quod vocas quantitatem directionis, scilicet ducta celeritas in molem, nil aliud sit, quam quantitas progressus centri gravitatis, seu ducta celeritas centri communis gravitatis in summam molem, adeo ut haec duo principia sint plane unum et idem. Ex his jam conicere liceret, eandem semper gravitatem directionis in mundo conservari; est

enim ista quantitas semper nulla, seu tanta est quantitas directio-
nis in unam partem, quanta in contrariam; alias centrum commune
gravitatis totius universi progredereetur aequaliter in linea recta
in infinitum, a quo utique natura abhorret. Concipio itaque totam
Machinam mundanam tanquam corpus suspensum in centro gravi-
tatis, cujus tamen partes, liberae et separatae, omnibus modis
circa centrum moventur, ita ut perpetuum aequilibrium servetur.
Ex his principiis facile novae et verae conduntur regulae commu-
nicationis motuum: veteres enim, a Cartesio et aliis constitutae,
omnes erroneae sunt eo ipso, quod ad conservationem ejusdem
quantitatis virium motricium et progressus centri communis gravi-
tatis non attenderint. Concursus harum duarum quantitatum sibi
semper aequalium regulas determinat; alias esset problema inde-
terminatum, cum infinitis modis celeritates mobilium variari pos-
sint, ita tamen ut semper eadem quantitas virium maneat. Sed
non erit eadem quantitas directionis seu progressus centri gravi-
tatis; et vicissim infinitis modis celeritates variantur, ut semper eam
quantitas progressus maneat, sed tunc non manebit eadem
quantitas virium. Unicus ergo est casus, ubi utrumque simul obti-
netur, ex quo generalis regula pro communicatione motuum elici-
tur haec:

Globus a celeritate m , incurrens in globum b , habentem cele-
ritatem n , habebit post ictum celeritatem $\frac{am + 2bn - bm}{a + b}$ et

celeritas ipsius b erit $\frac{bn + 2am - an}{a + b}$, si globi ad eandem par-
tes ferantur, et m sit major quam n ; sin ad partes contrarias,
ponendum tantum est $-n$ pro $+n$, et $+n$ pro $-n$. Hinc
si corpus A , celeritate ut 1 , incurrat in aequale B quiescens, ha-
bebit post ictum B celeritatem ut 1 , et A quiescit (pono hic cor-
pora perfecte elastica vel dura; idem enim effectus sequetur, sive
sint perfecte elastica sive perfecte dura, nam falsissimum puto,
quod aliqui, inter quos Wallisus, stauerunt perfectam duritiam,
si qua daretur, elicere ut corpora post concursum simul et con-
iunctim ferrentur). Sed si artificio quodam effici posset, ut in
ipso concursus momento, corpora, etiamsi summe dura, per unum
aliquem, vel aliquod gluten, ita arte sibi invicem cohaerent, ut
non possent progredi nisi junctim, procul dubio ob conservationem
ejusdem quantitatis virium irent celeritate ut $\sqrt{2}$; verum tunc

quantitas progressus non eadem maneret. En igitur casum ali-
quem, quem in penultimis Tuis dari posse negaveras: Tuam super
hoc responsionem libenter audirem; ego quidem aliquid responsionis
loco adducere possem, sed id ipsum non omnino mihi satisfacit.
Caeterum dicis, quod simplex consideratio directionis seu progres-
sus etiam faciat, ut in aliis nullis opus sit celeritate ducta in
molem, verissimaeque maneat theorematum aequilibræ Mechanicae,
item oscillationis vel percussiois, imo et resistentiae mediæ res-
pectivæ. Nescio quo pacto facias ut, sola celeritate ducta in
molem, pervenias ad cognitionem centri oscillationis; ego eleganter
admodum et felicissime centrum istud invenio, ponendo tantum
principium illud conservationis ejusdem quantitatis virium, ubi in
omnibus consentio cum Dno. Hugenio, absque ut adhibeam ejus
obscurum principium, quod scilicet commune centrum gravitatis
penduli compositi ad eandem altitudinem ascendere debeat, sive
corpora pendulum constituta separatim moventur, sive simul,
cum sunt in linea rigida affixa, oscillentur. Interim de centro
percussiois aequum constat, an illud sit, quod Geometrae hactenus
constituerunt. Lubentissime concedo, si ponamus corpus
ferri in medio constante ex innumeris globulis aequaliter dissemi-
natis, celeritatum decrementa fore ut quadrata celeritatum, aequa-
libus temporum elementis. Possunt enim et ego illud demonstrare
ex principiis de conservanda tam virtute absoluta quam directione;
hoc autem minime probat, quod enim resistentiae ipsae, id est,
virium decrementa quovis tempore amissa sint ut quadrata cele-
ritatum; quin imo ex hoc ipso evincitur resistentias esse ut cu-
bos celeritatum. Si enim (fig. 53.) mobile A feratur in tali media,
et abscissa AB denotet tempus, erit celeritas BD in curva hyper-
bolica CD , cujus asymptotus AB , et celeritas initialis AC , quon-
iam differentiales ipsarum BD sunt ut harum quadrata. Verum
vires mobilis sunt etiam ut quadrata celeritatum BD : ergo decre-
menta celeritatum sunt ut vires, et proinde decrementa decremen-
torum celeritatum ut decrementa virium, id est, ut resistentia
ipsa; sunt autem in hyperbola decrementa decrementorum applica-
tarum BD , id est, differentiae secundae in cubi applicatarum
ipsarum BD . Ergo etc.

Groningae 22. Febr. 1696.

P. S. De mirabili antidysenterico Ipecacuanha nunquam ante-
hac innotuit mihi, neque etiam novo nostro Practices Professori

meum vocato, Medico alias experientissimo, quem super hac re expresse interrogavi. Herbam Paraguay jam satis notam dicit. Cortex Peruviana etiam apud vos venalis erit. Frater meus scripsit de omnibus Amstelodanum celebri cuidam pharmacopola (Droguiste) sed responsum hactenus nondum accepit.

Nihil mihi gratius esset, quam crebrius, imo hebdomatim Tibi scribere, sed negotia tam publica quam privata hoc prohibent; adde quod mihi labores nocturni omnino sint interditi, eo quod lumen candelae valde officiat oculis meis. An nunc Halenses habeant Professorem matheos et quoniam scire vellem. Si post aliquot annos ego desiderarer, vocationem non recusarem. Iterum vale.

XXV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Meditationes Tuas mihi sunt gratissimae, sive provehas nostra, sive ingeniosis dubitationibus illustres. Utinam ego semper meditandi laborem ferre possem, ut Tibi recte satisfacere liceret; faciam tamen quantum nunc commode possum. A Te abis ut exigam, mihi ut septimanatim scribas, cum paria reddere non possim: facias ergo, quod e re videbitur, persuasus Tua nunquam apud me simia esse. Si non assentiar in quibusdam, peto ne me id quadam iudicii iniquitate facere putes, ut propemodum insinuas, cum ais: si aequos iudices agere velimus, oportere ut suum cuique tribuamus. Spero Te persensurum me, non sine gravi causa, dubitasse de modo explicandi ietus materiae graviticae. Asseris, si fluidum B incurrat in corpus M aequale corpori L, vires in corporibus L et M productas fore ut magnitudines fluidorum A et B; vel ut tuis verbis utar, duas quantitates fluidorum aequivelocium, incurrentium in duo corpora aequalia, illis inferre vires, quae sunt in ratione quantitatum fluidorum. Hanc propositionem non concedo, nec video quomodo per repetitionem effectuum a me adhibitam et commendatam demonstrari possit. Et reperies contrarium contingere, si A et B non fluida sint, sed solida, licet corpora recipientia L et M ambo quiescere intelligantur. Et multo

minus res succedet, si differant celeritate. Nimirum si globus A, 1, celeritate 1, incurrat in globum L, 1 quiescentem, accipiet globus L celeritatem 1. Si vero globus B, 2, celeritate 1, incurrat in globum M, 1 quiescentem, accipiet globus M celeritatem 4. Vides ergo, etsi globus B sit duplex ipsius A, tamen vires impressas ipsi M multo plus quam duplas esse carum, quae impressae sunt ipsi L. Numerum ictuum non improbo; imo magis veritati consentaneum arbitror, quam pressionem continuum. Quod tuum attinet rationem probandi corpus celeritatis infinitae eandem vim dare percusso, sive quiescenti, sive moto, concedo ictum esse aequae fortis, sive corpora concurrant in plano quiescente, sive in plano moto; sed aliud est ictum esse aequae fortis, aliud eandem in percusso produci potentiae quantitatem, computando tam quod proprium, quam quod commune est: cum alia sit virtum, alia motuum vel potius directionum compositio: quae etiam in finitis agnosci possunt. Sunt et alia in eo argumento, quae non omnino concludant, quod apparet, si in formam redigeretur.

Monitum Tuum ad meam aestimationem resistantiae absolutae deprehendo verissimum; idque ipse occasione data profitebor. Revera enim non valet haec consequentia: si ejusdem mobilis decremента virium sunt aequalia, etiam decremента velocitatum sunt aequalia; ortunq; hoc est ex praedictio vulgari de aestimatione virium, menti adhuc praeter intentionem inhaerente. SR mobilis a, celeritas e, vis aee; vis amissa avv, vis residua aee — avv, celeritas residua $\sqrt{ee} - vv$. Sit ejusdem mobilis celeritas (e), erit celeritas residua $\sqrt{(e)}(e) - vv$. Celeritatis decrementum priore casu erat e — $\sqrt{ee} - vv$, posteriore casu est e — $\sqrt{(e)}(e) - vv$, quae duae quantitates non sunt aequales. Haec illud verum est, si vires integrae ejusdem corporis diversis temporibus sint aequales, etiam velocitates fore aequales; secus est de parte, veluti de viribus amissis vel acquisitis.

Nondum communicavi Dno. Papino modum transferendi totam vim ex majore massa in minorem, quem possibilem esse negaverat, ut thesin tueretur. Nempe vigesimo Decembris anni praeteriti, his verbis ad eum scripseram: „Pour conclure, je me souviens, qu'antrefois vous avez nie qu'un grand corps peut transférer toute sa force sur un plus petit, parceque vous avez vu que selon

„l'opinion vulgaire des Cartésiens, que vous soutenés, j'en inferois „le mouvement perpetuel, et vous avés tâché d'éviter la force de „mes preuves, touchant les moyens de cette translation, le mieux „que vous avés pu, en faisant des difficultés un peu recherchées „sur ces moyens. Cependant ayant revü mes méditations sur le „choc des corps, j'ay trouvé que sans lever ny autre apparat, „dont je m'étais servi autrefois pour vous satisfaire là-dessus, il „y a un moyen simple pour cela. C'est que faisant en sorte que „deux corps choquent à la fois un troisième, il doit arriver en „certain cas, que les deux corps ensemble, quoiqu'ils fassent „une masse plus grande que le troisième, demeurent pourtant en „repos, et donnent toute leur force au troisième.“ Ad haec respondet Dnus. Papinus in literis 15 Januarii 1696: „Pour ce que „vous dites des deux corps, qui communiquent ensemble tout leur „mouvement (non dixeram „tout leur mouvement“ sed „toute „leur force“) à un troisième, je crois me douter de ce que c'est; „mais crainte d'estre encore obligé de donner deux réponses au „lieu d'une, je differeray d'en parler, jusqu'à ce que vous ayés „nettement exposé le fait“ etc.

Sed cum in illis ipsis literis mihi non satis acquitatis ostendere, sed sese ad elusiones praeparare videretur, rem exponere operae pretium non putavi; neque enim ita nunc constitutus sum, ut latebras varias quaerentem persequi velim aut possim. Caeterum cum voluptate vidi Te in literis tuis 18 Januarii datis, afferre nonnulla de compositione motus, quae cum his pulchre conspiciantur ipsique opponi possunt. Quae in libello suo scripsit, mihi controversiam tuam parum ad sensum meum proponere videntur, ut rem ipsam per se explicare aliquando, quam cum ipso litigare malim.

Video argumentum meum a priori non eodem apud Te esse loco, quo apud me. Neque habeo quod de eo querar. Tantum rogo, ut expendas talia paulo attentius, neque enim tam facile eludi potest, et ipse pro me solutionem objectionis hanc potuissas. Sane non video quid Tibi velis, cum dicis actionem virtualementem confundi cum formalis. Non enim actio nihil hic est virtualis vel formalis; sed una actio alterius est dupla vel virtualiter, vel formaliter. Nimirum virtualiter, cum dupla est aestimatione, etsi non sit dupla mole vel congruentia, ut Ducatus est duplex Thaleri; formaliter vero, ut Thalerus duplum est semithaleri. Et sciendum

est, quod duplum est formaliter. id etiam virtute seu aestimatione esse duplum; ideo cum nonnisi de virtute seu aestimatione hic quaeratur, nulla est confusio diversi generis quantitatum vel aestimationum. Nempe virtualiter duplum intelligo quod tale est virtualiter solum; sed formaliter duplum voco, quod simul et formaliter et virtualiter duplum est, et poteram vocabulis illis (tantum harmoniae cujusdam causa adjectis) abstinere; ut enim quia Ducatus duplus est Thaleri, et Thalerus semithaleri, concludo Ducatum semithaleri quadruplum esse, ita quia percursio 2 milliarium, una hora, dupla est percursionis 2 milliarium, 2 horis, et percursio 2 milliarium, 2 horis, dupla est percursionis unius milliarii, una hora, sequitur percursionem 2 milliarium una hora esse quadruplam percursionis unius milliarii una hora. Ignosce candide dicenti, non videris nisi admodum obiter impexisse demonstrationem meam, cum cum sic contra me verti posse objicis. 1. Actio faciens duplum, tempore simple, est dupla virtualiter actionis facientis duplum, tempore duplo. 2. Actio faciens duplum, tempore duplo, est simpla virtualiter actionis facientis simplicum, tempore simple. Ergo 3. Actio faciens duplum, tempore simple, est dupla actionis facientis simplicum, tempore simple, quod est contra me. Sed rogo ut expendas, quo jure assumi possit praemissa secunda, scilicet percursionem duorum milliarium, duabus horis, esse virtualiter simplicum seu aequale percursionii unius milliarii, factae una hora. Certe quae virtute aequalia sunt, aequipollent; quis vero cursor non malit percurrere unum miliare, una hora, quam duo miliaria duabus horis; quin potius, si hoc ultimum ab ipso fieri velis, licet per intervalla, duplam mercedem petet, pro duplicato scilicet labore. Nimirum, ut dixi, quod formaliter duplum est (percursio scilicet duorum milliarium, duabus horis) eo ipso etiam virtualiter seu aestimatione est duplum. Idem est de altero tuo argumento ad mei, ut ais, imitationem fabricata, quod tamen rursus longissime ab imitatione ejus abest, ut ipse facile perspicias, Ducato, Thalero et semithalero substitutis. Placet tamen hoc quoque argumenti simulacrum expendere: 1. Actio faciens duplum, tempore simple, est simpla formaliter actionis facientis idem duplum, tempore duplo. 2. Actio faciens duplum, tempore duplo, est dupla formaliter actionis facientis simplicum, tempore simple. Ergo 3. Actio faciens duplum, tempore simple, est dupla actionis facientis simplicum, tempore simple. Videris ita loqui ac si propositiones

hic possent assumi pro arbitrio; sed qua tandem verisimilitudine assumis hic praemissam priorem? Simpliciter formaliter esse, nihil aliud est, quam aequale esse formaliter, sive congruere, ut Thalerus et duo semithaleri. Tantum autem adest, ut percussioni duorum miliarium intra horam aequetur formaliter percursio duorum miliarium intra duas horas, ut ne virtualiter quidem seu aestimatione aequetur; quis enim dubitet, quod plus sit, idem velocius, quam tardius peragere? Interim mirari subit mentis humanae conditionem.

His duobus vocabulis, virtualiter et formaliter, quae omittere poteram, adjectis, totam apud Te argumenti vim corrupti, ut a re ipsa aversus, aliud ageres, quod Galli non male vocant: prendre le change. Talia nobis eveniunt, solo attentionis defectu. Obvium aliquid nos saepe ita percellit et ad se trahit, ut reliqua non amplius consideremus, quasi jam assecuti paralogismi, quem nobis facile fingimus, sedem, sive *περὶ τὸν ψευδὸς*, ut Tute loqueris. Ego nihil magni promittere ausim; sperabam tamen reus non fieri paralogismi apertissimi in argumentatione, non obiter elapsa, sed a compluribus annis considerata, quam tanquam alicujus momenti venditaram. Itaque fateor non potuisse me non valde mirari praecipitem sententiam tuam, et puto candorem in monendo meum Tibi non ingratum fore, quia utilis est, ut attentio excitetur, ne tempus male collocare mihi opus sit, defendendo, quae Tibi ipse consideranti facile se poterant approbare; cum me aequus sit in his sublevari. Majori specie opponi poterat: Pari jure quo ego assumi hanc propositionem, Actio faciens duplum, tempore simplo, est dupla actionis facientis duplum, tempore duplo, potuisse assumi hanc: Actio faciens duplum tempore simplo est dupla actionis facientis simplicium tempore simplo. Verum respondeo, hanc posteriorem non posse assumi, sed potius convinci falsitatis manifestae, hoc modo: Inter haec duo: A facere duplum tempore simplo, nempe C facere simplicium tempore simplo, datur medium minus priore et majus posteriore, nempe: B facere duplum tempore duplo, cumque manifestissime (ex natura repetitionis perfectae) sit B duplum ipsius C, sequitur demonstrative A esse plus quam duplum ipsius C. Comparatio igitur inter A et C potest resolvi ulterius per interpositionem comparationis simplicioris: comparatio vero inter A et B interpositione simplicioris resolvitur

non potest, sed primitiva est. His igitur a Te expensis, gratum erit aliquando cognoscere, quid jam argumentatione mea videatur. Quin aliam addo, quae, si fundum rei spectes, redit in priorem, habet tamen suum proprium pondus. Actiones motrices (aequalibus intelligo) ejusdem mobilis sunt in ratione composita effectum immediatum, nempe longitudinum percursorum et velocitatum. Porro longitudines (aequaliter percursae) sunt in ratione composita temporum et velocitatum. Ergo actiones motrices sunt in ratione composita ex simplice temporum et duplicata velocitatum; adeoque iisdem temporibus vel temporum elementis, actiones motrices ejusdem mobilis sunt in ratione duplicata velocitatum, vel, si diversa sint mobilia, in ratione composita ex simplice mobilium et duplicata velocitatum. Itaque ex nostris principiis verius rectiusque ostenditur, eandem in universo quovis momento vel aequalibus temporibus actionis motricis quantitatem conservari; quam vero Cartesiani computant quantitatem motus, veram actionis motricis quantitatem non esse. Sunt autem potentiae vel actiones, non impeditae nec adjuvae, aequalibus temporibus exercitae. Videmus ergo eandem semper vim, eandemque movendi actionem in rebus servari, et quantum vel potentiae vel actionis motricis uni decedit, tantum in alterum transferri.

Egrege divanisti (considerato, opinor, concursu duorum, in quibus celeritates sunt reciproce ut moles, ubi nullam esse directionem notaveram) principium de conservato semper progressu centri gravitatis coincidere cum principio servandae directionis. Revera enim directio seu progressus totalis idem est, quod progressus centri gravitatis ducta in mobildium aggregatum, ut jam fere Guldino notatum, cujus regulam ampliavi; et centrum gravitatis tantum praestat ratiocinandi compendium. Malui autem directionem adhibere in loquendo, quod rithi cum Cartesiano res esset. Cum Romae essem anno 1659 et cum Auzouto, eruditissimo Gallo, qui inter Academiae Scientiarum Regiae velut conditores fui, multum de his disputarem, meditationes meas in ordinem redigens libellum adumbravi, in quo demonstrantur haec omnia, de vi scilicet tam absoluta, quam directiva, et conservando progressu centri gravitatis, aequae his non inferiora. Eum transiens per Florentiam amico, in Mathematicis egregio, petenti reliqui edendum, et ille redegit in mundum omnia studioso, sed cum finis libro adhuc deesset, quem summittere in me roceperam, per me stetit haec, usque,

quominus editio sequeretur; nondum enim colophonem adjeci, partim quod multa nova subinde nascerentur, quae mererentur addi, partim quod his, quos videbam me non ut par erat accepisse, nollem vel obtrudere pulchras veritates. Interim propositionem hanc per elegantem inde decerptam, ante annos aliquot Diario Parisino*) inseri curavi: Si mobile A (quod ut punctum nunc consideremus) tendat simul motibus (id est, celeritatibus et directionibus) AB, AC, AD etc. (id est, ut quo tempore, si uno motu solo ferretur, perventurum esset in B, eo si altero solo ferretur, perventurum esset in C, et ita porro) et quaeratur punctum G, quod sit centrum gravitatis punctorum B, C, D, E etc. et recta AG producat in F, ita ut AF sit ad AG, ut numerus tendentiarum ad unitatem, feretur mobile motu composito AF (id est, eo tempore, quo motu solo AB pervenisset in B vel motu solo AC pervenisset in C etc. nunc motu composito pervenit in F) quae Propositio Hugeno profundae meditationis visa est, et nascitur et ipsa ex conservatione directionis, scilicet quod ex motibus duobus componentibus, qui sint secundum duo latera parallelogrammi, oritur motus compositus secundum diagonalem; huius propositionis generalis casus est simplicissimus, dudum notus. Meminit mese propositionis Dnus. Frater tuus in iis, quae nuper contra nos in Actis dedit. Respondi quam humanissime (ut hoc obiter dicam) tametsi videretur etiam sinceritatem meam in dubium vocare, quod me silere vetuit. Dn. Menkenius noster, vir egregius, significavit mihi sese ad Te scripsisse hortatumque esse, ut moderate fratri natu majori responderas, voluitque ut idem saderem ego. Respondi, me de Tua moderatione non dubitare et olim Te hac in re mihi *δημοφρονος* deprehendisse.

Verum est, quemadmodum et in proxime praecedentibus literis innui, ex conjunctis his duabus legibus: conservatae vis absolutae, et conservatae directionis, determinari leges motuum seu concursuum, modo corpora concurrentia A et B ponantur esse dura, seu quod mihi idem est, perfecte elastica. Calculum autem ita inire soleo, ejusque communicationem Tibi non ingrati fore spero. Progressus corporum A et B ad eandem partem vocetur ante ictum in illo x , in hoc, y ; post ictum in illo x , in hoc x ; quod si contingat corpora non tendere in eandem partes cum centro

*) Journal des Sçavans 1693, 7 Sept.

gravitatis, tunc ejus, quod in partem contrariam tendit, progressus erit negativus. His positis, ex lege virium absolutarum conservandarum fiet (1) $Avv + Byy = Axx + Bzz$; ex lege, conservandae directionis, fiet (2) $Av + By = Ax + Bz$, quae regula, certo tantum casu, coincidit cum regula conservandae quantitatis motus Cartesianae, cum scilicet ambo corpora tam ante, quam post concursum tendunt ad easdem partes, et adeo nullus ex progressibus v, x, y, z est quantitas negativa. Sed ecce jam tertiam legem non minus elegantem, quae hinc nascitur, imo caeteris simpliciozem. Ut enim prima regula est trium dimensionum, et secunda duarum, ita tertia est dimensionis unius. Nempe (3) $v - y = z - x$. Quod sic ostendo: Ex aequatione (1) fit (4) $Avv - Axx = Bzz - Byy$, et ex aequatione (2) fit (5) $Av - Ax = Bz - By$. Dividatur aequatio (4) per aequationem (5) prodibit (6) $v + x = y + z$, vel (quod idem est) aequatio (3). Aequatio igitur (3) continet legem conservandae celeritatis respectivae ejusdem, sive sit appropinquationis, accessivae ante concursum, sive recessus post concursum. Et quidem haec lex aliunde demonstrari potest, per vim scilicet elasticam concurrentium, quae concursu compressa se deinde resitunt, adeoque tantum celeritatem respectivam in contrarium vertunt, seu dispellantur ut compellantur. Unde ex lege prima et ex tertia aliunde demonstrata vicissim ostendi potest lex secunda. Nam si aequationem (4) dividat per aequationem (6) prodit aequatio (5) vel (2). Aliaque adhuc plura in his arcaea satis mirabilia latent. Casus, ut corpora concurrentia simul eant post concursum, servatis viribus, facilius fingi, quam a natura praestari potest; absorbebitur scilicet pars in ipso retinaculo vel glutine; atque ita objectioni, quam Tibi eo casu facis, respondendum est.

Haud dubie cum Hugeno sentiendum est circa Centrum oscillationis, in quo nostra principia spectant non potest esse difficultas; puto tamen et Centrum percussionis consentire ob causam dictam. Circa medium respective resistens, puto nos in re non pugnare, quia agnoscis quod dixi, aequalibus temporum elementis fore celeritatum decremента, ut celeritatum quadrata. Interim pergratae erunt meditationes tuae, quas innuis de centro oscillationis, vel de resistentia respectiva, alisque. Dni est, quod de nostris differentialibus apud me nihil attigisti; sed facile judico multa alia Tibi nunc agenda esse.

Mitto exemplum ejus, quod de Antidysenterico ex Gallico edituravi. Quoniam Dn. Medico vestro satis nota est herba Paraguay, inquirere peto in specialia, tam de ejus usu, quam de modo obtinendi. Venalis est apud nos cortex Peruvianus, sed plerumque sic satis suspectus, et non satis auctorum notis de optimo respondens. Itaque si recenter allati cognitae prohibitis et virtutis copiam medicorem nancisci possem, libenter pretium persolverem. Quo loco res nunc sit apud Halenses circa Professionem Matheseos, non conperiri, inquiram tamen. Non mediocriter doleo, neque hic neque in vicinia aperuisse sese locum apud pharmacopoeum pro Dn. fratre tuo, cujus notitia et vicinia mihi futura esset admodum grata.

His scriptis Tuas novissimas accipi. Gratias ago quod communicas, quae Dn. frater tuus et Batavis didicit de exoticis, quorum mentionem feceram. Biniae librae optimi corticis Peruviani mihi erunt gratissimae, ut sit ad manus cui fidi possit, si quid incidat. Pretium statim reddi curabo. Ipeccacuanham peto multo minore pretio ex Gallia obtineri posse. Inquiram tamen de herba Paraguay; cura quaeso, ut circa usum efficaciamque accuratiora discamus.

Dabam Hanoverae $\frac{1}{2}$ Martii 1696.

P. S. Accipi etiam Acta Februararii proximi Lipsiensis, in quibus relationem de Libro Nieuventiï, tamque ad ejus objecta responsionem reperio, quam prorsus probo.

In relatione ipsa notatum video non immerito, interesse Reipublicae Literariae discentiumque imprimis, ut consentiant Viri Docti in easdem notas. Quare velim audire sententiam tuam, an probes mecum adhiberi notam \int pro summis, ut adhibetur nota d pro differentiis; item an approbes meam rationem exhibendi subinde divisionem per duo puncta, verbi gratia, ut a : b idem sit quod $\frac{a}{b}$, id enim praesertim in typis commodum est, ne linearum spatium amittatur. Et constat proportionem a nonnullis solere tali ratione exhiberi a : b :: c : d, cum revera res redeat ad quotientium aequalitatem, sufficit scribi meo more $a : b = c : d$ seu $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Sunt et alia in notis fortasse utiliter observanda, de quibus alia occasione.

XXVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Vellem tandem disceptationum nostrarum finem videre (quod et ipse haud dubie desiderabis) praesertim cum summam rei non spectent, in qua utique convenimus; sed ut Tibi cedam et discrepantias meas mittam, quae in aliquibus circumstantiis mihi supersunt, dispiciendum nobis potius erit, qua ratione utrius viribus veritatem adeo claram ab Antagonistarum telis vindicare possimus, quamquam interim Te solum hujus veritatis primum detectorem eisdem defendendae plus satis parem putem. Noli quaeso verba sincere utut imprudenti mihi elapsa, ita inique interpretari, quasi Te ejusdem iniquitatis arguam; absit hoc procul; novi Tuam ingeminitatem, quam cum profunda Scientia et Eruditione conjunctam habes; optarem ut Tibi satis innotesceret, quanti Te aestimem, quam longe Te omnibus, qui Mathematici, Physici, Philosophi audire volunt, praeferam; quam crebro unicum Leibnitium in ore habeam apud omnes, quibuscumque quoties conversari datur. Interim etiam sententiam meam tueor, duas nimirum quantitates fluidorum aequivelociam incurrentium in duo corpora aequalia, illis inferre vires, quae sunt in ratione quantitatum fluidorum. Sed hic suppono quantitates fluidorum infinite parvas esse respectu corporum, in quae incurrit (uti revera supponi debet, hoc enim simili usus sum ad explicandum impulsus momentaneum materiae gravificae, quae utique quolibet tempusculo nonnisi infinite parva sui portione in grave impingit) adeoque fluida totam suam vim transferre in corpora, siquidem particulae fluidi ob continuo alias subsequentes post impulsus quiescere censendae sunt. Hac itaque ratione assertum meum non poterit in dubium vocari. Fluido enim A incurrente in corpus L, ipsique totam suam vim inferente, et fluido priori simili et aequiveloci B, incurrente in corpus M aequale corpori L, huicque pariter totam suam vim imprimente, erunt duo procul vires productae in corporibus L et M (sicut etiam L et M non essent aequalia) ut vires fluidorum ante impulsus, utpote ipsis aequales, adeoque ut magnitudines fluidorum; quis enim dubitabit de eo, quod fluidorum homogeneorum et aequivelocium vires sint ut magnitudines eorum? cum hic evidens sit repetitio non modalitatis, sed

realitatis. Vides ergo exemplum Tuum corporum solidorum non infinite parvorum in alia corpora quiescentia incurrentium huc non quadrare. Interim (ut haec obiter dicam) festinandum errorem calculi admisisse hic videris. Dicis enim: si globus A, 1, celeritate 1, incurrat in globum L, 1, quiescentem, accipiet globus L celeritatem 1, hoc verissimum est: si vero globus B, 2, celeritate 1, incurrat in globum M, 1 quiescentem, accipiet globus M celeritatem 4: puto globum M accepturum esse celeritatem 1/2, secundum regulas communicationis motus noto principio superstructas, quarum formulas in praecedentibus meis exhibui, quasque ex iisdem aequationibus elicibam, quas in ultimis Tuis exprimis, compositis nempe legibus virium absolutarum et directionis conservandarum: ergo vires impressae ipsi M non multo plus, sed paulo minus quam duplae sunt earum quae impulsae sunt ipsi L.

An actio materiae gravificae per ictus discretas, an vero per pressionem continuam explicari debeat, amplius haud disquiramus: sunt enim tantum diversi modi unam eandemque rem contemplandi, qui si dextre adhibeantur, nullus dubito, quin idem concludant. Sed inexpectatam mihi affert distinctionem inter ictum esse aequae fortis, et inter eandem in percusso produci potentiae quantitatem, quae duo, ut fatear, eadem putabam, considerando ictum fortiore vel minus fortem tanquam percutientis effectum, qui est aequalis quantitati potentiae productae in percusso. Miror quod non jam dis hanc distinctionem protuleris in responsione ad exemplum meum testudinis, ubi aequalitatem ictus, quam nunc concedis, aperte satis negare videris. Sed quidquid sit, status controversiae nunc huc redit, an duo corpora aequalia, sive in motu, sive in quiete constituta et aequifortes ictus recipientia recipiant etiam aequalem vim vel potentiam. Tu id negas, ego vero, etiamsi ratio mihi contrarium dicitur, in suspensio haereo propter id ipsum quod negas: malo enim in posterum mihi ipsimet diffidere, quam a Te dissentire. Et propterea optarem meas difficultates a me non acciperes tanquam ab adversario, sed potius tanquam ab amico, qui quid ab adversario fieri possit, sincere monet. Hac saltem explicatam mihi vellem, quod aequifortiter ferire sit aliud nisi eandem vim imprimere, alias de ictu non habeo conceptum clarum atque distinctum.

Multam gaudeo, quod monitum meum ad Tuam aestimationem resistentiae absolutae tam benigne exceperis: dis enim haesitabam, an e re esset talia a Te jam olim proposita insinuare, veritus ne Tibi impertite caderent eorum denso recordari. Unde vides me amore veritatis ductum interdum monere quaedam, de quorum licet eventu, an nimirum grata sint futura, ipse dubitem.

Optime praevides elusiones Dni. Papini, ad quas in antecessum se praeparare videtur, eo ipso quod verba Tua intempestive satis pervertit, mutando vim in motum, quasi nescires quale intersit discrimen, cum tamen in hoc praecipuum controversiae cardo versatur. Sic nec ego consultum duco eum corrigere et in meliorem viam redigere velle, cum oleum et operam perditurus esses, quam utilis collocabis, meo iudicio, si rem totam bono Reipublicae Litterariae publice exponeres, non quidem sub forma responsionis, hoc enim Papinum silere non faceret, sed potius praemoneres Lectori, Te traditurum relationem historicam totius controversiae et simul explicationem difficultatum hactenus propositarum, alias autem novas Te a nemine expectaturum, sed totum negotium ad iudicium Lectoris remisurum, ne tempus Tibi adeo pretiosum litigando inutiliter pereat.

Me sane immerentem severa nimis censura perstringis, retundendo nescio qua indignatione objectionem adeo amice factam contra argumentum Tuum a priori, cum tamen ab initio objectionis discrete dixerim, eam non a me, sed ab adversario profectam putandum esse. Sed quid multum! Inventorum Tuorum sum praeco, ubicumque datur occasio; quid ergo succenses, si ut eorundem veritatis defensor esse possim, a Te difficultatum enodationem subinde peto, qua adversarius obviam ire quam. Quidquid sit, si objectiones meae vel minimum offendant, impone mihi silentium, et compescam luxuriantem calammum, me forte praecipitem sententiam ferat, quae me attentionis defectus reum faciat; dico forte, divinare enim non possum, an argumentatio quaedam Tibi sit obiter elapsa, an vero a pluribus annis considerata; sumus homines et erroribus obnoxii; si ergo in aestimanda resistentia absoluta et fortasse in aliis paralogismis Tibi exidere potuit, quidni et idem hic contingere potuisset. Sed ut videas quod res est, exponam paucis causam, quae me fecit prendre le change; id quod credebam fuisse legitimam retorsionem. Sumebam terminos, virtualiter

et formaliter, alio sensu quam eo, quo nunc eas explicas et quidem non sine omni ratione: etenim per actionem virtutalem intelligebam vim ipsam vel virtutem rei agentis, et hoc sensu praemissa mea secunda, quam negas, erit verissima: Actio faciens duplum, tempore duplo, est simpla virtualiter actio- nis facientis simplum, tempore simplo, id est, eadem vis vel virtus corporis requiritur ad percurrendum spatium duplum, tempore duplo, quae requiritur ad percurrendum spatium simplum, tempore simplo: utroque enim in casu celeritas corporis et proinde etiam potentia est eadem. Et per actionem formalem intelligebam effectum jam productum, ut via quaedam manet semper ejusdem longitudinis, sive sit unica, sive sit unica sive duabus horis percurra; hocque sensu praemissa mea prima alterius retorsionis erit etiam vera: Actio faciens duplum, tempore simplo, est simpla formaliter actionis facientis idem duplum, tempore duplo; id est, spatium percursum intra minutum unum a corpore celeritatis duplae est aequale spatio percursu intra minuta duo a corpore celeritatis simplae. Vides itaque me non ita locutum fuisse, ac si propositiones posset assumi pro arbitrio, sed omnia mature expendisse, antequam Tibi ea perscripsem. Interim Tua responsio mihi nunc plene satisfacit eoque proin acquiesco: video enim, quid duo isti termini Tibi significant. Caeterum argumentatio Tua mihi videtur elegantissima et publico non amplius invidenda; multum enim ponderis tribuit argumentis a posteriori.

Quae de conservanda non solum virium motricium, sed et directiois quantitate, vel quod idem est (me divinasse ais, quavis non cassa, sed industria eo pervenerim) de conservato semper progressu centri gravitatis habes, omnino mihi placent. Et memorabile imprimis est, quod lex tertia conservandae celeritatis respectivae ejusdem seu ejusdem differentiae celeritatum ante et post cursum, quae alias, uti bene notas, et vi elastica concurrentium ostendi potest, tam pulchre ex duabus praecedentibus tanquam corollarium fluit: qui consensus non parum confirmat principium conservationis quantitatis virium. Alia procul dubio arcana sub his latent. Putem ergo alias posse conditi leges quam plurimas, si loco divisionis adhibeamus multiplicationem, multiplicando scilicet aequationem (1) per aequationem

(2) vel (3), ut quae provenit iterum per unam inferiorem, quod in infinitum continuari potest. Propositionem ex conservato progressu centri gravitatis descriptam, quam Hugenius jure merito ex profunda meditatione ortum dixit, et quam ante aliquot annos Diario Parisino inseri curasti, mihi sine mora communicaverat Dnus. Varignonius, cujus demonstrationem etiam tunc e vestigio inveneram. Sit enim (fig. 54) mobile A, tendens simul celeritatibus et directionibus AB, AC, AD, AE etc. et sit AF directio et celeritas mobilis A, qua fertur ex motu composito: dico AF (productam) transitarum per centrum commune gravitatis G punctorum B, C, D, E etc. et esse ad AG, ut numerus punctorum ad unitatem. Motus enim particulae BA, CA, DA, EA etc. intelligi possunt tanquam compositi ex collateralibus B β et Bb, Cy et Cc, D δ et Dd, Ee et Ee etc.; quoniam itaque FAY est directio motus compositi, erunt celeritates affirmativae aequales celeritatibus negativis, id est, B β + Cy etc. = Ee + D δ etc. Ergo, ut patet ex Staticis, FAY δ est axis aequilibrii seu transit per centrum gravitatis punctorum B, C, D, E etc. Porro quia Bb, Cc, Dd, Ee etc. sunt parallelae AF, erunt celeritates partiales simul sumtae Rh + Cc + Dd + Ee etc. = celeritati compositae AF: est autem, ut iterum constat ex Staticis, Bb + Cc + Dd + Ee + etc. ad AG, ut numerus punctorum B, C, D, E etc. ad unitatem. Ergo etc. Q. E. D. Hinc ultro sequitur, si mobile A sit in ipso centro gravitatis G constitutum, et sollicitur a potentis AP, AC, AD, AE etc. secundum directiones AB, AC, AD, AE etc. mobile A mansurum in quiete, cujus generalissimi theorematia illud tantum est casus specialis, quod apud Hugenium aliosque me legisse meminimus, nimirum si corpus in centro gravitatis trianguli vel etiam pyramidis triangularis cujuscumque constitutum tendatur a potentis secundum directiones linearum ab angulis ad centrum ductarum in earundemque ratione, corpus illud neutrorum motum iri et proinde quieturum. Ex hisce autem patet, non solum hic, sed in omnibus aliis centrum potentialium (ut ita loquar) esse idem, quod centrum gravitatis. Hoc enim triangulo et pyramidi triangulari proprium est, quod eorum centrum gravitatis sit etiam centrum gravitatis puncturum angularium.

Concedo resistentias mediis respective resistentis esse ut quadrata celeritatum mobilis, si per resistentias intelligantur decrementa celeritatum; sed si per resistentias intelligamus (quod meo

judicio etiam sic intelligendum est) decrementa virium mobilis quovis tempusculo amissa, erunt citra omnem controversiam resistentiae ut cubi celeritatum.

Meditationes meae, ut vocas, de centro oscillationis non quidem sunt multae vel magni momenti; interim uno theoremate totam doctrinam pendulorum complecti possum, quod cum Hugenianis optime conspirat; neque considero centrum gravitatis, quod Hugenius aequaliter descendere et ascendere supposuit, sive corpora separatim sive conjunctim oscillentur, sed assumo novum Tuum principium de conservatione ejusdem quantitatis virium, ex quo deinde principium Hugenianum tanquam consecarium deducitur: Sit enim (fig. 55) pendulum HA, compositum ex quotvis gravibus A, B, C etc. perticae rigidae et nullius gravitatis HA affixis, et agitantur circa centrum H: quaeritur longitudo penduli simplicis et isochroni HG. Ponantur distantiae gravium penduli compositi AH, BH, CH etc. aequales a, b, c etc. et distantia penduli simplicis GH = x. Postquam nunc pendulum descendit, quantum descendere potest, nempe in situm verticalem, erunt celeritates punctorum A, B, C etc. G, ut a, b, c etc. x: ergo quantitas virium gravium A, B, C etc. erit Aaa + Bbb + Ccc etc. Consideramus jam corpora A, B, C etc., non amplius perticae affixa, sed quodlibet in sua distantia separatim oscilleri circa H, erunt per naturam gravium descendendum jam notam et receptam, celeritates gravium A, B, C etc. quando in situm verticalem venerint, \sqrt{ax} , \sqrt{bx} , \sqrt{cx} etc. suppono enim celeritatem puncti G esse x. Ergo hoc modo quantitas virium gravium A, B, C etc. erit Aax + Bbx + Ccx + etc. Quoniam autem utroque modo suppono eandem virium quantitatem esse, erit Aaa + Bbb + Ccc + etc. = Aax + Bbx + Ccx + etc.: et proinde $x = \frac{Aaa + Bbb + Ccc + etc.}{Aa + Bb + Cc + etc.}$

Atque haec nunc est propositio fundamentalis, quam Hugenius in suo Tractatu pag. 100 operose admodum et per deductionem ad absurdum justo majoris minorisve ascensus centri gravitatis (quod ego ne considero quidem) demonstravit. Ex qua omnia caetera theoremata Hugeniana facillime eliciuntur, adeo ut etiam hinc veritas novi principii pateat, quia cum Hugeniano tam mirifice convenit. Liqueat etiam ex hac aequatione centrum oscillationis illud ipsum esse, quod vulgo statuitur percussione.

— Haud mediocriter Tibi sum obstructus, quod Dns. Menckenio

integritatem meam tuo testimonio comprobata reddere volueris. Paucis abhinc diebus Acta Eruditorum, inter quae etiam mensem Decembr. superioris anni accepi; non possum non magnopere mirari Fratris mei animum atro nimis livore contra me etiamnum obsessum; credebam equidem discessum meum omnia exipias et propterea statim sub adventum meum hinc ad illum scripsi quam humanissime, ut eo facilius cum illo in gratiam redirem, sed nondum respondit et nunquam illum responsurum puto: quin potius contrarium nunc video; an nondum in illo mense legisti, quam acriter nescio qua simulate et aemulatione agitur contra me scriperit, quam abjecte de me loquatur? Utique non dignabor illam responsione, ut Tuae et Dni. Menckenii admonitioni locum dem; quid enim responderem ad cavillationes, ad rugas, ad ineptias insulsiimas quibus totum ejus schediasma scatur. Interim mihi pergratum foret, si data occasione Tu ipse meam causam suspiceret et oblique insinuares, quod de fratre et quod de me Tibi constat, ut Lectores cernerent, quid de utriusque animo sentiendum, et ab illius ineptiis non statim praeveniantur. Quid quaeso quaerit p. 546 cum historiola sua? Quid per illam Lectori scribitur aut metitur? Vel qua necessitate et occasione adducit eam? nisi forte ut suam in resolvendis problematibus prontitudinem virium quantum extollat, me vero quantum possit deprimat. Interim si dicendum quod res est (Dn. Hospitalis mihi testis erit) aequalitatem a d s d d x = d y³, ad quam pervenerat, non potuit resolvere et ad finem producere, titul per annum vel plus ipsi inhaeserit, ceu ex literis ejus ostendere possum, donec illam mihi tunc Parisiis commoranti communicavit (ut nempe constructionem ejus tentarem) e vestigio resolvissim et vidissem, curvam hujus aequationis eandem esse cum catenaria. Quam solutionem cum fratri remisissim (non obstante quod D. Hospitalis mihi suaderet, eam paulisper tegeret, et illi tantum significare me solutionis fuisse competentem, ut viderem in illam etiam repererit) mox rescripsit, se etiam ante acceptas meas literas incidisse in curvam catenariam, quam inventionem tanquam suam profinus Lipsian misit. Nunc Tibi iudicandum relinquo, an veresimile sit, fratrem praecise eo tempore quo literae hinc inde currebant praestitissim, quod antea per totum annum praestare non poterat; annon potius sit probabile, meam solutionem sibi arrogando plagium commississe. Sed vide hominis impudentiam in aliis; pag. 540 dicit: quin in o generalis est natura condescriptarum, ut ipsarum

vel aggregatum vel differentia ad arcum circuli reduci possit, quod etiam fratri observatum video; nunquid et ejus verbis utar, haec sunt ova post prandium; quasi ille hanc condescripturam proprietatem tanquam aliquid obvium et quod publicari non meretur, diu ante me observaverit, dum dicit quod etiam fratri observatum video. Quid sibi hic vult rō etiam? Tantum non post me; sic est, invidet mihi inventi gloriam, dum tam dolose reticet, quod sub discessum meum hanc condescripturam naturam a me didicerit, quae alias nunquam sibi in mentem venisset. Quod si utile hoc inventum nondum publicassem, non dubito quin se ejus primum auctorem dixisset, et longe pomposioribus verbis praestantiam deprædicasset, quemadmodum idem fecit cum suis formulis pro inveniendi longitudine radii circuli osculatoris, quas tamen nemo non mediocriter in nostris versatus facillime elicere potest. Nunc autem cum jam a me publicatum extet, vix dignum censet, ut obliet et vix tribus verbis de illo tanquam jam pridem sibi cognito loquatur, cum tamen et Tibi et Dn. Tschirnhausio multum placuisse ex Actis videam. Haec omnia condonari possent fratri, si modo pag. 550 omnes modestiae leges non transgrederetur et multoissimam impudentiam induceret. Ecce quam rustice simul et jejune me ludat! Non puto ex faece plebis homines incomptius agere posse; quid infelicis dici potuisset quam me ova post prandium apponere? O insipida ova! Ac si aliquid novi esset quod solutio prior tempore quam alia, tardius tamen lucem videret. Interim, cave, putidum hoc provebium etiam in Te quadrabit, si per illud intelligat, se primum dedisse solutionem problematis isochroni quae suae elasticae sibi soli tantopere laudatae, et proinde se ova ante prandium apposuisse; Tua enim solutio erat etiam posterior. Sin autem velit dicere id se peculiare ante me fecisse, quod curvam isochronam per rectificationem curvae algebraicae constructam ante me in Actis publicari, tunc ipse non nimis ova post prandium apponit. Nam constructio Tua per curvam algebraicam omnium primo in Actis prodit. Nunc Tibi rem gestam una cum causa, cur mea solutio nro mense tardius, quam secunda solutio fraterna in Actis apparuerit, narrabo, ex quibus nequitiam fratris mei nunquam satis miraberis. Cum primam ejus solutionem curvae isochronae quae n. Junio 1694 inserta est, ibidem praeter expectationem reperissem (nesciebam enim antea, quod de hoc problemate quicquam Lipsiam misisset) non nego, occasionem illa

dedit mihi, sicuti et haud dubie Tibi, quaerendi aliam constructionem naturaliore et quae praeferretur ope rectificationis curvae algebraicae, non autem transcendentes illius fraternae, quae ipsa constructa difficillima erat et supponebat quadraturas spatii. Quid multum? meditor, calculo, in mentem revoco quae olim super hac materia mihi eveniebant; uno verbo intra unius horae spatium plenariam solutionem invenio et plus quam antea sperabam, nam non solum detexi modum construendi isochronam per extensionem curvae algebraicae, sed ipsam etiam ejus elasticam ad extensionem ellipticae et ejusdem curvae algebraicae reduci, quod frater non nisi per opeosam quadraturam fecerat. Ab eo momento constitui novam hanc solutionem in Actis publicare, sed quid accidit? Aperio meum inventum cuidam amico significans ipsi, me reperisse solutionem curvarum isochronae et elasticae mediante extensione communis curvae algebraicae, amicus iste paulo post fratrem in aedibus suis conveniens eadem omnia innocenter refert, quae super hac re sibi dixeram; frater, his vix cito satis perceptis, se problemati de novo applicat et tandem geminam solutionem eruit. Dum ego omnium horum ignarus solutionem meam lente scriptis mandabam, dum scriptam affini meo qui iter meditabatur in Germaniam et primum ad nudinas Francofurtenses per tres septimanas ibi commorandum proficiscebatur, trahebam Lipsiam deportandam; frater ut callide me praeveniret, quantum potuit festinavit et novam solutionem per cursorem publicum Lipsiam misit. Hinc quid mirum? Fratrem schediasma quod tardius Basilea emissum, citius Lipsiam appulit, meum vero citius profectum tardius pervenit. Certe si Dn. Menckenius vellet horum recordari et in literas nostras inquirere, videret meas literas vetustiores esse meisque proin verbis facile fidem haberet. Sed prolixum nimis foret et Tibi molestum, si omnes technas, omnia artificiola vellem recensere, quibus utitur ad nocendum mihi meaeque famae. Vides ipse satis, nihil a mordaci suo dente intactum relinquere quod a me in lucem est editum. Nunc hoc, nunc illud non placet, dicit meam methodum construendi aequationes differentiales sine separationem indeterminatarum nihil valere et nullius usus esse, nihilque ibi me habere, quod non antea a Te fuerit praestitum; ac si nihil sit novi, quod ibi ostendi, omnes curvas etiam transcendentes quae eidem aequationi differentiali satisfaciunt, habere certa quaedam puncta ut flexus contrarios, quae semper sunt

in curva algebraica. Ne quibus innocua mea series universalis pro quadraturis et rectificacionibus quae Tibi tantopere placuit, impune abiit: dicit p. 551: Sed nec series, alias satis ingeniosa (quam coeete!) quam nobis dedit, hic in usum verti potest: quod tenendum, ne quis existimet haec adeo universalis esse, ut nihil amplius desiderari possit. Quis, obsecro, venditavit hanc seriem pro separandis indeterminatis in aequatione differentiali? Quails affinitas inter separationem istam et inter quadraturam et rectificaciones, pro quibus solis illam excogitari, quamvis interdum etiam commode ad alia possit applicari; proponat nunc mihi exemplum quadrandi spatii vel rectificandae curvae, sive indeterminatae in aequatione differentiali sint separatae sive non separatae, ubi series ista non succedat. Certe si unquam generale quid inventum sit, poterit haec mea series nomen generalitatis summo jure obtinere. Sed caetera transeo petoque veniam mearum querelarum, quas quia id publice facere verecundia prohibet, Tibi, homini candido, exponere ausus sum, iterum rogans ut si quid commode fieri possit, mei quondam defensionem suscipias, ne forte qui istas nugae legunt, sequerentur de me capiant opinionem. Interim Tuo prudenti consilio omnia relinquo, optime ipse perspicies qua ratione id commodissime fieri possit.

Gratias ago pro communicatione descriptionis antidyserterici. Praeterita septimana accepi pro Te tres libras corticis Peruvianae; indica viam qua illas optime Tibi transmittere possim. Nunc pharmacopola Amstelodamensis offert Ipecacuanham pro longe viliori pretio, nempe 50 a 90 flor. Holl. De usu ejus, ut et herbae Paraguayae, et modo obtinendi, nihil sibi immutescere dicit: curabo tamen ut id aliunde discam. Noster Professor Medicinae Practicae asservat, se in se ipso periculum fecisse herbae Paraguayae assumendo illam satis magna dosi, sed se nihil plane virtutis emeticae persensisse, nec etiam alium vel minimum effectum habuisse.

Jam olim Tibi aperui mihi perplicare, ut adhibeatur \int pro summis et me impostorum eodem signo usurum; quod autem in responsione ad objectionem Nieuwentitii vocabulum integralis etiamnum usurpaverim, id ideo factum est, quia isdem verber, quibus Nieuwentitii objiciebat, ego respondere volebam. Interim

non inconsultum mihi videtur, si Lectores admonerentur, idem intelligendum esse per summam vel \int , quod nos antehac per Integrare vel I denotare volumus, quandoquidem haec expressio jam passim invaluit. Pariter Tua ratio exhibendi divisionem per duo puncta commodissima mihi videtur, sed ipsi assuescere difficile erit, ita ut illi qui vulgari divisioni assueti sunt, vix uno intuitu dividendum et divisorem distinguere possint; praesertim quando

$$\frac{a + \frac{b}{c}}{e - \frac{f}{g}} \text{ scribitur } a + b : c : e - f : g;$$

non statim patet quid et per quod sit dividendum, praeterquam quod variae lineae suprascriptae non minus impedimentum pariant in typis.

Nuper novi nostri Governatoris Principis Nassovii Informator mihi misit Actorum Lips. an. 1690. 1693 et 1694, quos coëmit in auctione Librorum Hugonii; inventio ibi varias notas criticae breves quas Hagenius ad marginem plumbagine scripsit, plerasque super ea quae Tu, Dominus Tschirnhaus, Frater et ego publicavimus; nec Tibi nec nobis pepercit, praesertim Frater multa ipsi displicent. Si curiosus es, ea quae Te concernunt, Tibi transcribam. Curabo ut etiam caeteris amicus potiar, ut quid de aliis senserit videam. Interim vale quam optime et ama ut soles etc.

Groningae 7 April. 1696.

Nudius tertius accepi literas a D. Marchione Hospitalio, ex quibus cum a morbo gravi restitutum intelligo. Dicam mihi, quaeso, an frater Tibi nondum scripsit, quemadmodum promiserat cum adhuc Basileae essem. Frater meus junior hinc decessit abiturus in Galliam, ubi Marchionem aliosque quos ibi habeo Patronos et amicos, salutandi copiam habebit. Si quid per eum factum cupias, fac ut ocyus resciscam, ut id per literas ei significare possim, quando Lutetiae fuerit. Non dubito quin ibi aliquandiu commoraturus sit, si stationem inveniat in Laboratorio Chymico quod ad Academiam Scientiarum pertinet, ubi strenue in Chymicis laboratur; in hunc finem accipit a me literas commendatitias.

XXVII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nolim putes disceptationes nostras mihi ingratas esse, dummodo illustrandae confirmandaeque veritati serviant, quod vix est ut fieri non possit inter studiosos veritatis et in ea inquirenda exercitatos. Quod verba attinet, elabi interdum calore scribendi non exquisitè tornata.

Scimus, et hanc veniam petimusque damusque vicissim. Neque ergo de Tuo erga me affectu dubitavi, et nolim vicissim admonitunculam illam ab indignatione potius (quae nulla fuit) quam ab amico animo profectam putes, quod quaedam leviori brachio tractata arbitraber, quam merebantur, aut veritatis interesset.

Spero controversiam inter nos de origine potentiae gravibus impressae jam facilius componi posse, postquam expressa Tua verba me tandem docuerint, in quo consistat dissensus. Nempe status particulam fluidi gravitici totam suam vim imprimere in gravis status particulam esse additurum. Sed ego puto particulam materiae gravificae impactam omnino repercuti, nec alias sequentes particulas id impedire. Nam non sequuntur, nisi ex intervallo, et si immediate sequerentur, unum continuum percutientes component, de quo rursus idem posset dici, nempe totam potentiam suam non transferre. Et vero si particulae percutientes darent totam suam potentiam, sequeretur non celeritatem, sed potentiam gravis crescere uniformiter, cum numerus ictuum sit tempori proportionalis.

Ceterum hanc rationem de translatione totius potentiae (quantum meminimus) in prioribus non allegaras, et ita mi fallor ratiocinationem jam mutasti. Porro si globus B, 2, celeritate 1 incurrat in globum M, 1, quiescentem, omnino est ut scribis, acquirere globum M celeritatem $\frac{1}{2}$, et negligentia quadam omisi divisionem per 3, quam calculus dabat.

Verissimum puto, etiamsi ictus sint aequè fortes, non tamen ideo sequi potentiam eandem imprimi recipienti, quia ictus vis aestimandus est, non tantum ab eo quod contingit in percussu, sed etiam simul ab eo quod fit à percutiente. Interim puto hic nobis magis in loquendi modo, quam rebus dissensum fuisse, neque in

isto situm esse controversiae statum, sed potius in iis, quae paulo ante dixi.

Utrum adhuc recipianda sit cum Dno. Papino serra, intelligam ex effecta novissimarum mearum apud ipsum literarum. Publice cum ipso litigare adhuc minus operae pretium erit. Quae literae privatae non movent, is multo minus publice manus dabit. Itaque satis erit rem ipsam suo tempore exponi.

Spero Te, quae ex sinceritate, ingenue agnoscere, fuisse mihi causam mirandi, quod circa rō formaliter et virtualiter tam a meo sensu abhorrentia dixeris; ea enim, quam indicas, interpretatio nunquam mihi venerat in mentem, nec potuissem adhibere ad scopum meum, nisi manifeste ineptiendo. Sed bene est quod ego Tibi satisfeci, et Tu mihi jus reddis. Quid videtur Tibi de altera ejusdem propositionis demonstratione? Quae paulo magis est ad formam receptam, etsi andae convenient in radice. Matimi mihi conclusio ipsa momenti visa est, quia hinc magnam patet arcuam Divinae Sapientiae, et corrigitur sententia Cartesii, simulque scopus, quem sibi propulerat, obtinetur. Nam revera servatur eadem quantitas actionis motricis in mundo, si quantitas illa aestimetur ut oportet. Unde et revera dici posset eandem quantitatem motionis servari, nisi sensus hujus phrasid vulgaris, quae celeritate in molem ducta motionem aestimat, jam esset receptus. Quantitas autem actionis motricis ex hac mea demonstratione duplici conficitur esse in ratione composita ex simplice mole et duplicata velocitatis. Itaque jam a priori constat, Deum non fore facturum ex legibus perfectae Sapientiae, si ex Cartesianorum sententia eandem quantitatem motus, ut ab ipsis intelligitur, conservaret; ita enim ipsa ratione revera non foret aequalis.

Hand dubie non casu, sed ingenio acri divinsti vel potius penetrasti, coincidere centri gravitatis aequabilem progressum et conservationem directionis. Demonstratio etiam Tua regulae meae de compositione motuum omnino consentit cum ea, quam inveni in ipso Diario, cum eberem.

Pulcherrime ostendis ex principio nostro, velut ictu, confici propositionem Hugenii fundamentalem de pendulis; ita alterum alterius testimonio confirmatur et illustratur.

Laudabiliter facis, quod moderationem erga Dn. Fratrem ostendere decrevist. Libenter aliquando, data occasione, testimonium

(quo non indiges) dabo, secundum meam de candore Tuo et circa ea ipsa, de quibus inter vos lis est meritis, sententiam. Quidni enim Tu ex merito laudari possis, nullo ipsius detrimento, imo potius cum ipsius honore, cum ipse Te primum ad haec studia formaverit?

Dnus. Nieucentiit voluit replicationem ad responsum meum mittere Lipsiam in Actis Eruditorum edendam; sed cum constaret illa nescio quot plagulis, Dnus. Menckenius id declinavit, excerpta tamen inserere obtulit. Scripsi illum admonendum videri, ut etiam Tibi respondeat eadem opera, quo inanes repetitiones evitentur; quin imo, ne frustra publico obstrepatur, recte meo iudicio facturum, si Tibi vicino scrupulos suos per literas communicet. Nam non video, quid ejus methodus peculiaris, quam laudat, praestare possit, cum pars sit ex nostris descripta, pars ex his non intellectis enata.

In notandis calculis ad usum typorum decrevi pro lineis vinculorum imposterum uti commatibus directis atque inversis in viam parenthesisum: ita non interruptar typorum series nec spatium amittetur, et tamen omnis (ni fallor) accurate habebuntur. Velim tamen prius Tuam audire sententiam. Exempli causa, Tuum

$$a + \frac{b}{c} - \frac{d}{e} + \frac{f}{g}$$
, quod quinque typorum lineas minimum postulat, sic potest scribi: $a + b : c ; e - f : g ;$

erit scribi: $a + b : c ; e - f : g ;$; possent tamen inversa commata emitti, scribique $a + b : c ; e - f : g ;$, quod et facere soleo et committere sufficere potest. Sed tamen designatio quasi parenthetica per commata includentia est absolutior tutiorque interdum; praesertim si pro commatibus adhibeantur verae parentheses, ne commata inversa confundantur cum littera c, exempli gratia in eodem casu ista stabit $(a + (b : c)) : (e - (f : g))$.

Pergratum fuit, quod nuntias de notatis Domini Hagueni marginalibus in Acta Eruditorum. Rogo ut omnia describi cures, sive me sive alios concernant, mihiq; communices, libenter expensas reddam. Initio parum favebat methodis nostris, quod fructum earum, sua amoremque experientia, nondum didicisset, quod nec in suis ad me prioribus dissimulavit; sed postea rectius doceri coepit, et cum in literis privatis, tum in schediasmate quodam inter Acta Lipsiensia publicato, candide praeiunxerat, quod res

est. Non dubito tamen, quin quaedam ab ipso recte admoerantur. In scheda De Resistentia error quidam ex festinatione admittus erat circa quendam propositionem; hunc cum in aliqua epistola ad ipsum, data occasione emendasset, respondit sese ideam peno totidem verbis, ibi ad marginem Actorum notasse.

Gratias ago pro cortice redemptio: rogo indicari pretium, ut reddi curem. Fasciculus mihi inscriptus poterit transmitti ad Du. Gerardum Meierum, celebrem apud Bremenses Theologum, amicum meum; unde facile postea accipero. Herbam Paraguay quae apud amicum Tuum nihil effecit, suspicor genuinam non fuisse. Eaque res imprimis deterret a talibus redemptis. Unde et melius Ipecacuanham probatam ex Gallia nascisci licebit, inque his poterimus Dni. Fratris Tui favore uti. Te commendante, per quem fortasse et alia egregia resciscere licebit, quoniam in Chymica non multum sit Gallis tribuendum. Itaque ipse admonendus est, ne nimis sit facilis in suis ostendendis, cum enim religio obstat, ne stabile quid in Gallia sperare possit. Enchiresibus potius sese commendabit, quam arcanis, nisi alia pro illis accipiat. Sed hec Tibi in aurem. Caeterum cum tot amicis egregios illic habeas, me non indiget; si quid tamen sit, in quo inservire possim, faxo ut semper intelligat, quanti vos faciam. Vale etc.

Dabam Hanoverae 15 Mai. 1696 (ex itinere reversus).

XXVIII.

Jon. Bernoulli an Leibni.

Nostra Controversia omnino naturam referre videtur duarum linearum asymptotarum, quae quidem magis ac magis convergunt, nunquam tamen coincidunt: sic discrepantes nostrae opiniones, tractu temporis, continuo sibi invicem propius accedunt, ut nunc parum distare et imposterum minus distituras videantur, ita tamen ut nunquam non aliquid scrupuli sint se relicturas sint; sed praestat continuationem asymptoticae nostrae liti praescindere, quam in infinitum disputando diminere, sed nunquam adimere differentiam, quae jam fere insensibilis est. In hunc finem historice tantum (minime vero ut objiciam) modum proponam, quo particula fluidi

gravifici totam suam vim (cum nostram disputationem ad exiguum hanc particulam nunc redactam esse ipse agnoscat) gravi imprimere concipi possit. Hanc enim translationem totius potentiae, quam in penultimis meis me non allegasse adeoque in ultimis ratiocinationem mutasse dicis, semper innuere volui, et sic verba, non autem ratiocinationem mutavi. Utique Tecum puto, particulam illam repercuti, si statuatur posteventum non nisi ex intervallo sequi, et illam quae nunc impingit, simulac impingit libere et sine ullo impedimento resiliere posse. Verum considera, si placet, annon anfractus et sinuositates pororum corporis gravis possint esse in causa, ut particula materiae gravificae post impulsum, non ita facile corpus penetrare et ab eo separari queat, quin potius aliquantisper in poro quasi intrusa et infixam manere cogatur adeoque tota ejus vis a corpore absorbatur. Quid si testudinis exemplum iterum proferam? recipit sane totam vim globi a sclopeto ipsi injecti, si nempe post ictum in carne ipsius haereat nec aliorum evadat; atque hac ratione non video, quale discrimen intersit, sive testudo moveatur sive quiescat; utrovis enim casu exhaurit totam vim globi, ubi dicatur aliquam ejus partem impertiri materiae ambientis, quam autem hic excludo, supponendo motum illum in vacuo fieri. Praeterea ut ad rem nostram redeamus, materia gravifica cum sit subtilissima et omnia sint plena, procul dubio unum quid continuum constituit, in tantum ut ejus particulae, non ex intervallo, sed immediate sequi debeant. Demum vero et hoc, materiam gravificam non esse continuum quid, saltem ejus particulae erunt aequaliter disseminate, adeoque si non agat per continuum pressum, erit tamen numerus ictuum, non temporis, sed spatio proportionalis. Et hoc est quod hactenus impedit, quomodo hinc opinionis assensum dederis, quia credis cum Galileo omnia necesse esse, ut numerus ictuum sit temporis proportionalis; si hoc esset, et ipse faterer meam opinionem non posse subsistere, quia tunc corporis cadentis celeritates non crescerent uniformiter secundum tempora. Sed jamjam videbis, quam pulchre haec uniformitas ex ipsa mea hypothesis, quae Galilaei omnino est contraria, sequatur. Quia in re idem fere mihi contingit quod olim Fermatio contra Cartesium de refractionibus disputanti, qui per rationem, ut Cartesianae directe oppositam, ad easdem tamen a Cartesio stabilitas refractionum leges pervenerat. Ostendo itaque I. quomodo concipi possit, particulam materiae gravificae totam

suam vim transferre in grave; 2. quod numerus ictuum sit in ratione spatorum, id est, quod grave ascendens vel descendens recipiat ictus, eodem tempusculo, proportionem celeritatis (sunt enim spatia percursa eodem tempusculo ut celeritates). Uniformitatem seu aequalitatem accretionis celeritatum secundum tempora sic demonstro. Esto (fig. 56) altitudo descensus AB, quae dividatur in partes aequales Aa, ab, bc etc. erunt per Lemma 2^{am} numeri ictuum per Aa, ab, bc etc. etiam aequales. Atqui per Lemma 1^{am} grave recipit totam vim particularem gravificarum; ergo augmenta virium gravis in singulis punctis a, b, c etc. successive existentis sunt aequalia, id est, si ae, bf, cg, dh etc. denotent vires acquisitas, erunt ae, bf, cg, dh etc. elementa aequalia, et proinde AC est linea recta. Nunc, quia Tecum mihi res est, suppono principium tanquam a priori demonstratum, vires acquisitas esse in ratione duplicata celeritatum. Applicentur itaque $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ etc. quarum quadrata sint ut ae, bf, cg etc. seu ut Aa, Ab, Ac etc. denotabunt $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$ etc. celeritates acquisitas. Est autem, ut patet, curva A $\alpha\beta$ parabola. Ex quo sequitur etiam illam curvam, cujus applicatae denotant tempora impensa, esse parabolam, adeoque celeritates esse ut tempora seu crescere aequalibiter secundum tempora, id est, tempusculo aequali aequalem addi celeritatis gradum. Q. E. D. Meam nunc opinionem clare exposuisse sufficit; si eam pro vera non agnoscere velis, per me licet, Tibi nullum iude movebo litem; vides saltem, quod omnino consentiat cum legibus descensuum a Galileo stabilitis. Ex eo enim quod posui, totam vim particularem gravificarum transferri in grave et numerum ictuum esse ut celeritates eodem tempusculo, idem sequitur scilicet acceleratio uniformis, quae deductur supponendo vim particularem non totam transferri, et numerum ictuum esse ut ipsa tempuscula; adeo ut nequaquam videam, cur natura hac potius agendi via utatur, quam vero illa. Et sane nescio annon probabilius sit dicere; materiam gravificam continuo exercere vim suam in grave; ubique enim grave cadendo existat, ibi offendit particulam, cujus vim recipit. E contrario quidquid faciam, non possum concipere, qui fieri possit ut materia gravifica singulis tantum momentis ictum feriat. Quid quaeso facit inter duo proxima momenta? oryaturne? Cessatne agere? Annon ubique et semper praesens est et praesto ad removendum obstaculum, quodcumque motui suo celerissimo occurrat? Quid clarius, quam quod posita causa, ponatur effectus?

Cum ergo materia gravifica continuo sit in actione, non interruptum nec per intervalla temporis (comme font les bouffées de vent), quid impedit quominus grave eam actionem semper et ubique persequatur (si sentire potest). Ignosce prolixo mihi, non credebam tot de hoc verba facere; quia autem ab initio declaravi me meam opinionem, vel si major, meum explicandi modum circa originem potentiae gravibus impressae simpliciter expositurum, ut posterum alterationibus supersedere possimus, non aegre feres, quod forte longius a calamo scripturiente abreptus fuerim, quam fecissem si inter scribendum (uti decebat) patientiae tuae rationem habuissem.

Antequam hanc materiam omnino deseram, dissimulare non possum, quod quo attentius hactenus dicta considero, eo magis in mea opinione confirmor. Commodum, hoc ipso instanti, mihi incidit simile: Concipio aliquod medium instructum infinitis spiris elasticis vel aliis elasticis neque fortibus aequaliter disseminatis, vel (quod praestat) immediate juxta se positis; ista elastra tali artificio tensa suppono, ut ad appulsum alicujus corporis a retinaculo liberaenta subito resiliant simulque vim suae elasticitatis integram corpori appellenti tribuant, quod facile concipi potest, si modo statuatur elastrum incomparabiliter celerius restitui, quam corpus moveretur. Nunc in isto medio concipio corpus aliquod a minima vi qua nempe pellet unum elastrum moveri incipere; sic retenta vi primi elastri progrediens offendit secundum, cujus vim pariter recipit: postea retentis duobus virium gradibus, progressu suo accipit tertium, tunc quartum, quintum, sextum etc. et quidem hi gradus virium ex aequali intervallo non temporisculorum, sed spatiolorum superaccidunt: Dico hoc corpus in isto medio nihilominus secundum tempora uniformiter accelerari, id est, ea lege, qua Galileus grave cadendo accelerari asseruit; id quod ex demonstratione superiori luculenter apparet. In tantum ut si velis materiam gravificam juxta meam explicationem operari, tamen dicere tenearis, illam ita operari possibile esse, salva manente uniformitate accelerationis per tempora aequalia, nullamque rationem apparere, cur communis explicandi modus, qui et Tuus est, alteri meo sit praefendus, cum satis supra ostenderit, quo modo fieri possit, ut particula materiae gravificae totam suam vim transferat in grave; et contra quam magnae incongruitates se prodant, statuendo ictus procedere secundum tempora. Sed haec tuae attentioni commendo; forsitan ex ipsis aliquid utilitatis capies, praesertim postquam mentem praer-

occupatam hactenus, quasi mea opinio opinioni ubique receptae de uniformitate accelerationis et diametro opposita fuisset, cum tamen illam mirifice confirmet; postquam, inquam, hanc praecoceptam mentem exueris; quae forte fecit, ut meas rationes hucusque allatas nunquam serio perpendisses.

De ictus quantitate nihil amplius urgebo, quia jam nihil facit ad controversiam. Nondum tamen clare patet, quomodo quae vis aestimanda sit, si, ut innuis, impressio potentiae non sit proportionalis ictui. Memini me, apud Ignatium Gastonem Pardies in discursu De motu locali legisse, quod ex ictus quantitate regulas motus deducere conatur, ex principio quodam, quod mihi fabissimum videtur, scilicet ex indifferentia corporis ad motum et ad quietem; quae posita corpus maximum quiescens a minimo incurrente celeritate non imminuta abrupi sequitur. Hanc indifferentiam, cui Te olim etiam addictum fuisse, quod etiam ostendit ex ictu obliquo globorum; interim veram quantitatem motionis non determinat, nec dicit illam haberi ex ductu molis in quadratum velocitatis.

Altera tuae demonstratio propositionis de ratione actionum motricium, quam in prioribus allegasti, ingeniose pariter ac prior est, ut dicis, magis ad formam excogitata mihi videtur, quamvis in fundo rei ambae concidant. Nihil enim certius est, quam quod actiones motrices debeant mensurari per effectus suos immediatos; si itaque longitudines percursae et velocitates (nisi quis obstinate vellet velocitatem potius esse causam) sint effectus actionis immediati, et quidem soli, quorum unus ab altero non dependet vel in altero non includitur (secus ita ratiocinari non liceret, ex eo enim quod duae librae auri occupant spatium duplo majus quam una libra auri, et insuper duae librae sunt duplo plures quam una libra, non ideo sequitur duas istas libras fore quadruplo seu bis duplo graviore quam unam libram, quia una ratio dupli in altera jam includitur, seu posita una, ponitur et altera) erunt actiones motrices necessario in ratione composita longitudinum et velocitatum adeoque temporibus aequalibus in duplicata velocitatum. Caeterum egregie admodum in istis prioribus Tuis ostendis, inter

haec duo: A facere duplum, tempore simplo, itemque C facere simplum, tempore simplo, cadere medium minus priore et majus posteriore, scilicet B facere duplum tempore duplo. Fateor B manifeste (ex natura repetitionis perfecta) esse duplum ipsius C, et proinde demonstrative aequi, A esse plus quam duplum ipsius C; sed tamen ex eo nondum sequitur illud praecise quadruplo majus esse hoc, priusquam demonstratum sit A esse duplum ipsius B: et hoc, meo iudicio, demonstrata non ita facili est, etenim inter facere duplum, tempore simplo, et inter facere duplum, tempore duplo, talis repetitio non percipitur; quin imo videtur primo intuitu illud hujus quadruplum esse; si enim A, tempore simplo, idem faciat quod B, tempore duplo, oportet ut A, sit duplo velocius quam B adeoque illius potentia quadrupla potentiae ipsius C. Vides exinde haec non ita procedere, quasi nullam amplius mereantur elucidationem.

Imo maxime indigeo Tuo testimonio in re, quae me non deoerit angere, agitur enim de honore meo, quae magis periclitatur, quod a fratre ipso, o nefas! impetatur. Si omnibus aequae ac Tibi perspecta esset innocentia mea et mordax fratris aemulatio, haud dubie Tuum testimonium non implorarem, nec magis me moverent ejus insultus, quam canum latratus.

Tametsi replicationem Dn. Nieuwentii non viderim, argui tamen in illo aut obstinationem aut infidelitatem, eo quod etiamnum in scripto modum quaerat; utrumvis sit, ejus commercium literarium, quod ipsi mecum inveniendum suavis, mihi non aridet. Nolim enim operam meam inutiliter collocare in convertendo obstinatum aut decedendo indocilem. Frustra illum admoneri facis, ut mihi quoque respondeat; vides ex silentio nihil habere quod reponat. Demonstratio enim synthetica, quae responsionem meam ad ejus objectionem obfirmavi, adeo facilis, clara et ad veterum demonstrandi modum accommodata est, ut sese risu exponeret, si quid contra movere vellet, cum a quovis etiamnum Geometriae tyrone intelligi possit. Modus quem Tibi proposuisti notandi calculos, omnino commodus est pro typis; optandum foret ut jam du introductus esset; revera enim haec innovatio aliquid laboris faceret si magis, qui veteri notationi assueti sunt, quam his qui recens Algebrae studio animum applicant.

En adjecta hic marginalia Dn. Hugenii, quae Te tantum concernunt; vides ex his non tanti esse momenti, quanti forsan cre-

dideras. Non ere judicabis, etiam reliqua Tibi transcribam, quae alios concernunt; si tamen illa desideras, lubenter faciam, erit enim inter semiquadrantem horae factum. Nondum nactus sum reliquos Actorum tomos; eorum tamen per primam occasionem mittendorum spem facit amicus. Memini quod mihi non ita pridem ultro promiseris excerpta ex literis privatis Dn. Hugenii ad Te datis, in quibus ipsum magnifice de nostra methodo sentire ais. Gratissimum foret, si eorum me comitem redderes. Vellem etiam mihi locum indicares Actorum*), ubi de eadem re mentionem facit. Nil novi hic ad nos pervenit, quocirca plane ignarus sum eorum quae in Republica Literaria peraguntur. Acta Lipsiensis non nisi annuam, vel ad plurimum singulis semestribus hic appellant, loco quod illa Basileae menstruatim acceperam. Ideo rogavi Dn. Menckenium, ut si quid in illis singulare prodiret, illius me per literas redderet participem; quod et Te rogo, praesertim cum Dn. Menckenius ad me non scribat nisi rarissime, quando alia causa id postulat. Ante aliquod tempus ipsi nisi quaedam Actis inserenda, ubi occasionem arripui nonnihil attingendi de iis, quae ultimo Actorum Novembri inseruisti, praecipue vero obijcendi modeste unum et alterum iis, quae Dn. Tschirnhaus ibidem publicavit, ubi inter alia modum tradit abscondendi ex curva parabolica portiones in data ratione, quod ego ostendo fieri non posse, quin habeatur quadratura absoluta Hyperbolae et proinde extensio curvae parabolicae. Rogavi simul Dn. Tschirnhausium, ut suam demonstrationem publicare haud gravare velit; promisi me ipsi pro lucro gloriæ inventionis quadraturae Hyperbolae cessurum. Hisce adjecti aliquid curiosum problema, concessio toto quod currentis anni restat tempore, intra quod si nemo solutionem exhiberet, me meam exhibiturum dixi.

Cum nesciam an jam prodierit in Actis, vel propediem proditurum sit, illud libenter hic repetam, cui per otium Te applicare, rogo, haud graveris: Datis (fig. 37) in plano verticali duobus punctis A et B, assignare viam AMB, per quam mobile M a puncto A moveri incipiens et propria gravitate descendens, brevissimo tempore perveniat ad punctum B. Miror hoc problema hactenus nemini in mentem venisse. Misi illud in Galliam et Angliam, visurus num

*) Act. Erud. 1693 p. 406.

heroes isti mathematici duarum harum nationum, qui olim soli sibi mutuo problemata proponentes et solventes neglectis aliis nationibus de palma mathematica certabant, num inquam et hujus legitimam datur sint solutionem. Perspicis quod sit ex eorum numero, ubi ex lineis omnibus quaerit una praestans aliquid in desideratis minimam; cupisnodi solutionem in exemplo catenariae per seriem investigare instituitis. Interim quantumvis arduum hoc problema videatur, illud tamen duplici modo, et quidem absque serio solvi, ubi egregias proprietates, quae in alia materia suum usum obtinent, observavi. Nulla hucusque sese occasio obtulit mittendi Iremam fasciculum corticis Peruvianae, in illam tamen invigilabo. Expendi 10 fl. Holland. Sed res non est tanti ut de restitutione ais sollicitus; sufficit si id quondam fiat bona cum commoditate. Optarim ut interea temporis alia quae magis interest sese praebeant inserendi occasio, et experieris quam sim etc.

Groningae 9 Junii 1696.

XXIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non mirum est, si in iis nihil certe constitui inter nos potest, quae demonstratione definiti non possunt, quod usu venit in causa gravitatis, licet tamen in his quoque (si tanti videtur) deprehendere, quae sententia sit similior veri. Dominus Frater Tuus in suis ad me literis ex meo modo explicandi aestimationem virium per aliquot elastra, totam vim suam corpori alicui impendentia, conjecterat me credere, gravitatem tali elastrorum actione, ictibus repetitis vim in grave transferentium, oriri. Respondi, me elastris tantum in exemplum uti. Optime tamen notas, tali modo orturas esse eadem phaenomena, quae in gravibus explicuit Galilaeus; et manifesta sane res est attendenti; nam cum spatia, a gravi percursa, sint viribus a gravi acquisitis vel amissis proportionalia, necesse est utique, ut aequalibus spatiis aequales vires acquirantur ac perdantur a gravi; perinde ac si a talibus elastris vis ipsis fuisset data vel adempta. An vero reapse talis causa a spatiis petenda sit, alioris indaginis res est: quanquam sano sensu id semper dici possit, etiamsi explicatio per ventum vel per vim centrifugam

adhibeatur. Sane si fingemus grave ascendens, velut retis araneum aequaliter diffusa perrumpere, explicari posset haec aequalibus virium amissio; sed activum aliquid sic moderari, ad modum elastrorum, non aequae facile puto; quod si possis invenire modum, qui naturae consentaneus videatur, applaudam lubentissime. Ais per Te licere mihi non agnoscere pro vera sententia Tuam, si velim. Ego vero rogo, ut Tibi persuadeas, me ab hac arbitraria iudicandi ratione esse alienissimum, et propensissimum esse ad audiendam vocem rationis. Verum est fieri posse et saepe debere, ut materiae gravificae particula in corporis poris haereat, et in iis etiam vim suam perdat; non tamen ideo vis illa in totum corpus transferetur aut ad descensum augendum serviet, sed in partium motibus absorbetur. Ais: cum materia gravifica sit subtilissima et omnia sint plena, procul dubio unum continuum constituerit et particulas non sequi ex intervallo. Ego vero putarim materiam gravificam nec subtilissimam esse nec omnia replere nec unum continuum constitutere, sed tantum esse disseminatam in alia multo subtiliore. Addis: si hoc demus, tamen numerum ictuum spatio proportionalem fore; verum quomodo id consequatur, non ostendis; et agnosces, opinor, ventum in navem agere numero ictuum potius proportionali ad tempus, quam ad spatium. Ceterum disputatio nostra de hac questione ex eo orta est, quod videbatur Tibi, communi explicandi ratione non posse satisfieri cuidam objectioni contra virium aestimationem nostram: et ideo factum est, ut haec tenes necessarium putarem haec serram Tecum recipere. Sed tunc, opinor, agnoscis alterutro explicandi modo ideo prodire. Itaque ex novissimis literis tuis demum, quis nunc sit Tibi scopus intelligi; nec repugno, modo (ut dixi) distincte explicari possit, qua ratione fiat, quod dicis. Haec tamen scribens incido in verba tua, quae me adhuc turbant; ais nimirum: magnas incongruitates sese prodere statuendo ictus procedere secundum tempuscula; quatenus sint illae incongruitates, fateor me non videre. Quod si adhuc objectionem illam in mente habes, quae Tibi negotium facessierat, optarem ut eam distinctius proponas, et velut in forma. Sane ubi inuper reciprocatis cum Domino Papino literis objectionem ipsius in formam redigi, deseruit eam ipse, et aliam novam jam fabricavit, cui sume satisfacio, speroque, hac disputandi forma inter illum et me continuata, controversiam

terminatum iri; neque enim alter ab altero se non intelligi amplius queritur.

Spero et de ictus quantitate me Tibi alias satisfacturum. De Pardesio optime judicas: Ejus de Motuum regulis Dissertatio non magni momenti est: bene quidem vidit difficultatem de incuris obliquo, sed non resolvit. Mea demonstratio a priori, pro nostra virum aestimatione, nititur utique aliqua suppositione, nempe: Actionem quae facit aliquid uniformiter, tempore simplo, esse duplam actionis facientis idem uniformiter, tempore duplo. Hanc suppositionem concedere debet Cateanus et alii, cum quibus disputaveram, qui falso sibi persuaserant, negligi a me temporis aestimationem, quae a nemine melius adhibetur, quam a me. Nondum quidem inveni modum a priori hanc propositionem demonstrandi per viam congruentiae: imo ne hanc quidem, quod actio idem faciens, breviori tempore, sit major; a quo esset incipiendum. Verum hoc admissio, utique eo ipso quod nulla amplius datur resolutio, seu quod nihil medium interponi potest inter A et B, ut B interpositum fuerat inter A et C; aliud dici nequit, quam actiones esse ut celeritates, A erat facere duplum tempore simplo, B facere duplum tempore duplo, et C facere simplicium tempore simplo: Itaque actio A est major quam actio B, et quidem ita ut crescat actio, manente effecta et tempore decrecente. Itaque ex eo ipso, quod nullum est principium aliquid determinandi, sequitur actiones esse reciprocae ut tempora. Nimirum ubicunque nulla reperiri potest ratio proportionis compositae, necesse est simplicem locum habere. Operae tamen pretium est, ut objectio tua, quam alicui occurrere posse optime notas, resolvatur; quo facto, major (credo) lux accendetur. apparatusque discrimen inter potentiam et actionem. Objectio ita habet: A tempore simplo, idem facit quod B tempore duplo; ergo A est duplo velocius quam B. Ergo potentia ipsius A est quadrupla potentiae ipsius B. Respondeo concedendo totum argumentum, potentiam esse quadruplam, et tamen ayo actionem tantum hic esse duplam. Quod Paradoxum ita ostendo: nempe potentia ipsius A quadrupla est (hoc ipsum enim demonstravimus ex hoc ipso nostro) sed actio est tantum dupla, quia Actio est in ratione composita potentiae, quae exercetur, et temporis in quo exercetur; itaque potentia ipsius A quadrupla, simplo tempore exercita, dat actionem duplam ejus, quam dat potentia ipsius B simplo, exercita ten-

pore duplo; et quadruplam ejus quam dat potentia ipsius C simplo, exercita tempore simplo. Scilicet in A potentia 4, tempus 1 dat actionem 4; in B potentia 1, tempus 2 dat actionem 2; denique in C potentia 1, tempus 1 dat actionem 1. Vides quam haec pulchre quadrent, et quam parum distinctae notiones de potentia, actione et similibus vulgo habeantur. Complures jam anni sunt, quod haec explicui in Dissertatione conscripta in itinere Italico, et Florentiae apud amicum relictis, qui editionem in se receperat; sed ego postea in mora fui, dum plura subnata sunt, quae me adjuncturum scripsi, necdum tamen praestitum, non quod res desint, sed otium ordinandi. Caeterum ut actionem nunc, composita ratione suorum principiorum, potentiae et temporis, aestimo, ita eam paulo ante aestimaveram composita ratione eorum, quae praestat, effectus scilicet extensivi seu materialis, nempe longitudinis (quam $xuz' \dot{\epsilon}\rho\sigma\chi\eta\sigma$ effectum vocare soleo) et effectus intensivi seu formalis. Desideratum enim est, ut praestetur ultimum et cito. Ambae autem aestimationes consentiunt inter se, ut vides.

Vereor quidem et ego, ne Du. Nieuventiit non satis vel candoris vel docilitatis afferat; quod tamen vereri licet, imputare nondum licet. Et donec magis constet oleum et operam perdi, opus est condescensu quodam et longanimitate, quae fateor ab iis qui calent adhuc et animo vigent (quod in Te agnosco) minus expectari potest. Qua patientia Du. Papius et ego inter nos rationes hactenus contulerimus, mirareris, opinor, si videres. Interim facis ex decore moderationemque ostendis Tuam, quod Du. fratri non ita respondes, quemadmodum animum Tibi suggerere video. Ego vero occasione non amittam sententiam dicendi meam, quando id non inutile futurum putas.

Pro Ingenianis notationibus marginalibus ago gratias singulares, rogoque ut caeteras quoque omnes communces. Indiget nescio quid morositatis, ne dicam malignitatis, sed quibus eo facilis ignoscendum, quod publice et per literas aequiora dixit, praesertim de Analysisi nostra. Nam in Actis Eruditorum 1693 p. 470 (ubi solutionem suam problematis ejusdam Tui, puto, occasione constructionis Tractoriae excogitati exhibet) disertè commendat calculi differentialis (quo tunc feliciter usus erat) inventionem, absque quo (inquit) vix est ut ad has subtilitates admitteremur. Et

in suis ad me literis, biennio abhinc circiter scriptis, Calculum vocat admirabilem (vostre merveilleux calcul). Verba ipsa Tibi transcribam, ubi literae incident in manus: nunc enim se statim non offerunt, et quaerere non vacat.

Postremo accedo ad problema Tuum inventiendae lineae, quam vocare, opinor, liceat Tachystoptotam seu celerissimi descensus. Problema est profecto pulcherrimum, et me invitum ac reluctantem, pulchritudine sua, ut pennam Evam ad se traxit. Est enim ea mihi tentatim gravis et noxia, viribus affectis et incumbente aliorum mole: ut non facile amplius audiam, quae intensiorem pestulant laborem meditando. Itaque in posterum problemata a Te deprecor, maloque ab alio, et praesertim a Te docere solutiones, quam ex me sperari, Tibique debilius videri, quam fieri mihi. Nam sentio tali labore praesertim calculi (qui levis satis Tibi videri possit) non parum atteri vires meas, et phlogoses illas importunas excitari. Accipe interim quid tentarim, non per seriem quidem, haec enim tantum subsidialis est, si res ad triarios redierit; sed ea ratione quae ad aequationem differentialem ducit, quam et in istis ex visceribus problematis habere solemus. Apud igitur eam esse naturam lineae Tachystoptotae AC (fig. 58) (in qua grave celerissime a puncto A ad punctum C descendit) ut positis aequalitatem seu altitudinum incrementis constantibus, sicut elementa ordinatarum seu latitudinum BC in ratione composita ex directa elementorum curvae, et reciproca elementorum temporis verticalium. Verticalia voco elementa temporum, quibus grave descenderet in ipsa verticali AE. Unde sequitur, elementa curvae itidem esse in ratione composita ex elementorum latitudinis directa simpliciter et ipsarum altitudinum reciproca subduplicata; itaque si AB sit x , et BC sit y , et assumatur constans quaedam b , res reducitur ad quadraturas, et erit $dy : dx = \sqrt{x} : 2b - x$. Sit $dy : dx = v : b = \sqrt{2bx - xx} : 2b - x$. Dico v , ipsis dy proportionalibus, esse ad meam Quadratricem, qua olim pro Tetragonismo meo Arithmetico sum usus, atque adeo curvam Tachystoptotam esse Quadratricem meae Quadratricis, et proinde a circulari dimensione pendere. Nam si (fig. 59) centro G, radio AG seu b describatur semicirculus AHH, et angulo AGH bisecto, ducta GT occurrat tangenti verticis in T, et sit AB, x , adeoque sit BH, $\sqrt{2bx - xx}$, tunc AT erit v , seu erit ad b sive AG, ut BH seu $\sqrt{2bx - xx}$ ad BM seu $2b - x$. Jam in BH (si opus

producta) sumatur BN aequalis AT, erit $\int v dx$ seu area ABNA aequalis duplo segmento circulari, cujus arcus AH. Itaque si area ABNA vel duplum hoc segmentum applicetur ad rectam b (ut fiat $\int v dx : b$) prohibit y seu BC, ordinata lineae quaesitae AC. Unde sequitur Tachystoptotam AC esse lineam segmentorum (quae scilicet ex eodem puncto, nempe vertice, absconduntur) seu lineam, cujus ordinatae sint segmentis circularibus proportionales, quorum tetragonismo supposito facile curva per duo puncta data describi potest.

Aegricum theorema, ut puto, non inelegans, facile quidem, si quis animum advertat, Tibi tamen fortasse non displiciturum, quia Tui problematis occasione mihi incidit. Nempe si (fig. 60) triangulum rectangulum Pythagoricum (ut quidam vocant) seu cuius latera sunt ut 3, 4, 5, ita statuat, ut perpendiculariter erectum sit latus minus; grave descendens per AB verticalem, et deinde conceptio impeta pergens per BC horizontalem, eodem tempore pervenit ab A ad C per latera AB, BC, quo directe per ipsam hypotenusam AC. In praxi autem oportet angulum B nonnihil rotundari in portuiculam curvae, cujus tangentes sint AB, BC, ut grave sine repercussione aut impedimento transeat ex AB in BC; proderit etiam angulum ABC esse tantillum obtusum. Si AB minor sit tribus quadrantibus ipsis BC, citius absolvetur iter per latera, quam per hypotenusam; sin major sit, directum iter praestat. Et multa alia ejus generis constitui possunt, quibus immorari non vacat.

Et jam finis literis satis profixis est imponendus. Quereretamen adhuc lubet, nihilne ex Gallia habeas a Dno. Hospitalio aliisque amicis? Quae apud vos viciniosque Batavos novitates Physico-Mathematicae? Superioribus jam scriptis, literas a Dno. Cluverio accepi cum inclusis ad Dominum Fratrem Tuum. Defendit semper, quae dixerat contra Quadraturam Parabolae Archimedis, et nostra quoque. Respondebo saltem nullam dari posse constructionem Archimedeam meliorem. Puto habere eum meditationes profundas nec spernendas, sed non opus erat, ut is uretetur ad bene constituta evertenda. Vale.

Batum Hanoverae 16 Junii 1696.

P. S. Acta Eruditorum etiam ad me satis tarde perveniunt, negligentia Biblioplae, qui curare in se recipit, ut nesciam an Tuum problema sit in Actis, cum monitis de Fomini Tschirnhäusii sectione Curvae parabolicae. Video eum saepe paulo promptius pronuntiare.

Beilage.

Invenire lineam Tachystoptotam: Datis in plano verticali duobus punctis A et B (fig. 57) invenire lineam AMB, per quam mobile M a puncto A moveri incipiat et propria gravitate descendat ad punctum B tempore omnium possibilium brevissimo.

Si grave M descendat ex A in recta inclinata AB (fig. 61) erit tempus, quo percurrit AB, ad tempus, quo percurreret AC perpendiculararem usque ad horizontalem CB, ut AB ad AC, ut constat.

Rursus si ponamus CB esse duplum ipsius AC et grave ubi descensu pervenit ad C, pergere in horizonte concepto impetu ac tendere motu aequali versus B, percurreret CB tanto tempore quanto percurrat AC. Sin CB sit aequalis AC, percurreret dimidio Et in universum si tempus quo percurritur AC, sit t , erit tempus quo percurritur CB, ad t , ut est CB ad bis AC. Raque tempus quo pervenitur ex A in B via ACB, erit $t + t$. CB: (bis AC) seu t ((bis AC) + CB): bis AC. Sed tempus quo pervenitur recta ab A ad B, est t . AB: AC, et $AB = \sqrt{AC^2 + CB^2}$, ergo sit tempus per AB = $t \cdot \sqrt{AC^2 + CB^2} : AC$, ergo tempus per ACB est ad tempus per AB, ut ((bis AC) + CB) ad bis $\sqrt{AC^2 + CB^2}$, et horum quadrata ut $4AC^2 + 4AC \cdot CB + CB^2$ ad $4AC^2 + 4CB^2$, quorum illud potest esse majus quam hoc, quis demto communi $4AC^2 + CB^2$ potest $4AC \cdot CB$ esse majus quam $3CB^2$ seu $4AC$ potest esse majus quam $3CB$. Itaque si recta $4AC$ sit major quam $3CB$, seu si AC sit major quam $\frac{3}{4}CB$, breviori tempore perveniet grave ex A in B per cathetum et basin simul, seu per latera trianguli rectanguli, quam via brevissima seu directa per hypotenusam.

Hinc sequitur, in triangulo rectangulo Pythagorico (ubi AC cathetus aequatur tribus quadrantis haseos CB) grave aequali tempore descensurum ab una hypotenusae extremitate (A) ad alteram (B) sive oblique descendat seu per latera (AC, CB) sive directe per ipsam hypotenusam (AB), ubi tamen in praxi concipiendum est angulum C nonnulli rotundari seu constare ex por-

tiuncula curvae, cujus tangentes sint rectae AC et CB, ut sine flexione vel impedimento motus gravis ex A per C ad B procedat. Sed portiuncula sufficit quantumvis parva, quae adeo calculum notabiliter non mutat.

Quomodoocumque inter se et respecto perpendicularis sita sint duo puncta A et B (fig. 62), modo unum alteri perpendiculariter non imminet, potest inveniri punctum D tale, ut facilis seu citius perveniatur ab A ad B per D, quam recto itinere. Quin et, si data sit horizontalis DE, in eodem plano verticali cum punctis A et B inter quae jacet, inveniri in ea potest punctum B tale, ut via ADB sit omnium possibilium facilissima seu promptissima.

Nempe tempus per AC sit t , et tempus per AE est ad tempus per AC, ut \sqrt{AE} ad \sqrt{AC} , ergo tempus per AE est $t \cdot \sqrt{AE:AC}$. Et tempus per AD est ad tempus per AE, ut AD ad AE, ergo tempus per AD erit $t \cdot \sqrt{AE:AC} \cdot AD:AE$. Quaeramus jam et tempus per DB. Quod est ad tempus per DF vel EC, ut DB ad EC; tempus autem per EC est tempus per AC, demto tempore per AE, seu $t \cdot 1 - \sqrt{AE:AC}$; ergo tempus per DB est $t \cdot 1 - \sqrt{AE:AC} \cdot DB:EC$. Ergo tempus per ADB seu tempus per AD + tempus per DB est $t \cdot \sqrt{AE:AC} \cdot AD:AE + (1 - \sqrt{AE:AC}) \cdot DB:EC$, quod sit = m seu omnium possibilium sui generis minimo.

Ut ergo inveniantur DB, differentietur haec aequatio. Pro conpendio prisae $t \cdot \sqrt{AE:AC}$ vocetur r , et $t \cdot 1 - \sqrt{AE:AC}$ vocetur n , et fiet $r \cdot AD:AE + n \cdot DB:EC = m$. Unde differentiendo fit $dAD \cdot r:AE + dDB \cdot n:EC = 0$. Jam $AD = \sqrt{AE^2 + ED^2}$, ergo $dAD = dED \cdot ED:AD$; et similiter $DB = \sqrt{EC^2 + FB^2} = \sqrt{EC^2 + CB^2 - 2CB \cdot ED + ED^2}$, ergo $dDB = -dED \cdot FB:DB$. Ergo ex aequo differentiata fit $r \cdot ED:AD \cdot AE = n \cdot FB:DB \cdot EC$. Est autem r ad n seu $t \sqrt{AE:AC}$ ad $t \cdot 1 - \sqrt{AE:AC}$ seu ratio temporis per AE ad tempus per EC, et ED seu CF:FB = $n \cdot AD \cdot AE$; $r \cdot DB \cdot EC = (AD \cdot AE:r) \cdot (DB \cdot EC:n)$ seu $AD:DB = (r \cdot ED:AE):(n \cdot FB:EC)$ et $r:n = \sqrt{AE:AC}:(\sqrt{AC} - \sqrt{AE})$; $\sqrt{AC} = \sqrt{AE} + \sqrt{AC} - \sqrt{AE}$. Hinc si AD, DB, FB explices per ED, res redit ad parvam Geometriam seu aequationem, in qua sola incognita ED; sed hoc nunc omisso sufficit tale theorema, quod progressus in Istitutum (ED

seu CF, et FB) sunt in ratione composita ex rationibus directis descensusum verticalium seu progressuum altitudinis (AE, EC) et progressuum descensusu obliqui (AD, DB) et reciproca accessionum temporis verticalis (1:r et 1:n). Tempora verticalia voco, quibus altitudines percurrerentur seu descensusu verticales pergererentur, nempe per spatia AE, EC. Porro r AD:ED::AD³:AE = n DB:FB::DB³:EC seu tempus per AD in ED:AD³ = tempus per DB in FB:DB³. Ergo latera facillissimi descensus sunt in ratione subduplicata, composita ex rationibus temporum, in quibus fit descensus per ipsa, et progressuum latitudinis.

Sumatur alia recta horizontalis infra CB, ut GL (fig. 63) et in ea sumatur punctum L, et quaeratur in horizontali CF, cadente inter ED et GL, punctum B tale, ut sit via per DBL omnium possibilem a D ad L facillima; habebit locum idem theorema. Ponamus autem I, sic assumi, ut B sit illud ipsum punctum datum paulo ante positum. Eodemque modo, ut ex dato B invenimus punctum L in horizontali GL, ita ex puncto L invenimus punctum P in inferiore adhuc horizontali MP. Itaque via facillima birectilinea ex A per ED ad B erit ADB, et ex D per CB ad L erit DBL, et ex B per GL ad P erit BLP, et ita porro. Esto autem aliqua via facillima trirectilinea ADBL ab A ad L per horizontales ED, CB angulis reclarum viae incidentes, patet et birectilines trirectilines contentas esse omnium possibilem facillimas, nempe ADB et DBL. Nam cum ex hyp. via facillima ab A ad B, angulis suis in datas horizontales incidat per BL, necesse est viam ADB esse viarum ab A ad B facillimam, nam si detur facilior AQB, erit via AQB cum via BL facilior quam via ADB cum via BL, id est quam via ADBL, contra hypothesis. Et simili argumento res prohibebit de trilineis in quadrilineo; et generaliter si via tota sit sui generis facillima, etiam partium viae sui generis facillimae erunt, verb. gr. bilineae et trilineae in quadrilineo contentae.

Quod si jam concipiamus viam polygonam facillimam ita continari, ut constet ex angulis numero infinitis, qui incidant in horizontales infinitesime distantes seu vicinissimas, habebimus Lineam facillimi descensus, quam vocare liceat Tachystoptotam, modumque ejus proprietates investigandi. Hanc autem non esse isochronam paracentricam, ut fortasse cuidam videri prima fronte possit, ex eo intelligi potest, quod nostra abit in rectam, tunc

cum unum ex duobus punctis (ut A et B, vel A et P) alteri imminet verticaliter; tunc enim omnia cadunt in rectam illam verticalem seu perpendiculararem, rectus autem descensus nunquam est isochronus. Deinde nostra linea incipit a quiete, quod non facit isochrona.

Intelligatur jam descripta linea facillimi descensus seu Tachystoptota AC (fig. 64) in qua mobile C transeat a puncto 1C ad punctum 2C via facillima, et quidem ab horizontali 1B1C ad horizontalem 2B2C per horizontalem 2B1C, ita ut angulus in median horizontalem incidens sit punctis 1C, 2C, 3C non nisi infinitesime distantibus. Describatur praeterea parabola quaedam AE, cujus vertex A et axis AB. Utique si AB sint descensus verticales gravis inde a quiete, erunt BE, ordinatae parabolae, ut tempora verticalia, et F(E), ut 1F2E, 2F3E etc. ordinarum parabolae elementa, erunt elementa temporum verticalium. Quodsi B(B) seu EF, elementa altitudinum seu abscissarum, sint constantia, erunt F(E) elementa temporum verticalium, ipsis temporibus BE reciproce proportionalia. Compliantur rectangula 1C1D2C, et 2C2D3C, ex natura viae birectilineae facillimae ex 1C ad 2C per 2B2C paulo ante demonstrata, erit 1D2C ad 2D3C = (1C2C : 1B2B : 1F2E) : (2C3C : 2B2B : 2F2E) seu positis 1B2B, 2B2B elementis altitudinum aequalibus, erit 1D2C : 2D3C = (1C2C : 1F2E) : (2C3C : 2F2E), seu (1 : 1F2E) : (1 : 2F2E) = 1B2E : 2B2E = $\sqrt{(A_1B : A_2B)}$. Ergo 1D2E : 2D3C = 1C2C : $\sqrt{A_1B}$: : 2C3C : $\sqrt{A_2B}$, seu elementa latitudinum sive ordinarum sunt in ratione composita ex elementorum curvae simplicite et ipsarum altitudinum subduplicata D(C) ut C(C). $\sqrt{A_1B}$.

Unde more solito dy ut dc, \sqrt{y} seu assumta constante 2b, fiet dy ut dc, $\sqrt{2bx}$ seu (1) dy, 2b = dc $\sqrt{2bx}$ seu 4bb dy² = 2bxdx² + 2bxdy², vel (2) 2bdy² = xdx² + xdys², vel (3) dy : dx = $\sqrt{(x : 2b - x)}$. Fiat dy : dx = v : b, fiet (5) v : b = $\sqrt{(2bx - xx)} : 2b - x$. Itaque ut exhibeatur quantitas v, in verticali AB (fig. 59) sumatur punctum G infra A, ut fit AG aequalis constanti b, et centro G radio AG describatur semicirculus AHM, et in axe sumto sinu verso quocumque ut AB seu x et sinu recto BH seu $\sqrt{(2bx - xx)}$, anguli AGH dimidio AGT ducatur recta GT et producta dum occurrat tangenti verticis in T, erit AT recta v quaesita. Hoc sic demonstratur: Ex diametri

AM puncto M educatur MH, erit angulus AMH dimidius anguli AGE, ergo aequalis angulo AGT. Ergo ob triangula similia GAT, MBH erit AT ad AG seu ad b, ut BH seu $\sqrt{(2bx - xx)}$ est ad MB seu ad $2b - x$, itaque AT est v. Cui sumendo aequalem BN in BH (si opus producta) et per puncta ut N ducatur linea ANN, quae est quadratrix mea arithmetica, qua olim sum usus, cujus quadratura dabit quaesitam. Nam per (3) et (4) fit $\int \sqrt{dx} : b$

$= \int dx \sqrt{(x : 2b - x)} = y$ seu area figurae ABNA, applicata ad AG seu b constantem, dabit BC seu y quaesitam. Inveni autem jam omnem quadraturam a circuli quadratura pendere, seu aream ABN aequari duplo segmento AHA adeoque ipsas rectas BC seu y esse ipsi AHA segmentis circuli proportionales.

Datis igitur punctis A et L sibi verticaliter non imminutibus, si a puncto A ad L ducenda sit linea Tachystoptota, ducatur per A verticalis AB, et ex puncto L in ipsam normalis LK; inde quaeratur radius circuli b seu AG, qui ductus in ipsam KL aequetur duplo segmento AIA; inde inventis quocumque rectis BC, quae ductae in eandem AG aequentur duplis segmentis respondentibus AHA, linea ducta per puncta C erit quaesita. Quanquam et sufficiat circulus quivis, immo diameter AM sit major ipsa AK; nam si hanc KL secet in I, et in ipsa KL sumatur KP talis, ut sit rectangulum sub AG, KI aequale duplo segmento AIA et in BH quocumque (si opus producta) sumatur BR quae ducta in AG aequetur duplo segmento AHA, fiatque BC ad BR ut KL ad KP, erit punctum C in curva ACL quaesita, quae basi per M occurret in O, sic ut MQ sit semiperipheria circuli. [Linea segmentorum poterit continari ope majoris circuli, ut parabola quae per eborhas construitur; videndum, annon et ope circuli ejusdem constanti revolutione ipsius AC circa A, ultra semicirculum, imo ultra circumlum, ita enim semper crescit quantitas segmenti, quod secus est in eborha, ubi prior redit].

Methodus haec a me adhibita etiam pro aliis lineis Maximum aut Minimum aliquod praestare debentibus est profuturata; nempe si maximum vel minimum praecedentis sit pars maximi vel minimi sequentis. Ut invenire lineam maximi ambitus, quaeretur primum Monogonum BDC (fig. 65) datis magnitudine ipsi AB, AC radii

seu emissis ex centro aequalibus inter se et ambitu ABDC vel quod eodem redit, BDC, sic ut area ABDC sit omnium possibilium maxima. Ubi invenietur BD, CD esse aequales et angulus B, C esse rectos. Sit jam Dyogonum BDCE omnium possibilium sui generis maximum data ambitus BDCE magnitudine. Resolvatur in duo Monogona ABDC et ACEF. Si jam ABCD sit ambitus sui maximum, dico et ACEF sui ambitus maximum fore; sit enim aliud majus ejusdem ambitus CFE, nempe H, erit ABCA + H majus quam ABDCE, contra hypothesin. Itaque continua additio dyogonorum satisfactientium formabuntur polygona satisfactientia. Potuisset prius ostendi in dyogono, majas fieri, si AB, AC aequales, quam si inaequales.

Pro Curva Catenaria etiam procedet haec Methodus; nempe datis punctis A, B (fig. 66) et catenula trigona ACDB, quaeritur situs ejus, ut centrum gravitatis maxime descendat. Aliter si CD intelligatur esse pondus affixum in C et in B quomodocumque formatum, reperietur ut maxime descendat centrum gravitatis, debere esse in concursu rectorum AC, BD.

Si quaeratur navis G (fig. 67) figura minime resistens aequae in data capacitate, incipiatur itidem a dyogono, inde pergatur ad aliud dyogonum, atque ita rem omnino puto fore in potestate. Est in his novae cujusdam Analyseos materies.

XXX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Cum nunc de mente mea Tibi constet, at quis mihi scopus sit in explicatione actionis materiae graviticae intelligas, ei diutius non immorabor; liceat tamen paucis perstringere ea, quae in postremis Tuis haec super re monuisti. Ergone tandem frater meus morositati suae vim intulit Tibique scripsit? nullamne aliam scribendi materiam habuit, quam quod de elastorum actione ex me Tuisque ad me datis literis didicerat? Forsan et alia protulit tanquam in sua, revera tamen in aliena olla cocta; de his enim parum antea, me non dum monente, cogitabat. Sed dic, quaeso, notavit ne etiam ex tali elastorum actione oritura esse eadem phaenomena Galilei? Vix

puto, nam hoc ipsi non sperui, quia post discessum meum ex patria mihi demum incidit. Promittis Te meo explicandi modo lubentissime applausurum, si possim invenire viam naturae consentaneam, qua activum aliquid sic moderari liceat ad modum elastrorum, quemadmodum fingere possemus retia araneorum aequaliter diffusa, quibus perimpediis grave ascendens decrementa pateretur virium, spatii proportionalia. Sane si mihi concedis, posse saltem sava ratione statui particulam gravificam totam suam vim transferre in grave, jam habemus quod petis; particulae enim gravificae si non continuum faciunt, saltem sunt aequaliter dispersae, et sic quod in retibus araneorum fingis, passivum, hic revera ponitur activum; quippe cum quaelibet particula totam suam vim transferat (per hypothesein, quia ad fieri posse jam in prioribus meis ostendi) et cum numerus particularum sit spatii proportionalis, patet utique virium accretionem fore aequabilem. Mentem meam clarius explicare non possum quam per aliquid simile. Pone navigium ferens hominem in puppi, quod primum sit quiescens in aqua stagnante nullius resistentiae, ipsum autem sit solidissimum, ita ut ejus partes tremoris omnis sint expertes, sed vim impressam toti navigio impertiant, abstracte etiam a materia ambiente. Nunc homo insidens percussit malleo puppin secundum directionem horizontalem, quo totum navigium moveri incipiat; repetat ictus aequales non singulis momentis, sed singulis spatiolis, per quae navigium progreditur. Dico navigium eodem modo accelerari, quo grave descendens; recipit enim singulis spatiolis non solum ictus aequales (siquidem distinguis inter ictum et vim) sed etiam vires aequales, eo quod mallei vis, quae semper eadem supponitur, tota ad navigium promovendum impenditur, ipsi enim nil remanet, nisi quantum pars est navigii; sic etiam quia materia gravifica est infinite velox, poterit unica ejus particula considerari quasi corpori gravi semper insideret, suosque infictus singulis spatiolis reiteraret, loco quod singulis spatiolis nova adveniat, unumque faciat ictum. Ais me non ostendere, quomodo consequatur numerum ictuum spatii proportionalem fore; sed puto id satis ostensum esse ex eo ipso, quod concedatur particulas gravificas aequaliter disseminatas esse per totam altitudinem descensus. Nam si numerus particularum percussientium sit spatii proportionalis, ergo etiam numerus ictuum eidem erit proportionalis, quia tot sunt ictus, quot sunt particulae quae faciunt ictus. Haud dubie agnosco ventum in navem agere numero ictuum

proportionali ad tempus (supposito ventum incomparabiliter rapidiorem esse navi) sed hoc minime evertit opinionem meam, imo maxime illam confirmat; est enim summa differentia inter utrumque agendi modum, et hinc non miror, quod cum nullam interesse crederis, meae opinioni lucusque assentiri nolueris. Navis propellitur a particulis venti a tergo continue subsequentibus et motum habentibus progressivum secundum directionem navis; hinc sive quiescat sive moveatur, semper notas et novas recipit impressiones, et quidem pro ratione quantitatis venti allabantis, id est, pro ratione temporis. Sed grave descendens non impellitur a materia qualiam instar venti, quae a circumferentia versus centrum terrae flat, sed a particulis quidem rapidissimis, nullum tamen motum progressivum versus terrae centrum habentibus; hinc nisi grave moveatur, nullas novas recipit impulsiones. Si globuli (fig. 65) in aequali distantia sese subsequentes 1, 2, 3, 4 etc. motu parallelo impingant in corpus A, erit numerus ictuum in ratione temporis. Sed si particulae aequidistantes a, b, c, d etc. moveantur rapidissime, veluti in vorticulis α , β , γ , δ etc. circa centrum fixum primaque particula a propellat corpus B in vorticulum β , et particula b in vorticulum γ etc. tunc utique numerus ictuum erit in ratione spatii a corpore B percursi. Prior agendi modus est venti, posterior est materiae gravificae vel saltem analogus. Vides satis ex hac explicatione, quanam sint illae incongruitates, quae sese produunt, statuendo ictus procedere secundum tempuscula; praeter illam, quod in hac hypothese dicendum sit, corpus jam in motu majorem virium gradum recipere a particula gravifica utat incomparabiliter celeriori, cujus sane respectu corpus quiescere censendum, quam cum quiescit. Hoc si non sit incongruitas, saltem non est veritas adeo clara, quam adversarius minime negare possit.

Optime distinguis inter potentiam et actionem; adeoque argumentum Taum a priori ostendit saltem actionem ipsius A esse quadruplam actionis ipsius C; volebas autem id demonstrare de potentia. Interim res plana fiet, dicendo actionis hic esse ut potentiae quia aequali tempore peraguntur. Bene se habet, quod agnoscas nondum potuisse demonstrari actionem A duplam esse actionis B; principium enim illud: Ubicumque nulla reperiri potest ratio proportionis compositae necesse est simplicem locum habere, obscurum mihi videtur, nec satis

hic probat quod probandum est; propositionem vero alteram, quod actio idem faciens breviori tempore sit major, a qua incipiendum dicis, ego pro axiomate assumerem.

Commercium meum parum sibi proficuum credit, opinor. Da Nieuventuit, multoque minus indigebit mea scrupulorum suorum enodatione, sive quod me huic operi non parem putet, sive quod malit recurrere ad Te, tanquam ad fontem ex quo illos melius diluat. Ultra tres septimanas commoratus fui Amstelodami, quod ipse non poterat ignorare, ut amicus ejus Mackreelinus mihi retulit; nec tamen eum videndi honorem habui. Interim non e re puto, nec mihi author eris, ut operam meam obtuldam ipsi nobenti forsitan. Noli me adeo calere putare, ut omni longanimitate caream; si videres, quantum ego laboris susceperim pro Dno Marchione, pro Varignonio, Fatio alisque, quantum in illorum usus fecerim et scripserim, imo meum ipsam commodum illorum commodo postposuerim, dices profecto contrarium. Agnosci utique moderationem meam, dum fratri non respondeo uti mereatur: quod autem id in Te suscipere offers, grata accipis mente, et quo citius, eo gratius erit, qualicunque modo id fiet. En reliquas Hugenii notationes marginales, quas in memoratis Tomis reperi; caeteros nondum habeo.

Mitto hic solutionem meam problematis mei de inventiendi linea celerissimi descensus*), illis verbis conscriptam, quibus illam ante acceptas Tuas ultimas conceperam, ut si digna videatur simul cum Tua Actis inseri cures. Bederam lineae nomen *Brachystochronae*, ob rationem quam ibi videbis; sed si magis ardeat notione *Tachystoptotae*, permittit ut hoc in illius locum ubicunque substituitur. Valdeper gavisus sum, cum intelligerem adeo Tibi placuisse hoc problema, ut Te invitum et reluctantem pulchritudine sua, ut ais, ut possum Evam ad se traheret, si modo ego non pro serpente illo maligno habere, qui hoc possum obtulit; sed gaudio meo multum accessit, cum viderim Tibi jam repertam esse solutionem, a qua tamen omnes quibus illud proponebatur, longe absunt, testibus literis Varignonii (De tous ceux, inquit, à qui j'ay annoncé votre problème, je ne sçay encore personne qui l'ait résolu: je l'ay tenté, mais la difficulté m'a tout aussy-tôt rebuté). Etiam ipsi Hospitalio minime displicuit problema (et

*) Siehe die Beilage zu diesem Briefe.

probleme, mihi scribit, me parois des plus curieux et des plus jolis que l'on ait encore proposé, et je serois bien aise de m'y appliquer; mais pour cela il seroit necessaire que vous me l'envoyassiez réduit à la Mathématique pure, car la Physique m'embarassoit etc.). Interim idem Tibi accidit, quod illis qui detegunt thesaurum, cujus tamen pretium nondum aestimare possunt, quod etiamum inclusus est cistis et capsis, quibus vero reseratis, eum longe pretiosiores deprehendunt quam sperabant. Revera enim et Tu reperisti solutionem problematis, in quam autem, quantum in recessu contineat, nondum introspeixisti. Persuasus sum totus, quod longe majorem capies voluptatem, ubi noveris curvam quaesitam esse cycloidem, quam cum illam invenisses anonymam: illa, inquam, est cyclois, de qua in simili materia Hugenius aliam insiguum proprietatem ostendit, isochronismum scilicet oscillationum. Quid, quaeso inexpectatus evenire potuisset? Ob hanc rationem puto ipsi nonen *Brachystochronae* non male convenire. Et sic Tua ope nostrae accesserunt proprietates Cycloidi, cum ostendas illam esse *Lineam segmentorum* et *quadratricem* tuae *Quadratricis*. Sciendi cupidus sum, qua via perveneris ad solutionem; praevideo Te alii alicui instituisse, quae ab utraque mearum duarum diversa erit. Alter meus solvendi modus quidem est indirectus, sed quem directo praefero, quod una opera me deduxit ad solutionem problematis *Optici* elegantissimi de *curvatura radii* in medio variante, ubi mirum consensum detexi inter duas istas curvas. Tuam vero sententiam exopto, quid de utroque solvendi modo Tibi videatur. Constructionem etiam dedi curvae, quam voco *Synchronam*, quam ex occasione prioris problematis inveni; ostendo ibi, quod sit curva, quae omnibus cycloidiis ab eodem initio descriptis normaliter occurrat. Est sane mirabilis curva; ejus enim constructionem, posita extensione arcus circularis, ex contemplatione praecedentis materiae facile inveni; si vero illam in abstracto consideratus quaerere velim, ne quidem ad acquisitionem differentium pervenire possim; in tantum ut, si hoc problema seorsim vel alio tempore proposuissim, invenire scilicet curvam omnibus cycloidiis perpendiculararem, vix quisquam solutionem dare potuisset, dum contra ego me eam solus possidere jactare potuissim; sed magis publicae utilitati, quam suae gloriae litandum censeo. Memini me Tibi olim generaliter proposuisse, invenire curvam, quae aliis positione datis occurat normaliter, quod ego in pluribus

solveram. Modum quidem Tuum generale tradebas; sed si resumere placet, videbis illum plerumque locum non habere, quando curvae positione datae sunt transcendentes, ut in hoc ipso exemplo apparebit. Alterius exempli, quod in meo schediasmate propono de Logarithmicis per curvam normaliter secandis, nondum quidem constructionem, nec aequationem differentialem primi gradus inveni, sed tamen seriem quandam simplicissimam pro illa exhibere possum. Caeterum egregium est, quod observati de triangulo rectangulo Pythagorico, Ego sane etiam multa non contemnenda detexi ex occasione mei problematis; inter alia insignem quandam proprietatem cycloidis, quae haec est: Super recta C.D (fig. 69) descriptae semicycloides eadem Ad, ad, ad etc. omnes normaliter secabuntur ab omnibus semicycloidibus eisdem C.b, c.b, c.b etc. super parallela Ab descriptis. Unde nascio quid peculiare accidit cycloidi: ejus enim evoluta est cyclois, ejus caustica est cyclois; nunc ejus normalis perpetua est illidem cyclois et quidem eadem. Haec vero omnia tria etiam convenient Logarithmicae spirali, quam Frater meus vocat Spiram mirabilem, in qua ego primus inveni, quod pro evoluta habeat spiralem eandem. En igitur mirabilem affinitatem inter duas istas curvas. Si quis profundius perstrutari vellet, quae dico in schediasmate meo, amplam satis materiam pro hoc haberet. Curva nostra Brachystochronis infinitos habet casus particulares, ut si peteretur ex infinitis arcibus circularibus, qui per duo puncta data duci possunt, ille qui respecta reliquorum esset celerissimi descensus, id est, si eodem momento a puncto dato demitteretur gravis per singulos arcus, quinam ille esset, per quem grave celsissime ad alterum punctum datum veniret; vel, si loco arcuum circularium substituerentur arcus aliorum curvarum determinatarum; vel etiam, si super linea recta duo data puncta conjungente erigantur infinita triangula isoscela, vel triangula rectangula, vel aliae figurae rectilineae, semper posset quaeri casus celsissime descensus, adeo ut tot problema particularia formari possent quot liberet, et sic nostrum problema generale consistere dici potest in inventionem minimi infinitorum minimorum. Sed transeo ad nova quae sciscitamus.

Frater meus junior, nulla reperta statione Parisiis, reversus est in patriam, Do. Hospitalis illum oneravit 3 vel 4 exemplaribus sui Tractatus novi de principis calculi differentialis, quorum unum Tibi destinatur. Ex quo Duo. Haberstroh ad suas ad me

datae respondi, de illo ne 770^o quidem audivi. Haerentis quidem nihil novi incidit de differentiaibus ex analogia differentiarum et potentiarum, quia de eo de novo cogitare nondum vacavit: supersunt tamen nonnulla quae monebo, quando disputatio nostra fuerit finita.

Novitates Physico-Mathematicae quae ex Batavis ad me perveniant, sunt oppido steriles. Audio Hugonium, praeter Volderum, constituisse Curatorem MSS. suorum Dominum Fullenium, Mathematicis Prof. Franqueperam, destinatis pro labore utriusque mille florenis Holland. de bonis suis.

Seriose loquitur an jocatur Claverius? Quidquid sit, non audiendus est? habeat meditationes quantumvis profundas, sane magno conatu magnus ingas dicit Act. 1687. pag. 586, quae nil conducant, nisi ut mathematicis imperitis contentum inspiciant contra scientias Mathematicas. Vereor ne sit ex eorum numero, qui velent aliquid videri, sed cum nil habeant quod producant, in cortice misere haerent, nec tamen desunt nucleum arrodere. Ego sic judico ex his quae Iucuscus ab ipso vidi: quam enim dedit in Actis anni 1686 seriem pro quadratura circuli, non vacat examinare, qua lege progrediatur, et an sit justa; et si sit, nil novi, nil rari dedit; sed fallor, dedit utique aliquid insoliti, quadravit enim circulum saltem per seriem; ergo per seriem, ex data linea construxit Mundum Divinae menti analogum. O lepidum creatorem! sed joco id dixerim, animus non est offendere quemquam, forsitan est Vir egregius, licet id nondum imotescat per scripta sua; nihil tamen laudi ejus detraham. Videtur ut dicam quod res est, easdem sibi quae Nieuventio minutias obstaculo esse, quominus nostra amplecti velit. Interim ex ejus ratiocinio quo evertere conatur quadraturam parabolae, liquido fluit, nec ipsam triangulum rectilineum habere rationem subduplam ad rectangulum circumscriptum, sed quae sanae mentis Geometra, praeter Claverium, id negabit? Vale et ama etc. Groningae d. 21 Julii 1696.

P. S. Nostine jam (quod aliquoties significare volui) quod Wallisus Opera sua universa duobus voluminibus contenta in folio cum argumentis de novo in lucem emisit? Multa quidem habet, quae Te concernunt; sed calculum differentialem non ita laudat, uti decet. Suos Anglos, pro more suo solito, mirum quantum extollit. Prae illis nil fere est quod alii fecerunt.

Aegrotatne adeo Serenis. Tuus Elector, ut novellae nobis prelibent? Audio Electorem Brandeburgicum brevi in urbe vestra expectari; si hoc est, posses et Ministris Eius vel ipso illustrissimo Danckelmanno excusari, quid factum sit de sede mathematica Halensi. Dn. Rümeyerus, quem mihi commendasti, retulit illam etiamnum vacare; si nunc offerretur, sane non prorsus rejicerem. Ulimo cursore accepi literas a Dno. Menckenio, sed nihil facit mentionem prioris mei schediasmatis, adeo ut nesciam an problema meum jam sit impressum necne; scribit se accepisse aliquid a fratre meo Actis inserendum de curva Beanniana; subveror fere ne iterum dentem sumum caninum acuerit contra ea quae de ipsa hac curva proximo Felcuario a me prodierunt. Si quod vereror, verum deprehendero, ego Jovem lapidem jarare audeo, hac vice minime tacebo; alias putabit sibi omnia in me licere meaque moderationem et longanimitatem pro defectu responsionis interpretabitur. Nescio quid cavillari possit in iis, quae defensionis tantum loco protuli contra Nieuwentijum, nisi forsitan novebit curvam illam nihil aliud esse quam ipsissimam Logarithmicam, cujus applicatae ad axem non in angulo recto, sed semirecto insistant; sed si hoc allegaret tanquam novum suum inventum, risui sese exponeret, cum et ipsi Cartesio jam innotuerit, ut et Epistolis ejus appareat. Haec in antecessum moneo, ut si forte conjectura mea vera fiet, eorum recordari possis. Cures, rogo, ut inclusae ad manus Dni. Menckenii tuto perveniant. Schediasma vero retineas, donec Tuam solutionem publicare animus sit, ut simul Lipsiam mittantur. Forsan nunc recepisti Acta, ut nulli dicere possis, an problema meum in illis sit. Iterum Vale.

Beilage.

Joh. Bernoullii

Curvatura Radii in Diaphanis non uniformibus. Solutio Gemina analytica inventa et synthetice demonstrata Problematis a se in Actis 1696 p. 269 propositi de invenienda Linea Brachystochrona, id est, in qua grave a dato puncto ad datum punctum brevissimo tempore decurrit, et Constructio Curvae Synchronae.

Tot quidem hactenus apparuerunt methodi, quas Maximorum et Minimorum vocant, ut nihil fere tam subtile restaret videretur hanc concernens materiam, quod earum acumine pene

trare se posse non putent illi, qui se vel auctores ipsos vel aliorum assecles gloriantur. Interim jurent, quantum valent, in verba magistri; videant, si tentare velint, nostrum problema minime coerceri intra angustos methodorum suarum limites, qui eo usque tantum sese extendunt, si ex datis pluribus infinitive quantitatibus invenienda sit una maxima vel minima. Verum ubi ipsae quantitates, quod in nostro contingit, ex quibus eligenda maxima vel minima, non magis sunt determinatae, quam id ipsum quod quaeritur, hoc opus, hic labor est. Prodeunt Cartesius, Fermatius, Robervalius alique qui olim ita acriter pro praestantia suae cujusque methodi, tanquam pro focus et aris militabant, et fateantur ingens hic sibi aquam haerere. Non meum est nec etiam volo aliorum inventa explodere. Praestiterunt utique multa, et finem quem sibi proposuerant egregie consecuti sunt. Quomodum enim de hujusmodi Maximorum et Minimorum consideratione nil quicquam in eorum scriptis reperitur; ita pariter, pro aliis quam communibus resolvendis, suas methodas non venditarunt.

Non ego polliceor universalem methodam, quam quis frustra quaereret; sed peculiare modos, non solum quidem in hoc, sed in pluribus aliis succedentes, quibus problema hoc feliciter enodavi, solutionemque meam, dum alii alia quaerent, Celeb. Leibnizio statim submittere decrevi, ut illam quondam cum publico communicarem cum sua, si quam reperiret; de quo quidem non dubitabam, sagacissimi Viri ingenium plus satis compertum habens; et reapse, dum haec scribo, ex privatis ejus literis, quibus me crebro colonestat, intelligo, supra spem ipsi placuisse problema meum, et (quod illam, ut dicit, pulchritudine sua, ut ponunt Evam, ad se traheret) protinus solutionis factum esse competentem. Quid alii praestiterint, exitus monstrabit; dignum utique oportet sit hoc problema, cui solvendo aliquid temporis consecraret Geometrae, cum tanto viro, negotiis haec distractissimo, tale visum fuerit, ut horam suam non inutiliter collocasse existimaret. Et id ipsum illis satis luci esto, quod si solerint ad secretissimas veritates, quas sine hoc vix est ut assequantur, aditum habituri sint.

Quidquid magis miramur, quam quod Hugenius primus invenit, in Cycloide vulgari grave facere descensus isochronos, a quocumque Cycloidis puncto incipiat moveri; sed nescio, an non obstupescas plane, cum dixeris, hanc ipsissimam Cycloidem iso-

chronam Hugenianam esse nostram Brachystochoram quesitam, ad cujus cognitionem duabus viis perveni, indirecta altera, altera directa. Insistendo priori, mirum consensum detexi inter curvaturam Radii luminis in medio continue variante et curvam nostram brachystochoram, aliaque observavi, in quibus nescio quid arcani subest, quod proderit in Dioptriciis. Quamobrem verum erit quod in propositione problematis asserueram, non in nuda speculatione consistere, sed in aliis scientiis, in Dioptriciis puta, usum habere quam maximum. Sed ut quae diximus re ipsa confirmetur, en priorem solvendi modum!

Fermatius in Epistola ad De la Chambre (Vid. Epist. Cartesii Edit. Lat. Tom. III. p. 147 et Fermatii opera Mathem. p. 156 seqq) stabilivit, radium luminis ex medio rariori in densius transeuntem ita refringi ad perpendiculararem, ut, habita ratione temporis, radius (qui a puncto luminante ad punctum illuminatum successively procedere supponitur) visum faciat brevissimam: ex quo principio ostendit, sinum anguli incidentiae esse ad sinum anguli refractionis in ratione data directa mediorum raritatum vel reciproca densitatum, id est, in ipsa ratione velocitatum, quibus radius media penetrat. Quod postea acutissimus Leibnizius in Act. Erud. 1682 p. 185 seqq. et Celeb. Hugenius in suo Tractatu de Lumine p. 40 succinctius demonstrarunt, ipsumque principium physicum vel metaphysicum potius, quod Fermatius sua demonstratione geometrica contentus, et facile nimis de jure suo decedens, Clerseberio argente, deseruisse videtur, validissimis argumentis adstruxerunt.

Ni nunc concipiamus medium non uniformiter densum, sed velut per infinitas lamellas horizontaliter interjectas distinctum, quarum interstitia sint repleta materia diaphana raritatis certa ratione accrescentis vel decrescantis; manifestum est, radium quem ut globulum consideramus, non emanaturum in linea recta, sed in curva quadam (notante id jam et ipso Hugenio in eodem tractatu de Lumine, sed ipsam curvae naturam minime determinante) quae ejus sit naturae, ut globulus per illam decurrens celeritate continue aucta vel diminuta, pro ratione graduum raritatis, brevissimo tempore perveniat a puncto ad punctum. Constat quoque, cum sinus refractionum in singulis punctis sint respective ut raritates medi vel celeritates globuli, curvam habere eam proprietatem, ut sinus inclinationum suarum ad lineam verticalem sint ubique in eadem ratione celeritatum. Quibus praemissis, nullo negotio per-

spicitur, Curvam Brachystochoram illam ipsam esse, quam formaret radius transiens per medium, cujus raritates essent in ratione velocitatum, quas grave verticaliter cadendo acquireret: sive enim velocitatum incrementa dependant a natura medi magis minuse resistentis, ut in radio, sive abstractatur a medio et ab alia causa acceleratio, eadem tamen lege generari intelligitur, ut in gravi; cum utroque in casu curva brevissimo tempore percursi supponatur, quid minus altera in alterius locum substitui possit?

Sic generaliter solvere licet problema nostrum, quancunque statuamus accelerationis legem. Eo enim reductum est, ut quae-ratur curvatura radii in medio secundum raritates, prout liberit, variante. Esto ergo medium FGD (Fig. 70) terminatum ab horizontali FG, in qua punctum radians A, verticalis AD axis curvae datae AHE, cujus applicatae HC determinant raritates medi in altitudibus AG, vel velocitates radii seu globuli in punctis M; radius incurvatus ipse qui quaeritur, AMB. Vorentur A C, x; CH, t; CM, y; differentialis C c, dx; different. nm, dy; diff. Mm, dz; constans quaedam ad arbitrium assumta, a. Erit accepta Mm pro sinu toto, m n sinus anguli refractionis seu inclinationis curvae ad verticalem, et proinde per ea, quae modo diximus, m n est ad HC in ratione constante, id est, $dy \cdot t = dx \cdot a$; quod hanc suggerit aequationem, $a dy = t dx$, seu $a dy^2 = t t dx^2 = t t dx^2 + t t dy^2$, quae reducta generalem dabit aequationem differentiali

formalem $dy = \frac{t dx}{\sqrt{aa - tt}}$ pro curva AMB quaesita. Atque adeo una opera duo insignia problemata, opticum unum, mechanicum alterum, ultra quam ab aliis petebam, resolvit, ostenditque, quantumvis ex diversissimis Matheseos partibus sint desumpta, ejusdem tamen esse naturae.

Sumamus jam specialem casum, et quidem hypotheseo communiem a Galileo primitus introductam et demonstratam, quod velocitates gravium cadentium sint in ratione subduplicata altitudinum emensurum; in hoc enim proprie quaestiones tenor consistit. Quo supposito, curva data AHE erit parabola, id est, $t = ax$ et $t = \sqrt{ax}$, quae si substituantur in aequatione generali, habebitur haec $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, ex qua concludo Curvam Brachy-

stochronam esse Cycloidem vulgarem. Si enim circulus GLK, ejus diametrum = a, rotetur super AG et initium rotationis sit in ipso A, describet punctum K cycloidem, quae reperitur eandem

habere aequationem differentialem $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, positis AC, x, et CM, y; potest tamen hoc a priori et analytice inveniri

sic: $dx \sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{xdx}{\sqrt{ax-xx}} = \frac{-adx + 2xdx}{2\sqrt{ax-xx}} + \frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$

est autem $\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ differentialis quantitas, cujus summa $\sqrt{ax-xx}$ seu LO; et $\frac{adx}{2\sqrt{ax-xx}}$ est differentialis ipsius arcus

GL; ideoque, summata aequatione $dy = dx \sqrt{\frac{x}{a-x}}$, habebitur y seu CM = GL - LO, ergo MO = CO - GL + LO; quoniam vero (assumpta CO = semiperipheria GLK) CO - GL = LK, erit MO = LK + LO, et ablata communi LO, erit ML = LK; quod docet curvam KMA esse Cycloidem.

Ece iam alteram viam, qua directe ad solutionem perveni. Sit horizontalis, a qua grave descendit AL (fig. 71), quam oblique secant duae lineae MK, mK angulum facientes infinite parvum MKm; nunc ex omnibus arcibus concentricis Ce, Mm, Cc etc. centrum habentibus in K quaero illum Mm, quem grave ex altitudine sua DM delapsam brevissimo tempusculo percurrat, quo cognito habeo relationem inter MN et NK; verum ex infinitis arcibus Mm componitur ipsa curva brachystochrona quaesita AMB, cujus radius circuli osculatoris est MK, quo determinato determinatur etiam curva AMB.

Cum igitur secundum hypothesin communem Galileanam (generalem solutionem, quam quilibet ad hujus imitationem nullo labore adveniet, brevitatis erga omittimus) celeritates in C, M, C sint at \sqrt{CG} , \sqrt{MD} , \sqrt{CG} , seu ut \sqrt{CN} , \sqrt{MN} , \sqrt{CN} ; ipsi vero arcus Ce, Mm, Cc ut radii CK, MK, CK; atque cum spatia divisa per celeritates dent tempora, erunt tempuscula per Ce, Mm, Cc ut $\frac{CK}{\sqrt{CN}}$, $\frac{MK}{\sqrt{MN}}$, $\frac{CK}{\sqrt{CN}}$; et quoniam tempusculum per Mm debet

esse minimum, fiet (positis NK, b, et MN, a) $\frac{MK}{\sqrt{MN}} = \frac{b+a}{\sqrt{a}}$

minimo, ejusque proin differentiale $\frac{-bds + sds}{2s\sqrt{s}} = 0$, unde $s = b$.

Curva itaque quaesita ejus debet esse proprietatis, ut habeat utique radii circuli osculatoris vel ut Hugenio dicitur, radii evolutive MK daphum suae portiones MN inter axem et curvam interceptae. Verum ut ab ipso Hugenio aliusque demonstratum habemus et facile a priori, ut antea, nisi brevitati studeamus demonstrare possemus, proprietatis haec cycloidis est. Unde et hac via directa rursus incidimus in identitatem Brachystochronae cum Cycloide, quod sane non exiguum pondus addit veritati eorum, quae de curvatura radii diximus, apud illos praesertim valitiorum quibus hujusmodi indirecta ratiocinia suspecta habentur.

Sed ut illi quoque qui nostro calculandi genere minus versati sunt, habeant quod intelligant, dignetur attente perlegere demonstrationem syntheticam, quae uti facilis et cuivis obvia, meo tamen judicio insoliti quid et inexpectati in se continet, ut forsitan curiosis penitus in haec mysteria inquirendi usam sit praebitura.

Sunt duo puncta data A et B, per quae transeat cyclois AMB initium sumens a puncto superiori A, dico mobile M libere descendens gravitate sua ab A per cycloidem AMB breviore tempore pervernturum ad B, quam si descenderet per quamcunque aliam curvam ACB supra infrave descriptam a puncto A ad punctum B. Sint MK, mK duae normales ad cycloidem quam proximae, secantes lineam ACB in punctis C, c, et concurrentes in K, quo centro describitur arcus Cc. Ducantur ad horizontem AL perpendicularibus MD, Cc, junctaque DK secanti CG in H agatur parallela GJ, atque tandem sumatur ad MD, CH tertia proportionalis CF. Jam ex proprietate cycloidis MN = NK, ac proinde CN = NJ, et quia $\square CN + \square NK > 2\square CNK$, erit $\square CN + \square NK + 2\square CNK$ id est $\square CK > 4\square CNK = \square MK \times CJ$, ergo $MK \cdot CK < CK \cdot CJ$; est autem $MK \cdot CK :: MD \cdot CH :: CH \cdot CF$, et $CK \cdot CJ :: CH \cdot CG$, ideoque $CH \cdot CF < CH \cdot CG$, et per consequens $CG < CF$. Nunc per regulas receptas gravium descendendum patet tempusculum, quod grave descendens ex horizonte requiritur ad percurrendum lineam Mm, esse ad tempusculum, quod grave descendens ex eodem horizonte requiritur ad percurrendum arculum Cc, in ratione composita ex simpliciter directa spatiorum percurrendorum Mm, Cc et subduplicata reciproca

altitudinum MD, CG, id est tempus per Mm . tempus per Cc ::

$$\frac{Mm}{\sqrt{MD}} \frac{Cc}{\sqrt{CG}} :: (\text{ob } Mm . Cc :: MK . CK :: MD . CH :: \sqrt{MD} . \sqrt{CG})$$

$$\frac{\sqrt{MD}}{\sqrt{MD}} \frac{\sqrt{CG}}{\sqrt{CG}} :: \sqrt{CG} . \sqrt{CF} : \text{quoniam autem } CG \text{ ostensa est}$$

minor quam CF, erit etiam tempus per Mm minus quam tempus per Cc, et potiori jure minus quam tempus per Cc hypotenusam trianguli rectanguli Ccc. Ergo tempus per omnes Mm, id est per cycloidem AMB est minus quam tempus per omnes Cc, id est per lineam AcB. Q. e. d.

Ostendendum adhuc restat (ut problemati plenissime satisfiat) quomodo a puncto dato tanquam vertice describenda sit brachystochrona seu cyclois transitoria per aliud punctum datum, quod sic facillime expeditur: Coniungantur duo puncta data A, B (fig. 72) per lineam rectam AB, et super horizontali AL describitur cyclois, quaecunque liberit, initium sumens in A secansque rectam AB in R; quo facto fiat ut AR ad AB, ita diameter circuli genitoris cycloidis ABS ad quartam, quae erit diameter circuli genitoris cycloidis quaesitae ABL transitoriae per B.

Antequam finiam, non possum quin iterum admirationem meam prodam, animo revolvens inexpectatam illam identitatem isochronae Hugenianae nostraeque Brachystochronae. Quod notabile praeterea existimo, illud est, quod haec identitas in sola hypothesis Galilaei reperitur, adeo ut vel eo conjicere liceat illam Naturae esse consentaneam, quod quemadmodum semper operari solet modo simplicissimo, ita et hic per unam eandemque lineam praestet duo diversa officia, cum in quavis alia hypothesis duabus ad id ejus esset lineis, alia nempe pro oscillationibus aequeduntur et alia pro celerissimo descensu. Ut si ex. gr. celeritates gravium eadem essent non in subduplicata, sed subtriplicata ratione altitudinum, brachystochrona foret algebraica, isochrona autem transcendens; verum si celeritates essent ut ipsae altitudines, utraque fieret algebraica, illa quidem circularis, haec vero recta.

Non ingratum fore Geometris iudico, si appendicis loco solutionem ipsis dedero problematis consideratione pariter dignissimam, quod ex occasione praecedentis inter scribendum in mentem incidit: Quaeritur in plano verticali curva (fig. 73) PB (quam Synchronam appellare liceat) ad cujus singula

puncta B grave ex A descendens per cycloides conterminas AB aequali tempore perveniret. Sit AG horizontalis et AP verticalis: sensus problematis talis est, ut descripta super AG cycloide quaecunque abscondatur ex illa portio AB, ad quam percurrendam ex A descendens grave idem tempus requirat, quod requireret ad decidendam ex determinata altitudine verticali AP; quo peracto erit punctum B in curva synchrona PB quam quaerimus.

Si attente considerentur ea quae supra diximus de radio luminis, haud obscure patebit hanc curvam eam ipsam esse, quam Hugenius in suo tractatu de Lum. pag. 44 in schemate suo per lineam BC repraesentat vocatque undam, quae quemadmodum omnes radios ex puncto luminoso emanantes normaliter secat, eui optime notat Hugenius, ita et nostra PB omnibus cycloidibus AB commune initium A habentibus ad angulos rectos occurrit. Quod si problema hoc modo in pure Geometricum reductum proponere libuisset, Invenire scilicet curvam quae omnes cycloides communis initii normaliter secat, profecto res magnae molis fuisset, Geometris ne dicam insuperabilis. Loco quod ex altera facie qua descensum gravium respicit, consideratum ita facillime construo: Sit Cyclois ABK circulus genitor GLK, ejusque diameter GK; abscondatur arcus GL aequalis mediae proportionali inter determinatam assumptam AP et diametrum GK: dico ductam LB parallelam horizontali AG, secare cycloidem ABK in puncto B, quod erit in curva synchrona quaesita PB. Si quis methodum suam in aliis exercere velit, quaerat Lineam quae ordinatim positione datas curvas (non quidem algebraicas, quod haud arduum foret, sed) transcendentes ex. gr. logarithmicas super communi axe et per idem punctum ductas ad angulos rectos secat.

XXXI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Jacundum mihi fuit videre consensum nostrorum problematis a Te propositi solutionum, cum ejusdem lineae constructiones, licet diversas, dederimus. Ego contentus fui reperisse, quomodo

linea per tetragonismum circuli construi possit, non immoratus problemati, egregio licet, quod vix, ut aggredere, a tempore meo impetrare poteram. Tu longius progressus cycloidem ipsam esse pulchre reperisti. Quod editionem attinet, consuluerim adhuc nonnihil expectari, ut appareat quid alii quoque praesent, imprimis Dominus frater Tuus, imo et Dominus de Tschirnhaus, praesertim cum terminum, si fallor, assignaveris. Cum Dominus Marchis Hospitalis (a morbo gravi restitutus) etiam ad me nuper alia occasione scripserit, sese nunc a meditationibus ejusmodi abstinere debere, putem ipsi Solutionem posse communicari, si Tibi ita videtur, et posse inseri problematis propositionem in *Diarium Eruditorum Parisinum*, ut viri docti excitentur. Idem etiam in Italia faciendum puto. Spero Tua Mensi Junio inserta esse, etsi nec verbulo ad me attigerit Dnus. Menckenius. Necdum ego Junium accepi, negligentia libraria nostri, qui credo mundinas Brunsvicensis mot instantes expectat. Interim mensi Dnum. Menckenium, ut si nondum factum, mature Tua edi curet.

Caeterum ubi solutionis comprobationem edere vel communcare placebit, suaserim viam illam directam, quam vocas, seu posteriorem, non edi, cum prior sufficiat ad demonstrationem, et posterior praeter necessitatem alius ante tempus viam aperiat. Praesertim enim (ut puto) nonnihil adhuc suspensus alios teneri, ut vel ipsi inveniant aliquid fortasse a nostris diversum, quod angelit scientiam: vel agnoscant, non esse haec tam facilia, ut quidam putant, eoque diligentius has methodos aliquando meditentur. Methodus mea nonnihil a Tua diversa est, sed tamen eodem duxit, quam ut aequum est, et ut Tuo candori pari ingenuitati respondeam, sic paucis habeto. Concipiens scilicet pro curva polygonum infinitangulum, video id fore omnium possibilium facillimi descensus, si sumtis in eo (fig. 74) tribus punctis vel angulis quibuscunque A, B, C, sit punctum B tale, ut omnium punctorum in recta DE horizontali, hoc unum det viam ab A ad C facillimam. Res ergo redit ad solutionem problematis facili: Datis duobus punctis A et C et recta horizontali inter ea cadente DE, invenire in hac recta punctum B tale, ut via ABC sit facillima. Ubi predeunt, quae in novissimis literis notavi circa elementa abscissarum ordinatarum et arcuum: si scilicet infinite parvum inter puncta A, B, C, ponatur intervalum. Nec opus est ut aliquid ultra apud Te addam, et transcribere calculum non vacat, nimis distracto.

Mitto ecce quae Dn. frater Tuus mensi Julio inseri curavit circa problema Besnium extensum, ut vocat, transmissa mihi a Dno. Menckenio, quia me tangunt. Videbis nihil ibi esse, de quo queri debeat. Vult in quibusdam a me dissecire, quorum aliquid non satis intellego, tum quia figurae absunt in his quae misit Dnus. Menckenius, tum etiam quia nondum possum rem considerare et prioribus conferre. Ut ego rem capio de punctis aequidistanter assumptibus non videtur esse difficultas. Quod deviationem navis attinet, fateor, si circumstantias practicas negligamus, et rem rudius concipiamus, posse dici eandem esse deviationem, quocunque vento; quanquam rem paulo accuratius adhuc examinare aliquando velim, sed majore otio. Dn. Frater Tuus proproserat aequationem differentialem solvendum; eam redire ad aliam, quam non difficulter solvimus, notavi; et id nunc fassus dat hujus ipsius solutionem praeter necessitatem, cum mihi et Tibi quoque non possit esse ignota, et Domino Marchioni olim a me fuerit perscripta. Sed videtur quaesivisse ut primus ederet.

Mitto et quae Dn. Nieuventuit petit Actis inseri circa problema Besnium a Te solutum, quibus Tibi respondet. Mihi videtur non esse tanti quae dicit, cum problema hoc sit jam satis elaboratum, ut aliquid ultra addendum non videatur; et scripsi Dno. Menckenio, hortandum potius Dnum. Nieuventuit, ut aliquid novum attingat, in quo suas vires experiri possit; praesertim cum Methodum, nescio quam Barrovianam, vel suam jactet, cujus utilitas est ut meliora det specimina. Misi tamen Tibi, ut cum judicio Tuo, si placet, remittas. Mea mens non fuit, ut Tu ad eum scriberes, sed potius ut ille ad Te.

Gratis ago pro reliquis excerptis Hugenianis. Videtur inter dum paulo rigidius judicare. Ex. gr. cum de Weigelio, viro docto et bene animato, contentum adeo loquirit; Matheseos imperitum dicere iniquum est, etsi non satis peritus sit artis Analyticae profundioris. Cum reliquos Temos obtinebis, itidem excerpta rogabo.

Quod descensus gravium attinet, nondum agnoscere potui, quomodo fieri queat, ut materiae graviticae partes totam viam suam in grave transferant. Si homo malleo percussit puppim, singulis sequilibus spatii intervalis, non tamen tota vis mallei potest in navem transferri. Et difficulter elici potest, ut quovis spatii intervallo fiat ictus, per quem aequalis vis navi accedat. Posita tamen tali hypothesi, omnia pulchre procedunt. Hoc dico, ut Tibi occa-

sionem dem perficiendi cogitata, praesertim cum mihi applicatio ad gravitatem difficilis videatur. Facile efficitur amissio virum aequabilis secundum spatium, acquisitio non item.

Quod attinet a me assumta, fateor propositionem illam, quod actio facies idem, brevi tempore, sit major, posse assumi ut Axioma; sed scito apud me omnis Axiomatis adhibendi desiderari demonstrationem, aliqui imperfectam esse scientiam. Et qui hoc Axioma demonstrabit, simul credo et ad illud alterum, ejus desideratur demonstratio, viam aperiet. Minime tamen improbo, si quis talia sine demonstratione assumat. Caeterum sunt (opinor) quaedam, quae sine illo principio altero non demonstrabatur. Obscurum non puto, si recte intelligatur. Nobis tamen suffecerit assumtum a me pro aestimanda actione adeoque et potentia, donec ejus quoque occurrat rigorosa quaedam demonstratio. Semper distincti actionem a potentia, sed quomodo inferatur ab una ad aliam, in novissimis exposui, idque putavi Tibi placiturum.

Brachystochronae appellatio magis mihi placet pro generali significatione; Tachystoptotae vero nomen posset speciali accommodari, cum agitur de gravis descensu seu casu. Perpulchra mihi videntur, quae habes de linea radii in medio continue variante, et de linea alias infinitas normaliter secante, quod problema excoli meretur.

De Du. fratre Tuo juniore, et libro suo etiam ad me scriptis Du. Marchio Hospitalius. Miror quod frater non diutius haeserit Parisiis.

Wallisiana opera vidi, et quae in illis Newtoniana, in quibus sperabam reperire aliquid amplius pro Methodo tangentium inversa; interim virum esse egregium fatendum est. Wallisius antiquum obtinet cum multis aliis Anglis, ut de rebus aliorum loquatur contentius. David Gregorius, in libro quodam optico novissimo, secundum consilium meum in Actis datum, pro sectionibus conicis substituit circulos osculantes; video aliquando, ubi ipsum librum video, an sit professus per quem profecerit.

A Domino Fulkenio, Professore Matheseos Franequerano, Illusionum Manuscriptorum curatore, non memini aliquid me videre. Puto neminem nunc esse in Batavia post Hugenii obitum (Haddenio demto, sed quem aliae jam cogitationes tenent), qui Tibi non cogatur submittere faces.

Cum transiret Elector Brandeburgicus, nondum Tuas acceperam, et si accepissem, non habuissem occasionem colloquendi cum primo Ministro ob brevem hic moram. Spero in reditu diutius apud nos mansurum, et tunc inquiram. Cum ad novissimam Du. Fratris Tui respondere vacabit, potero me erga Te promissa defungi.

Dominus frater Tuus misit mihi quamdam suam disputationem De seriebus infinitis summandis, ubi tamen nihil notavi, quod novum mihi videatur. Item quosdam suas Notas in Geometriam Cartesii. Item quoddam scriptum Domini Hollanderi, Haec omnia Tibi visa puto. Misit mihi etiam pauculas quasdam Analyses suas datarum in Actis, quae possint aliquando servire additionibus pro ea quam molior Scientia infiniti. Sed a Te plura ejus generis spero. Vale, et has scientias praeclaris ingenii Tui foetibus ornare perge. Ita plurimum voluptatis capiet etc.

Emoterat 31 Jul. st. v. 1696.

XXXII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

In eo eram, ut aestivis hisce feriis ad Te expatiando ipse harum latorem agerem, quo viva conversatione Tua jam a longo tempore mihi desiderata ad satietatem frui potuissem; sed iter grandisculum, oeconomia nondum constituta, et sanitas nondum restituta unici mei filii per aliquot jam menses periculose aegrotantis, a proposito me abduxerunt et in aliam occasionem id differre me fecerunt.

Cum Tibi transmitterem solutionem meam problematis a me propositi, utique mens mea non fuit, ut illam statim publicares, sed expresse Te rogavi, ut quosdam illam edas cum Tua; volui tamen in tempore Tibi mittere, ut si forte opus fuerit, testari possis, me non cum in finem proposuisse problema, et aliorum Solutiones, si quae appariturae sint, mihi sub velata facie arrogare posse, id quod fratri meo admodum solemne est. Optime ergo facis, si expectas terminum assignatum, nimirum anni hujus finem. Non puto Du. Tschirnhausem hic quicquam praestiturum, cum

nequidem in Catenariis aliquid praestiterit, quia forsitan sua applicatione haec non digna censet. Sed quantum ad fratrem, hic Rhodus, hic saltus! videbimus an iterum ova ante prandium appositurus sit. Communicabo Du. Marchioni Hospitalio solutionem si illam petierit. Non displicet problematis propositionem inseri posse in Diarium Parisinum et Italicum: oportet autem ut Tute hoc enres, etenim cum Italis nihil mihi commercii est; Auctor vero Diarii Parisini adeo nostra vilipendi (quod saepius expertus sum) et forsitan terminus prius elaberetur, quam problema lucem videret. Quod Dns. Menckenius nec ad Te nec ad me verbulo attigerit, dubito an mensi Junio mea inserta sint, licet illum literatis vicibus instanter rogaverim, ne de brevitate termini pro solutione problematis concessi conqueri liceat. Quod si finem hujus temporis expectaveris, non video quid impediat, quominus altera mea solvendi via, quam directam voco, simul cum priori edatur; tunc enim alius non amplius ante tempus viam aperiet, sed bene lucem accendat pro aliis hujusmodi inquisitionibus instituendis, quibus Maximorum et Minimorum methodus mirifice extendi potest, ut ipse agnosces, si illam paulo penitus contempleri habeat. Adde quod jam in propositione problematis innuerim, dotibus diversis modis me ad eandem solutionem pervenisse. Tuus solvendi modus nihil fere diversus est a meo priori, concipiendo enim visum facilissimum a puncto ad punctum per punctum quaesitum, jam involvis problema Fermatianum, illudque de novo calculus, quod a Fermatio aliisque et a Te ipso Act. 1652 p. 156 jam calculatum habemus, atque quod ego supposui.

Dns Te mihi mittere, quae Frater meus mensi Julio inseri curavit, sed non misisti; haud dubie Schedam literis includere oblitus es; rogo ut illam mittas cum proxime Tuus futurus. Quam proposuerat aequationem differentialem solvendam, plane non aestimo; quid enim facilius est quam infinitas hujusmodi aequationes excogitare, quas ille qui illas proponit semper nullo labore solvet, eo quod ipse illas per synthesis ita formaverit, loco quod alii forsitan per totam vitam frustra insudarent. Non secus ac quisvis in Algebra Tyro non difficulter aequationem vel viginti dimensionum componere iterumque solvere potest, quam tamen versatissimus Algebraista nequidem aggredi audeat.

En remitto Schediasma Dni. Nieuwentijt: gratias ago pro communicatione; meum iudicium scripsi ad marginem, ut si forte Du.

Menckenius hoc schediasma Actis inserere velit, simul responsionem quasi suo nomine adicere possit. Sunt enim tam frivola, ut vel Geometriae imperitus paralogismos palpare queat, nec a me impetrare possum, ut illa formali responsione digner. Miror qui feri possit, ut Dn. Nieuwentijt in re adeo levicula harrere possit; concedit bonitatem constructionis meae (quam tamen in suis considerationibus pag. 41 rite examinatum ad absurdum deducere disertè dicit) sed omnis ipsius objectio in hoc consistit, quod putet adhibendum esse $rdz = + xdy$, non autem $rdz = - xdy$; interim dormitans iste Homerus confundendo dz affirmativum cum dz negativo, non consideravit quod existente dz ab una parte affirmativo, et ab altera negativo, $rdz = + xdy$ sit idem quod $rdz = - xdy$. Ceterum magnam habet farragineum solutionum problematis Besumiani, quarum operosus calculus et tot literarum confusio non permiserant, ut illas examinarem. Quid tandem haec omnia contra me, qui volui probitatem constructionis meae tunc defendere? Hoc autem feci et ille factum agnoscit; ergo nil amplius rei mihi est eum illo. Si quid scrupuli invenit in calculo differentiali, id jam Te illius Auctorem concernit. Desero ego palestram. Interim rursus dico, Dn. Nieuwentijt aut pertinax est aut indocilis. Potius sum tandem reliquis Actorum Tomis, sed marginalia Hugeniana excubire nondum vacavit; ea Tibi prima scribendi occasione transmittam.

Cum nihil dicas de modo meo distinguendi inter actionem venti et illam materiae gravificae, puto ex silentio Te consentire, quod numerus ictuum sit spatio proportionalis. Quod de homine puppium malleo percutiente dixeram, mihi negare non debes, erat enim tantum hypothesis. Revera tamen necesse est, ut malleus totam suam vim in navem transferat, si dum percutit, incomparabiliter celerius moveatur quam ipsa navis; id quod facile possum demonstrare, nam post ictum malleus cum saltem retinet celeritatem, quam navis jam habet, id est infinitesimam partem celeritatis, qua malleus in navem impingit; ergo retinebit etiam tantum infinitesimam partem suae vis quam ante ictum habebat; et proinde tota mallei vis, demta infinitesima parte, id est nihilo, translata est in navem; abstraho enim hic a materia ambiente, in qua aliqua pars vis absorberi potest, et suppono navem esse solidissimam et omnis tremoris expertam. Hinc, ni fallor, satis perspicitur, quod etiam particulae materiae gravificae totam suam vim in grave

transferre debeat, si modo concedatur post ictum non statim re-
percuti, quod et ipse jam concessisti.

Oportet ut definias quid per actionem intelligas; alias nihil
unquam demonstrari poterit. Omnis veritas aut est Axioma aut
ex Axiomatibus derivata; oportet ergo ut ad demonstrandam illam
in aliquo Axiomate subsistas, ne in infinitum progredi cogaris;
miror itaque quod dicis, Te omnis Axiomatis adhibendi
desiderare demonstrationem. Quidni et in dubium vocas,
an Totum sit majus sua parte? Sed ut ad actionem redeam, da
mihi definitionem nominis et facite difficultatem diluam. Si enim
per actionem intelligas solum effectum non considerato quanto
tempore sit productus, tunc utique actio A faciens idem brevi tem-
pore, non erit major, sed aequalis actioni B facienti idem longo
tempore, quia effectus producti sunt aequales. Si vero per actionem
intelligas compositum ex effectu producto et tempore, tunc
actione A major erit quam actio B. Haec, ni fallor, nituntur
sensu communi; sin minus, mentem Tuam non satis assequor.

Cum meam curvam appellarem Brachystochronam, id feci et
consideratione Isochronae Hugeniannae, ut cum eidem curvae com-
petant, habeant etiam nomina quam maxime affinia. Nihil dicis
de curva, quam appello Synchronam, [quamque adeo simpliciter
construo, etiamsi per illa nullam inveniorem aequationem differen-
tialelem, nec hucusque aliquam inveniendi viam perspiciam. Vellem
novae huius speculationi otiosa aliquot momenta tribueres, ut et
alteri illi exemplo, quod proposui de inveniendi curva omnibus
Logarithmicis communis axis et ex eodem puncto descriptis nor-
mal. Scire Te velim huius mihi solutionem esse repertam, paulo
post ultimas meas ad Te cursori traditas. Inveni quod sit curva
ex Percurrentium genere, ut voco, quam proinde ope ipsius
Logarithmicae facillime construo. Est sane exemplum, ubi calculi
percurrentis usus insigniter elucet.

Wallisus Newtoni Methodum paucis quidem explicat; ex illis
paucis tamen video quod in re neutiquam differat a calculo differen-
tiali, ut ipse Newtonus fatetur in suis Princ. Phil. nat. p. 254.
Quod in hoc dicitur differentiale, ibi est fluxio, et quod in
hoc summa, ibi fluens. Et nervus huius methodi, ut et cali-
culi differentialis ad duo haec problemata redit: Datis quanti-
tatis fluentibus, invenire earum fluxiones; et vicis-
sim: Datis fluxionibus, invenire earum fluentes. Loco

literae d ad designandam differentiam primam vel fluxionem utitur
puncto supra scripto; pro differentia secunda vel fluxione fluxionis
denotanda utitur duobus punctis, et in porro. Sic dx est \dot{x} , ddx
est \ddot{x} , dddx est \dddot{x} etc. Caeterum processus ipse operationis est
utrobique idem, adeo ut nesciam annon Newtonus, Tuo calculo
viso, suam denum Methodum fabricaverit, praesertim cum ex loco
citato videam Te ipsi Tuum calculum communicasse, antequam
ipse suam edidisset Methodum. De caetero Wallisus Tom. II.
p. 394 modum explicat, quo utitur Newtonus ad radicem ex-
trahendam ex aequatione fluxionem radice invol-
vente, et quidem per seriem. Sed universali meae seriei pal-
mam non praecipiet. Est enim ille modus Newtonianus admodum
operosus, et fere idem cum Tuo, quem vero longe succinctorum
et ad praxin aptiorem reddidisti in Act. 1693 p. 178. Legistine
ultima verba explicat. method. Newton. p. 396? Quod agni-
tum est a quodam etc. Ille quidam quem ne nominare qui-
dem dignatur, est frater meus; vides quantum ipsi obstrictus sis,
quod Wallisio Author fuerit, ut tam honorifice de Tuo calculo
sentiret, dicendo totum desumptum esse ex methodo Barroviana,
excepta superaddita formularum analyseos brevium et commodarum
adaptatione illius theoriae. Non dubito quia persuasus sis,
Te habere in me acquiriorem aestimatores Inventorum Tuorum,
quam in fratre, qui illi etiam subtilissima cum artificiosis Praesti-
gatorium comparat in Actis superioris anni p. 552.

Dn. Fullenium in Cartesianam quidem satis, sed non item in
interiori Geometria versatum puto. Memini quod ante quindecim
circiter annos, cum in utraque adhuc hospes essem, Frater meus
Dn. Fullenium crebro consulabat per literas super ea, quae tunc
temporis non probe intelligebat in Cartesii Geometria; me etiam
non defugit, quod Dn. Fullenius ipsi roganti omnia fideliter et
(quod miror) patienter explicabat: nescio unde hoc commercium
ortum suum traxerat (forte cum fratre paulo ante in Batavis esset)
et nescio item quo facto iterum intercidit; forte etiam cum fra-
ter Fullenii opera non amplius indigeret, hoc enim omnes bene-
ficioium immemores faciunt. Cum et Tu primis literis ipsi super
suis difficultates satisfecisses, parum sollicitus fuit de actione gra-
tiarum praestanda, ut abunde testatus est turpi suo silentio etiam-
num forte duraturo, nisi illum in literis Tuis ad me datus quasi
debiti postulasses. Quid Tibi videtur de scripto Hollanderi: habet

multa Astronomica, quae certis regulis coarctet, quae tamen humanitus pure fortuita videntur. Ex. gr. Regula ejus prima de inveniendis obliquitate Eclipticae terrae aut non est exacta et observationibus non respondet, aut debet a priori posse demonstrari ex legibus naturae. Conditorum mundi non potuisse aliam obliquitatem Eclipticae Terrae efficere, quam quae sita sit, ut ejus secans complementi sit exactissime media proportionalis inter radium et peripheriam. Verum talia demonstrari posse geometrica ab humano ingenio non puto. Restat itaque, ut dicamas Dn. Hollanderum a posteriori rem aggressum esse, et tentando plures Regulas tandem in aliquam incidisse, quae cum observationibus quam proxime consentit. Sed si hoc est, quis genius illum duxit ad habendum medium proportionale inter radium et peripheriam, ad habendum secantem complementi obliquitatis quaesitae? Cur non potius in alias incidit Regulas, quae forte magis obviae fuissent? Et ita in aliis?

Dn. Marchio Hospitalius mihi scripsit, se a Te intellexisse, me in Tuas partes transiisse circa aestimationem virum: an verum sit? se enim non posse credere, quod communem sententiam deseruerim. Rescripsi, imo maxime verum esse, et obtuli ipsi, si velit, excerpta quaedam ex mutuis nostris literis, ut plene videat rationes quae me eo adigerunt: me non dubitare, quin si illas serio sit perpensus, mecum fiat transfuga et erroneam partem relinquat. Vale et Fare etc.

Groningae 15 Aug. 1696.

XXXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ex Tuis novissimis video me oblitum addere meis fragmentum Mensis Julii Lipsiensis; id ergo nunc mitto, et vel ideo respondere festino. Fragmentum hoc retinere poteris, cum totum interim Julium una cum Junio in nudinis acceperis, et quia suspicor Junium nondum ad Te pervenisse, mittam plagulam ad Mathematica spectantem, ubi Hanoveram reversus fuero; nam inter schedas mecum huc allatas praeter spem non reperio. Videbis Dn. Menckenium desiderio Tuo satisfecisse.

Ubi primum problema Tuum acceperam, aliquam ejus mentionem inieceram in literis ad amicos Italos eo ipso tempore missis, sed postea rem distinctius illis exposui addidique recte facturas, si in Diario suo mentionem ejus fieri curarent. Idem apud Gallos faciam, quia probas. Video ex Junio Te pariter et Dn. Fratrem Tuum quaedam in imperis Tschirnhausianis notasse, et Fratrem quidem, ita ut eum etiam provocare videatur, non tamen sine aliqua verborum humanitate.

De ambalans solutionibus Tuis edendis statures quod e re videbitur; nolam enim consilii mei rationem habere, ultra quam Tibi commodum erit. Meritissimis laudibus Tuis ego nunquam intercedam, sed praeco semper ero maximus. Methodum illam posteriorem distulisses adhuc nonnihil, si Tuo essem loco, vel ideo, quia latus patet, ne scilicet statim fontes illis indicentur, qui postea supprimunt indicatos, aut in rivis suos avertunt. Ego mea solutione paucis verbis defangor; tantum enim dicam, insigni veritatis indicio nos eandem reperisse lineam, etsi ego constructionem ejus aliquam reperisse contentus, primariam a qua denominatur non animadvertierim, quae Laus in solidum Tua est; quanquam si vidissem ego problematis Tui propositionem, qualis Junio fuit inserta, fuisset haud dubie ulterius progressurus, et fortasse etiam receptum nomen deprehensurus. Habebam eandem, quam Tu ponis, aequationem differentialem, quam revocare poteram ad eam quam in Actis assignavi, olim Cycloidi; sed talia nunc animo minus observantur. Commune quidem hoc videbam optico et nostro problemati, quod utrobique quaeritur via facilina, sed cum in Optico motus uniformis per se a medio variationem acciperet, hic acceleratus esset, ego aliqui nihil aliud quam utrumque defungi cupiens, non ultra contuli. Caeterum calculum faciens ordine nactus sum eas proprietates, quae Tibi transscripsi, et putem similem viam et in aliis circa maxima profore.

Non memini amplius, quid Tibi scripserim olim de Methodo mea pro inveniendis perpendiculari ad curvas ordinatim positione datas, quam pro transcendendis valere negas, rogoque ut mihi indices, in quo consistat. Saltem accommodari poterit ad transcendentes curvas aequatione exponentialiter percurrente datas. Et sane has earum expressiones semper pro perfectissimis habui. Expressiones percurrentes apud me sunt ut genus; exponentialis vero sunt perfectissima earum species. Ad synchronam

Tuam et omnibus Logarithmicis perpendicularem non est quod me voces; perpulchras esse non nego et Te dignas speculationes, sed cogor eas a Te potius quam a me sperare. Scis me, nonnisi vi quadam pellicii problematis Tui prioris coactum, ad ejus solutionem tentandam accessisse; sed saepe hoc facere non possum; quod agnosceres, credo, si coram videres, quae mihi sunt agenda toto caelo diversa ab istis. Et nunc etiam plura accessere, ex quo Serenissimus Elector me inter Consiliarios status, quos vocant *Conseillers privés*, recipi jussit, quia saepe ad me deferuntur quae pertinent ad jura domus alicujus publicae negotia.

De Nieuventitio ex vero, opinor, judicas, melius facturum, si agnoscat candidè in quo peccavit, quam si palliando errorem utriusque laudis jacturam faciat, recti iudicii et animi boni. Sperabam de eo meliora; eo enim sum ingenio, ut de omnibus, quae licet, optima sentiam. Libertatem mihi sumsi quaedam in Tuis molliendi, ne nimium offendatur, v. g. pro „futilis“ methodus posui „inutilis“; pro „turpiter“ contradicis posui „fortiter“; pro „ridicula“ aequatio posui „inanis“, sed ita ut mutatio mea non appareat.

Quoniam spem excurrendi ad nos facis, spero nos aliquando coram facili defuncturos toto illo negotio de explicanda gravium acceleratione; id enim per literas praestare laboriosius esse video, dum saepe ad priora recurrere necesse est; et subinde alter ab alterius sensu aberrat, ut solet fieri in talibus, ubi nondum haec stabilitas habemus formulas loquendi. Summae mihi voluptati erit Tuis ad nos accessus, nec magnum adeo locorum intervallum est. Illud peto, ut antea consilii Tui certiores me facias, ne tunc forte domo absim; saepe enim cogor excurrere in vicinas praesertim aulas, Cellensem et Guefelytanam, cum subinde agenda sunt mihi, quae ad totam Domum Brunsvicensensem pertinent. Quod si praemonitus sim, nihil inspecta Tuò antiquius habeo.

Quaedam in Wallisio a Te notata non animadverteram, cum omnia attente satis legere non vacavit. Verum est me Dn. Newtono ante viginti annos meae Methodi differentialis fundamenta communcasse, antequam ille mihi quicquam de suis huc spectantibus. An nonnulli inde profecerit, haud satis scio, neque ideo dicere ausim: interea praeclara illum jam tum habuisse facile crediderim, procedente tempore, ut fieri solet, magis exposita.

Grata sunt, quae Dn. Fullenio indicas; unde iudicere licet, virum esse non tantum doctum, sed et bonum. Verum esse fateor quod notas, Da. Fratrem tuum facilius quam crederem qualiscunque studii erga se mei oblitum fuisse et opus habuisse Te admonitori, et sua illa frigidiuscula sententia Wallisiana consumili vel causam vel praetextum dedisse.

Tractatum Davidis Gregorii Catoptrico-Dioptricum accepi; totus inititur principio a me indicato de Circulis osculantibus in locum curvarum (ut ita dicam) appropriatarum substituendis. Et tamen vel mei ea in re vel etiam circulorum osculantium mentionem nullam fecit. Id moneri aliquando in Actis non inutile erit, sine ulla tamen displicentiae significatione, et malim ab alio fieri, quam a me ipso.

Quod dixi, omnis Axiomatia a me demonstrationem desiderari, non temere dictum est; idque animadvertes, opinor, si quando vacabit inspicere meditationes quasdam meas de ideis, quae exstant in Lipsiensium Actis. Excipio tamen Axiomata illa, quae sunt in demonstrabilia, ipsas scilicet identicas propositiones. Caetera omnia, quae scilicet possunt demonstrari, etiam utile est demonstrari, cum aliqua magis momenti theoremata in iis fundantur. Idque etiam Veteres viderunt. Unde Apollonius (in scriptis deperditis) et Proclus et alii Axiomata ab Euclide assumta demonstrare sunt conati. Eamque rem fructu non carere facile opinor concedes, quem tamen non vident, qui scientiarum utilitatem vulgari modulo metuntur. Interim vides, ea limitatione, quam addidi et quam addendam esse praevideri poterat, non esse cur progressum in infinitum veicare in demonstrando.

Unum addo multum apud me interesse inter haec duo: in dubium vocare propositionem et demonstrationem ejus expetere, quod dum a Te hic per eodem habetur. Hinc jam video, cur quae dixeram de Axiomatibus demonstrandis mira Tibi sint visa. Si Cartesius, cum de omnibus dubitandum dixit, hoc tantum voluisset, quod ego desidero, nullo jure reprehenderetur; sed ille dupliciter peccavit, nimis dubitando, et nimis facile a dubitatione discedendo. Illud ipsum, quod objicis axioma: Totum esse majus parte, opportune a Te afferitur. Id certe nunquam in dubium vocavi, et tamen aliquando demonstrationem ejus expti, imo inveni, uno syllogismo comprehensam, innixo definitioni minoris et majoris et Axiomati identico: Minus enim definitio, quod alterius (majoris) partem

aequale est. Axioma autem identicum quod adhibeo est: Unum quodque aequale esse sibi ipsi, seu $a = a$. Hoc enim tanquam indemonstrabile sumo. Sic ergo argumentor in syllogismo prima figurae:

Quidquid est aequale parti totius, id toto minus est, per definitionem Majoris.

Pars totius est aequalis parti totius, nempe sibi ipsi, per Axioma identicum.

Ergo pars totius toto minor est. Quod erat demonstrandum. Ita vides, quomodo omnium demonstrationum a priori duo sint principia ultima: definitiones, et propositiones identicae; quod etiam alibi a me notatum est. Atque haec paulo latius deducere operae pretium putavi, ut pro aequitate Tua facilius me absolutas impeterem, si qua forte dicam obiter, quae primo aspectu insubidiore videbuntur, aut speciem superflugii habebunt, cum nihil sint minus.

Dn. Hollanderum (vel ut Dominus Frater tuus suspicatur Dn. Spleissium) a posteriori ut vocant, illum mirabilem obliquitatis Eclipticae terrae cum tetragonismo consensum animadvertisse nullus dubito. Si idem esset in caeteris planetis, major spes foret rationis aliquando deprehendendae. Interim pulcherrima illa, et, ut sic dicam, fortunata animaversio est. Nam quantacunque sagacitas, nisi a fortuna adpata, hoc non dedisset. Puto numeros varios tractantem casu aliquando consensum inter haec tam remota notasse.

Problematis circa aequationem differentialem a Dn. Fratre Tuo propositi solutionem statim dedi, et Te quoque posse non dubito, si quod inutile est, actum agere velis.

Perplacet, quod Dno. Marchioni Hospitalio respondisti, Te castris receptae in Dynamicis sententiae desertis ad meam transiisse. Ea enim res ipsius curiositatem haud dubie excitabit, praesertim cum *ἀξιωματικόν* Tuam in aliis jam sit expertus; in Tua etiam potestate est communicare ipsi, ex nostris amoebis, quae voles. Si vis ut Italis Gallicque aliquod spatium relinquatur examinandi problematis Tui, ne ansam habeant excusandi sese, proferendus nonnihil terminus erit. Nam in Gallia vix ante Novembrem problema inseri Diario poterit, quia nunc sunt vacantiae, quas vocant, sive feriae Vindemiales. Quid ergo, si expectes usque ad finem anni a prima publicatione Lipsiensi computati, id est ad

Junium anni sequentis? Ego interim a Dn. Fratre Tuo petam, ut si forte inveniatur, nonnisi nobiscum publicet, ut appareat quid aliorum Methodi possit.

23 August 1696.

XXXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ex quo nuperas (ad quas responsum expecto) ad Te dedi, venerunt mihi posteriores Actorum menses, usque ad Junium inclusive, a Dn. Menckenio transmissi, quos perlustrando occurrunt et Tua et Frateris, quem de suo problemate (quod ob rationes in imperis meis allatas hucusque attingere noheram) non parum superciliose sentire video, quasi vix quisquam existeret praeter ipsum qui illi solvendo par esset, dum aperte satis Dn. Tschirnhausium et sub hoc omnes Geometras certamen cum ipsis initurus provocat. Sed iniquum est pariter et absurdum, tentare velle De; Tschirnhausium alioaque, quibus nihil rei est cum calculo differentiali. Tanta fratris arrogantia, praepriis vero cum videam Te ipsum non indignatum fuisse Fratero Problemati vacare, efficit ut et ego tentarem quid humeri valerent, et ecce intra semiquadrantem horae nodum hunc Gordium solvi, pro quo dissecando se solum putabat Alexandrum frater et quidem illico perveni ad formulam Tuam, ad quam aequationem propositam Te reduxisse ais in Mense Mart. Ut enim potestas n deprimat, ponendum est

$y^n = \sqrt{1-n}$, unde proposita $ady = y^p dx + by^q$, qdx , mutatur in hanc $\frac{1}{1-n} ady = v^p dx + b^q dx$, quae Tuae formulae omnino

respondet, et quae adhuc resolvenda est. Interim hac depressione potestatis non opus habeo: immedie enim attingo scopum, ponendo $y = mx$, ideoque $dy = m dx + x dm$, quibus substitutis in aequatione proposita habebitur $amdz + azdm = mzpdx + b^q m^q dx$. Nunc ut haec aequatio quatuor terminorum ad duos redigatur, pono $amdz = mzpdx$, id est $\frac{adz}{z} = pdx$;

Te jam diu multo ingeniosius praestitum est. Optime ipsi obiecti, dari curvas in se redeuntes algebraicas, quae rectificationem admittant, et praeter illas ex Cycloidali genere reperio ego infinitas alias, ex gr. omnes causticae et omnes evolutae curvarum algebraicarum in se redeuntium, et ipsae semper sunt algebraicae in se redeuntes, et simul rectificabiles. Putat quidem Frater se causam sui erroris quem agnoscit detexisse, sed minime. Ego quidem me determinare posse credo, quando possunt esse rectificabiles et quando non possunt; dico enim curvas illas in se redeuntes, quae nullum habent punctum, quod ego voco reflexus (point de rebroussement) non esse rectificabiles, ut curva (fig. 75) A; illas vero quae habent unum plurae puncta reflexus, posse interdum rectificari, ut B. Ratio prioris est, quia evolvens lineam A progeneratur spiralis infinitorum circuituum, quae quia a linea recta in infinitis punctis secari potest, semper erit transcendens, et proinde ipsa linea A non poterit rectificari; alias Spiralis illa, quae ex evolutione describitur, foret algebraica, quod est impossibile; ratio vero posterioris est, quia, licet curva B sit etiam in se rediens, curva tamen, quae ex evolutione provenit, non est spiralis, sed ob punctum reflexus etiam in se redit; hinc cum nihil impediatur, quominus haec possit esse Algebraica, etiam nihil impedit quominus curva B possit esse rectificabilis. Et revera hoc ita se habere in Circulo et Epicycloide, per se patet; illum enim evolvens describitur spiralis infinitorum gyrorum, haec autem sui evolutione dat aliam Epicycloidem, sed inversam; quod utrumque hic per curvas punctatas notavi. Et ob hanc rationem puto, cur circulus ahaequae curvae in se redeuntes, quae nullum habent reflexum, non sint indefinite rectificabiles. Dic quaeso an aliquid in contrarium habeas. Addo indefinite, nam ut ipse contra Du. Tschirnhausium perbene notasti, dari aliquas figuras quoad certas partes quadrabiles, indefinite tamen inquadrabiles; idem et ego de rectificatione curvarum statuo, quamquam lucusque talis curva nondum inventa fuerit, quae tantum unam pluraeve partes rectificabiles. Animadvertit quidem Du. Tschirnhaus, et quidem recte in exemplo, quod ipsi in eam rem proposueras, praeter illam figurae partem, quam Tu observaveras quadrabilem, infinitas alias esse partes, quae admittant quadraturam, sed ut ipse fatetur, infinitum non est indefinitum; habet enim infinitas partes quadrabiles, sed etiam infinitas non quadrabiles. Miror autem, quod exinde inferre voluerit Du.

Tschirnhaus, omnes figuras algebraicas aut nullam aut infinitas habere partes quadrabiles; omnes figuras autem transcendentes aut nullam aut unam aut duas aut tres etc. non vero infinitas (nisi ipsa sit indefinite quadrabilis) habere partes quadrabiles; quod utrumque veritati adversatur; possum enim exhibere figuras algebraicas, in quibus ostendo praeter unam quadrabilem partem, nullam aliam esse, et contra habeo figuras transcendentes, quae utut indefinite non quadrabiles, infinitas tamen habent partes quadraturam admittentes, in quarum censu est ipsa Cyclois quadrata, quam ille in exemplum adhibuit, in qua methodum habeo determinandi infinitas partes, meris rectis et portione curvae cycloidalis comprehensas, quadrabiles; id quod hactenus nemo praestitit. Duae enim hactenus tantum innotuerunt, una Hugeniana, quae aequalis est semihexagono circulo genitori inscripto; et altera, nescio a quo inventa, quae aequatur semiquadrato radii.

Cetera quae frater habet in suo schediasmate, non satis capio ob defectum figurarum, sed quomodo bene ratiocinari potest circa vires motrices, si quidem novum nostrum principium nondum amplectitur? Quod vero Tu mense Martio agnoscis, navem quiescentem ab eodem vento fortius impelli quam procedentem, et ego agnosco, si venti celeritas finitam habeat rationem ad celeritatem navis; alias si ratio statuatur infinita, dico ego semper aequae frictus navem impelli; sed secundum Tuam materiae gravitatis actionem explicandi modum, procedens navis fortius impellitur quam quiescens. Quid quaeso scrupulosatur frater de lucificatione unius leucae in quadringentis defectentis parum per preram a recto tramite? Nae si Hugenius adhaesum in vivis esset, locum hinc censoris sua exclamatio O Nugas! maximis literis perbringeret. Video ubi sibi quam maxime placuit, ibi plerumque Hugenio risum excitasse.

Mitto ego Notas Hugenianas, quas in reliquis Actorum Tomis reperi; videbis ab initio Hugenium idem quod olim a Te petebam sciscitari, compendium scilicet summam progressionem harmoni-
cam terminorum numero finitorum; mihi quidem roganti rescrip-
tas nec Tibi hoc compendium notum esse; quia autem tum tem-
poris hujus loci in Actis non recordabar, nunc commode incidit,
ut instantiam faciam, quomodo ergo interpretanda sint haec Tu
verba, quotcumque terminorum numero finitorum pro-
gressionis harmonicae summa compendio aliquo in-

ire potest. Occurrerunt quaedam partim plumbagine confusa scripta, partim a Bibliopaga a margine resecta, quae non probe legere poteram. Non ubique eum candorem spirant, quem in Authore cum ipsius Eruditione certasse nuper Martio dicis. Nunquam alios reprehendens ipse maxime fallitur; ex gr. cum contra D. T. assertit non solum infinitarum, sed omnium Lunulae Hippocraticae partium haberi quadraturas; falsissimum est: haberetur enim quadratura ipsius circuli, si omnes partes Lunulae essent quadrabiles. Videbis etiam, quem in Tuis castris totum putabas, quosque novae opinionis de aestimatione virum astipulatus fuerit: tunc tantum scilicet, quando agebatur de viribus, ut vocat, ascensionalibus; sed quis tam absontan limitationem a tanto viro profectam putet?

Verum est Fratrem et me eadem fere in Tschirnhausianis notasse; non tamen animadvertit ille quod ego, quod scilicet modus abscidendi portiones a curva parabolica in data ratione dependeat a rectificatione ipsius curvae parabolicae. Quam prospere mihi cessit, quod mea saltem non tardius comparuerint, quam fratris, alias de tarditate quae utique non mea erat, sed unico a Dn. Neuklenio dependebat, consimilem forsitan tragoediam adornasset, ut solutioni meae paracentricae accidit.

Quid Tibi videtur de curvis illis, quas neque per Cartesianam, neque per infinitorum Geometriam determinari posse ostendo? Habebunt hic vulgaris Geometriae amatores novam speculandi materiam.

Recte sentis, posterior mea Methodus Brachystochronam solvendi, quam latius patere dicis, non statim vulganda est, donec Mathematici suas solutiones exhibuerint, aut haec non adeo levia esse ingenue professi fuerint. Non dubito, quin si vilisses problematis mei positionem, ut in Actis extat, statim fuisses nomen curvae deprehensus; quod enim dixi esse curvam Geometriae notissimam, hoc illis, qui soluturi sunt problema, quosque Tu solvistis, ansam praebit ulterius inquirendi in nomen curvae. Non ita mihi sum ignotus, ut non intelligam aliena maxime et diversissima Tibi agenda esse, quae prohibeant, quominus problematibus meis vacare possis; sed nec etiam adeo iniquus sum, ut id a Te exigam, nisi vacuo omnibus negotiis gravioribus.

En, quia petis, propria verba, quae mihi olim scripseras de methodo pro inveniendi perpendiculari ad curvas ordinatim posi-

tione datas; tenta an quid faciant pro synchrona, et omnibus Logarithmicis perpendiculari. D. $\frac{1}{2}$ Decembris 1694: „Pene excederat problema inveniendi curvam, quae ordinatim positione datas occurrat ad angulos rectos. Cujus methodus, meo iudicio, consistit in duabus aequationibus, una continente relationem inter x , y et constantem quandam in curva positione data, sed pro diversis talibus ordinatim variabilem b ; altera continente valorem ipsius dy : dx in curva quaesita, expressam ex proprietate perpendiculararium in curva positione data, cujus aequationis ope datur ipsius b valor per dy , dx , y , x , pro re nata; quarum duarum aequationum ope tollendo b , habetur aequatio differentialis primi gradus pro reliquis inter x et y .“

Gratum fecisti, si duriora contra Nieuwentit a me scripta molliisti, sed non eum in finem scripsi, ut vel publicentur vel meo nomine ipsi communicentur, verum tantum materiam suggerere volui Collectori Actorum velut ex se ipso respondendi. Lubentissime in me suscipiam quod moneri velles in Actis circa Tractatum Davidis Gregorii Catoptrico-Dioptricum: sed cum Tractatum hunc non viderim, nec forte videre contingat, explicari mihi velle principium illud a Te indicatum de circulis osculantibus in locum curvarum appropriatarum substituendis, et quid proprie monitum cuperes; facit utique mentionem circulorum osculantium, ut videre est ex excerptis, quorum portio quaedam extat ad finem Schediasmatis Fraternali mihi transmissi.

Et ego ita putavi Dn. Hollanderum (Virum sane eruditum et generosum, in quem iniquissimus est frater meus pro more suo suspicax, quod eum alienis inventis superbire suspicatur) a posteriori incidisse varios numeros tractantem in consensum circuli tetragonismi et obliquitatis Eclipticae. Sed hoc non unicum est: complura hujusmodi alia habet, quae omnia forte fortuna tantum detexisse, vix est ut dici possit.

Jure distinguis inter in dubium vocare propositionem, et demonstrationem ejus expetere. Credo et Cartesii sensum ita fuisse, quamvis non ita expresserit: non enim dubitavit de Dei existentia, sed supposuit non existere. Speciose quidem Axioma, Totum majus esse sua parte, demonstrare conaris; sed annon aliquis syllogismi, quo uteris, primae figurae improbitatum esse demonstrandam urgere possit? Omnes enim syllogismi rite concludentes eo nituntur principio, ut minor terminus alligetur vel se-

paretur a majori, ope medi termini ad minimum semel universaliter sumti. Unde tritum illud, Quae eidem tertio conveniunt, illa inter se conveniunt, quod idem est, quam illud apud Geometras usitatum. Quae eidem sunt aequalia, illa inter sunt aequalia: hoc ergo axioma, vel huic affine supponendum est, ut syllogismus legitime concludere dicatur. Quæro autem an hoc clarius sit, quam illud quod demonstrandum suscipis.

Ece quid ad oblationem meam Dn. Marchio Hospitalius responderit in literis hinc cursor acceptis. „Je vous suis, ait, obligé de l'offre que vous me faites de me donner part de vos objections au système de Mr. Leibnitz, pour l'estime de la force et de ses réponses; cependant je vous prie de réserver cette bonne volonté pour un autre temps, lorsque j'examineray cette matière à fond qui me paraît des plus importantes pour la Physique“ etc. Et paulo post subnectit hæc: „Je donnay trois exemplaires de mon livre à Mr. Votre frere le cadet lorsqu'il passa par icy dont l'un estoit destiné pour Mr. Votre frere de Bâle, et les deux autres pour Mrs. Leibnitz et Menkenius. Si vous avez occasion de leur écrire, ou à l'un des deux, vous me ferez plaisir de leur demander s'ils les ont reçus, car je n'en ay aucune nouvelle, Mr. Votre frere le professeur m'a mandé qu'il les leur avoit envoyés.“ Mihi ergo respondebis, an acceperis necne.

Consentio ut proroges terminum pro solutione problematicæ nisi concessum ad finem sequentis semestris. Vale etc.
Groningæ 12 Septembr. 1696.

XXXVI.

Leibuz an Joh. Bernoulli.

Pro communicatis reliquis Hugenianis maximas ago gratias. Non is sum qui negem me aliquando posse emendari. Interim, ni fallor, interdum judicavit festinantius. Quae ipsi displicuit demonstratio meae Isochronæ, ejus me eo minus poenitet, quod, quantum ex Domini fratris Tui schediasmate intelligo, ejus occasione calculi differentialis verum usum perspexistis. Et ipse, studio, Analyseos filo accommodaveram. Etiam amicus quidam Florentinus ejus auxilio nonnihil in nostra penetravit.

Quia approbas, scripsi ad Italos et Gallos, ut Pascha proximum pro termino solutionum statantur.

Vellem Methodum tractoriam applicari potius ad inversa tangentium, quam ad Quadraturas, ubi jam habemus.

Non displicet limitatio Tua, et in universum videtur dici posse, omnem lineam, quae a linea algebraica in infinitis punctis secari potest, non esse algebraicam.

Exemplum, quod Domino Tschirnhausio proposueram pro instantia, sumpseram ex Lunula Hippocratis, ordinatis ejus ad axem applicatis, ubi prohibet curva, cujus aequationem notaveram. Haesit diu, donec multo post tempore Lunulam forte tractans, ut apparet ex ejus schediasmate, rem deprehendit *); ex Analysis credo nos facile detecturus. Illum manifestum puto, nondum nos ex eo quod curvae algebraicae segmentum vel semisegmentum (id est portio curvae arcu uno et recta vel rectis comprehensa) quadrari potest, concludere posse, quod curva indefinite quadrari potest. Imo ne illud quidem confectum puto, quod Dominus Tschirnhausius sui excusandi causa attulit, ubi datur una talis quadratura, dari infinitas. Et fortasse excogitari possent instantiae, ubi sudandum esset pro tali infinitorum segmentorum quadratura inveniendi.

Circa summam progressionis harmonicae vereor ne sim deceptus.

Quod illas attinet curvas, quae ex plurium punctorum curvae inter se relatione determinantur, notavi ex Cartesii literis idem etiam movisse Fermatium, sed Cartesium in responsione rem non attigisse. Ego nonnihil de talibus, sed alio quodam modo cogitavi, de quibus alias; nunc festinantissimus ista scribo curramque insensurus. Noli autem differre hanc scriptioem, ut Menckonianam mature exciperes. Nescio an curvam determinaveris, quam aliis relinquis determinandam.

Placet, quod scribis Dominum Hollanderum eo esse ingenio, ut illa pulchra inventa ab ipsonem profecta censeris possint.

Syllogismi primae figurae prohibitas demonstrari omnino potest, independenter a veritate hujus Axiomatis, quod totum sit majus sua parte, ut in ea re nullus sit circulus timendus.

*) Siehe Act. Erudit. 1657 pag. 526.