Domini Marchionis Hospitalii Opus expecto, sed a Te, Lipsiensibus credo nundinis, demum habebo. Nunc vale et literis deproperatis ignosce.

Hanoverae 6. Octobr. 1696.

XXXVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Non est cur Te moveat Hugenii festinatum judicium; non enim statim emendanda sunt, quae ipsi displicuerunt; ipse potius multa multis in locis habet, quae correctionem admitterent. Nuper Wismariensis quidam hac transiens promisit, se mihi missurum aliquod Manuscriptum Hugenii, in auctione ipsius librorum coëmptum, cum Newtoni Tractatu, cui manuscripto titulus esset Newtoni Errores. Quod si obtinuero, Tibi, si illud desideras, transcribi curabo, aut si nimis fuerit prolixum, principaliora mittam excerpta.

Quod ad Italos et Gallos scripseris propter problema meum, gratias ago magnas; per hasce inclusas rogo Dn. Menckenium, ut prorogationem termini etiam in Actis publicet, nisi, Te monente, id jam fecerit. Scire percuperem, quid Frater meus de hoc problemate statuat, et an illud solverit. Dominus Menckenius scribit, se quid in Actis inserendum ab ipso accepisse, de complanatione superficierum conoidearum et sphaeroidearum *), conferendum cum meis nupero Junio exhibitis; gratum esset mature intelligere quid id sit. Addit Dn. Menckenius se hactenus neque ab ipso, neque ab alio problematis solutionem accepisse. Nihil attigisti in novissimis Tuis, an penultimas meas acceperis, per quas Tibi miseram solutionem aequationis differentialis a Fratre propositae, et quomodo Tibi satisfecerit.

Miror Dn. Tschirnhausium diu haesisse in solvendo exemplo, quod ipsi pro instantia proposueras, cum tamen olim Parisiis ego semihora, postquam illud mihi proposuisset Dn. Marchio Hospitalius, eodem praesente, quadraturam principalem caeterasque possibiles ex sola analysi determinaverim, idque sine interventu Lunulae Hippocratis, de qua ne cogitabam quidem. Atque illa occasione jam tum reperi, quod in ultimis meis ad Te notavi, dari curvas, in quibus Tschirnhausii excusatio plane nullum locum obtinet, utpote in quibus, praeter unicum spatium quadrabile, nullum aliud esse demonstro. Et sic jam excogitavi instantias, quas excogitari posse dicis.

---

*) Jac. Bernoulli Complanatio superficierum Conoidearum et Sphaeroidearum. Act. Erudit. 1696 p. 479.

Non animadverti ego locum in Epistolis Cartesii, ubi Fermatium de curvis illis, quae ex relatione punctorum in curva determinantur, aliquid habere dicis. Si id mihi innotuisset, procul dubio mentionem injecissem, eoque magis quod, ut ais, Cartesius in responsione rem non attigerit, unde ipsius methodi infirmitas luculentius constitisset. Gratissimum erit locum hunc mihi indicari, ét Tua quondam cogitata de hisce percipere. Curvae, quam aliis determinandam relinquo, memet ipsum nondum satis applicui; si non aequationem finitam, saltem seriem pro illa me exhibere posse puto.

Cum Te continuis negotiis obrutum videam, quae impediunt quominus vacare possis problemati de invenienda curva omnibus Logarithmicis normali, lubens nunc Te hoc labore levabo. Esto (fig. 76) AB axis communis omnium logarithmicarum CD, Cd, ex puncto C eductarum; determinanda est curva Dd omnibus CD, Cd normalis. Positis coordinatis AB, BD, x, y, et CA, a. Concipiatur ad lubitum determinata quaedam logarithmica CE, ad quam caeterae referendae sunt. Sit illa facilioris calculi gratia talis, ut ipsius subtangens sit aequalis ipsi CA seu a. Jam ex puncto quovis curvae quaesitae D ductam intellige DE parallelam BA, quae secet assumtam Logarithmicam in E, ex quo si ducatur EF, designabit AF Logarithmum ipsius EF seu DB seu y. Nunc ob normalitatem Dd ad CD erit generaliter $dx . -dy :: BD . BG$, subperpendicularem curvae Dd, ideoque $BG = \frac{-ydy}{dx}$. Est autem ex proprietate Logarithmicarum subtangens Logarithmicae CE ad subtangentem Logarithmicae CD, id est CA ad BG, ut AF ad AB, quod hanc suppeditat propositionem $a . \frac{-ydy}{dx} :: ly . x$, unde habetur $axdx = -yly . dy$. Potest autem, si memineris eorum quae olim inter nos agebantur, $-yly . dy$ summari hunc in modum : $-yly . dy = -yly . dy - \frac{1}{2}yydly + \frac{1}{2}aydy$ (quia

$dly = \frac{ady}{y}$) sumtis itaque summis per partes, erit $\int -yly.dy = -\frac{1}{2}yyly + \frac{1}{4}ayy$, et per consequens $= \frac{1}{2}axx$, id est $x = y\sqrt{\frac{a - 2ly}{2a}}$, vel, si mavis aequationem percurrentem, sit b numerus ipsius a, seu $lb = a$, tunc erit $2yyly = yylb - 2xxbb$, adeoque $y^{2yy} = \frac{b^{yy}}{b^{2xx}} = b^{yy-2xx}$ vel etiam $b^{2xx}y^{2yy} = b^{yy}$.

Si limitatio mea non displicet, pro demonstratione legitima valebit, circulum, ellipses aliasque curvas in se redeuntes nullumque punctum reflexus habentes, neque rectificari neque quadrari posse indefinite. Plura scribendi impraesentiarum Tuae praeter solitum steriles non suggerunt occasionem. Hisce igitur, Vale et fave etc.

Groningae 27. Octobr. 1696.

XXXVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas ad Dn. Menkenium Tuas rite curavi. Si quid ipsi significas novum in republica literaria, fac quaeso ut nec a me ignoretur.

Gratissimae erunt censurae Hugenii in opus Newtoni rogoque ut si obtinere potes, totum mihi cures describi. Et hos et caeteros pro me sumtus reddam lubens merito.

Putabam me in respondendo etiam illa Tua attigisse, in quibus problema solveras a Dno. Fratre Tuo propositum. Non est quod quaeras qui satisfacias; nunquam enim credidi, quod mihi facile successit in hoc genere, Tibi negotium magnum facessere posse, idque statim significaveram.

Accepi librum Dni. Marchionis Hospitalii et prima quaque die ipsi gratias agam. Multa illic praeclara reperio, etsi nondum licuerit meditari attentius. Pulcherrima inprimis ratio est, qua ex focis determinat tangentes, dum observat punctorum, in quibus circulus assumtus secat rectas ex focis ad curvae punctum ductas, distantias a normali ad curvam esse ipsis rectarum differentiis proportionales; atque adeo ipsam normalem transire per centrum gravitatis, si puncta in ratione quam exhibet differentialis aequatio, onerata intelligantur. Quae Dn. Facius et ego dedimus, non nisi initia quaedam fuere. In meo id peculiare est, quod ex ipsa tensionis seu compositionis motuum natura deduxi transitum per centrum gravitatis. Vellem autem hanc motuum rationem huc applicari, remque ad fila deduci posse, tunc quoque cum ad emissarum ex focis versus punctum curvae potentias ascenditur, ut scilicet parallelismus ille elegans Mechanicae et Calculi continuaretur. Dn. Tschirnhaus in prima editione suae Medicinae mentis lapsus erat, idque ipse ei subindicaveram per literas etiam ante Italicum iter, et innueram esse mihi viam corrigendi; sed a Dno. Fatio in edendo sum praeventus. Ipse Dn. Tschirnhaus correxit sua in secunda editione Medicinae mentis, sed quae exhibet theoremata nullo modo accedunt ad pulchritudinem et generalitatem Methodi Hospitalianae. Interim ipse nuper inspecto Domini Marchionis Hospitalii Libro ad me scribit, tametsi parum temporis sibi in nundinis superfuerit ad ejus lectionem, credere tamen pauca in eo fore, quae sibi non sint nota. Nec dubito, quin inspexerit, quae hoc negotium concernunt, quod ipsum potissimum tangit. Quodsi haec jam tum noverat, vellem in Operis sui editione novissima non dissimulasset rem tam utilem et elegantem.

Mitto hic ex Actis Lipsiensibus mensis Octobris, quae Dn. Frater Tuus de superficiebus Conoeidum dixit. Mihi nondum vacavit respondere iis, quae in Actis ad me pertinentia dixit; faciam tamen primo otio, eaque occasione etiam candori Tuo atque inventis, quanquam non necessarium, testimonium perhibebo.

Transscribo hic verba Fermatii, in appendice ad Epistolam Mersenni, quae est 67ma in Tomo Tertio Cartesianorum. „Je puis, „dit-il, donner la resolution de cette question: Trouver autant de „lignes courbes qu'on voudra, en chacune desquelles prenant tels „nombres des points qu'on voudra, tous ces points ensemble pro„duisent un même effet."

Non invenio Cartesium, Mersenno haec mittenti respondentem, hunc locum attigisse.

Fac quaeso ut sciam quis ille Wismariensis, quorsum ierit, et an nostris sese studiis cum successu applicuerit, ut Tuae litterae innuere videntur.

Gratias ago pro Tua communicatione lineae ad Logarithmicas ordinatim datas normalis. Fateor me ita distractum, ut talia attentare vix amplius ausim; nolim tamen hoc ita accipias, quasi eo praetextu velim me, si potuissem aggredi, statim fuisse praestiturum.

Circa summam harmonicorum nondum mihi satisfeci, et vereor ne sim deceptus. Interim circa cognata proponam quae olim in mentem venere, ubi et judicium Tuum et auxilium desidero. Quaeritur summa horum numerorum $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$ etc. Fingo esse casum specialem hujus: $\frac{x^2}{1}+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{9}+\frac{x^5}{16}$ etc. $= y$, cum scilicet fit $x = 1$. Quod si ergo semper haberi posset y, haberetur et summa quaesita. Ergo fiet $\frac{x^1}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}$ etc. $=\frac{dy}{dx}=\log\overline{1-x}$, seu $\frac{ddy}{dx}=x^0+x^1+x^2+x^3$ etc. $=\frac{1}{1-x}$ seu $y=\int\int\frac{1}{1-x}\,dx\,dx$. Res ergo pendet a quadratura figurae Logarithmicae, quae datur. Eademque methodus ad alia id genus porrigitur, ad quae non alius facile aditus patet. Quare cogita quaeso de perfectione et prosecutione.

De Te iterum Berolini mentionem injeci, et aditum adhuc apertum apud Halenses intellexi, magnamque superesse de Te existimationem. Itaque constituere atque etiam amplius deliberare potes. Quid si aliquando excurrere in has oras liceat appetente vere, et coram in omnia accuratius inquirere? praesertim si Lipsiam usque perrexeris, ubi Hala transitur. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae $\frac{6}{16}$ Novembr. 1696.

P. S. Grata erit instantia curvae ordinariae, in qua Dn. Tschirnhusii excusatio non habeat locum. Memini in aliqua praecedentium Te quadraturam obliqui Cycloeidis segmenti tribuere *nescio cui*; scito eum quem nescieras me esse. Multi sunt anni, quod curavi inseri Diario Parisino. Nonnihil adhuc scrupuli mihi subest circa demonstrationem irrectificabilitatis ovalium puncto reversionis carentium, de quo alias amplius; nunc enim tempore meditandi excludor.

XXXIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literis ad Te dimissis mox in mentem venit oportere, ut error in illis admissus fuerit. Nam area illa, quam aequalem feceram seriei de qua agebatur, infinita est. Re ergo resumta, vidi sic procedendum: $\frac{1}{1}+\frac{x}{1}+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+$ etc. $= dy$. Unde $\frac{x}{1}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+$ etc. $= y$; ergo $dy=\frac{\log\overline{1-x}\,dx}{x}$ seu $y=\int\frac{\log\overline{1-x}\,dx}{x}$. Sed cum $\log\overline{1-x}$ sit infinitus, eo casu quo $x = 1$, ideo putavi commodius rei accedi posse, si adhibeamus $\frac{1}{1}-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+$ etc. Nam reperio hac summa data, etiam haberi summam $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+$ etc. Itaque assumo $\frac{1}{1}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+$ etc. $= dy$, unde $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\frac{x^4}{16}+$ etc. $= y$, cumque $\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}$ etc. sit $\log\overline{1+x}$, utique patet fore $dy=\frac{\log\overline{1+x}\,dx}{x}$ seu $y=\int\frac{\log\overline{1+x}\,dx}{y}$. Reperio autem generaliter esse $\int x^e\log\overline{1+x}\,dx=\frac{1}{e+1}x^{e+1}\log\overline{1+x}-\frac{1}{e+1}\int\frac{x^{e+1}}{1+x}\,dx$; et tamen singulari naturae cautione accidit, ut in unico nostro casu res non succedat, cum scilicet fit $e=-1$, tunc enim $\frac{1}{e+1}=\frac{1}{0}$, quae est quantitas infinita; unde subsidia summationis evanescunt.

Nondum hactenus occurrit mihi alia ratio quaesitam y inveniendi. An aliunde pateat aditus, Tu optime dispexeris.

Si summa haec dividatur per x, et quod provenit rursus summetur, prodit summa cuborum; et si cum hac procedatur eodem modo, prodit summa biquadraticorum, et ita porro. Habemus ergo reductionem serierum ad suas quadraturas: sed ipsae hoc loco quadraturae adhuc desiderantur. Interim ipsam methodum aggrediendi series non displicituram puto, cum saepe res ad quadraturas quae in potestate sunt reduci possit. Ex. causa series $\frac{1}{1+e} - \frac{1}{2,1+e} + \frac{1}{3,2+e} - \frac{1}{4,3+e}$ etc. semper haberi potest, modo e sit numerus major unitate, quod ex praecedentibus patet, quia fit

$$\int, x^{e-2}\,\mathrm{l}\,\overline{1+x}\,dx = \frac{x^e}{1\,e} - \frac{x^{e+1}}{2,e+1} + \frac{x^{e+2}}{3,e+2} - \frac{x^{e+3}}{4,e+3} \text{ etc.}$$

quod semper haberi potest, excepto casu quo $e = 1$, quanquam fortasse et in hoc casu habebitur, Tua ope accedente. Haec raptim prioribus submittere volui, ne Tibi error calculi a me dormitante nescio quomodo commissus frustra negotium facesseret. Vale.

Dabam Hanoverae 9. Novembr. 1696.

P. S. Cum reperiam semper esse $\int \mathrm{l}\,\overline{1+x}^n\, x^e\, dx = \mathrm{l}\,\overline{1+x}^n\, \overline{1+x}\, x^e - n \int \mathrm{l}\,\overline{1+x}^{n-1}\, x^e\, dx - e \int \mathrm{l}\,\overline{1+x}^n\, x^{e-1}\, dx$, hinc patet potentias superiores reduci ad inferiores, x^e ad x^{e-1}, si e sit affirmativus numerus, vel contra x^{e-1} ad x^e, si e sit numerus negativus; idemque est de $\mathrm{l}\,\overline{1+x}^n$ et $\mathrm{l}\,\overline{1+x}^{n-1}$. Unde possent haberi haec omnia, nisi obstarent illi casus, ubi ob 0 vel infinitum evanescunt subsidia. Speciatim reperio $\mathrm{l}\,\overline{1+x}^2\, \overline{1+x}, : x = 2\int \mathrm{l}\,\overline{1+x}\, dx : x - \int \mathrm{l}\,\overline{1+x}^2\, dx : xx$. Fortasse si omnia ordine examinare liceret, lux aliqua affulgeret.

XL.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Utrasque Tuas uno eodemque cursore accepi; in posterioribus recte correxisti, quem in prioribus commiseras lapsum. Olim eram, Te non invito id dixerim, in similibus fere speculationibus: hanc autem materiam jam a longo tempore deserui, ut pene exciderit, quid super ea praestiterim. Adversaria mea discutiens hoc repe-

rio. In Hyperbola (fig. 77) ABCD, si $AB = BC = Ba = 1$, fiat $EM = \frac{\text{spatio hyperb. } EBCF}{BE}$, et sic ubique; em vero $= \frac{\text{spatio hyperb. } eBCf}{Be}$, et sic ubique: erit spatium $ABLN = \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. spatium vero aBLn erit $= \frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ etc. Praeterea spatium ABLN erit duplum spatii aBLn, et per consequens, quod probe notasti, data summa $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ etc. habetur etiam summa $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. Haec enim illius dupla est. Quod si ulterius spatia BLME et BLme applicentur ad BE et Be, prodibunt nova spatia pro cubis $\frac{1}{1} + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \frac{1}{64}$ etc. et $\frac{1}{1} - \frac{1}{8} + \frac{1}{27} - \frac{1}{64}$ etc. et ita porro pro biquadratricis. Quamvis autem omnes istae series sint insummabiles, possum tamen, non ineleganti quodam artificio, illas dispescere in partes datam habentes rationem; sic series generalis potestatis numeri n est haec $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}$ etc. multiplicatis numeratoribus et denominatoribus per datum numerum ad n elevatum, ex. gr. per 2^n, erit $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \frac{2^n}{2^n} + \frac{2^n}{4^n} + \frac{2^n}{6^n} + \frac{2^n}{8^n} + \text{etc.} = 2^n \times \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} \text{ etc.}\right)$. Est ergo summa terminorum imparium $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n}$ etc. ad summam parium $\frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n}$ etc. ut $2^n - 1$ ad 1: et proinde $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n}$ + etc. ad $\frac{1}{1^n} - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n}$ etc. ut 2^n ad $2^n - 2$. Hinc patet quod supra innui (existente scilicet $n = 2$) summam $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ etc. esse duplam summae $\frac{1}{1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16}$ etc. Hinc etiam ultro sequitur summam harmonicorum esse infinitam; est enim eo in casu $n = 1$, et proinde 2^n ad $2^n - 2$ ut 2 ad 0, id est, summa $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc. infinities major est summa $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. quod hic obiter dictum velim, ideo praecipue quod memini Fratrem olim id ipsum longa et operosa via apodictice demonstrare instituisse, postquam ego antea illud apagogice demonstrassem, ut videre poteris ex ejus Dissertationibus de Seriebus. Jam si facimus $\frac{1}{1^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{etc.} = \frac{3^n}{3^n} + \frac{3^n}{6^n} + \frac{3^n}{9^n} + \frac{3^n}{12^n}$ etc. =

$3^n \times \left(\frac{1}{3^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{12^n} + \text{etc.}\right)$ habebitur ratio, quam habet series tota ad terminos suos omnes tertianos. Pari modo invenire licet rationem inter seriem et suos terminos quartanos, et ita porro. Atque adeo summa, licet ignota, habet tamen partes cognitae rationis; quemadmodum et Circulus et Hyperbola sunt inquadrabiles, possunt tamen secari in ratione data, quod hic idem in serie annotasse non injucundum erit.

Quantum vero ad reductionem serierum ad quadraturas, vides ex iis quae supra de spatiis ABLN et aBLn protuli, me jam diu talia meditatum fuisse: omnes quidem quadraturae facile ad series revocantur, sed vicissim series ad quadraturas reducere artis foret non mediocris. Ex occasione eorum quae perscripsisti, negotium resumsi, et quantum per otium licuit, unum alterumve Tibi forte non ingratum annotavi. Primo statim animadverti, Te praecipue eo attendisse, ut series Tuas ope differentiationis reduceres ad seriem harmonicorum, quae utique quantitate finita, sed logarithmica exprimi potest. Ego exinde cogitare coepi, annon series proposita per differentiationem bis, ter, pluriesve repetitam, eamque multiplicando vel dividendo per x, xx etc. prout res id postulat, tandem reduci posset ad seriem identicam, unde prodiret aequatio differentialis primi, secundi, altiorisve gradus, quae explicaret summam seriei. Et quidem spe concepta non omnino excidi: in nonnullis enim quas hic apponam, talis summandi modus commode succedit. Quaeritur summa hujus seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ etc. Scio equidem aliunde, si unitas est logarithmus, hanc seriem esse numerum unitatis, sed idem a priori per methodum ita invenio. Fingo ad Tui imitationem esse casum specialem hujus speciei $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$ etc. $= y$, quando scilicet x fit $= 1$; hinc fiet, differentiando seriem $\frac{1}{1} + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3}$ etc. $= \frac{dy}{dx}$; ablato itaque primo termino $\frac{1}{1}$, provenit series identica $\frac{dy}{dx} - 1 = \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4}$ etc. et consequenter $= y$, et proinde $dy = ydx + dx$, quae aequatio ostendit y seu potius $y + 1$ esse numerum ipsius a seu unitatis.

Caeterum reperio seriem $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4}$ etc. esse aequalem huic alteri $\frac{1}{1.2} + \frac{4}{1.2.3} + \frac{9}{1.2.3.4} + \frac{16}{1.2.3.4.5}$ etc. Esto jam quaerenda summa hujus seriei $\frac{1}{2} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{2.4.6} + \frac{1}{2.4.6.8}$ etc. fiat $\frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$ etc. $= y$, ideoque $x + \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{2.4} + \frac{x^7}{2.4.6}$ etc. $= \frac{dy}{dx}$: transposito x, et divisa aequatione per x, habetur $\frac{dy}{xdx} - 1 = \frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$ etc. $= y$, id est $dy = yxdx + xdx$, quae aequatio (posito $xx = z$) reducitur ad praecedentem: quod etiam alia via invenitur faciendo $xx = 2t$, unde $\frac{xx}{2} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^6}{2.4.6}$ etc. $= \frac{2t}{2} + \frac{2.2tt}{2.4} + \frac{2.2.2t^3}{2.4.6}$ etc. $= \frac{t}{1} + \frac{tt}{1.2} + \frac{ttt}{1.2.3}$ etc. quae series utique similis est praecedenti. Quando vero denominatores componuntur ex numeris imparibus, aequatio prodit omnino diversa ab illa praecedenti, ut si proponatur $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{1.3.5} + \frac{1}{1.3.5.7}$ etc. proindeque fiat $\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.2.3} + \frac{x^7}{1.3.5.7}$ etc. $= y$, et $1 + \frac{xx}{1} + \frac{x^4}{1.3} + \frac{x^6}{1.3.5}$ etc. $= \frac{dy}{dx}$ seu $\frac{dy}{xdx} - \frac{1}{x} = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.3} + \frac{x^5}{1.3.5} + \frac{x^7}{1.3.5.7}$ etc. $= y$, habebitur haec aequatio $dy = xydy + dx$, quae cum sit specialis casus aequationis a Fratre in Actis nuper propositae et a Te et a me solutae, potest per nostras methodos ulterius reduci ad aliam, cujus indeterminatae separari possunt. Videamus jam quid proveniendum sit ex hac generali serie $\frac{1}{a} + \frac{1}{a.a+b} + \frac{1}{a.a+b.a+2b} + \frac{1}{a.a+b.a+2b.a+3b}$ etc. (intelligo per a et b numeros quoscunque, ita ut a, $a+b$, $a+2b$, $a+3b$ etc. faciant progressionem quamcunque arithmeticam) faciamus ergo $\frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+b}}{a.a+b} + \frac{x^{a+2b}}{a.a+b.a+2b}$ etc. $= y$, unde $\frac{dy}{dx}$

$= x^{a-1} + \frac{x^{a+b-1}}{a} + \frac{x^{a+2b-1}}{a.a+b} + \frac{x^{a+3b-1}}{a.a+b.a+2b} +$ etc. et transposito x^{a-1}, et divisa aequatione per x^{b-1} erit $\frac{dy}{x^{b-1}dx} - x^{a-b} = \frac{x^a}{a} + \frac{x^{a+b}}{a.a+b} + \frac{x^{a+2b}}{a.a+b.a+2b}$ etc. $= y$, id quod hanc suggerit aequationem $dy = yx^{b-1}dx + x^{a-1}dx$, quae sane ipsissima est Fratris satis generaliter proposita; unde praeter spem incidi in modum solvendi hanc aequationem per seriem simplicissimam, quam forsan Frater non ita facile reperiret, si sollicitaretur propriam suam aequationem vel saltem hanc per seriem solvere. Sumamus jam aliud exemplum, ubi proveniat aequatio differentialis secundi gradus. Quaeritur summa hujus seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.4} + \frac{1}{1.4.9} + \frac{1}{1.4.9.16}$ etc.; ponatur $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4} + \frac{x^3}{1.4.9} + \frac{x^4}{1.4.9.16}$ etc. $= y$, differentiando fiet $1 + \frac{x}{1.2} + \frac{xx}{1.4.3} + \frac{x^3}{1.4.9.4}$ etc. $= \frac{dy}{dx}$, multiplicetur per x et erit $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^3}{1.4.3} + \frac{x^4}{1.4.9.4} +$ etc. $= \frac{xdy}{dx}$: differentietur iterum et habebitur $1 + \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4} + \frac{x^3}{1.4.9}$ etc. $= \frac{dxdy + xddy}{dx^2}$; ablato 1, provenit tandem series identica $\frac{dxdy + xddy}{dx^2} - 1 = \frac{x}{1} + \frac{xx}{1.4} + \frac{x^3}{1.4.9} + \frac{x^4}{1.4.9.16}$ etc. $= y$, quae reducta dabit $xddy = ydx^2 + dx^2 - dxdy$ pro aequatione quaesita, quae an ad aequationem differentialem primi generis possit reduci, vellem ut dispiceres. Si quaeratur summa seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{1.8} + \frac{1}{1.8.27} + \frac{1}{1.8.27.64}$ etc. obtinebitur aequatio differentialis tertii gradus; ponendo enim $\frac{x}{1} + \frac{xx}{1.8} + \frac{x^3}{1.8.27} + \frac{x^4}{1.8.27.64}$ etc. $= y$, post alternatim institutas tres differentiationes, totidemque multiplicationes per x, pervenitur ad seriem identicam, unde elicitur aequatio quaesita haec $xxd^3y = ydx^3 + dx^3 - 3xdxddy + dx^2dy$. Atque hac ratione in altioribus gradibus operari licet.

Multa alia, quae olim circa hanc materiam observaveram, omitto; lubet tamen attingere paucis aliud serierum genus, quod ante decennium, ut puto, primus ego consideravi, quodque cum Fratri aperuissem, protinus ipsi ansam dedit problemata solida et hypersolida, ope circini et normae construendi, per approximationem Geometricam. Hujusmodi enim serierum summa vel potius valor perpetuo aequatione algebraica finita exprimi potest, idque eodem fere modo, quo serierum jam prolatarum summas indagavimus, procedendo scilicet donec ad seriem identicam perveniatur. Quaeritur ex. gr. valor hujus seriei,

$\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}$ etc. Pono illum $= x$, sumendo utriusque quadratum erit $xx = 2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$ etc. seu $xx - 2 = \sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}$ etc. quadrando iterum provenit $x^4 - 4xx + 4 = 1 + \sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ etc. ablato 1, habetur series identica $x^4 - 4xx + 3 = \sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2}}}}}$ etc. $= x$. Hinc $x^4 - 4xx - x + 3 = 0$: cujus proinde aequationis radix ostendet verum valorem seriei propositae. Ex hisce paucis facile intelliguntur omnia, quae de constructione solidorum problematum exhibuit Frater meus. Non dubito quin haec et Tibi jam aliquando considerata fuerint, quamvis apud authores de seriebus tractantes hactenus tale quid non repererim. Hac methodo invenitur $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$ etc. $= 2$. et $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}$ etc. $= 3$, aliaque id genus multa inveniri possunt, quae nemo Te melius perscrutabitur. Quod superest, vix putem alio modo quam fecisti inveniri posse summam seriei $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25}$ etc. saltem ad aliam expressionem quam logarithmicam non reducetur. Quod reperisti $\int x^e \log \overline{1+x}\, dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1} l \overline{1+x} - \frac{1}{e+1} \int \frac{x^{e+1}}{e+x} dx$, verum est. De hoc autem, ni fallor, jam tum agebamus, cum de exponentialium seu percurrentium Calculo sermones sereremus; interim non magis miror rem in nostro unico casu non succedere, quam mirarer Hyperbolam communem non esse quadrabilem: eadem enim naturae cautione accidit, ut ex infinitis

Hyperboloidibus haec sola quadraturam non admittat. In postscripto facis $\int \mathrm{l}\,\overline{1+x}^{n}\, x^{e}\, dx$, nescio cui prolixae quantitati aequalem; rogo ut revideas; forsan lapsus irrepsit; invenio enim simplicius sic $\int \mathrm{l}\,\overline{1+x}^{n}\, x^{e}\, dx = \frac{1}{e+1} x^{e+1}\, \mathrm{l}\,\overline{1+x}^{n} - \frac{n}{e+1} \int \frac{x^{e+1}}{1+x}\, dx$. Speciatim Te reperisse ais $\frac{\mathrm{l}\,\overline{1+x}^{2}\, \overline{1+x}}{x} = 2 \int \frac{\mathrm{l}\,\overline{1+x}}{x}\, dx - \int \frac{\mathrm{l}\,\overline{1+x}^{2}\, dx}{xx}$: ego vero reperio $\frac{\mathrm{l}\,\overline{1+x}^{2}\, \overline{1+x}}{x} = 2\,\mathrm{l}\,x - \int \frac{\mathrm{l}\,\overline{1+x}^{2}\, dx}{x\,x}$. Sed de hac materia haec sufficiant impraesentiarum; plura tempus dabit. —

Gratias ago, quod literas meas ad Dn. Menckenium rite curasti; mittebam ipsi modum generalem Actis inserendum construendi tetragonismum cujuscunque figurae curvilineae in plano descriptae per approximationem Geometricam, nulla adhibita expressione Analytica; quem modum ob infinitatem adjungere volui seriei meae universali pro quadraturis jam ante biennium in Actis propositae.

Ex quo Wismariensis iste, nomine Groningius, hinc discessit, nihil de eo amplius inaudivi; procul dubio in patriam migravit; in transitu hic se Doctorem Juris creari fecit. Amator apparuit studiorum nostrorum, videtur tamen historicam magis quam solidam eorum habere notitiam; decrevit enim ut dixit, historiam edere Cycloidis, ad imitationem alterius illius Paschalii; quapropter nostra petiit inventa super illa. De omnibus loqui novit, sed sine fundamentis. Sueciam, Daniam, Germaniam et Italiam peragravit; jam diu in patria officio quodam fungitur.

Nondum obtinui, sed propediem obtinebo, librum Dn. Marchionis Hospitalii; interim ex illis quae refers, video bonam partem ejus et forte integrum conscriptum esse ex occasione eorum quae ipsi Parisiis communicaveram: non dubito tamen, quin pro suo, quo pollet, ingenio auxerit multis, perpoliverit et vernacula sua lingua nitide concinnaverit.

Mutilum misisti schediasma Fratris mei et sine figuris, unde non bene capio quid velit. Gratias tamen ago. Dicit se jam diu

meditatum fuisse, sed contemsisse, quae ego dignatus sim publicare: interim cur jam ex destinato dignatur, quae olim contemserat, et cujus ego non nisi in transitu occasione ita ferente mentionem feci? Certe nihil aliis, quod sibi non prius notum putat: suam tamen infirmitatem egregie prodit circa problema celerrimi descensus per schedulam aliquam Dn. Marchioni cum Actis missam et quam hoc ipso momento cum literis a Dn. Marchione accipio et quidem ipsum autographum, in cujus fine habentur haec verba: Curva p. 269 proposita videtur esse circulus fig. 5. cujus centrum est in intersectione horizontalis per punctum A transeuntis et alterius rectae ipsam rectam AB ad angulos rectos bisecantis. Hem, quam bene rem acu tetigit! Audi et Marchionis verba: „Mr. Leibnits a „fait mettre dans le Journal du 19. Septbr. Vôtre probleme de la „courbe de la plus vîte descente, il prolonge le temps que vous „aviés donné jusques a Pasques prochain. Je vous avoue que ce „probleme me paroist tres beau, jusques icy je ne m'imagine point „de voye pour y parvenir etc." et inferius: „Je crois pouvoir „vous asseurer par avance, que nos Geometres ne sont pas en „état de resoudre ces sortes de questions, je ne doute pas que „Mr. Vôtre frere ne s'y soit appliqué de toutes ses forces. Il m'a „envoyé depuis peu les Actes de Leipsic, parmi lesquels j'ai trouvé „un petit papier, que je vous envoye, vous me ferez plaisir cependant de n'en rien temoigner de me le renvoyer dans Vôtre „réponse etc."

Verba Fermatii, quae notas, latiori sensu intelligi possunt, quam ut praecise ad curvas meas applicentur.

En quandam instantiam contra Dn. Tschirnhausii excusationem. Sit (fig. 78) curva quaecunque ABC, quae secetur in puncto C a recta AC faciente angulum semirectum CAE cum axe AE. Erecta normali AF, ducatur et producatur applicata DBH secans AC in G, agaturque GF parallela ipsi AD, secans curvam in L; deinde sumatur BH aequalis ipsi LF, et hoc fiat ubique; generabitur inde nova curva AHI, cujus spatium determinatum AEI, qualiscunque sit curva ABC, semper aequatur quadrato AE vel EC; ipsum vero spatium ADH indefinite nunquam erit quadrabile, nisi et ipsum spatium ADB sit indefinite quadrabile. Praeterea si spatium ADB sit tale, ut etiamsi inquadrabile, ab eo tamen possint algebraice secari segmenta aequalia, vel in ratione data, qualis est

Circulus vel Ellipsis vel Hyperbola (nescio an aliae curvae etiam hac proprietate gaudeant) tunc spatium indefinitum ADH erit quidem inquadrabile, sed praeter quadrabile AEI infinitas alias habet partes quadrabiles, et hoc est quod imposuit Dn. Tschirnhausio animadvertenti id accidere in Lunula ad axem applicata, et perperam universalitatem inde inferenti: dico enim, si spatium ADB non solum sit indefinite inquadrabile, sed etiam si non possint algebraice ab eo abscindi segmenta aequalia, vel in data ratione (haec enim divisio in segmenta aequalia in plerisque curvis dependet ab ipsa quadratura indefinita spatii curvilinei) dico, inquam, tunc praeter spatium AEI in curva AHI plane nullum aliud esse quadrabile.

Groningae d. 1. Decembr. 1696.

P. S. Grata sunt quae scribis de negotio Halensi; in eadem utique persevero intentione, praesertim si non cum detrimento hinc evocarer. Notum est Tibi, quanto hic fruor; si in antecessum indicare posses, quantum ibi sperandum esset, ut eo tutius deliberare possem, pergratum mihi foret. Quod de excursione in oras vestras ineunte vere suscipienda scribis, vix est ut quid promittam, nisi id fiat feriis canicularibus: tanto enim temporis spatio absque singulari Curatorum venia abesse non auderem. Complicaturo hanc mihi affertur, nescio a quo nec per quem, novus tractatulus Bernardi Nieuwentitii quem inscribit: Considerationes secundae circa calculi differentialis principia, et responsio ad virum Nob. G. G. Leibnitium. A me impetrare minime possum, ut illas legendo tempus perdam. Ex fortuita inspectione pag. 7. 8. video eamdem semper crambem recoquere et ei unice studere, ut verborum Tuorum sensum detorqueat. Oportet, ut tandem serio et rigide respondeas, ne iste Pan, Tibi Apolloni obstrepens, unum alterumve inveniat Mydam sinistre judicantem. Hisce vale et favere perge.

XLI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.*)

Vellem diligentiae saltem Tuae paria facere posse, quando acumine per aetatem obtuso aciem vigentis in Te animi aequare non possum. Sed neutrum licet, quod velim non ignaviae aut etiam affectatae occupationum venditationi tribuas, sed necessitati. Nam in minimis fere calculis omnes pene passus cespito, quod animus nimis in alia distractus ad haec morosiora non satis attendit. Ubi vero acrius animum intendere volo, ut errores calculi tollantur aut caveantur, subito excitantur importunae illae phlogoses caloresque. Quam multa autem sint in quae distrahar, pene supra fidem tuam erit. Nam ut officii curas taceam, quae ad jura nostrorum Principum monumentaque et Historiam Brunsvicensem pertinent, et res Ratisbonensis Diaetae, literasque subinde commutandas cum Ministris, quos Viennae et alibi habemus; et ut praeterea quotidianum laborem digerendarum Notitiarum Historicarum ad nos spectantium, quarum gratia eruditum juvenem in auxilium advocavi, et elaboranda subinde quaedam scripta, quibus justitiam causae nostrae tueamur, volo aliqua tantum attingere, quae extra ordinem quotidie obveniunt. Scripsi hodie longissimam Epistolam ad Virum insignem, qui tractatus quosdam irenicos jussu Imperatoris cum Theologis nostris habitos et morte missi olim magnae dignitatis viri interruptos, Caesareis auspiciis resumere jussus sese ad me convertit, quod sciret priora per meas manus ivisse. Nam ego a puero controversias cum pontificiis tractavi omnibus pene cum pulvisculo excussis. Scis quam multa egerim cum Pelissonio et Episcopo Meldensi, ut facile integra volumina vel solis commutatis de his rebus literis conficerentur. Juvenis quaedam de ordinanda emendandaque jurisprudentia in lucem dederam, et promiseram plura. Videbam rationem ad pauca principia vastam molem quaestionum exigendi. Nunc sunt qui haec velut debita pene convicio efflagitant. Itaque ne pereant quae fortasse non facile cuivis in mentem venirent, vetera subinde recogito et nova addo, ut De-

*) Leibniz hat auf dem Entwurf dieses Briefes bemerkt: nicht abgangen; dies bezieht sich indess nur auf den ersten Theil, der seines interessanten Inhalts wegen hier eine Stelle finden mag.

finitiones quasdam atque Elementa perpetui juris formem; quibus Romana accommodando selectiora praesertim ex Pandectis, libro augeo et quo nescio an quisquam alius ad Mathematicam nervositatem propius accedat. Porro ne me rerum Chemicarum Medicarumque exortem putes, scito non exiguam me partem hujus aestatis cum Francisco Mercurio Helmontio consumsisse, quamquam ille mallet de rebus philosophicis sermones caedere. Interim nunc aliquot viri docti a me vellent expiscari arcana ejus, quod me familiariter ipso dudum usum nossent; cum tamen ego multa non sim assecutus, et quae percepi nolim spargere invito amico. Nuperrime princeps ex Belgio foemina, quae illum aliquot menses nobiscum fuisse intellexit, cum secretorum quorundam notitiam hinc petiisset ad me quasi conscium itum est, dicentique ex eorum me esse numero qui parum tribuunt secretis, non creditur. Praeterea domi habeo opificem, qui jam tertium meae Machinae Arithmeticae exemplum elaborat. Puto Te aliquid de illa dudum intellexisse. Maximas illa multiplicationes et divisiones pene momento efficit rotis, principio a Neperi baculis pariter et Logarithmis prorsus diverso. Viginti quatuor fere anni sunt, quod inveni et prima rudimenta Anglicae Societati, mox et Gallicae monstravi. Hugenius, Arnoldus, aliique qui Parisiis viderant, aliquoties quaesivere, cur paterer rem talem intercidere. Itaque tandem devoravi laborem sumtusque feci; idque saltem assecutus sum, ut duabus Machinis absolutis, in quibus ad duodecim usque notas iri potest, inventio perire amplius non possit. Alias Machinas de aliis rebus mente agitatas jam non tango; vix enim dici potest, quam multa tentarim partim ingenio partim etiam operum ipsorum rudimentis, atque etiamnum quotidie tentem. De philosophicis nunc dicere malo. Scis systema me novum moliri et ni fallor problema de Unione animae et corporis explicuisse. Multa alia satis mira mihi videor in metaphysicis demonstrasse, quorum aliqua etiam attigi in Actis vel Diariis, sed nondum fontibus satis apertis. Nuper ad magnam Principem scripsi de natura animarum, et visus ipsi sum non tantum profunda, sed et lucide dixisse. Mea autem sententia est, omnia, ut sic dicam, plena esse animarum vel analogarum naturarum, et ne brutorum quidem animas interire. Est de his rebus mihi concertatiuncula cum Cl. Sturmio per literas, quemadmodum diu fuit cum Arnoldo, ambobus Cartesianismo praeoccupatis. Mittendae jam sunt literae ad Sinas, ut R. P. Grimaldo respondeam, cui Romae multum lo-

cutus sum. Is nunc Mandarinum in Sinensi aula agit, reique mathematicae praefectus est. Ex itinere ad me Goa scripsit. Si quid rerum mathematicarum aut physicarum illinc quaeri velis, indica quaeso. Etiam ad Suecos et Moscos misi nuper quaestiones de linguis Scythiae interioris a Lappis et Moschis usque ad Tartaros Sinenses. Magni haec nosse momenti foret ad origines nationum, nam Germani, Poloni, Hungari, Turci, Persae, ne quid de aliis dicam, ex Scythia prodiere.

Praeterea hac hyeme volumen Autorum medii aevi ineditorum, qui Historiam tractavere, edi curo, quae res nonnihil habet molestiae, diligenti enim recensione typorum est opus, quam aliis penitus confidere non ausim. Sed et materiam alteri volumini Codicis Diplomatici conquiro digeroque. Nunc cum Tenzelio, Colloquiorum menstruorum Germanicorum autore, doctissimo Viro, disputo de quibusdam rebus literariis; atque inter alia de Etymo vocis Germanorum, quod ille a Romanis inditum putat ex latino significat ad fratres relato; mea suspicio est Germanos eosdem esse qui Herminones, pars nationis Tacito Plinioque memorata; nam frequenter pars notior dat toti nomen, quemadmodum omnes hodie Germani Gallis Alemanni dicuntur, cum olim ea vox solis Helvetiis Suevisque tribueretur, qui ducatu Alemanniae comprehendebantur. Porro Herminones et Germani pene solo differunt aspirationis gradu, prorsus quemadmodum Hispani dicunt Hermanos quos Latini Germanos scil. fratres. Dies me deficeret, si inspecto literarum hujus anni cumulo vellem recensere acta mea literaria; nam et versus subinde extundendi fuere in gratiam poscentium, interdum tamen et non poscentium, nam Hugenium Epicediolo honorandum putavi, cujus copiam hic facio:

Quantumcunque decus dederit doctrina Batavis,
 Hactenus Hugenio non habuere parem.
Sint Patri et Fratri, Guilielmi ingentia fata
 Resque hominum curae, sidera noster habet.
Ejus ad adventum supremo cedit ab orbe,
 Et Jove contentum se Galilaeus ait.
Mox sua Saturnus tradit pater aurea regna,
 Munereque Hugenii se videt esse novum.
Dum radiis, prius ignotis, micat annullus ingens
 Inque ministerium stella novella venit,

Se gratum autori cupiens praestare vicissim
　Cuncta sub orbe suo tempora clausa dedit,
Nam Cronon et Graji Saturnum nomine dicunt
　Omnia quod curva tempora falce metit.
Machina jam longi moderatrix prodiit aevi,
　Quae jubet astrictos legibus ire deos.
Et nunc aligeras nova sub jugo mittimus horas,
　Certus et in mediis navita fertur aquis.
Sol quoque miratus spatia intercedere discit
　A medio ad medium non satis aequa diem.
Cernite mortales, quo vestra potentia surgat!
　Possumus aetheriis jam dare jura polis.

Guelfebyti nunc novissime hortatu Sern. Ducis] dissertationem conscripsi de Restauratione Linguae Germanicae, et novo quodam ordine fundando, cujus opera vindicetur Lingua in pristinam dignitatem, et tria dictionaria condantur, Lexicon Vocabulorum usitatorum, Cornucopiae technicorum, et Glossarium Etymologicum, quo vocabula obsoleta et provincialia originesque explicentur. Haec Tibi scripsi (alteri non facile scriberem) ut distractionibus meis lubentius agnoscas.

Nunc ad Tuam Epistolam venio. Verissimum est quod scripsi (nisi quis in describendo commissus est error) esse $\int \mathrm{l}\,\overline{1+x}^n x^e\,dx = \mathrm{l}\,\overline{1+x}^n\,\overline{1+x}\,.\,x^e - n\int \mathrm{l}\,\overline{1+x}^{n+1} x^e\,dx - e\int \mathrm{l}\,\overline{1+x}^n x^{e+1}\,dx$, quod reperies differentiando, si ut oportet ponas $d\log\overline{1+x}$ esse $\frac{dx}{1+x}$, neque iste valor altero, de quo mox, nisi uno membro est prolixior. Sed annotavi eum ob rationem non spernendam, quam adjeci. Tuus ejus loco substitutus errore non caret, quem descriptioni tribuo. Ais enim esse $\int \mathrm{l}\,\overline{x+1}^n x^e\,dx = \frac{1}{e+x} x^{e+1}\,\mathrm{l}\,\overline{1+x}^n - \frac{n}{e+1}\int \frac{x^{e+1}\,dx}{1+x}$, cum sit $= \frac{1}{e+1} x^{e+1}\,\mathrm{l}\,\overline{1+x}^n - \frac{n}{e+1}\int \frac{x^{e+1}\,\mathrm{l}\,\overline{1+x}^{n-1}\,dx}{1+x}$. Neque mi-

nus verum est, quod dixi esse $\mathrm{l}\,\overline{1+x}^2\,\frac{1+x}{x} = 2\int \frac{\mathrm{l}\,\overline{1+x}\,dx}{\mathrm{l}\,x} - \int \frac{\mathrm{l}\,\overline{1+x}^2\,dx}{xx}$ (☉). Sit enim $\mathrm{l}\,\overline{1+x} = f$ et $\frac{1+x}{x} = g$, foret $\mathrm{l}\,\overline{1+x}^2\,\frac{1+x}{x} = ffg$; jam $df = \frac{dx}{1+x}$, et $dg = -\frac{dx}{xx}$, ergo $2fg\,df = 2\,\mathrm{l}\,\overline{1+x}\,\frac{dx}{x}$, et $ff\,dg = -\,\mathrm{l}\,\overline{1+x}^2\,\frac{dx}{xx}$. Jam $ffg = 2\int fg\,df + \int ff\,dg$, ergo explicatione facta seu substitutis valoribus prodibit aequatio (☉). Quodsi jam etiam verum esset, quod ais, esse $\mathrm{l}\,\overline{1+x}^2\,\frac{1+x}{x} = 2\,\mathrm{l}\,x - \int \frac{\mathrm{l}\,\overline{1+x}^2\,dx}{xx}$, haberemus quaesitum, nam foret $\int \frac{\mathrm{l}\,\overline{1+x}\,dx}{x} = \mathrm{l}\,x$, quod locum habere non potest. Itaque suspicor Tibi hoc loco contigisse, quod mihi nimis saepius solet, calculi errorem.

Quae de seriebus ad quadraturas reducendis habes, optima sunt et meis consentanea, qui methodo quidem ista, ut vides, sum usus subinde, sed non omnia observavi, itaque ex tuis fio doctior. Nonnulla hujus generis latent dispersa in meis schedis, sed quae facilius, ubi opus, denuo eruo, quam in illa chartarum indigesta mole quaero. Haud dubie regressus a seriebus ad summas vel per quadraturas vel sine quadraturis pendet a quibusdam aequationibus finitis, quae ex ipsa serie oriuntur, varie tractata, sic ut ipsa series tandem ex calculo possit tolli. Neque hoc in seriebus tantum verum est, sed et in aliis expressionibus in infinitum tendentibus, quae seriem proprie dictam non constituunt, qualis est tua, quam refers $\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{1}}}}}}$ etc. ope extractionis, qualis est [etiam ista mea] ope divisionis $1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\text{etc.}}}}}$ per quam secatur linea in extrema et media ratione. Et generaliter pro tali divisione si scribas

$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + }}}}$ etc. erunt a, b, c etc. quotientes, qui prodeunt quaerendo maximam communem mensuram inter duas quantitates, quae si sint commensurabiles, finitur progressio; sin minus, pergit in infinitum. Vice-Comes Brounkerus apud Wallisium in Arithmetica infinitorum dedit talem expressionem pro circulo, ubi pro a, b, c, d, e etc. proveniunt, si bene memini, unitates; sed ubi ego hic pono unitates, ibi ipsi proveniunt numeri quadrati. Sed mallem progressionem pro circulo dari, qualem hic designo, ut haberi posset series quotientium in infinitum provenïens operatione, qualis adhibetur, quaerendo maximam communem mensuram. Etiam extractionibus radicalibus continuatis exhibetur latus polygoni circularis, ut constat. Sed magnitudo circuli inde non derivatur, nisi multiplicando per numerum infinitum. Circa continuatas quotientium investigationes multum meditatus est Dn. Lalovera, autor Itinerarii Siamensis, etsi istam expressionem continuatae in infinitum divisionis non adhibuerit. Continuatae istae in infinitum expressiones etiam adhiberi possunt in tangentium inversis ad quadraturas revocandis. Nam tangentium inversae similes se habent quodammodo ad quadraturas, ut radices affectae ad puras seu absolutas, ut si sit $dy = xdx + ydx$ seu $y = \frac{1}{2}xx + \int y\,dx$, ubi in $\int y\,dx$ substituendo valorem ipsius y inventum, fit $y = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \iint y\,dx\,dx$, ubi rursus in $\iint y\,dx\,dx$ valor ipsius y repertus substitui potest. Galli quidam, ni fallor, Dn. Roolle et Dn. Lanion*) appropinquationes quasdam pro aequationibus dedere, quae hoc fonte **implicationum**, ut voco, nitebantur, dum scilicet valor semirepertus in parte sua nondum reperta substituitur. Memini et Angli cujusdam, cujus nomen non succurrit, scriptum Anglicum vidisse in Anglia, qui similia quaedam adhibebat pro aequationum radicibus, sed in numeris magis quam in constructionibus linearibus, quas a Te et Dn. Fratre Tuo ex hoc

---

*) In Betreff dieses Namens, der Lagny heissen muss, siehe die folgenden Briefe.

fonte ductas libenter intelligo, et gratias pro indicio ago, etsi enim viderim quae Dn. Frater Tuus de talibus in Actis dederat, non potui tamen considerare attentius.

Dn. Groningius etiam ad me nuper scripsit et de Historia Cycloeidis consuluit; indicavi ipsi me esse autorem quadraturae segmenti obliqui, quam et olim publicavi in Diario Parisino ante multos annos; sed suasi, ut ne nimis immoretur leviculae controversiae inter Torricellium et Robervallium de primo autore quadraturae Cycloeidis, cum ipsa sit perfacilis. Exponenda potius inventa Wrenni et Dettonvillaei seu Pascalii, et ipsius imprimis Hugenii de Cycloeidis usu ad pendula sane pulcherrimo, de Tuo novo Cycloeidis usu nihil adhuc dicere licuit.

Rogo ut mihi folium de mense Lipsiensi novissime missum remittas, ut scilicet mensem alias mutilem futurum redintegrare possim. Mitto nunc folium novum cum dimidio, in quo videbis, quae vir egregius*), cui ambo quaedam objecistis, respondeat. Vellem venisset ad rem et locutus fuisset paulo apertius directiusque, ut Tibi mihique mos est. Ego quoties lapsus sum, id libenter et sine circuitione fateor. Miror quid hoc sit, cum dicit, **Methodum Tangentium inversam non amplius a se magni fieri.** Habetne pro parum utili, an pro parum difficili? Nam si utilis et difficilis est, utique magni facienda est. Utilem esse ad magni momenti problemata, experientia, ni fallor, docet. An igitur ipse eam facilem reddidit? Hoc non puto, alioqui dixisset. Nam quod ait, sibi successisse, quando inquisivit, fortasse indiget multa limitatione; certe ipsi ego talia aliquando in Actis proposueram, quae non attigit, nescio an in ea inquisierit, quemadmodum quidem verisimile videri posset. Est Vir magni ingenii, sed tamen hanc in eo observo Hypocrisin, ut sic dicam, philosophicam, quod vult videri spernere gloriam, quando eam maxime affectat. Quando Hanovera transibat, mihi nescio quae exposuit theoremata de circuli inscriptis et aliis, quorum non satis memini, ex quibus se magna ducturum augurabatur, quod ego animadvertere satis non poteram. Habet haud dubie multa egregia, quae si candide proferret, plus obtineret verae gloriae et magis prodesset Reipublicae. Quod ait, se a figura data contenta duabus rectis et una curva ordinaria abscindere posse partem imperatam

---

*) Es ist Tschirnhauss.

ductu alterius curvae ordinariae, id est facillimum; tantum enim oportet constituere in data figuram datae similem, quod fit emittendo rectas ex puncto in figura sumto ad quodlibet punctum ambitus, et eas in ratione constante minuendo. Sic habebimus figuram datae similem et similiter positam, fiant autem latera homologa in subduplicata ratione rationis datae, quam pars imperata ad totum habere debet. Pro solido seu corpore latera homologa seu emissarum imminutiones esse deberent in ratione subtriplicata. Sed si methodus ejus daret simul quadrationem, quando est possibilis (ut verba innuere videntur) maxime utique momenti foret; verum hoc difficile puto. Praeclara est Tua contra ejus excusationem instantia. Inter inquisitione dignissima foret in Geometria producere, quod in Circulo, Hyperbola et Ellipsi quodammodo incipitur. Nam Circulus sectorum magnitudine exhibet sectionem anguli, Hyperbola sectionem rationis seu logarithmi; non dubito jam, quin porro certo ordine exurgant altiores lineae alias sectiones exhibiturae.

Dic quaeso distincte, quaenam sint tua emolumenta praesentia, ut possim significare; aequum enim est, quod ais conditionem non debere fieri deteriorem. Utinam adjiceres denuo pretium corticis, ita enim me onere inquirendi levares, alioqui cogar chartarum massam percurrere, in quibus latere tuas oportet, quod nondum facere licuit. Nolim enim talia a me oblivioni tradi posse arbitreris. Si Dn. Nieuwentiit non vult aut non potest capere meliora, et tamen pervicacem sese ostendit, tractandus est instar Haeretici, quem post unam alteramve admonitionem devitandum esse scriptura docet. Vellem ipsi responderet Dn. Cluverius, jucundum id futurum esset. Vale etc.

Dabam Guelfebyti 28. Decembr. 1696.

XLII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ad novissimas Tuas nudius tertius acceptas ita statim respondeo. En exemplar programmatis*) per quod prorogationem ter-

*) Joh. Bernoul. opp. Tom. I. pag. 166.

mini mathematicis significo. Neuter nostrum erravit in summanda $\mathrm{l}\,\overline{1+x}^{\,n} x^e dx$; quin egregiam potius logomachiam commisimus, dum alter alterum non intelligebat; Tibi enim $\mathrm{l}\,\overline{1+x}^{\,n}$ erat logarithmi potestas, mihi autem potestatis logarithmus. Hinc deliberandum do, annon satius esset ut ad evitandam confusionem illud ita scriberetur $\mathrm{l}^n\,\overline{1+x}$, hoc autem sic $\mathrm{l}.\,\overline{1+x}^{\,n}$, necdum tamen bene se habet $\int \overline{\mathrm{l}^n\,\overline{1+x}\,.\,x^e dx} = \mathrm{l}^n\,\overline{1+x}\,.\,\overline{1+x}\,.\,x^e - n\int \overline{\mathrm{l}^{n-1}\,\overline{1+x}\,.\,x^e dx} - e\int \overline{\mathrm{l}^n\,\overline{1+x}\,.\,x^{e-1}dx}$, videtur loco ultimi membri poni debere $- e\int \overline{\mathrm{l}^n\,\overline{1+x}\,.\,\overline{1+x}\,.\,x^{e-1}dx}$. Videbis si denuo ultimas meas examinare placeat, hoc sensu mihi nullum, ut suspicaris, contigisse calculi errorem.

Optime dicis expressiones illas in infinitum tendentes non esse series proprie sic dicendas; aptius ita scriberentur etc. $\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b}}}}$ procedendo a dextra ad sinistram; unde ridicula comparatio olim mihi venit in mentem, quasi hujusmodi series aeternitatem ut ita dicam praeteritam, vulgares vero futuram repraesentarent. Cum Parisiis degerem, memini aliquid vidisse a Dn. Roolle et Lagny (nescio an sit idem qui Tuus Lanion) circa appropinquationes radicum, quod nitebatur fonte ut vocas implicationum, sed Roolle pro cubicis absurdos committebat paralogismos, quos etiam correxi et methodum correctam Dn. Hospitalio exhibui*). Jucundum erat videre ut hi duo, Lagny puta et Roolle, diris invectivis misere adeo se mutuo proscindebant pro re nihili et alter alterum plagii insimulabat; ridebam, cum viderem unum post alterum saepius in hospitio meo, ut uterque meum suae causaei patrocinium ambiret.

Cum Groningius ad Te scriberet, nihilne attigit de Msptis. Hugenianis mihi promissis? Potuisses ipsi indicare me infinita spatia cycloidis vulgaris quadrabilia invenisse praeter illa duo a Te et Hugenio reperta, quod forte etiam in Actis ostendam. Non erat, cur Groningium celares novum meum cycloidis usum pro celerrimo

*) Joh. Bernoull. opp. Tom. III. p. 529. sq.

descensu, hic enim illi ipse ego rem aperui, persuasus scilicet ejus historiam ante terminum elapsum lucem non aspecturam.

Legi et relegi schediasma*) Dn. D. T. sed, fateor, nulli ex nostris objectionibus satisfacit; multa dicit sed nihil dicit; affectat nescio quam obscuritatem qua errores suos palliare satagit, et simul sua mysteria pomposis verbis ut Alchymistae solent usque et usque promittit, nihil tamen unquam producit. Si planam adeo habet methodum tangentium inversam, ut ipsi jam sit ludus puerilis, quidni se accingit problemati celerrimi descensus? Sub finem loquitur de quodam specimine, quod jam ante biennium Tecum, ut dicit, communicavit; gestio scire quid sit et an inde probabile videatur rectangula rectarum se intersecantium non solum in circulo et illis curvis quas ego determinavi, sed in omnibus omnino curvis esse aequalia; interim falsum hoc esse perfacile demonstrarem, nisi id velit intelligere de duabus tantum rectis, uti innuere videtur quando ait certissimum id esse in tribus sectionibus conicis; hoc autem cum hic nihil faciat ad rem facile largior, non enim duabus duntaxat, sed infinitis, imo omnibus ex eodem puncto prodeuntibus rectis aequalitatem rectangulorum competere requirimus. Vellem D. T. solveret problema, quod in hoc programmate super hac materia propono, ut et illud quod jam in Actis proposui, sed altum silentium de hoc in sua responsione.

Mitto ecce (rogo ut remittas) scriptum**) certi cujusdam Mathematici Parisiensis Salvatoris, quod Dn. Marchio mihi communicavit, ubi Auctor erroneam quandam solutionem mei problematis exhibet. Nihil magis miror, quam quod Dn. Hospitalius eam cum plane nihil valeat adeo laudavit, et crassos errores quibus evidenter laborat non animadverterit: quaerit enim primo quod non est in quaestione, curvam scilicet de qua non est sermo, et deinde peccat in principia calculi differentialis, quando considerat duas lineas angulum infinite parvum constituentes ut absolute parallelas. Falsitas hujus solutionis vel ex eo solo patet (ut rescripsi Dno. Marchioni) quod juxta determinationem Geometricam tangentis curvae quaesitae pag. 3. hujus scripti traditam sequeretur dari quosdam casus, in quibus problema esset impossibile, facile autem percipitur

*) Responsio ad Observat. DD. Bernoulliorum. Acta Erudit. 1696. p. 519.

**) Siehe die Beilage zu diesem Briefe.

in omni casu esse possibile. Hic idem Salvator fuit qui proposuit problema aequilibrii, non tamen, licet 27 analogias instituerit, ad solutionem pervenit.

Jam olim ni fallor dixi distincte, quaenam sint mea emolumenta praesentia; salarium, ut ajunt, fixum est 1250 fl. Holland. seu 500 talerorum imperialium, praeter emolumenta academica quae vocant accidentia, quae ad 150 imperiales praeter propter ascendunt. Corticis jam diu oblitus sum; vellem ut etiam Tu reculae hujus obliviscereris et illam ut munusculum a me Tibi factum considerares.

Dn. Nieuwentiit utique responsione non dignus est; ipsi tamen forsan respondebo circa aequationes saltem exponentiales, quia ibi etiam mea res specialiter agitur, non tam illius in gratiam quam publici, quod hactenus exponentialium tractationem nondum satis vidit. Cur dicis, quod velles ipsi responderet Cluverius, quod jucundum id foret? cum tamen Cluverii nullam mentionem faciat; an forte olim hi duo se mutuo elogiis sc. exercuerunt. Vale et cum novo anno fruere sanitate etc.

Groningae 19. Jan. 1697.

Beilage*).

Probleme.

Estant donné les points A, B (fig. 79) trouver la Courbe AB, telle qu'un corps pesant la parcurant arrive de A en B dans le moindre temps possible.

Lemme.

Si un corps pesant descend par AB (fig. 80), et un autre par ADB, trouver le rapport du temps par AB à celuy par ADB.

Tirez les horizontales BC, DF, prenez AG moyenne proportionelle entre AF, AB, tirez l'horizontale GE. Je dis que le temps par AB est au temps par ADB comme AB est à AE + HB. (Nota que $\breve{AB}$ signifie le temps par AB et $\underbrace{}_{DB}^{AD}$ signifie le temps par DB apres avoir parcouru AD).

*) Nach einer von Leibniz revidirten Abschrift.

$$
\begin{array}{lll}
\text{Car} & \overset{\smile}{AB} : \overset{\smile}{AC} :: AB : AC & \\
\text{et} & \overset{\smile}{AC} : \overset{\smile}{AD} :: AC : AE. & \text{Donc ex aequo} \\
\hline
& \overset{\smile}{AB} : \overset{\smile}{AD} :: AB : AE\ * & \\
\text{de plus} & \overset{\smile}{AB} : \dfrac{AF}{\overset{\smile}{FB}} :: AB : BG & \\
\text{et} & \dfrac{AF}{\overset{\smile}{FB}} : \dfrac{AD}{\overset{\smile}{DB}} :: BG : BH. & \text{Donc ex aequo} \\
\hline
& \overset{\smile}{AB} : \dfrac{AD}{\overset{\smile}{DB}} :: AB : BH\ * & \text{en prenant la somme de *} \\
& AB : \overset{\smile}{ADB} :: AB : AE + BH. &
\end{array}
$$

Il suit 1.° si BF est infiniment petite, $DE = EC$, $DH = HB$, de sorte qu'il ne s'agit plus alors que de couper les lignes DB, DC en deux egalement en H, E.

2.° si BC est infiniment petite, alors DC est parallele à FB.

Proposition.

Soit la ligne donnée AB (fig. 81), l'horizontale BL, la perpend. FL. Soit coupé FB egalement en G, tirez GL. En suite tirez AC, DB, l'horizontale EH. D'une autre part tirez A(C) infiniment pres de AC, B(D) et l'horizont. (E)(H). De plus tirez les perpendiculaires HP, DR, ES. Enfin je suppose DF et BC infiniment petit du 1er degré. Il s'agit de trouver la situation de AD, DB, la plus avantageuse pour estre parcourue dans le moins de temps.

Pour cela il s'agit de trouver $AE + HB$ le plus petit qu'il est possible.

1.° La difference des obliques AD, A(D) à la perpend. AF est infiniment petit du 2me degré par rapport à AB, et par consequent à negliger par rapport à DE et HE qui sont du 1er degré.

2.° DC, (D)(C) sont paralleles à FB, donc elles sont coupées egalement en E, (E) et par consequent DB, (D)B en H, (H) et BR en P, donc $P(H) = \frac{1}{2}R(D)$.

3.° Lorsque AC est transportée en A(C), alors DE diminue en (D)(E), et sa differentielle est — SE, et BH en B(H) et sa differentielle est $P(H) = \frac{1}{2}R(D)$; pour trouver la situation de AD la plus avantageuse il faut que ces differentielles soient egales.

4.° Les triangles ES(E), LFG sont semblables, aussi bien que les triangles DR(D), BFD.

Donc $(E)S : SE = D(D) :: GF : FL$, de mesme

$D(D) : R(D) = 2\,P(H) :: BD : DF$, en multipliant

$(E)S : 2(PH) :: GF \times BD : FL \times DF$, c'est à dire

$(E)S : PH :: BF \times BD : FL \times DF$,

mais les differentielles $(E)S = P(H)$,

donc $BF \times BD = FL \times DF$,

donc $FL : BF :: BD : DF$, ce qui doit arriver, pour avoir la situation de AD la plus avantageuse et alors BD sera la tangente de la Courbe requise.

5.° Pour avoir geometriquement cette tangente BD (fig. 82) sur AB decrivez un demicercle, tirez la verticale BT et AT perpend. sur BA, inscrivez dans le cercle $AV = AT$, tirez BV, elle sera la tangente requise.

Car prenant BF infiniment petite, tirant la perpend. FL qui coupe BV en D, les triangles LFB, BAT sont semblables, aussy bien que BDF, BAV, donc $LF : FB :: BA : AT = AV :: BD : DF$ comme cy dessus.

6.° Pour avoir les soutangentes, tirez l'horizontale XAZ, ou la verticale AP, les soutangentes seront AZ, ou AS, en prenant A pour point fixe, et $AX = x$, $BX = y$. L'on trouvera successivement AB, $AT = AV$, BV et enfin AZ.

Ensuite on trouvera PS et AS.

Par le moyen des soutangentes l'on trouvera le rapport des differentielles dx, dy, et par les integrales l'on trouvera la nature de la courbe; mais les occupations que j'ay ne me permettent pas de donner plus de temps à cette matiere.

à Paris le 26. Decemb. 1696. **Sauveur.**

Der Marquis de l'Hospital hatte folgende Bemerkung hinzugefügt:

Je remarque qu'on peut se passer dans la proposition precedente des lignes A(C), B(D), ES etc. ce qui la rend beaucoup plus simple. Car puisque $AE + BH$ doit être un plus petit et que l'angle BAC est supposé infiniment petit, il s'en suit que $DE + BH = BF$ et prenant les doubles $DC + BD = 2BF$, et partant $BD - BF = BF - DC$. Si donc l'on decrit des centres A, B (fig. 83) les petits arcs CN, FM, il faudra que DM soit egale BN, d'ou l'on tire à cause des triangles semblables BCN, BLF et FDM, BDF la meme proportion que ci dessus que sert à determiner la position de la tangente BD.

XLIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Schedam Domini Salvatoris, Mathematici Parisini, cum gratiarum actione remitto. Placet in specimen elegantis et subtilis aberrationis. Nam, ut saepe dicere soleo, Egregiorum Hominum etiam errata docent. Inter alia autem hinc discimus, quam lubricum sit uti infinitesimalibus, nisi nostri Calculi filo dirigantur. Pro certo habeo Illustrem Dominum Marchionem Hospitalium, si rem voluisset ad calculum redigere, statim errorem fuisse deprehensurum. Credo etiam, si valetudo ejus nondum plane confirmata intentiores istas meditationes pateretur, ipsius Problematis solutionem non esse ingenium ejus effugituram.

Quod attentatam a Domino Salvatore solutionem attinet, equidem concedi potest, non tantum mediam geometricam et mediam arithmeticam duarum quantitatum infinitesimaliter, seu per inaccomparabile, differentium coincidere, sed et duas rectas angulum infinite parvum facientes haberi posse pro parallelis, cum de alia recta eas secante quaeritur, et (quantum judicare possum) Dominum Salvatorem his regulis male usum non esse. Sed alia sunt, quae solutioni ejus obstant; nam (ut differam infra notanda, quod rem aliam plane indagat, quam quae desideratur) reperio tum neglectum verae methodi infinitesimalis, tum insufficientem enumerationem eorum, ex quibus aptissimum est eligendum. Neglectus Methodi infinitesimalis in eo consistit, quod re eo reducta, ut (fig. 81) AE + BH sit omnium minima, et inde inferendo dAE = dBH, necesse est dBH esse infinities infinite parvam, atque adeo et dAE, quorum tamen neutrum in processu hujus solutionis observatur.

Nam omnis quantitas differentialis est utique uno minimum gradu inferior sua integrali. Cum igitur BH, vel ejus dupla BD, sit infinitesimalis primi gradus, utique dBH seu P(H) aut ejus

dupla dBD seu R(D) non possunt non esse infra primum gradum, seu erunt differentio-differentiales ad minimum. Ergo etiam dAE infra gradum primum seu minimum differentio-differentialis esse debebit. Sed hoc non fit in isto processu, et dAE seu S(E) est differentialis primi gradus, quod ex ipsomet processu sic colligitur: Triangula ES(E) et LFG sunt similia. Jam hujus trianguli LFG latera sunt accomparabilia, seu inter se comparabilia, cum omnes angulos habeant assignabiles, ergo et trianguli ES(E) latera sunt accomparabilia; jam recta E(E) est primi gradus, ergo impossibile est ut S(E) sit gradus secundi, alioqui foret ipsi E(E) incomparabilis. Interdum quidem fieri potest, ut differentiae quantitatum ordinariarum sint secundi gradus, ut ipsarum AD vel A(D), quippe angulum ad FD(D) facientium a recto inassignabiliter differentem, sed ipsarum AE differentiae sunt gradus primi, cum tamen, ut dixi, deberent esse secundi. Imo quod amplius est, ex figura inspecta, processuque solutionis, video ne ipsas quidem dBH esse secundi gradus, sed primi; quod utique prorsus incongruum est, differentias seu elementares quantitates esse homogeneas ipsis terminis seu quantitatibus integralibus. Id autem sic esse ita patet. Nam R(D) dupla ipsius dBH seu ipsius P(H) est primi gradus, ergo et ipsa dBH. Ipsam autem R(D) primi gradus esse eodem modo probo, ut ante. Nam, per ipsum solutionis processum, triangulum DR(D) simile est triangulo BFD; hujus autem anguli sunt assignabiles; ergo latera accomparabilia. Itaque et trianguli DR(D) latera sunt accomparabilia. Jam unum hujus latus D(D) est primi gradus, ergo et R(D) est primi gradus, non secundi; alioqui ipsi D(D) inaccomparabile foret. Patet ergo neglectus verae Methodi infinitesimalis.

Quid vero, si quis dicat, C(C), D(D), E(E) esse secundi gradus? Respondeo hoc esse contra mentem autoris, qui simpliciter dixit C et (C) infinite vicinas esse, quod utique intelligitur de primo gradu; alioqui admonuisset de secundo, ut alio loco fecit. Si quis tamen ad secundum gradum confugiendum jam putet, ne sic quidem effugiet, incidetur enim in defectum imperfectae enumerationis, de quo jam dicendum. Nam si (D) esset vicinum ipsi D per intervallum secundi gradus, novus esset in enumeratione defectus, tantum enim ex sic vicinis, non vero ex aliis innumeris inassignabilitate primi gradus vicinis aptissimum eligeretur.

Insufficiens quoque enumeratio eorum, ex quibus eligendum est aptissimum, ex eo patet, quod in solutione non eligitur aptissimum ex omnibus punctis D possibilibus, sed ex iis tantum, quae cadunt in rectam FD, nam et alterum (D) assumitur non ubicunque, sed in recta FD ad AB angulum rectum faciente; ergo si proba essent caetera, sequeretur tamen punctum D non esse electum ex omnibus possibilibus aptissimum, ut desideratur.

Sed si nullum in his omnibus peccatum esset, tamen, ut jam dicere occupavi, id quod indagandum sibi sumit solutio, scopum non ferit, alienumque est a Problemate proposito. A nobis enim quaerebatur, ut curva AD una cum sua productione infinite parva DB daret descensum brevissimum; hic vero indagatur modus efficiendi, ut chorda curvae AD, nempe recta AD, cum dictae curvae productione DB sumta, descensum brevissimum praebeat, quod est diversissimum.

Quanquam etsi omnia sese bene haberent et ad desideratam curvam pertinerent, tamen Problema non esset solutum; tantummodo enim reperta esset aliqua curvae quaesitae proprietas secundum suas tangentes, quod quidem non esset contemnendum, saltem enim Problema physicum reductum esset ad Problema purae Geometriae; sed non ideo esset solutum, nisi hoc geometrico Problemate soluto. Constat autem, quam difficile sit invenire curvas ex datis tangentium proprietatibus, quod Methodum tangentium inversam vocare solitus sum; et licet possit inveniri valor differentialium, seu ratio dy ad dx in ordinariis, non tamen inde semper calculum summatorium instituere, seu terminorum integralium relationes invenire in potestate est. Et quanquam concedi possit haec Problemata aliquo modo pro solutis habenda esse, quando redacta sunt ad quadraturas, cum scilicet demonstratum est, esse transcendentalia, constat tamen rationem haec praestandi nondum extare. Itaque hanc solutionem a Domino Salvatore tentatam a vera multis modis abesse fatendum est. Agnosco tamen non contemnenda nec vulgaria eum specimina etiam hic dedisse ingenii et acuminis, ac non procul abesse a regno coelorum Mathematicorum, si ita de nostris rebus jocari fas est. Non memini me quicquam vidisse ab eo editum: obversatur tamen animo nescio quid, ut videar mihi characterem manus ejus agnoscere.

Cum Parisiis essem, videbam subinde juvenem Lugdunensem peringeniosum, et singulari acumine in interiora etiam Analyseos et Geometriae penetrantem; sed ille ni fallor discesserat, dum adhuc essem Parisiis. Vix tamen mihi tunc occurrerant in Gallia, qui aptiores quam ille viderentur ad haec studia excolenda. Nominis non memini, ac proinde dicere non possum, an sit hic ipse Dominus Sauveur. Nosse etiam velim, an sit in Academia Scientiarum Regia, aliudve munus gerat. Sed quicunque sit, certe insigne aliquid praestare posse videtur. Memini legere olim in Diario Eruditorum Parisino, ipsum circa ludum Basettae aliquid mathematice fuisse meditatum *), quod tamen non vidi. Optarem vel ipsum vel alium aliquem ludos omnis generis mathematice tractare, et tam regularum sive legum rationem reddere, quam artificia primaria tradere. Dici non potest, quam multa ad Artem inveniendi utilia lateant in Ludis. Cujus rei ratio est, quod homines in jocosis ingeniosiores, quam in seriis esse solent, cum magis nobis succedant, quae cum delectatione peragimus. Vale etc.

Dabam Hanoverae 29. Januar. 1697.

P. S. Habes sententiam meam de solutione a Domino Salvatore tentata. Putem cavendum Tibi esse, ne dum defectus ejus indicas, veram solvendi rationem invitus demonstres. Et quidem quod Dominum Marchionem Hospitalium attinet, putem optime Te facturum, si solutionem veram ipsi communices, siquidem eam ipse desiderat; praesertim cum ipsi a morbo gravi restituto, ne suadendum quidem sit ut haec meditetur. Puto vere a Te dici, nomen illi Appropinquatori cum Dn. Roolle concertanti non esse Lanion, sed Lagny, et a me vicina nomina fuisse confusa. Vellem Dominus Tschirnhausius excitari se pateretur, ad edendum aliquid in nostris studiis se dignum; habere enim talia non dubito. Sperabam objectiones vestras hunc effectum habituras, sed hactenus declinavit. Fortasse dabit tandem manus. Non memini distincte Theorematum, de quibus loquebatur cum hac transiret. Quae elegantiora mihi videbantur, pertinebant ad Polygona circulo inscripta et circumscripta. Nihil mihi scripto consignatum dedit, unde miror, quod in schediasmate suo, de nescio qua communicatione mihi facta mentionem facere voluerit. Talia sic dicere, perinde est ac si non dicas. Certe aliquid inde duci posse ad solvenda Problemata, qualia a Te novissime proponuntur, non puto. Etiam Domino Hugenio talia quaedam exposuerat (nam hac transiens ad Ba-

*) Journal des Sçavans 1679. 4. Journ. du 13. fevr.

tavos tendebat); sed is mihi scripsit, sese magnas consequentias, quas exinde deducere vellet Dominus Tschirnhaus, non videre.

Dominus Groningius nihil vel de Te, vel de Manuscriptis Hugenianis: unde ego quoque dissimulavi talia mihi ex Te esse nota, quae ipse attingere noluerat, praesertim cum sese novam Newtoniani Operis editionem moliri scripserit: quam tamen dissuasi, quod de ea cogitare Newtonum ipsum intellexissem. Et suspicor Hugeniana ibi adjicere voluisse. Quod si iterum scribat, videbo an commode efficere possim, ut haec nobis communicet; praesertim si editionis cogitationem deposuerit. Etsi autem scribas, potuisse me significare ipsi usum Cycloidis ad Problema Tuum, ego tamen si fecissem, Te inconsulto, putassem fecisse me reprehensibiliter: cur enim arcanum tuum ipsi crederem, quod si ipsius neglectu, vel studio, ad alios emanaret, merito de me queri potuisses. Nec refert quod ille Librum suum tam subito editurus non est; potuisset enim rem aliis communicare aliter quam per librum, nec mihi ille satis est notus.

De emolumentis tuis proxime ad Berolinenses scribam. Sane Halis salarium eousque ascendere non puto. Privatae tamen informationes si quidem Te illis dare velis, hoc poterunt supplere atque etiam vincere.

Nieuwentiitius contra Cluverium in primis suis opusculis scripsit. Id puto Domino Cluverio non satis esse exploratum; alioqui fortasse respondisset. Idque non injucundum esse futurum, si modo acerbitas absit.

XLIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Non improbavi quod Dn. Salvator duas rectas AC, A(C) (fig. 81) angulum infinite parvum constituentes assumserit pro parallelis; hoc enim non concesso, pleraque nostra caderent; sed illum falsum puto quod quasi absolute parallelae essent, inde conclusit duarum illarum linearum partes DC, (D)(C) bifariam divisas esse in E, (E) per lineam GL, cum tamen differant divisiones istae a veris bisectionibus, quantitate quidem incomparabili cum

DC, sed tamen comparabili cum $\frac{1}{2}$P(H) vel R(D); ita ut non legitime inferri possit: ergo P(H) = $\frac{1}{2}$R(D), quamvis alias hoc verum sit, si (non attendendo ad lineam GL, ut ipse Salvator in processu non amplius attendit) modo supponantur DC, (D)(C) exacte bifariam divisae in E, (E). Quantum ad Tuas objectiones, in eundem fere modum ego objeceram; et quidem primo intuitu videbam Salvatorem quaerere aliquam curvam quae non est in quaestione, quod Dno. Marchioni eadem hora qua accepi solutionem Salvatorianam rescripseram, ut et ni fallor Tibi in praecedentibus meis. Sed ecce quid Dn. Marchio ad hanc objectionem reposuit: „Lorsque Mr. Sauveur m'apporta la solution, j'étois sur le point de sortir et ainsi je n'eus pas le loisir de l'examiner. Le lendemain matin l'ayant parcourue je me fis à moi meme une partie des difficultés que vous me marquez, et il me sembla d'abord (comme vous dites) que quoique le temps par la soutendante AC et par la petit coté BC fût un plus petit par rapport au temps par AB, il ne s'ensuivait pas que le temps par le polygone [ou la courbe AEDCB (fig. 84) fût aussy plus petit que par tout autre polygone. Cependant je me repondis en cette sorte: Puisque le temps par AC, CB est un plus petit par rapport à AB, celuy par AD, DC un plus petit par rapport à AC, celuy par AE, ED un plus petit par rapport à AD etc. il s'ensuit que le temps par le polygone AEDCB est un plus petit que par tout autre polygone et sans y faire davantage de reflexion, je passay au reste m'imaginant que Mr. Sauveur avoit examiné à fond cette difficulté etc. Mais je vois bien à present que ce n'est point la courbe de question dont il determine les tangentes, mais bien d'une autre courbe dont la soutendante avec la particule de la courbe voisine soit parcourue dans le moins de temps. Ainsi je vous accorde que Mr. Sauveur s'est fort trompé lorsqu'il assûre que cette courbe est celle la même qui étoit en question, mais je crois en même temps qu'elle satisfait à cet autre probleme etc.“ Hactenus Hospitalius.

Eandem insufficientem enumerationem eorum, ex quibus aptissimum est eligendum, etiam a me fuisse animadversam in Salvatoris solutione, colligere poteris ex iis quae Dno. Hospitalio respondi, quorum studio descriptionem retinui, ne forte alia quam quae revera objeci, mihi affingi possent. En autem propria mea verba, ut videas an quid insit veritati non consentaneum: „Je soutiens encore que les lignes que Mr. Sauveur suppose coupées en deux egalement ne le sont pas absolument: Car soit ADO (fig. 85) un angle quelconque, BO perpendiculaire à AD, DAH un angle infiniment petit, CO tirée du milieu C de la ligne BD, coupant la ligne EH en n; je dis que En ne sera pas egale à nH contre ce que suppose Mr. Sauveur; car ayant tiré EG parallele à BD, il est manifeste qu'elle sera coupée en F en deux parties égales EF, FG; et partant ayant mené Fm parallele à DO, ce seront Em, mH, et non pas En, nH, qui seront égales; or la difference en est mn qui est comparable ou P(H) ou $\frac{1}{2}$ R(D) dans la figure de Mr. Sauveur, c'est donc mal raisonner que de supposer En = nH pour en tirer P(H) = $\frac{1}{2}$ B(D) etc. Au reste vous croyez si Mr. Sauveur n'a pas attrapé la veritable courbe de question, qu'il ait toujours determiné les tangentes d'une autre courbe dont la soutendante avec la particule voisine de la courbe soit parcourue dans le moins de temps; mais je pretens qu'il n'a rien fait, vû qu'il suppose que le temps par la soutendante AC (fig. 86) et par la particule BC est un plus petit par rapport à AB absolument, au lieu que ce n'en est un qu'en consequence de la perpendicularité de la ligne DE sur la ligne AB, c'est-à-dire qu'il est vray seulement que le temps par AC, CB est plus petit que par tout autre AE, EB, prenant le point E dans la perpendiculaire DE en delà ou en deçà du point C. Or si vous prenez maintenant une autre ligne que DE, par exemple l'horizontale DF, vous y trouverez aussy un point G tel que le temps par AG, GB soit un plus petit à l'egard de tous les autres points qu'on pourroit s'imaginer sur la ligne DF. Il y a donc une autre courbe AGB qui passe par G, qui a la meme prérogative par rapport à la ligne DF que celle de Mr. Sauveur par rapport à DE; d'ou vous voyez qu'il y a me infinité de courbes de cette façon selon les diverses positions de la ligne DF ou DE; par quelle raison faut il presentement en choisir l'une plutot que l'autre? Mais en voyla assez sur le chapitre de Mr. Sauveur."

Caeterum perbene observasti in Salvatoris solutione neglectum verae methodi infinitesimalis, dum ille confundit diversorum graduum differentiales, aequando scilicet differentialem quantitatis infinite parvae cum differentiali quantitatis finitae, quae duae differentiales ad minimum uno gradu differunt; responderi quidem posse ipse notas, quod quantitates finitae quandoque differre possint differentiali secundi gradus, sed id isto loco non quadrat, nisi statuatur angulus EA(E) (fig. 81) infinities-infinite parvus. Quando aliquid quaerendum circa quantitates finitas et infinite parvas, optima mihi via videtur, ut primo omnes quantitates statuantur finitae, ut hic BF, quam considerarem tanquam finitam, unde communi modo indagarem quantitatem anguli FBD, quo generaliter cognito facerem in aequatione BF = 0, et sic prodiret quantitas anguli FBD et per consequens positio lineae BD, quam Salvator quaerit pro tangente curvae suae.

Largior quidem in istis, quae dedit Dn. Salvator, multum ingenii et acuminis inesse; patet tamen etiam illum nondum possidere genuinam methodum talia tractandi, sed quasi in tenebris palpare, cum interdum quaerat per longas ambages, quae uno ductu calculi absolvi possunt, teste problemate aequilibrii, quod in casu simplicissimo post 27 analogias institutas nondum ad finem perducere poterat, cum tamen nihil facilius fuerit, licet generaliter proponatur. Interim non dubito egregia ab eo expectari posse, si modo strenue hisce vacare velit. An sit in Academia Scientiarum ignoro, puto tamen non esse, cum enim Parisiis essem, ne nomen quidem audiveram; quis sit quidve muneris gerat, ex Hospitalio resciscam. Ipsum circa ludum Bassetae aliquid mathematice fuisse meditatum hactenus nesciebam; id videre optarem: nam frater meus jam a longis annis opus molitur, quod artem conjecturandi inscribet, ubi non solum omnivarios ludos mathematice tractandi, sed etiam alias in omni vitae genere probabilitates ad calculum revocandi modum traditurus est; nescio autem annon opus reliquerit imperfectum, saltem mea, quae olim contuli quaeque ipse non spernanda judicavit, jam vix non expunget solita sua simultate agitatus. Caeterum diu est quod Dn. Hugenius aliquid exhibuit de ludo aleae. Item in operibus mathematicis in folio (Ouvrages de Mathematique) quae paucis abhinc annis prodierunt Parisiis, aliquid videre est a Freniclio de combinationibus, ubi etiam agit de sorte investiganda certantium circa Electionem Senatorum Genuensium.

Ex quo Dno. Marchioni Hospitalio unam alteramve proprietatem curvae celerrimi descensus subindicavi, jam de novo sperat se ante Pascha penetraturum in solutionem, meam itaque oblatam ipsi mittere differo donec rursus petat: „Je vous prie (inquit) de ne me point envoyer vos solutions si elles ne sont pas parties, parceque cela m'ôteroit le plaisir de pouvoir penser à vôtre probleme que je trouve de plus en plus curieux, je vous prie seulement de les tenir toutes prêtes pour me les envoyer dans le terme de pâques qui est celuy que vous avez fixé." Ex Hollandia mihi rescriptum est Dn. Mackreelium viso meo programmate nuper impresso, quo problematis dilationem Eruditis significo, pro responso hoc tantum dedisse, que cela étoit bon pour les Allemands, mais que les Hollandois n'y repondroient pas. Tale judicium a sutore ultra crepidam judicante parum moror; credo Hugenium, mathematicorum Hollandorum maximum, si viveret, aliter judicaturum. Interim rescripsi ut Mackreelio indicetur, si solutionem intra terminum assignatum dederit, se centum florenos a me obtenturum, ne problema tanquam inutile quid infra dignitatem suam aestimet, cui solvendo ne opellam quidem perdere dignari velit.

Hisce diebus aliquid ad Acta misi de calculo exponentialium*), quod pro responsione inserviet ad ea quae Dn. Nieuwentiitius circa hanc materiam de novo opposuit; spero illum tandem acquieturum censura satis severa, nisi severiorem maluerit. Eodem Schediasmate respondi etiam Dno. Tschirnhausio, sed longe modestius, ita ut hoc forsan ipsum sit fortius excitaturum ad edenda quae premit.

Male sibi consulit Dn. Groningius, si operis Newtoniani editionem recudendam in se suscipit; quid enim expectandum ab Homine qui talia non intelligit, imo quem vix communis Geometriae limina transgressum credo; Tecum suspicor Hugeniana ibi adjicere voluisse, forsan quia videbat, cum hic esset, me nonnullo desiderio teneri illa videndi, atque sic thesaurum sibi esse non mediocrem, quem orbi literato impertiendo mirum quantum de publico mereri putabit; hinc non operae pretium duco, ut novas apud illum instantias facias nisi ultro communicaverit. Remitto hic Schediasma Tschirnhausianum maxima cum gratiarum actione. Vale etc.

Groningae d. 16 Febr. 1697.

P. S. Hasce Cursori traditurus accepi literas a Menkenio nostro qui cogat, ut excerpta mittam ex Considerationibus secundis Nieuwentiitii, objectionibus meis praefigenda; meas igitur ad Te in hunc diem 20. Febr. dimittendas distuli, ut interea excerpere et responsionem ad Dn. Menkenium uno involucro dimittere possem, quam proin ocyus ad eum deferendam cures, rogo.

---

*) Principia Calculi exponentialium seu percurrentium. Acta Erudit. 1697.

XLV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Credo ipsum Dnum. Salvatorem, intellectis judiciis, assensurum longe sese adhuc a proposito Problemate abfuisse. Itaque non est quod ejus tentatae solutioni amplius immoremur. Verissimum est ne illi quidem curvae exhibendae sufficere, quam quaesisse videri possit, et quae vereor ut sit possibilis, aut intelligibilis.

Domini Nieuwentiit Considerationes secundas accepi tandem, missu ipsius, ut videtur, Autoris, etsi ipse non apparuerit. Nam Bibliopola Batavus, cum alios libros Hanoveram mitteret, hunc extra ordinem adjecit, suggerente opinor Autore, vel ejus amico. Dici non potest, quam jucunda mihi fuerit harum considerationum inspectio, et quam effusos risus expresserit; usque adeo nugas agit Vir bonus. Exempli causa, vult numerum infinitum unum alio non esse majorem. Esto numerus infinitus m. Jam ipse agnoscit in calculo dari 2m; unde sequitur utique 2m esse majorem quam m, cum 2m sit duplus ipsius m. Hic noster respondet negando 2m esse duplum ipsius m. Et ut absurditatem cumulet absurditate, rationem reddit suae negationis, nempe 2m non fieri multiplicando numerum m per numerum 2, sed multiplicando numerum 2 per numerum m. Spectatum admissi risum teneatis amici. Qui talia concoquere potest, ab eo quis demonstrationes severas exigi ferat? Quis tulerit Gracchos de seditione querentes? Itaque constitui pro responsione, haec et similia quaedam, verbotenus excerpta, ad Acta mittere, judiciumque relinquere Lectori, annon talia recitasse sit refutasse. Vellem mihi datum fuisset inspicere quae pro Actis contra eum mittis; neque vereri debebas (quod Te fecisse opinor) ne quaedam peterem emolliri ut antea factum est. Neque enim ego indignationi Tuae intercedo.

Si qui in Batavis Problema Tuum se indignum dicunt, nae illi vel rem non intelligunt, vel vulpem imitantur, quae pyra cum attingere non posset, acerba esse dicebat. Dnum. Makreelium scio Dno. Nieuwentiit esse amicum; nam hic facit illius mentionem, et ille hujus Libellum priorem mihi, per quemdam iter hac facientem misit: sed non putabam, sive affectu erga amicum, sive invidia erga alios, eo se abripi passurum, ut res pulcherrimas contemneret, cum famae suae jactura.

Certe si Hugenius viveret et valeret, vix quiesceret, nisi Problemate tuo soluto. Nunc nemo est, a quo solutionem facile expectem, nisi a Dno. Marchione Hospitalio, aut a Dno. Fratre Tuo, aut a Dno. Newtono, quibus adderem Dnum. Huddenium, Consulem Amstelodamensem, nisi dudum has meditationes seposuisset. Aliorum nescio an quisquam toto Orbe ;nunc Problemati isti par sit. Uret interim Batavos istos et horum similes nobis invidentes, quod Dnus. Marchio Hospitalius tam candide de methodis nostris judicavit. Repeto autem, quod initio dixi, recte facturum Te, si eam tantum partem solutionis Tuae edas, quae Analysin adhuc nonnihil involvit methodo, quam vocas indirectam. Mihi enim (nescio an et Tibi) consultum videtur nondum in interiora admittere homines ingratos, et beneficium postea strenue dissimulaturos.

Gratias Tibi debeo, 'quod in Programmate Tuo honorificam mei mentionem facis. Problema*) quod subjecisti pure Analyticum nuper, otium nactus in itinere ad nundinas Brunsvicenses, consideravi in curru solus, et viam solvendi reperi, nescio an Tuae vel Fermatianae affinem, certe expeditam et commodam, et ni fallor generalem.

Videtur autem Tua solvendi ratio non omnes curvas complecti, quae quaesito satisfaciunt. Exempli gratia, cum curva quaeritur cujus rectangulum sub segmentis aequatur constanti, retentis Tuis valoribus pro x et y, in Actis Junii proximi assignatis, satisfaciet curva, in qua sit $y = bxx : , xx + bc$, posito bc esse valorem rectangulorum constantem. Haec autem curva in Tuarum numero non continetur, talesque alias possem assignare infinitas. Sed et Problema, quod in Actis Junii proponis et in Programmate per

---

*) Joh. Bernoulli hatte gezeigt, dass das Theorem: Wenn von einem Punkte innerhalb eines Kreises eine gerade Linie gezogen und nach beiden Seiten hin bis zur Peripherie verlängert wird, so ist das Rechteck aus beiden Theilen der Linie stets constant; nicht allein eine Eigenschaft des Kreises sei, sondern noch vielen andern Curven zukomme. Er nahm hiervon Veranlassung, das in Rede stehende allgemeine Problem zur Lösung vorzulegen: Quaeritur curva ejus proprietatis, ut duo illa segmenta, ad quamcunque potentiam datam elevata et simul sumta, faciant ubique unam eandemque summam. Die Analyse Leibnizens von diesem Problem folgt in der Beilage zu diesem Briefe.

transcendentes a Te solvi ais, potest solvi per ordinariam quoque. Sed venio ad Problema, cujus solutionem generalem Analystis proponis. Sit potentiae segmenti exponens e, segmenta ipsa sint DB, et $D(B)$, posito punctum constans esse D, et puncta, quibus recta per D curvae occurrit, esse B et (B), et desiderari ut $DB^e + D(B)^e$ sit aequal. constanti b; dico, retentis valoribus tuis ipsarum x et y, quaesito satisfactum iri, si fiat $y = x^{2e+1} - bx^{e+1}, : c$, quanquam adhuc aliis modis infinitis itidem generalibus satisfieri, et ad formam Tuae, etiam Series satisfaciens concinnari possit, plus minusve pro arbitrio producenda. Ita vides me, in Tui gratiam, etiam hoc Problema tentasse; sed vix talia ultra promittere ausim. Atque adeo ut vetulus ille athleta Virgilianus: Hic cestus artemque repono. Vale etc.

Dabam Hanoverae 23 Febr. 1697.

Beilage.

Venio ad Methodum ipsam et problematis solutionem. Venit scilicet in mentem hoc problema posse solvi per radices aequationum. Nam si aequatio sit quadratica ad x, cujus ultimus terminus sit ab, utique rectangulum sub duabus radicibus aequationibus erit ab. Sit haec aequatio assumtitia: $xx + hx + ab = 0$ (1) quae duorum est graduum, quia agitur de duabus radicibus. Consideremus porro puncta $B, (B)$ (fig. 92) esse in recta eadem, quae si sit data positione, datum quoque fore angulum ejus BDF ad rectam positione datam constantem DF; ducta ergo recta ordinatim applicata BF angulo constante DFB quocunque, patet dari rationem inter DB et FB. Sit DB, x, et BF, y, et fiet $DB : BF$ seu $x : y = m : a$ (2) ubi patet m variari, prout alia atque alia assumitur recta. Ponamus jam h utcunque dari per m et a aequatione (3) ejusque ope tolli h ex aeq. (1), ita ex aeq. (1) ope aeq. (3) fiet aequatio (4) in qua exstabit m, non vero h. Jam ope aequationum (2) et (4) tollatur litera m, et habebitur aeq. (5) ad curvam quaesitam, quae ob sublatam m ad nullum certum angulum BDF erit astricta atque adeo succedet, quaecunque sit recta DB transiens per punctum fixum D. Ex. gr. sit $-h = aa : m$ (3) et ex aeq. (1) fiet $xx - \frac{aa}{m}x + ab = 0$ (4) unde per (2) tollendo m fiet $xx - ay + ab = 0$ (5) quae aequatio coincidit ei quam Dn. Joh. Bernoullius hoc casu assignat in Actis pro circulo.

Aliter: Sit $h = -m$ (3) et ex aeq. (1) fiet $xx - mx + ab = 0$ (4) ubi pro m substituendo $ax : y$ ex aeq. (2) fiet $xx - axx : y + ab = 0$ (5) seu fiet $yxx - axx + aby = 0$ seu $y = axx :, xx + ab$ seu $y^{-1} = a^{-1} + b . x^{-2}$, quae solutio non est inter Bernoullianas. Si angulus ad F sit rectus et DF sit z, fiet $xx = zz + yy$ et fiet $y = azz + ayy ,:, zz + yy + ab$, quae utique aequatio non est ad circulum.

Venio jam ad problema a Dn. Joh. Bernoullio novissime propositum, ubi quaeritur ut sit $DB^e + D(B)^e =$ dato. Hic rursus satisfieri potest per radices aequationum. Sit aeq. (1) $x^4 - abxx + a^3h = 0$, erit ab summa quadratorum, et similiter $x^6 - a^2bx^3 + a^5h = 0$, erit a^2b summa cuborum. Et generaliter $x^{2e} - a^{e-1}b . x^e + a^{2e-1}h = 0$ (1) et $x : y = m : a$ seu $m = ax : y$ (2) et (3) h detur utcunque per m. Sit $h = m$ et ex aeq. (1) fiet $x^{2e} - a^{e-1}b . x^e + a^{2e-1}m = 0$ (4) ubi pro m substituendo valorem ex aeq. (2) sumtum fiet $x^{2e} - a^{e-1}b . x^e + a^{2e}x : y = 0$ (5) seu $\frac{1}{y} = a^{e-1}b . x^{e-1} - x^{2e-1} ,: a^{2e}$. Sin sit (3) $h = ac : m$ (posito manere c, utcunque varietur m) fiet (4) $x^{2e} - a^{e-1}b . x^e + a^{2e}c : m = 0$ et in hac aeq. pro m substituendo valorem $ax : y$ ex aeq. (2) fiet $x^{2e} - a^{e-1}b . x^e + a^{2e-1}cy : x = 0$ seu fiet (5) $y = x^{2e+1} - a^{e-1}b . x^{e+1} ,: c . a^{2e-1}$.

Haec methodus etiam prodesse posset pro inveniendis seriebus numericis, in quibus termini inter se certam habeant legem.

XLVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Groningae d. 23 Febr. 1697.

Nuperrimas meas ultimo Cursore ad Te dimissas una cum inclusis ad Dn. Menkenium, haud dubie jam acceperis, quando hasce accipies. Operae pretium duxi, ut praesentes Dn. Hospitalii*) heri acceptas sine mora Tibi communicarem, ex quibus videbis ejus solutionem, fortunae an industriae tribuendam nescio.

*) Siehe die Beilage.

Ejus enim formula generalis $dx = \frac{\mp andy}{\sqrt{y^{2n} - aann}}$ meae solutioni apprime conspirat. Interim in hac methodo Hospitaliana subesse videtur paralogismus, quando infertur: C'est-à-dire que la somme des $y^n ds$ doit étre la plus petite; cum enim distantia centri gravitatis debeat esse brevissima, erit $\frac{\int y^n ds}{\int y^{n-1} ds}$, non vero $\int y^n ds$, ponendum = minimo. Hanc difficultatem Dno. Hospitalio hodie rescribo, una cum aliquali via qua ei occurri possit, dicendo dum curva AM (fig. 87) infinitis modis quidem variabilis est, ejusdem tamen manere possit longitudinis, seu ejus aggravationes ejusdem ponderis, adeoque $\int y^{n-1} ds$ summi possit pro constanti. Sed nec hoc mihi omnino satisfacit, non enim de unico curvae puncto M tantum determinando agitur. Tuam itaque libenter audiam sententiam. Si haec methodus sit bona, habemus jam tres perveniendi ad quaesitum, unam directam quae Tibi adeo placuit, alteram ex optica, tertiam ex statica petitam reducendo scilicet curvam descensus ad speciem funiculariae; talem ergo resolvendi si non aperuissem olim Parisiis modum Marchioni, nec nunc suam reperisset solutionem; et forsan plane non reperisset, si non in omnibus meis ad eum literis digitum sat prope intendissem, ut tandem vel sola conjectura veram curvam descensus divinare potuisset; miror adeoque quod non citius repererit. Alterum meum problema in programmate impresso propositum, ut video, etiam solvit, postquam ipsi generalem talia solvendi methodum tradidissem pronuper: sed unde hauserit, mentionem non faciet.

Plura impraesentiarum non addo, nisi quod recens mihi nata filiola etiam recentia studiis meis afferat impedimenta. Vale et favere perge etc.

P. S. Remitte, quaeso, literas Hospitalianas. Jam credo, me posse problema curvae catenariae directe solvere, nempe ex consideratione brevissimae distantiae centri gravitatis ab horizonte, quod memini Tibi fuisse olim ex valde quaesitis, dum illud per series efficere instituebas.

Beilage.

De l'Hospital an Joh. Bernoulli.*)

Je ne vous ecris que deux mots, Monsieur, pour vous marquer que j'ay receu vôtre derniere lettre dans laquelle vous m'envoyez la resolution de l'equation differentielle proposée dans les Actes de Leipsic par Mr. vôtre Frere, qui est tres simple comme tout ce que vous faites. Je crois enfin avoir resolu vôtre probleme de la ligne de la plus courte descente. Je trouve que c'est une cycloïde ordinaire qui a pour origine celui des deux points donnés qui est le plus elevé au dessus de l'horison, et dont le diametre du cercle generateur doit être tel qu'elle passe par l'autre point donné. Mais afin que vous ne croyez pas que je me sois servi de l'art de conjecturer, comme Mr. vôtre frere, voici la maniere dont je m'y sois pris, qui me paroist fort generale.

Probleme.

Trouver la nature de la courbe AM (fig. 87) telle que la somme des $y^n ds$ soit la plus petite qu'il est possible ($AP = x$, $PM = y$, la courbe $AM = s$, et n marque une puissance quelconque de y).

Pour resoudre ce probleme, je considere la courbe AM placée en sorte que la ligne AP soit horisontale et que dans chacun de ses points M il y ait un poids exprimé par $y^{n-1} ds$: cela étant il est visible que cette courbe ainsi chargée doit prendre une situation telle, que son centre de gravité approche le plus pres qu'il est possible de l'horisontale AP, c'est à dire que la somme des $y^n ds$ doit être la plus petit. Je mene à present la tangente MT, et considerant tous les poids repandus dans la courbe AM comme etant reunis dans le point T, il est evident que $MP : PT$ ou $dy : dx :: \int y^{n-1} ds : a$ et partant $\int y^{n-1} ds = \frac{a\,dy}{dx}$ et prenant les diff. $y^{n-1} ds = \frac{a\,ddy}{dx}$ (dx est constante) donc $\frac{a\,dy\,ddy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = dx \,.\, y^{n-1} dy$, dont l'integrale est $a\sqrt{dx^2 + dy^2}$

*) Nach einer von Leibniz revidirten Abschrift.

$= \frac{y^n dx}{n}$, d'ou l'on tire l'equation differentielle $dx = \frac{\mp\, a n dy}{\sqrt{y^{2n} - aann}}$ qui exprime la nature de la courbe cherchée. Soit à present $n = -\frac{1}{2}$ qui est le cas proposé, et l'on aura $dx = \frac{a y dy}{\sqrt{4y - aayy}}$ ce qui fait voir que la courbe se doit construire ainsi. Soit un cercle AO (fig. 88) dont le diametre soit sur la ligne AK; ayant mené l'ordonnée KO et pris OM egal à l'arc AO, je dis que le point M sera dans la courbe cherchée AM de la plus viste descente. Il est visible que cette courbe est décrite par la revolution du cercle AO autour de AP et qu'ainsi c'est une cycloïde ordinaire.

Mandez moi, je vous prie, aussitost que vous aurez receu cette lettre, si j'ai bien rencontré. J'ai aussi trouvé la resolution suivante de vôtre autre probleme. Ayant decrit du centre A (fig. 89) et d'un rayon quelconque $AG = x$ la circonference GF, on prendra $AH = \frac{\cdot}{\cdot} b x^m \sqrt[p]{(1 - x^p)^{n-1}}$ et ayant mené HF qui fasse sur AG un angle quelconque donné HAF, je dis que le point F ou elle rencontre la circonference GF sera à une courbe CEFD telle que $FA^p + AE^p$ fait toujours la mesme somme.

J'attens avec impatience vostre reponse, et suis, Monsieur, du meilleur de mon coeur tout à vous etc.

ce 15 (?) Fevrier 1697.

Quand je venai à Mr. Varignon, je ne manquerai pas de lui faire des reproches de vostre part.

XLVII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Per novissimum Cursorem ad Te dedi literas, quas redditas non dubito. Nunc vel ideo scribo, ut Hospitalianas a Te acceptas statim remittam. Suspicabar Dnum. Marchionem Hospitalium (cui de successu gratulabor) Problematis Tui solutionem tandem esse reperturum, ubi animum intenderet, ut ex novissimis meis videbis; interim non dubito Tuis litteris multum fuisse adjutum, unde id ipsum fortasse hausit, quaerendum esse $\int y^n\,ds$ minimum. Dubitatio quidem Tua de legitimitate ratiocinationis qua utitur, ratione non caret. Revera enim posito ds elemento curvae, et ejus distantia ab horizonte posita y, et pondere quo gravatur unumquodque punctum posito $y^{n-1}\,ds$, momentum curvae ex axe erit summa factorum ex pondere ducto in distantiam, seu $\int y^n\,ds$; sed hinc non statim sequitur, centrum gravitatis curvae sic oneratae per y^{n-1} maxime descendere, cum distantia Centri gravitatis sit momentum semper divisum per pondus totum $\int (y^{n-1}\,ds)$.

Verum enim vero, quia pondus absolute sumtum potest intelligi datum, Problemate ita concepto, ut quaeratur curva, quae datum pondus data lege distributum per ipsam quamproxime horizonti admoveat, ideo res succedit feliciter, et dum momentum fit minimum, etiam centrum gravitatis maxime descendit. Et vicissim si curva detur, cujus sic oneratae centrum gravitatis maxime descenderit, etiam momentum maxime descendet, adeoque erit $\int y^n\,ds$ minimum, unde caetera consequantur.

In Catenaria fit $n = 1$, unde fit $\int y\,ds$ minima, data $\int y^{n-1}\,ds$, seu data $\int ds$, seu data s, curvae magnitudine.

Catenariam seu funicularium, sine tangentium consideratione, ex sola consideratione maximi descensus dari posse, non est dubium; sed cum talia per Seriem quaererem, de maximis istis nondum satis eram meditatus.

Olim cum Catenariam nostram tractarem, notaveram in schedis ejus exemplo multa alia hujusmodi Problemata maximorum vel minimorum a curvis praestandorum posse solvi, et ad tangentium viam reduci; sed postea, cum Problema Tuum aggrederer, jam sciebam id non esse opus, et via haec nonnihil est indirecta. Sed abrumpo coactus, ut hoc cursore Tibi Tua remittam. Vale et fave etc.

Hanoverae 26. Febr. 1697.

XLVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Venit etiam in mentem rursus quod de Domini Fratris tui Arte conjecturandi scripseras; ea erit haud dubie non contemnenda. Ego quoque talia jam olim sum meditatus, praesertim in usum Jurisprudentiae et Politicae. Voco Doctrinam de gradibus probabilitatis. An Dnus. Frater tuus aget etiam de arte, quam vocant, deciphrandi, quae utique a Mathematico tractari meretur: ea quae hactenus in eam rem extant, parvi sunt momenti. Vellem etiam oriretur aliquis, qui mathematice tractaret omne genus ludorum.

In Problematis tui Analytici solutione fortasse rectius signa mutassem et dixissem $y = -x^{2e+1} + bx^{e+1}$, : c. Revera tamen nihil refert, quae signa sumas, cum in arbitrio sit facere c quantitatem negativam. Dominus Lic. Menckenius haeret nonnihil, vereturque ne Tua in Nieuwentiitium sint asperiora. Ego, quanquam non viderim, quae in eum scripsisti, respondi tamen mihi videri non plane illi impune esse debere, quod tot tantaque absurda in brevem libellum congessit, ne exemplo ejus incitatus ignarissimus quisque de rebus non intellectis scribere cavillarique audeat.

Etiam Dnus. Frater ad me scripsit, Problema tuum sibi esse solutum, et mox alia difficiliora a se propositum iri; quod bene vertat. Misit solutionem ad Dnum. Menckenium, qui dubitat an lapsus termini sit expectandus, ut edatur ea solutio. Respondi haud dubie eousque differendam editionem, ne alii se praeventos querantur. Vale etc.

Dabam Hanoverae 5. Martii 1697.

XLIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Binas Tuas novissimas successivis Cursoribus recte accepi. Quae notas de Nieuwentiitii Considerationibus, et ego notaveram; tot tantasque ineptias ibi contineri (ut dixeram) Tibi imaginari non poteras, antequam illas vidisses; jam vero spectatum admissus, nec ipse risum tenes. Ridiculam illam distinctionem inter $2 \times m$ et $m \times 2$, quorum illud possibile, hoc impossibile dicit, etiam in excerptis, quae Tibi sub involucro ad Dn. Menkenium transmiseram, tanquam mirabile quid et in mathesi inauditum notavi, sed tamen laudando Virum ubique; affectabam enim nudam et historicam relationem harum Considerationum qualem Dn. Menkenius velut a suis excerptoribus factam desideraverat; nescio quo fato accidit, ut haec excerpta nondum acceperit, uti ex ejus novissimis intelligo. Si nondum miseris, rogo ut quantocyus mittas, quo suspicionem suam videat esse vanam, dum ex silentio meo credidit me admonitione sua (ut scilicet cum Nieuwentiitio mitius agerem) offensum fuisse. Interim mirari satis nequeo, quod Dn. Menkenius scribit, secundas istas Considerationes ad manus suas tandem pervenisse, sed nihil plane ibi deprehendisse censura adeo severa dignum, Auctorem omni modestia et humanitate, imo non nisi honorifice Tui nostrique mentionem facere, et per consequens sibi consultius videri, ut huic adversario publico scripto respondeam; ut verbo dicam, Dn. Menkenius meam responsionem (sane non est responsio, simpliciter enim inventa mea expono, ubi ad objectiones Nieuwentiitianas non nisi incidenter respondeo) Actis inserere declinat, idque, ut dicit, Tui praecipue causa; se enim non dubitare, quin meus procedendi modus Tibi sit summe displiciturus; vellem ut Dn. Menkenius meum schediasma (si imprimere nolit) Tibi videndum communicaret, quo ipse deliberares an ideo supprimendum esset, quod crassos Viri errores ridendo et quasi jocando aperuerim, abstinui enim ab omnibus invectivis et conviciis, nullasque admiscui acerbitates; quanquam in excessu non peccassem, nisi forte in defectu, etiamsi omnem acrimoniam in Nugatorem illum cumulassem. Quid nos juvat ab illo laudari pomposis et inanibus verbis, qui tamen re ipsa satis ostendit nihil minus quam nos nostraque in pretio habere; attende quaeso animum, annon passim Te Tuosque sequaces ut crassos Philosophos traducat qui finitum ab infinito et infinite parvo distinguere nesciant, qui ab imaginatione sua et a contemplatione figurarum non nisi finita repraesentare volentibus abstrahere non didicerint; attende, inquam, annon aperte satis dicat, differentiationes superiores a crassa nostra imaginatione originem suam traxisse. Nae quid hujus Viri blanditiae aliud sunt, quam Sirenum cantus, quibus indoctos allicere, illis imponere, nostra inventa subdole explodere, extenuare et si posset delere conatum. Video quo tendat; si patimur illius nugas ampliari et altiores radices agere, si benigne semper respondemus, certe fovemus anguem in sinu. Mihi perinde est sive spernat sive aestimet problema meum sordidus ille Pararius (courretier) Mackrelius, qui lucro quotidie inhiando magis quam bonis literis excolendis idoneus est; credo utroque et affectu erga amicum Nieuwentiitium (hujus enim absurdus opinionibus et ipse praeventus) et invidia erga nos eo se abripi passum esse. Sed apposite eum comparas Vulpi in fabula pyra dicenti acerba cum attingere non posset, cujusejusdem fabulae etiam mentionem fecerat amicus meus, cum mihi egregium Mackrelii responsum perscriberet. Quidni addis etiam Wallisium (qui nil non solvisse jactat) iis quos problemati meo pares existimas? Huic et Neutono utrique bina exemplaria programmatis mei sub nudis involucris in Angliam transmisi; an autem acceperint nescio. Intelligo a Dno. Menckenio pervenisse nuper a fratre meo solutionem; vidistine illam? Dic quaeso promte, quid tandem prodierit tanto tempore dignum; credit enim Dn. Menkenius Te me ejus jam certiorem fecisse, sed postremae Tuae de hoc silent.

Sic ergo duas habemus novas solutiones, ab Hospitalio alteram, alteram a fratre, quas tamen non haberemus, nisi prior assignatus terminus prolongatus fuisset, id quod mirifice momordisset fratrem qui diu adeo problemati frustra insudavit, ut si non solvendo, saltem conjecturando curvam quaesitam circulum esse statueret. Puto jam tempus esse ut nostras solutiones Lipsiam mittas, quo omnes simul edantur; approbo quicquid Tibi visum fuerit de edenda vel non edenda methodo mea directa. Schediasma meum in Tuis est manibus; dele quod voles, gratum erit quocunque modo agas: posset interim mentio fieri (salvo Tuo meliori judicio) nobis esse methodum talia directe solvendi, quam communicaturos nos esse privatim petentibus; non enim aequum est ut justus cum injusto patiatur, et gratus cum ingrato excludatur.

Ecce jam quo pacto Catenariam vulgarem sine tangentium consideratione per methodum hanc directam determino. Esto curva quaesita AB (fig. 90) cujus elementum Bb, radii circuli osculatoris LBE, Lbe, secantes horizontalem ER angulo quocunque. Nunc, ut in curva celerrimi descensus feci, ita et hic centro L descriptos considero arculos concentricos Cc, Bb, Cc etc. ex quibus eum quaero, qui ductus in suam distantiam ab horizonte faciat minimum (ob humillimum descensum centri gravitatis) ut habeam relationem inter LB et BC; unde deinde curvae determinatio. Si ergo LE constans ponatur a, et LB, x, erit BE, $a - x$; sunt autem Cc, Bb, Cc etc. ut LC, LB, LC etc. id est ut x, et CG, BH, CG etc. ut EC, EB, EC etc. id est ut $a - x$, ergo $x \times \overline{a - x}$ seu $ax - xx$ debet aequari minimo, unde invenitur $x = \frac{1}{2}a$. Ex quo colligo curvam funiculariam ABD esse talem, ut radius osculatoris productus ad horizontalem ubique bisecetur ab ipsa curva, atque hoc perfecte respondet curvae nostrae olim inventae, quae si examinetur, reperietur habere hanc proprietatem, et horizontalem, a qua puncta curvae distare censentur, esse illam quae transit per centrum funiculariae R. Ast vide quid insoliti hic contingat, quod nondum satis diluere possum: summa ipsorum Bb in HB debet utique esse m i n i m u m, quia centrum gravitatis quam maxime descendit; interim (existente $x = \frac{1}{2}a$) $ax - xx$ non minimum, sed maximum est, id est $Bb \times HB$ majus quam $Cc \times GC$; et per consequens videtur hac ratione reperiri curva, cujus centrum gravitatis horizonti non quam proximum, sed potius ab eodem remotissimum est; haec nondum conciliata mihi fateor. Interim eodem modo omnes alias funicularias sine tangentium interventu determinari posse facile vides.

Quod ad dubitationem meam reponis pro legitimitate solutionis Hospitalianae, idem est, quod ipse ego Dno. Marchioni in sui defensionem simul suggessi, quando illi dubitationem meam movebam, nempe pondus curvae oneratae absolute sumtum posse intelligi datum; sed hoc si placet nondum* ad amussim satisfacit, nam licet unius curvae portionis pondus sit datum, reliquarum tamen non item; videtur itaque considerata curvae portio indeterminata, et ipsum pondus considerandum esse ut indeterminatum. Ut dicam quod res est, haec solutio adeo parum evidens est, ut nisi ex nostris solutionibus veritatem perspectam haberemus, merito dubitarem an curva quaesita esset Cyclois; etiam ex Te quaeso an acquiesceres hac solutione, si nulla alia suppeteret? Quod quaerendum sit $\int \overline{y^n ds}$ minimum, jam tum aperiebam Dno. Hospitalio, cum me rogaret, ut sibi problema mechanicum in pure Geometricum reductum exhiberem, sed ei postea facem multo clariorem accendi. Credo illum gaudio nimis perfusum ob insperatam

solutionis inventionem, confestim fratri meo nomen curvae communicasse, unde forsan et ipse demum in solutionem penetravit.

Problema pure analyticum quod in programmate priori subjeci, nite solvisti, et quod miror, cum infinitae sint solutiones, Tua illa ipsa est quae mea. En analysin meam, ut si solutionem edis, me quoque solvisse verbo attingere possis. Esto (fig. 91) DB, x; DC, z; exponens e, constans b, et alia utcunque assumta c. Ex hyp. $x^e + z^e = b$; reduco hanc aequationem ad aliam, ubi x et z analogam positionem utrobique observent (id quod fundamentum est hujus scrutinii) multiplicando per $x^e - z^e$, unde habetur $x^{2e} - z^{2e} = bx^e - bz^e$ seu $x^{2e} - bx^e = z^{2e} - bz^e$, unde sequitur quod $DB.DC(x.z)$ seu $BF.CH :: cx \times \overline{x^{2e} - bx^e}.\ cz \times \overline{z^{2e} - bz^e}$, ergo si BF fiat $= cx \times \overline{x^{2e} - bx^e}$, etiam CH habebit valorem analogum $cz \times \overline{z^{2e} - bz^e}$; et per consequens curva ABC respondebit quaesito. Quod vero observas, meam solvendi rationem non omnes curvas complecti, libenter agnosco; sed oportet ut etiam agnoscas impossibile esse, ut una eademque methodus omnes solutiones exhibere possit, quod jam diu etiam respondi Dno. Hospitalio sciscitanti an possim demonstrare omnes solutiones possibiles comprehensas esse in illa serie quam in Actis exhibui; quae series etiamsi infinities-infinitas solutiones comprehendat, habeo tamen infinitas ut ita dicam methodos, quae totidem series diversas suppeditant. En quandam quam Hospitalio in eam rem communicavi: retentis iisdem literis oportet ut $xz = 1$; eligatur quantitas composita ex x et 1, quomodocunque ex. gr. $1 + x$, vel $1 + xx$, vel $1 + x^3$, vel $1 + x + xx$, vel $1 + xx + x^3$, vel $x + x^4$ etc. Sumamus simplicissimum $1 + x$; posita $BF = ax^m \times \overline{1 + x}^n$, determinandae erunt m et n aut una per alteram, id quod sic facio: Natura curvae ABC cum sit ubique eadem, erit $CH = az^m \times \overline{1 + z}^n$; sed ob simil. triang. DBF et DCH, $x\,.\,ax^m \times \overline{1+x}^n :: z\,.\,az^m \times \overline{1+z}^n$ vel $1\,.\,x^{m-1} \times \overline{1+x}^n :: 1\,.\,z^{m-1} \times \overline{1+z}^n$ et consequenter $x^{m-1} \times \overline{1+x}^n = z^{m-1} \times \overline{1+z}^n = \left(\text{ob } xz = 1 \text{ seu } z = \frac{1}{x}\right) \frac{1}{x^{m-1}} \times \overline{1 + \frac{1}{x}}^n = x^{-m+1} \times \frac{\overline{x+1}^n}{x^n} = x^{-m+1-n} \times \overline{1+x}^n$, hinc dividendo primum et ultimum per $\overline{1+x}^n$, erit $x^{m-1} = x^{-m+1-n}$, id est $m - 1 = -m + 1 - n$ seu $n = -2m + 2$. Dico igitur si fiat

$BF = ax^m \times \overline{1+x}^{\,-2m+2}$, habebitur curva quaesita ABC, quae cum m sit arbitraria, infinitis modis variari potest, et ut puto, etiam Tua $y = bxx :, xx + bc$ ibi comprehenditur, ponendo $m = 2$. En igitur aliam seriem y seu $BF = ax^m \times \overline{1+x}^{\,-2m+2} + bx^p \times \overline{1+x}^{\,-2p+2} + cx^q \times \overline{1+x}^{\,-2q+2}$ etc. cujus termini tam conjuncti quam separati satisfaciunt. Eligendo $\overline{1+x+xx}$ et ponendo $BF = ax^m \times \overline{1+x+xx}^{\,n}$, eodem ratiocinio reperietur $n = 1 - m$ et per consequens erit y seu $BF = ax^m \times \overline{1+x+xx}^{\,-m+1}$, unde iterum series alia $y = ax^m \times \overline{1+x+xx}^{\,-m+1} + bx^p \times \overline{1+x+xx}^{\,-p+1} + cx^q \times \overline{1+x+xx}^{\,-q+1}$ etc. Hinc ad lubitum series innumerae construi possunt, quarum quaelibet infinities infinitas continet solutiones, et tamen nondum exhaustae sunt vel ad infinitesimam partem; vides ergo quam impossibile esset, generalem tentare methodum omnes possibiles complectentem. Problema quod in Actis solvendum relinquo et quod in programmate per transcendentes a me solvi dico, per ordinariam solvi posse nondum video; Tuum itaque modum per ordinariam solvendi libenter viderem. Vale etc.

Groningae 13 Martii 1697.

Adjunctas Dno. Menckenio citissime curandas rogo obnixe.

L.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratum est, quod mea solutio secundi Problematis Tui a Tua non abludit. Video tamen methodos nostras differre, et cum Tuam mihi aliquo modo significaveris, meam vicissim mittam, quam spero, ob generalitatem et extensionem, Tibi non displicituram. Cum olim notassem locum ex Epistolis Cartesianis de Fermatio, has paucas voculas in excerptis meis annotaveram: Hoc fieri potest per radices aequationum. Haec verba diu multumque frustra consideravi, donec nuper, in curru dum solus Brunsvicum vehor, sensum eorum reperi, qui hic est. Perinde esse, ac si quaeratur curva, quae rectam propositam ita secet in duobus punctis, ut, sublata una ex duabus incognitis, curvae et rectae aequationem

localem ingredientibus, prodeat aequatio ad unam incognitam, cujus secundus terminus, exempli gratia, sit datus; posito enim segmenta vel ipsorum potentias esse radices aequationis, utique summa eorum aequabitur termino ejus secundo. Sit ergo punctum fixum D (fig. 92) unde educta recta secet curvam quaesitam in punctis B et (B) et debet $DB^e + D(B)^e$ esse aequale ipsi $a^{e-1}b$, constanti. BD sit x, fiet aequatio (1) $x^{2e} - a^{e-1}bx^e + a^{2e-1}h = o$. Hujus aequationis [$1^{mae}$] duarum radicum x^e, $(x)^e$ summa faciet $a^{e-1}b$. Praeterea quoniam puncta B et (B) cadunt in rectam, ideo ex B ordinatim applicatam BF vel (B)(F) ducendo ad directricem quamdam seu axem DF(F), et BF vocando y, utique ex natura rectae DB(B) erit (2) $x : y = m : a$, posito per rationem ipsius m ad constantissimam a exprimi angulum rectae hujus ad rectam primariam seu directricem.

Habemus ergo duas aequationes ex visceribus Problematis suppeditatas, unam unius incognitae, alteram ad rectam. Hinc jam possumus invenire aequationes ad curvam satisfacientem, via generali omnes modos possibiles complexa. Nempe assumatur relatio qualiscunque algebraica vel transcendens, apta inter m et h, intervenientibus ut lubet constantibus a, b, c etc., et haec relatio dabit aequationem tertiam, cujus ope tollatur m, si placet ex aequatione 2, et habebitur aequatio quarta, in qua extabunt x, y et h. Hanc denique conjungendo cum aequatione prima, quae etiam continet h, tollatur h, et habebitur aequatio quinta quaesita, solas continens indeterminatas x et y, quae proinde est ad curvam quaesitam. Si jam aequatio tertia assumatur satis simplex, verbi gratia $h = ac : m$, tunc pro aequatione quarta fiet $cy : x = h$, quem valorem ipsius h substituendo in aequatione prima, fiet aequatio quinta quaesita, nempe ad curvam, scilicet $y = -x^{2e+1} + a^{e-1}bx^{e+1}, : ca^{2e}$.

Ita vides, hac methodo omnes solutiones possibiles contineri semel in universum. Tua autem mihi multo majore artificio et ingenio opus habere videtur, ut analogae positiones bene formentur. Et meretur bene distincteque exponi, cum possit habere multos alios usus. Caeterum meam vides itidem latissime patere, etiamsi scilicet non duo, sed plura curvae puncta in unum conjuncta aliquid praestare debeant, ubi Tuo artificio uti difficilius foret. Idemque est si proprietas talis sit, ut curva quaesita non a recta, ut hactenus, sed ab alia curva sit secanda. Ubi vides novum plane campum aperiri Analyseos localis generalissimae, pro quantocunque numero punctorum curvae et pro summis, rectangulis, potentiis etc. Nondum autem necesse puto, ut hanc methodum publicemus; itaque hactenus eam Tibi soli significare constitui. Rogo ut Tuos calculos pro curvis istis mihi distincte communices.

Dno. Menckenio scripsi denuo, ne supprimat justissimas censuras, praesertim cum mihi significaveris non esse acerbas, sed sale conditas. Dudum ei Tuas priores misi, nunc et alteras statim ad eum destinavi. Solutiones pro Actis mittam. Fateor Te, non sine magna ratione, in Dni. Marchionis solutione haesisse, atque etiam vidisse per Te remedium, quod cogitavi. Difficultas, quae superest, non est spernenda, quod scilicet curvae portio sit indeterminata, adeoque et pondus. Cogitandum interim relinquo, annon, hoc non obstante, pondus illud quodcunque, pro illa portione curvae, quaecunque ea sit, ut determinatum assumi possit. Et hoc memini me et olim observasse. Quidquid sit, haesissemus fateor non parum et spatium deliberandi pro meditatione attentiore petiissemus, nisi constitisset de successu, qui fecit ut accuratius inspicientes contenti esse possimus.

In Tua ratione perveniendi ad Funiculariam, per viam descensus maximi, miror consensum eventus, cum in methodo ipsa sit difficultas: neque enim satis video, quomodo cum natura lineae cohaereat, ut ex arculis sumatur ille, cujus momentum ex horizontali sit minimum.

Video Te magnam lucem Dno. Marchioni Hospitalio accendisse, cum suppeditasti ipsi quaeri, ut $\int y^n ds$ sit minimum. Quod si adhuc clariorem, ut ait, facem ipsi accendisti, minus miror quod successit. Misit mihi suas solutiones utriusque Tui Problematis*), sed sine analysi, Actis inserendas, quas cum Tua mittam Dno. Menckenio, sed ita tamen ut tuae mentionem faciam in ipsa mea, per modum Epistolae, ubi pro merito et ipsam, et directam methodum commendabo, quam tamen nunc supprimam, quia probas. Interim, si quid adhuc vis Tuis verbis addi, significabis.

*) Der Vollständigkeit wegen mag noch die Auflösung des Problems der Brachystochrone, so wie sie vom Marquis de l'Hospital an Leibniz übersandt wurde, in der Beilage folgen.

Puto me Tibi de Domini Fratris Tui solutione in meis nuperis scripsisse et notasse, quod in suis ad me literis Cycloidem directe nominarit. Tunc cum prorogabamus terminum, consilium meum erat, suadere Tibi, ut primo termino elapso, Domino Marchioni et Domino Fratri solutionem mitteres, ita ut prorogatio pertineret ad extraneos nostrarum Methodorum; sed nescio quomodo oblitus sum. Semper suspicabar commercio Tuo futurum esse, ut Domino Marchioni res suboleret; sed cum tibi fundamenta debeat, eo minus id displicere debet.

Vellem nosse quae Domini Fratris Tui methodus fuerit: ait se hac occasione nova Problemata propositurum.

His scriptis, accipio literas Domini Menckenii, quibus video, non expectatis nostris, festinasse studiose recensionem Libri Nieuwentiitiani, quod mihi non parum displicet; ita enim videtur homo dixisse aliquid, cum dixerit nihil. Tua etiam contra ipsum sunt adjecta; sed cum priora non viderim, nescio quid sit resectum.

Pene oblitus eram adjicere curvam algebraicam Problemati priori Tuo satisfacientem, quam desiderabas, et nunc videbis, esse circulum; in eo enim utique factum ex quadrato unius segmenti in alterum segmentum erit semper idem, si punctum, ex quo recta educitur quae segmenta contineat, sit ipsum centrum, cum segmenta sint semper aequalia, nempe radii. Quomodo eam curvam tute investigaveris, videre gratum erit. Fortasse Juvenis ille Batavus, qui solutionem speravit, erit Nieuwentiitio docilior. Ubi nunc Dn. Frater tuus natu minimus agit, postquam ex Gallia rediit? Vale etc.

Dabam Hanoverae 19 Martii 1697.

Beilage.

Domini Marchionis Hospitalii solutio problematis de linea celerrimi descensus.

Problema hoc (de quo Galilaeus prop. 36. motus accelerati) cum difficile admodum mihi prima fronte visum est, tum valetudine utor adeo incerta, ut ab illo abstinere primum decreverim. Atque huic quidem sententiae eo firmius inhaerebam, quod intra sex menses ad illius discussionem concessos id a nemine solutum videretur, si tamen unum excipias geometram insignem Leibnitium, qui illud solvit non modo, sed et utpote omnium labore ac vigiliis dignissimum, denuo proposuit geometris, alterumque sex mensium spatium, quo in id a pluribus incumbi posset, ab authore impetravit. Desidem hac in parte ac operis asperitate deterritum erexit me doctissimi authoris Bernoulli programma Cal. Jan. anni hujus 1697 editum, quo totius orbis geometras ad hujus problematis solutionem iterum invitat. Tanta igitur quaestionis hujus commendatio et fama me tandem victum compulere, ut illius solvendae studio in societatem laudis ac gloriae cum tantis geometris venirem. Nec spem fefellit eventus, imo superavit, cum id solverim problema methodo adeo generali, ut non Galilaei modo hypothesin, sed et aliam quamvis de descensu gravium possibilem complectatur. Quod autem in solutione problematis de curva funiculari praestiterunt olim Hugenius, Leibnitius et Bernoullius, id ego nunc a me nuda problematis hujus solutione praestandum censeo, meam scilicet alias palam facturus methodum, cujus tamen jam (exeunte Febr.) clarissimo problematis authori Bernoullio privatim copiam feci.

Problema.

Datis in plano verticali duobus punctis A et B, assignare mobili M viam AMB, per quam gravitate sua descendens et moveri incipiens a puncto A brevissimo tempore perveniat ad alterum punctum B.

Solutio.

Ducta per punctum superius datum A linea horizontali AC, describatur cyclois ordinaria quae incipiat a puncto A et cujus diameter AD circuli generatoris AEDF, qui volvitur super AC, talis sit, ut punctum describens A transeat per alterum punctum inferius datum B. Dico portionem AB cycloidis sic descriptae proposito satisfacere.

Si supponatur, quod celeritates acquisitae sint in ratione altitudinum emensarum, dico curvam quaesitam AB fore portionem circuli centrum habentis in horizontali AC et transeuntis per data puncta A et B. Unde liquet conjecturam Galilaei veram evadere in hac hypothesi, ab illius multum diversa.

Tandem si vocentur abscissa AC, x, applicata CB, y, et generaliter supponatur quod celeritas acquisita ex descensu per altitudinem CB exprimatur per y^m: dico naturam curvae quaesitae exprimi per aequationem differentialem $dx = \frac{m y^m dy}{\sqrt{1 - mm y^{2m}}}$.

LI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Novissimas meas ante octiduum ad Te datas acceperis procul dubio. Non expectata responsione, Tibi statim mittendam duxi solutionem Angli anonymi, quam nuperrime a Dno. Basnagio Bellavallio accepi. Pro excerptis ipsas misissem Transactiones, si ob nimiam molem non adeo incommodum id fuisset. Adjungo ecce Bellavallii literas, ut et schedulam alteram simul acceptam, quam incognitus mihi Auctor substituit priori Tibi jam communicatae ante octiduum; fatetur quidem Juvenem illum Hagiensem errasse, ita tamen ut dubitet an Anglus quaesito satisfecerit, ob rationem quam ibi vides, quod scilicet ascendere non sit descendere, sed pura puto est cavillatio. Sensus enim problematis est, ut quaeratur via ab uno puncto ad alterum, quam mobile citissime percurrat, sive demum illud fiat per descensum continuum, sive partim per descensum partim per ascensum; praeterquam quod a superiori ad inferius non ascenditur, sed descenditur, per quamcunque viam illud fiat. Non secus ac viator dicitur descendere ex monte, licet inter descendendum forte offendat asperitates et colliculos, quos non nisi ascendendo superare potest. Dn. Bellavallius mentionem facit quarundam Tuarum objectionum contra Principia Cartesii, quas mihi communicandas offert; respondeo ipsi hodie, eas mihi gratas fore, spero enim me quid singulare ibi reperturum praeter illud, quod observasti circa quantitatem motus. Auctorem Solutionis in Transactionibus publicatae puto esse Dn. Newtonum, quod conjicio exinde, quia scribit se accepisse duo exemplaria programmatis mei; verum et Newtono et Wallisio utrique misi duo exemplaria sub nudis involucris. Quod interim illum prae hoc suspicer, est quod Newtonum magis, quam Wallisium in recenti Infinitorum Geometria versatum videam. Caeterum enim cum veram solutionem jam publice extare videas, non puto multum cunctandum esse cum edendis nostris solutionibus. Illud quoque desiderarem, ut meo Schediasmati praefigeras diem, quo solutionem meam ad Te mittebam qui erat $\frac{21}{31}$ Julii 1696. Te celare non possum, quam varia sint judicia de isthoc problemate. Cl. Braunius, Collega meus, ostendit mihi literas a Professore quodam

Harderovicensi acceptas, quae ita ordiuntur: Redditae mihi gratissimae Tuae literae, una cum problemate Bernoulliano, quod quam primum in manus meas pervenit, cum Clariss. Collega Wynen communicavi, qui Te resalutat, et solutionem haud difficilem esse ait, modo determinetur hypothesis de terrae motu vel quiete, provocatque ad Stephanum de Angelis et Ricciolum qui similia fuse tractaverint. Iste Wynenius in Academia Harderovicensi Mathesin docet, sed quid, quaeso, motus Terrae vel quies hic ad rem facit? an quid vidisti in Stephano de Angelis et Ricciolo, per quod problema solvi possit? Me referens ad praecedentes meas hic abrumpo. etc.

Groningae d. 20 Martii 1697.

Remitte si placet literas Bellavallii, et schedam illam alteram de Juvene Hagiensi.

P. S. Novissimo Cursore accepi literas a Dn. Marchione Hospitalio, in quibus respondet taliter qualiter objectioni meae contra ipsius solutionem factae. Sed nihil dicit, nisi quod jam ego ipse ei dixerim, pondus scilicet curvae posse considerari ut datum, quod vero mihi nondum plene satisfacit. Se Tibi mittere ait generalem suam solutionem cum aliquot exemplis, ut eam simul cum nostris edi cures.

Beilage.

Excerptum ex Transactionibus Londinensibus mensis Januarii 169$\frac{6}{7}$.

Probl. I.

Investiganda est curva linea ADB (fig. 93), in qua grave a dato quovis puncto A ad datum quodvis punctum B vi gravitatis suae citissime descendet.

Solutio.

A dato puncto A ducatur recta infinita APCZ horizonti parallela et super eadem recta describatur tum Cyclois quaecunque AQP rectae AB (ductae et si opus est productae) occurrens in puncto Q, tum Cyclois alia ABC cujus basis et altitudo sit ad prioris basem et altitudinem respective ut AB ad AQ. Et haec Cyclois novissima transibit per punctum B et erit curva illa linea, in qua grave a puncto A ad punctum B vi gravitatis suae citissime perveniet. Q. E. J.

Probl. II.

Problema alterum, si recte intellexi (nam quae in Actis Lips. ab Auctore citantur ad id spectantia nondum vidi) sic proponi potest: Quaeritur curva KJL (fig. 94) ex lege, ut si recta PKL a dato quodam puncto P, ceu Polo utcunque ducatur, et eidem curvae in punctis duobus K et L occurrat, potestates duorum ejus segmentorum PK et PL a dato illo puncto P ad occursus illos ductorum, si sint aeque alta (id est vel quadrata vel cubi vel quadrato-quadrata etc.) datam summam $PK^q + PL^q$ vel $PK^{cub.} + PL^{cub.}$ etc. (in omni rectae illius positione) conficiant.

Solutio.

Per datum quodvis punctum A ducatur recta quaevis infinita positione data ADB, rectae mobili PKL occurrens in D, et nominentur AD, x et PK vel PL, y, sintque Q et R quantitates ex quantitatibus quibuscunque datis et quantitate x quomodocunque constantes et relatio inter x et y definiatur per hanc aequationem $VY + QY + R = 0$. Et si R sit quantitas data, rectangulum sub segmentis PK et PL dabitur. Si Q sit quantitas data, summa segmentorum illorum (sub signis propriis conjunctorum) dabitur. Si $QQ - 2R$ datur, summa quadratorum $(PK^q + PL^q)$ dabitur. Si $Q^3 - 3QR$ data sit quantitas, summa cuborum $(PK^{cub.} + PL^{cub.})$ dabitur. Si $Q^4 - 4QQR + 2RR$ data sit quantitas, summa quadrato-quadratorum $(PK^{qq} + PL^{qq})$ dabitur. Et sic deinceps in infinitum. Efficiatur itaque, ut R, Q, $QQ - 2R$, $Q^3 - 3QR$ etc. datae sint quantitates et problema solvetur. Q. E. F.

Ad eundem modum Curvae inveniri possunt quae tria vel plura abscindant segmenta, similes proprietates habentia. Sit aequatio $V^3 + Qyy + Ry + S = 0$, ubi Q, R et S quantitates significant ex quantitatibus quibuscunque datis et quantitate x utcunque constantes, et Curva abscindet segmenta tria. Et si S data sit quantitas, contentum solidum illorum trium dabitur. Si $QQ - 2R$ sit data quantitas, summa quadratorum ex tribus illis dabitur.

LII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Misi nuper cum quibusdam aliis solutionem Angli anonymi, quam Te accepisse non dubito. Quod Tua solutio secundi mei problematis a mea non abludat, tanto jam magis miror, quod per diversissimam a mea methodum Te eo pervenisse videam, cum tamen ex infinitis solutionibus, quae satisfaciunt, perfacile in aliam incidere potuisses, si modo pro aeq. $3h = ac : m$ assumsisses quamcunque aliam. Lubens credam Te multum in hac methodo indaganda adjutum fuisse voculis illis, quas in Epistolis Cartesianis notaveras: *hoc fieri potest per radices aequationum*; vellem scire quo loco haec verba extent, ut videam an de eadem materia agant; quem enim ante aliquod tempus mihi indicaveras locum, talia verba continere non video. Interim ut ad methodum Tuam redeam, perspexeris ex scripto illius Angli (quem Newtonum firmiter credo) consimilem, nisi omnino eandem exhibuisse, hoc tantum discrimine, quod ille omnes Tuas quinque aequationes, quae instituendae sunt, antequam ad quaesitam pervenias, una sola comprehendat artificio non ineleganti, ducta scilicet recta positione data et rectas ex polo egredientes transversim secante, quam ut abscissam, illas vero ut applicatas considerat. Potuisset tamen et ipse hanc viam adhuc magis abbreviare, ita non opus fuisset pro singulis potestatibus segmentorum novam quantitatem datam assignare, quandoquidem una generalis aequatio omnes continere potest. Ego enim solutionem universalissime conceptam ita enuncio: Si super recta positione data tanquam axe AD (fig. 95) concipiantur descriptae curvae datae qualescunque et quotcunque AE, AF, AG etc. voceturque AD, x, applicatae vero DE, DF, DG etc. q, r, s etc. ita ut q, r, s etc. intelligantur utcunque datae per x et constantes; dico si a puncto dato P ducatur utcunque recta PKLMN secans axem in D, sitque PK vel PL, y = radici hujus aequationis $y^{2e} - q^e y^e + r^{2e} = 0$, erit, posita AF recta et parallela ipsi AD, punctum K vel L in curva KIL hanc habente proprietatem ut $\square$ LPK sit perpetuo dato aequale: Si vero AE ponatur recta et parallela ipsi AD, erit KIL curva talis, ut $PK^e + PL^e$ faciat ubique eandem summam. Quod si fiat PK vel PL vel PM, y = radici hujus aequationis $y^{3e} - q^e y^{2e}$

$+ r^{2e} y^e - s^{3e} = 0$ sitque AG recta et parallela ipsi AD, erit curva KILRM talis, ut solidum sub PK, PL et PM sit semper aequale; si vero AE sit recta et parallela ipsi AD, erit summa $PK^e + PL^e + PM^e$ semper eadem; sin AF esset recta et parallela ipsi AD, foret summa rectangulorum potestatum $PK^e PL^e + PK^e PM^e + PL^e PM^e$ constans. Eadem ratione invenitur curva KILRMSN, cujus segmenta quatuor PK, PL, PM, PN imperata praestent, sicque in altioribus; atque haec omnia fluunt ex notissimo illo principio algebraico, quod secundus aequationis terminus continet summam radicum, tertius summam rectangulorum radicum, quartus summam solidorum radicum etc. Hinc potest etiam construi curva, quae simul praestet duo ex requisitis: ex. gr. si curva KILRM debeat esse talis, ut non solum solidum sub PK, PL et PM, sed etiam aggregatum potentiarum $PK^e + PL^e + PM^e$ faciat idem ubique; dico si curvae duae AE et AG ponantur rectae et parallelae ipsi AD, satisfaciet curva KILRM utrique simul conditioni.

Vides quam amplum mihi aperuerim campum ex paucis, quae Tu et Anglus ille suppeditastis, ita ut jam lubenter agnoscam, quod mea solvendi ratio per positiones analogas (quae tamen multis occasionibus non contemnenda) tam uberes fructus simul producere nequeat; nam praeterquam quod majori et difficiliori artificio opus habet, etiam ad curvas plurium quam duorum segmentorum, ut probe notas, adaptari posse nondum perspicio. Interim mihi sufficit, harum rerum me primum fuisse contemplatorem, nam quod de Fermatio dicis, haec eadem jam considerasse, sane de eo nihil certi constat. Quantum ad prius problema quod initio in Actis proposui, ubi desideratur curva ut solidum sub uno segmento et quadrato alterius sit constans, mea methodo aliqualem reperio curvam, si non algebraicam, saltem transcendentem; quod vero Tu notas (joco forte) etiam algebraicam satisfacere, nempe circulum, hic nihil aliud dicis (pace Tua id dixerim) quam quod a nemine ignorari potest; haecque solutio similis est illi quam olim Wallisius dederat Fermatio quaerenti cubum, qui additus omnibus suis partibus aliquotis faciat cubum, obtrudens iteratis vicibus unitatem pro numeris quaesitis, sed quam contenti fuerint hac solutione Fermatius et Freniclius, non est ut hic dicam. Interim hac methodo *per radices aequationum* moderamine quodam adhibita feliciter solvo problema per curvam pure algebraicam sic: Aequationis $yy - qy + rr = 0$ radices sunt $y = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr} = PL$ et $y = \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr} = PK$; nunc quia ex hyp. $PL^2 PK = a^3$ constanti, erit $\frac{1}{2}qrr + rr\sqrt{\frac{1}{4}qq - rr} = a^3$, unde $q = \frac{a^6 + r^6}{a^3 rr}$; sic curva AE jam non est arbitraria, sed oportet esse talem ut assumta curva AF quacunque, DE sit $= \frac{a^6 + DF^6}{a^3 DF^2}$, quo facto dico radicem aequationis $yy - qy + rr = 0$ producere curvam optatam KIL. Non secus operandum est in aliis, ut si quaereretur curva talis ubi non quidem summa, sed differentia potentiarum $PL^e - PK^e$ sit constans. Tunc enim q seu DE facienda est $= \sqrt[2e]{a^{2e} + 4DF^{2e}}$, et radix aequationis $y^{2e} - q^e y^e + r^{2e} = 0$ determinabit curvam quaesitam. Nescio quales alios meos calculos pro curvis istis desideres; si eos cupias quos institui pro illis in Actis editis, lubenter communicabo et si quid aliud hactenus observavi super hac materia.

Et ego miror, quod Dn. Menkenius adeo festinarit recensionem libri Nieuwentiitii, scribit se etiam a Te accepisse relationem prolixam ejus libri una cum mea, sed post festum. Videtur Dn. Menkenius scrupulosus nimis in edendis, quae vel in minimis quempiam offendere putat. Unde forsan consulto nostra expectare noluit. Et mea quoque ambo schediasmata quae adjecit non parum mutilavit, quod quidem non aegre fero, dummodo aliquibus in locis argumentorum pondus non simul imminuisset. Optarem interim, ut eadem mutilandi libertate usus fuisset in iis, quae olim Frater meus inepte adeo contra me effutivit, et ad quae respondere mihi nunquam licebit, nisi Tu te interponas arbitrum, vel omnino meas, ut promisisti, sustineas partes. In fragmento Actorum quod mihi misisti, video etiam D. T. Quadraturam universalem*), puto occasione meorum nupero Decembri editorum**) demum excogitatam, quidquid Auctor dicat illam sibi jam a multis

---

*) Quadratura universalis figurarum curvilinearum per series infinitas, simplici transpositione rectarum linearum formatas, per D. T. Acta Erudit. 1697.

**) J. B. Tetragonismus universalis figurarum curvilinearum per constructionem geometricam continuo appropinquantem. Acta Erudit. 1696.

annis fuisse familiarem; ob defectum figurarum capere non satis potui, an et quousque meo tetragonismo congruat. Virum hunc magni facio, sed male me habet ejus vanitas dum nobis inventa nostra ita invidet, ut nihil fere in lucem prodeat, quod sibi non diu ante cognitum fuisse velit.

In praecedentibus Tuis dicis, problema meum fratri solutum esse, sed mox ea occasione ab ipso alia longe difficiliora propositum iri. Videbimus ergo Quid dignum tanto ferat hic promissor hiatu. Pudeat illum, quod per integrum semestre omnibus suis viribus eo penetrare non potuerit, quo tamen et Tu et Anglus ille et ego praesertim, quem usque adeo despicit, intra aliquot horas nullo conatu pervenimus. Interim si publicum exercendum esset difficilioribus, sed parum utilibus, quibus nec ipse par est, forsan et ego proponere possem, quod multum negotii facesseret. Ex. gr. si lamina sit datae longitudinis, quaeritur quamnam curvaturam induere debeat, ut mobile super illa a dato puncto ad datum punctum citissime descendat. Sed vereor ne mihi reponeretur: Quaerit delirus cui non respondet Homerus.

Miror quod hactenus nullam in Actis relationem viderim Libri Dn. Marchionis Hospitalii, cum tamen illum jam diu procul dubio acceperit Dn. Menkenius. Vale et fave etc.

Groningae d. 3 Aprilis 1697.

In ratione mea perveniendi ad funiculariam per viam descensus, utique non levis latet difficultas; sed optarem ut illam tolleres, legitima enim oportet sit methodus ipsa, et necessarius nexus cum natura lineae, cum non solum procedat in funicularia ordinaria, quod accidenti cuidam ascribi posset, sed in omni alia sive aequaliter sive inaequaliter gravatus statuatur funis. Frater meus natu minimus, de quo quaeris, redux in patriam ex Gallia, non diu post iterum evolavit vagabundus. Et ad hoc usque Pascha Moguntiae egit, iter meditans in Germaniam, nisi forte jam aggressus spe incerta an alicubi conditionem invenerit, cogitat Berolinum in Pharmacopoeam Electoralem; si Tua commendatione eo pervenire posset nisi alibi commodiorem suaseris stationem, ipsi et mihi foret gratissimum. Lipsia transibit et forte Hanovera, si itineris ratio feret.

Misi Dn. Hospitalio meos modos solvendi curvam celerrimi descensus, quia petiit.

LIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Guelfebytum irem, ferias illic acturus, mecum sumpsi quae ad Problemata Tua spectant, ut illinc Lipsiam expedirem, quae Actis inserenda viderentur; quod et feci. Et transmisi solutiones, tuam pariter et Hospitalianam mihi commendatam curvae Brachystochronae. Alteram Tuam methodum directiorem permissu Tuo omisi. . . . . Problema autem Tuum, non minus quam solutionem et praeclarum in Opticis usum ex merito commendavi, simulque institutum Problemata modeste proponendi laudavi.

His omnibus jam Lipsiam missis, post ferias demum Paschales, Hanovera accepi Tuas novissimas, quae illic haeserant, quod initio literas venientes mihi transmitti vetuissem, spem statim a feries redeundi; sed consilio deinde mutato, jussi mitti quae advenissent, et inter caeteras inveni quae a Belvallio accepta communicas. Solutionem Anglicam a Newtono esse suspicor: quoniam vero Lipsiensia semel expeditata erant, non putavi causam esse cur in gratiam Anglicanae solutionis adderem aliquid aut mutarem; quando Angli, nec nobis consultis, nec termino expectato, ad publicationem prorupere, et studium Tuum merito elogio non mactant, nec a nobis aliquid de solutione sua fieri postulant. Fateor tamen me, si maturius eam accepissem, fuisse iis adjecturum quae Lipsiam misi; sed nunc, post festum, satis jam fatigatus, ab opera nec necessaria, nec desiderata, non invitus abstinui.

Epistola Belvallii sale aliquo mordaci mihi aspersa videtur, veluti cum ait omne genus humanum a Te provocatum, cum brevitatem temporis ab Anglo impensum praedicat, et praemia honoris a Te distribuenda dicit. Poteris fortasse ironiam reddere ironiae, et ad Academiae Gallicae usum provocare, quae praemia iis tantum distribuit, qui nomina sua profitentur, simulque docere, ipsum solutionis Anglicae autorem Tibi non omnino ignotum videri, et methodos nostras rite applicare scienti unius diei spatium abunde sufficere, nescienti nec annos satis esse; Tuam vero provocationem nec exemplis apud Geometras frequentatis, nec utilitate in publicum carere, et plurimum prodesse ad eos ex somno excitandos, qui Cartesiana analysi vulgaribusque Methodis indormiunt.

Neminem enim solutionem hujus Problematis dedisse, nisi quis novas nostras Methodos sibi reddidisset antea familiares. Quod sane secure etiam de Anglo solutore dicere potes. Newtonum enim, partim nostra, partim nostris Analoga meditatum esse intento studio, satis constat.

Et Belvallii Epistolam, et Juvenis Hagiensis schedam utramque remitto. Hujus videtur laudanda voluntas, sed dubitatio de ascensu descensui mixto intempestiva est, satisque ostendit vim universalitatis ab ipso non satis perspectam, et veram solutionem etiam illa complecti debere, quae ipsi videntur excludenda.

Is qui Problema Tuum facile putat, si modo Hypothesis de motu aut quiete Terrae definiatur, vel parum in his rebus versatus sit oportet, vel rem fugitivo admodum oculo inspexit. Ricciolus et Stephanus ab Angelis, aliique disputavere quaenam futura esset linea gravium libere descendentium, supposito motu Terrae. Hoc ipsi Auctores istos nominanti videtur succurrisse, et imposuisse, non invito, quo facilius declinaret. Nunc intellectis conspirantibus aliorum solutionibus, quibus talis dubitatio in mentem non venit, lapsum suum si candore est praeditus, libenter agnoscet, et jam fatebitur, credo, Problema facile non esse, saltem sibi aliisque de sua tribu. Caeterum video Dno. Beauval ignotum non esse Juvenem Hagiensem, consiliaque etiam inter ipsos fuisse communicata. Per hunc ergo disces, credo, quis sit Juvenis.

Animadversiones quasdam extemporaneas in partem generaliorem Principiorum Cartesii ad Dominum Basnagium *) miseram, tum ut legeret Hugenius, tum ut Cartesiani quidam, quibus communicandae erant, viderent me non sine ratione ab ipso dissentire. Has lectas (si tanti videntur) per occasionem ad Dnum. Gerhardum Mejerum, Theologum Bremensem, mittere aliquando poteris, additis Transactionibus Anglicanis pro me Tibi missis, si quid scilicet aliud illis inest, quam quod mihi descriptum jam communicasti. Ex prioribus meis videbis Newtonum suam secundi Tui Problematis solutionem ex eodem mecum fonte derivasse, sed circuitu tamen non necessario usum esse. Vale etc.

Dabam Guelfebyti 15. April. 1697.

---

*) Dominus Basnagius ist dieselbe Person, die vorher Dn. Beauval genannt wird; der Name dieses Mannes ist vollständig: Basnage de Beauval.

P. S. Scriptis jam literis, novissimas Tuas accipio. Cur aequationem $h = ac : m$ assumserim, causa est quod ea ratione prodire viderem aliquid simplicius, quam ponendo $h = m$, quod prius consideraveram. Nam si $h = m$, prodit non y, sed $\frac{1}{y} = b x^{e-1} - x^{2e-1}$. Vides autem valores istos duos ipsius h, ut sit vel $\frac{1}{m}$ vel m, esse simplicissimos. Per quinque aequationes, praeter necessitatem quidem, consulto tamen processi, quia sic melius patet principium inventionis et latitudo solutionis. Linearum ductus sub elegantiori facie rem ipsam artemque reddit involutiorem. Tantumque abest, ut Dn. Newtonus ex suo compendio rem proponendi, aliquid utile duxerit, ut potius involutus nonnihil haud satis animadverterit una eademque aequatione locali comprehendi posse solutionem pro omnibus segmentis. Praeterea considerandum, lineam quae curvam quaesitam in punctis conspirantibus secat, posse esse aliam, quam rectam, in aliis Problematibus; quae omnia distincte intelliguntur meo procedendi modo, ut ne nunc quidem, viso Newtoniano, inde recedere velim. Egregia sunt quae porro addis, et profecto meretur haec materia amplius excoli; est enim velut nova quaedam linearum curvarum seu locorum Geometria. Interim quia Tua procedendi Methodus, qua ad cogitationem tam pulchram tamque utilem ductus es, etiam alios usus habere potest, et ipsi per se Analysi aliquid addit, rogo ut eam distincte conscribas, una cum iis quae inde duxisti, et mihi communices, perinde ac si altera illa nondum innotuisset. Caeterum videris non observasse quod de Circulo satisfaciente locutus Te ridere jusseram. Et licet fatear non esse magni faciendas tales solutiones qualis ista per Circulum, aut Wallisiana, quam citas per unitatem, sunt tamen verae, et ex earum rerum numero, quae nulla quidem cum laude dicuntur, et tamen interdum non bene omittuntur. Si quis, exempli causa, dixisset, Problema cui Wallisius per unitatem satisfacit, non esse solubile in numeris rationalibus, peccasset, etiamsi nulla alia reperiri posset solutio. Item, si Tu dixisses Problema non esse solubile, nisi in transcendentibus, fuisses refutatus per eum, qui Circulum Tibi objecisset. Et solutio perfecta utique istas quoque, etsi nugatoriae videri possint, comprehendere debet. Per me ergo licet quasi nugatorias appelles, vel semi-ridiculas, modo non plane usu carere fatearis.

Oportet ut in literis mentem meam non bene explicuerim, cum ita a Te accepta est, quasi ego istam notationem (quod desideratum fieri possit per radices aequationum) in Epistolis Cartesii repererim. Reperi eam in meis excerptis, seu notatis, ante multos annos consignatis, cum Epistolas Cartesii forte volverem, ubi re tunc considerata, de modo haec annotaveram obiter. Cum igitur Problema Tuum inspiciens, meminissem promissorum Fermatii, et praeterea recordarer me illa olim legentem meas quasdam meditationes habuisse; quaesivi illam schedam, et forte prae multis aliis conservatam, promte reperi, ubi haec quae dixeram verba mea deprehendi, quae primo aspectu non intellexi, donec in curru explicatio in mentem veniret.

Dni. Marchionis Hospitalii Librum spero jam in Acta relatum esse; nam et ego admonui Dnum. Menckenium ne nimis differatur.............

Considera quaeso, ut hoc obiter addam, an Tua constructio, qua facis $PL^2 . PK = a^3$ non simul faciat $PK^2 . PL = a^3$; nam videbis pro hoc eumdem prodire Calculum, seu valorem ipsius a, qui prodit pro illo ex ipsa natura radicum ambiguarum. Quod si jam sit $PK^2 . PL = a^3 = PL^2 . PK$, fiet $PK = PL = a$, id est, P erit centrum circuli per K et L transeuntis, radiusque a. Ita incidemus in eam solutionem, quam recusas. Itaque amplius aliquid requiri puto, ut ambiguitati isti obnoxii non simus. Et viam video, dum rumpuntur laquei seu vinculum ambiguitatis separanturque radices actuali extractione.

Utique non temere fieri oportet, quod via illa quam inisti in omni genere Funiculariae succedit; sed hoc aliunde fieri necesse est, nam ipsa via per se consecutionem non ostendit. Itaque amplius deliberandum censeo, et ipse quoque, rem attentius meditans, video perinde esse in Tua methodo, ac si quaeramus parallelarum seu condescriptarum eam, cujus momentum ex recta horizontali est minimum vel maximum.

Pene annotare oblitus eram non esse necesse, ut peculiarem Calculum pro differentiis quaeras, sed ejusdem esse Calculi, facere ut summa potestatum a segmentis, et ut differentia sit constanti aequalis. Nam, si una radix sit negativa, secundus terminus erit differentia duarum radicum, ut si sit $yy - qy - rr = 0$ pro $yy - qy + rr = 0$, priore modo q est differentia, posteriore jam usurpato summa. Quod si esset $yy + qy - rr = 0$, $-q$ esset excessus radicis negativae super affirmativam, adeoque q maneret differentia.

P. P. S. S. His omnibus scriptis, in manus meas veniunt l'Histoire des Ouvrages des Sçavans Domini Basnage-Beauval, ubi complectitur menses Decembrem, Januarium, Februarium; ibi p. 284 inserit Problema Tuum, sed verba, ubi de me loqueris aliter interpretatus est, quasi scilicet ego dilationem a Te petierim, solutionem sub exitum termini promittens, unde Lector me solutionem tunc nondum habuisse et tanto tempore indiguisse credet. Idque etiam videtur fecisse, ut Angli illius promptitudinem nobis quodammodo exprobrasse videatur. Itaque rogo, ut eum per occasionem moneas, me quoque statim solutione fuisse potitum.

LIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Negotia quaedam per aliquot hebdomades me detinentia responsionem hanc huc usque retardarunt. Gratias habeo non mediocres pro officio praestito in transmittendis nostris solutionibus, praesertim pro commendatione, qua meam prosecutum Te esse ais, sed forsan praeter meritum. Non recordor me posuisse aliquid quod poterat accipi in aliorum contemtum, saltem non viventium. Sed miror quod dicis Dn. Hospitalium duriuscule in me scripsisse et quasi exprobrasse provocationem meam; gestio scire propria ipsius verba: non est profecto de quo glorietur, cum tantum non totam suam solutionem ex mea penu depromserit; sed non prima vice est, quod imitatur cornicem alienis pennis superbientem; tale quid olim ab ipso expertus sum, sed dedi et dabo veniam meo quondam benefactori, dummodo mihi posthac insultando (ut jam videtur facere) non abutatur longanimitate mea.

Cum nuper Dn. Menkenio scriberem, misi etiam solutionem Anglicam, ut de illa faceret quod vellet. In Transactionibus Philosophicis a Dn. Sloane mihi missis, quantum ex idiomate Anglico intelligo, nihil praeterea continetur quod operae pretium sit, mittam tamen si desideras. In eundem fere modum quo consulis rescripsi Bellavallio: non opus esse longo tempore ad solvendum problema nostrum illis qui nostra calleant, atque adeo me non mirari, Anglum illum (Newtonum esse suspicari me dicebam) secundo statim die a receptione problematis solutione fuisse potitum, cum methodo aut nostra aut nostrae simillima utatur; sed alium hac destitutum si prima applicationis die non ad solutionem pervenerit, nec secundo die, sed nec post annum eo perventurum esse. Interim Bellavallius, miror, nec respondit, nec animadversiones Tuas promissas mihi misit. Inspexi locum quem indicasti Febr. de histoire des ouvrages des Sçavans; indigne admodum fero, quod ita pessime egerit interpretem verborum meorum; quam primum ipsi scribam, culpare incuriam non obliviscar.

Verum est Dn. Newtonum suo modo proponendi et solvendi problema meum secundum, rem ipsam praeter necessitatem involutiorem reddidisse, dum pro diversis potestatibus diversas aequationes quaerit; meo tamen modo quo methodum Newtonianam correxi et amplificavi, mihi videor rem satis clare explicasse, dum omnes casus una eademque aequatione comprehendi, adeo ut hoc in passu methodus illa ita correcta Tuae per 5 aequationes procedendi non cedat, imo brevitate et simplicitate quodantenus illam praeferrem; et credo facile etiam applicari posse, quando linea secans in punctis (ut dicis) conspirantibus non est recta, sed curva. Jam quia petis, aperiam prima mea cogitata circa hanc materiam; methodus qua initio usus sum, per sat magnas ambages me eo deducebat; ejus me tamen eo minus pudet, quod nonnullius utilitatis esse posse dicis. Sic itaque procedebam pro invenienda curva, ubi rectangulum segmentorum sit datum. Esto (fig. 96) DB, x et BE, y; ponatur $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + ex^{\varepsilon}$ etc. (quousque libuerit); per hyp. $CD = \frac{1}{x} = x^{-1}$; ob simil. triangul. DBE, DCF, $CF = ax^{\alpha-2} + bx^{\beta-2} + cx^{\gamma-2} + ex^{\varepsilon-2}$ etc. $=$ (ob analogam relationem punctorum C ad F et B ad E) $ax^{-\alpha} + bx^{-\beta} + cx^{-\gamma} + ex^{-\varepsilon}$ etc. Comparentur jam harum duarum serierum termini (sed non earundem literarum, secus enim omnes aequationes identificarentur) ut inveniantur potentiae et coefficientes; in hunc modum $ax^{\alpha-2} = bx^{-\beta}$, $bx^{\beta-2} = ax^{-\alpha}$, et $cx^{\gamma-2} = ex^{-\varepsilon}$, $ex^{\varepsilon-2} = cx^{-\gamma}$ etc. unde elicitur $b = a$, $\beta = 2 - \alpha$ et $e = c$, $\varepsilon = 2 - \gamma$ etc.; ergo substitutis valoribus pro b, β, e, ε etc. reperietur haec series infinitas continens solutiones $y = ax^{\alpha} + ax^{2-\alpha} + cx^{\gamma} + cx^{2-\gamma}$ etc. quam in Actis dedi. Quod si segmenta non ex communi puncto D egrediantur, sed ad axem aliquem parallelae constituantur, id est, si quaeritur curva GHF (fig. 97) ut ducta, ad positione datam DE, recta GFE in angulo dato GED rectangulum segmentorum GEF seu CDB sit datum: reperietur eadem methodo (positis EF seu DB, x; FB, $y = ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + ex^{\varepsilon}$ etc.) haec series $y = ax^{\alpha} + ax^{-\alpha} + cx^{\gamma} + cx^{-\gamma}$ etc.

Per analogiam relationis punctorum haec duo aliter ita solvuntur. Sit DB, x; DE, z; per hyp. $xz = 1$, ideoque etiam $x^n z^n = 1$ (n est potestas arbitraria, ut solutio tanto generalior evadat) multiplicetur utrumque per $x^{-n} - z^{-n}$ (quod facio ut x et z utrobique possint habere positionem analogam) erit enim $z^n - x^n = x^{-n} - z^{-n}$ seu $x^n + x^{-n} = z^n + z^{-n}$; hinc si fiat (fig. 97) $BF = x^n + x^{-n}$ seu $CG = z^n + z^{-n}$, prodibit curva quaesita FHG; sed facienda est (fig. 96) $BE = x . \overline{x^n + x^{-n}}$ seu $CF = z . \overline{z^n + z^{-n}}$, tunc satisfiet quaesito.

Ecce jam modum quo tunc temporis problema solvere institueram, quando summa potestatum segmentorum datur, $DB^n + DC^n = 1$ (sed ridebis prolixitatem). Quaerebam prius curvam ABCG (fig. 90) cujus segmentorum summa esset constans, $DB + DC = 1$; in hunc finem ponatur iterum DB, x; BE, $y = a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ etc. Ex proportione DB (x) . DC $(1-x)$ :: BE $(a + bx + cxx + ex^3 + fx^4$ etc.) CF invenitur

$$
\begin{array}{lllllll}
CF = \frac{a}{x} - a & & & & & & \\
\quad + b - bx & & & & & & \\
\quad\quad + cx - cxx & & & & & & \\
\quad\quad\quad + exx - ex^3 & & & & & & \\
\quad\quad\quad\quad + fx^3 - fx^4 & & & & & & \\
\quad\quad\quad\quad\quad + gx^4 - gx^5 & & & & & & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad + hx^5 - hx^6 & & & & & & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \text{etc.} \quad \text{etc.} & & & & & &
\end{array}
$$

ex analogia vero relationis punctorum in curva, ponendo in serie $a + bx + cxx + ex^3$ etc. $1 - x$ loco x, habetur

$$
\begin{array}{lllllll}
CF = + a & & & & & & \\
\quad + b & - bx & & & & & \\
\quad + c & - 2cx & + cxx & & & & \\
\quad + e & - 3ex & + 3exx & - ex^3 & & & \\
\quad + f & - 4fx & + 6fxx & - 4fx^3 & + fx^4 & & \\
\quad + g & - 5gx & + 10gxx & - 10gx^3 & + 5gx^4 & - gx^5 & \\
\quad + h & - 6hx & + 15hxx & - 20hx^3 & + 15hx^4 & - 6hx^5 & + hx^6 \\
\quad \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

Continuatis hoc modo quousque libuerit (quo magis vero continuantur, eo solutio erit generalior et fecundior) comparentur utrinque dimensionum ipsius x aequalium coefficientes $a = 0$, $-a + b = a + b + c + e + f + g + h$ etc., $-b + c = -b - 2c - 3e - 4f - 5g - 6h$ etc., $-c + e = +c + 3e + 6f + 10g + 15h$ etc., $-e + f = -e - 4f - 10g - 20h$ etc., $-f + g = +f + 5g + 15h$ etc., $-g + h = -g - 6h$ etc., $-h = +h$; quibus rite collatis prodibit $a = 0$, $f = -2c - 2e$, $g = c + e$, $h = 0$, ita ut b, c, e maneant arbitrariae; caeterarum vero substitutis valoribus reperietur aequatio talis $y = bx + cxx + ex^3 - \overline{2c - 2e}\, x^4 + \overline{c + e}\, x^5$, quae exprimet naturam curvae ABCG, in qua summa segmentorum erit constans DB + DC. Hac autem inventa, altera illa, ubi potestatum summa dari debet, facillime construitur, abscindendo tantum (fig. 98) Dc ex DC, Db ex DB, Dg ex DG, Da ex DA, quae sint ut $\sqrt[n]{DC}$, $\sqrt[n]{DB}$, $\sqrt[n]{DG}$, $\sqrt[n]{DA}$ etc., habebitur nova curva abcg, ubi segmentorum potestates $Db^n + Dc^n$ seu $Da^n + Dg^n$ facient ubique eandem summam, prout requirebatur.

Vides quam longa via incesserim; sed aliam tunc non quaerebam, contentus scilicet attigisse scopum; biduo enim post cum talia iterum meditarer, sese ultro offerebat facilior ille solvendi modus, quem in anterioribus meis Tibi communicavi, cujus ope statim incidi in curvam transcendentem, cujus segmenti quadratum ductum in alterum segmentum producat solidum datum, et quidem sic: Sit (fig. 96) DB, x; BE, $y = x^m . \overline{1 + x^n}$ (loco $\overline{1 + x^n}$ possem assumere quamcunque aliam quantitatem compositam) jam si $CD \times DB^q = 1$, erit $CD = \frac{1}{xx}$; ergo propter DB . DC :: BE . CF erit $CF = x^{m-3} . \overline{1 + x^n}$; sed ob analogiam relationis punctorum

B et C ad E et F, erit $CF = \overline{\frac{1}{xx}}^{m} \cdot \overline{1 + \frac{1}{xx}}^{n} = x^{\overline{-2m-2n}} \overline{xx+1}^{n}$, ergo $x^{m-3} \cdot \overline{1+x}^{n} = x^{\overline{-2m-2n}} \cdot \overline{xx+1}^{n}$; ergo etiam logarithmi $\overline{m-3}\,lx + n\,l\overline{1+x} = -\overline{2m-2n}\,lx + n\,l\overline{xx+1}$, unde $m = \frac{-\overline{2n+3}\,lx - n\,l\overline{1+x} + n\,l\overline{xx+1}}{3\,lx}$; si itaque x elevetur ad hanc dimensionem m et multiplicetur per $\overline{1+x}^{n}$, habebitur aequatio pro curva quaesita, quae ope logarithmicae construi potest, et per consequens ex earum numero, quas percurrentes appellavi.

Nunquam negavi veritatem solutionis per circulum, sed aliud est verum esse, aliud satisfacere intentioni proponentis; an credis me non praevidisse circulum? licet illum non diserte excluserim, excluditur tamen eo ipso quod nemini non obvius est; adde etiam quod neque circulus satisfaciat, quando segmenta non in puncto coeunt, sed quando ad axem sunt parallelae ut in fig. 97. Cum itaque proponentis scopus sit acumen solutoris explorare, neminem putabam fore, qui mihi circulum ut solutionem legitimam, qualem ego desiderabam, obtrusurus esset; sed Tuum mihi ingenium satis superque perspectum est, atque ideo non dubitavi, quin joco id fuerit, quod allegaveris circulum*).

Jubes me considerare, an constructio mea qua in praecedentibus meis feci $PL^2 . PK = a^3$, non simul faciat $PK^2 . PL = a^3$, ideoque $PK = PL = a$, id est, annon curva mea KIL sit circulus, cujus centrum P, et sic annon incidamus in eam curvam, quam recuso; sed, pace Tua, ipse videris rem non satis considerasse. Minime enim sequitur, si $PL^2 . PK = a^3$, ideo etiam esse $PK^2 . PL = a^3$; neque pro hoc idem calculus prodit. Sed etiam nulla ambiguitas radicum hic adest, quia non promiscue consideravi quadratum alterutrius segmenti sive majoris sive minoris, sed sumsi consulto segmenti seu radicis majoris quadratum, quod multiplicavi per segmentum minus seu radicem minorem. Hinc longe alia curva prodiret, si assumeretur $PK^2 . PL = a^3$, quae

*) Im Commercium epist. folgen hierauf die Worte: Ast nescio, an a quopiam minus mihi familiari hunc circulum tolerassem. Sie sind in dem an Leibniz gesandten Schreiben so durchstrichen, dass auch nicht das Geringste davon zu lesen ist.

tamen nihilominus satisfaceret. Verum quid opus est verbis, si contrarium ejus quod putas, res ipsa probat? Constructio mea erat talis: Assumta curva quacunque AF (fig. 99) cujus applicata DF vocetur r; fiat alia AE, cujus applicata DE seu q sit $\frac{a^6 + r^6}{a^3 rr}$; dico, si sumatur PL = radici majori et PK = radici minori, hujus aequationis $yy - qy + rr = 0$ curvam KIL fore quaesitam. De veritate hujus constructionis non dubitas, quia in praecedentibus vidisti rationem, sed urges KIL esse circulum cujus centrum P; quid si autem ostendam PK et PL juxta constructionem meam esse variabiles? numquid sententiam mutabis? Radices dictae aequationis sunt $y = \frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$ et $y = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$; substitue valorem assignatum ipsius q et habebis y seu $PK = \frac{r^4}{a^3}$, et y seu $PL = \frac{a^3}{rr}$, quarum utraque variabilis est, nisi ponas r constantem, id est, AF rectam et parallelam ipsi AD, quo solo casu KIL esset circulus cujus P centrum. Vides etiam simul quod $PL^2 . PK$ seu $\frac{a^6}{r^4} \cdot \frac{r^4}{a^3} = a^3$ constanti; non autem $PK^2 . PL$ seu $\frac{r^8}{a^6} \cdot \frac{a^3}{rr} = \frac{r^6}{a^3}$. Sublata Tua difficultate, jam alia se prodit, videtur enim (cum PK, PL prodeant in quantitatibus rationalibus) puncta L et K non esse in eadem curva, sed in duabus diversae naturae; si hoc est, erit methodus Newtoniana fallax, et Tua quoque laborabit, quia eodem fundamento nitatur. Vale et ama etc.

Groningae d. 15 Maji 1697.

LV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nihil fuit in verbis Domini Marchionis Hospitalii, de quo ipsi dica scribi posset, nec quicquam tale puto in mente ejus fuisse. Veritus sum tamen, ne quidam secius interpretarentur aut (propter mentem ipsius licet) pro aculeo acciperent, si diceretur problema tanquam omnium labore et vigiliis dignissimum totius orbis Geometris fuisse a Te propositum. Talia enim jactantiae alicujus exprobrationem tacitam continere videri possent. Cum etiam interpres latinus schediasmatis a Domino Marchione haud dubie Gallice conscripti Dominum Marchionem problema Johannis Bernoullii solvisse diceret, utrobique Dominum stare debere putavi idque Dn. Marchionis menti conforme fuisse non dubito, cum in Gallico nemo nominetur facile quin ipsi ascribatur „Monsieur“. Interea vides non ideo esse, cur ipsi succenseas. Quod monere necessarium duxi, ne alicujus simultatis inter vos autor sim. Gratias ago pro Tua methodo solutionis curvae per duorum quorumcunque punctorum certo modo inter se relatorum conspirationem determinatae; et vellem eam produci etiam ad plura puncta, non quia ad haec Problemata necesse est, quae aliter commodius solvimus, sed quia in aliis utilis esse potest. Caeterum cum de problemate aliquo solvendo agitur, meus scopus non solet esse, quem memoras, explorare acumen solutoris, sed vel praestari aliquid utile aut elegans, vel saltem augeri artem meditandi. Et solutio, quae non comprehendit omnes constructiones, etiam facillimas, habet aliquid imperfecti. Et jam notavi tales proferentem non laudari, sed interdum tamen excludentem culpari.

Cum viderem eamdem Tibi prodire q vel DE, sive ponamus y esse $\frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$ sive y esse $\frac{1}{2}q - \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$, festinatio alia agentis fecit, ut vererer, ne incideres in Circulum; sed bene mones, quod et statim attendenti patet, id per se caveri, et cessare hic ambiguitatem mutatis signis, adeoque non esse necessarium in tali casu, ut formulas extrahibiles quaeramus. Quod vero occasione eorum, quae de formulis extrahibilibus seu in rationales abeuntibus ad separandas inter se diversas radices dixi, vereris ne separatio ista contingat nobis invitis, et diversae radices sint ad diversas curvas; id censeo non esse metuendum: vel enim non fiet extractio, vel si succedet, destruetur id quo radices distingui possent. Quod si hoc non fiat, utique curva proveniens non erit apta ad scopum, sed vitanda. Et vitabitur sane, si extractionem indefinitam non procuremus nova explicatione ipsius x. Itaque ambo frustra aliquid mali veriti sumus; utiles tamen sunt dubitationes istae ad res penitius noscendas. Caeterum sive per quinque illas aequationes simplicissimas et semel in universum valentes mecum procedas, sive non, res eadem est; post inven-

tionem supprimi aut larvari possunt, interim exhibent progressum, et velut gradus mentis in inveniendo.

Etsi incassum laborassem, Dn. Fratrem tuum tibi reconciliare nitendo, non ideo poeniteret boni consilii, in quo vel voluisse sat est. Ignosce interim, si dicam nos saepe de aliis pejus aliquid vereri, quam res ipsa jubet, idque permissum esse, hactenus ut nobis caveamus; non ultra tamen. Atque ita concilio duas regulas sibi oppositas, quarum una (justitiae) jubet quemlibet praesumi bonum, altera (prudentiae) nemini facile esse fidendum. Morosum esse Dn. fratrem tuum, ipse mihi agnoscere nonnihil experiri visus sum. Fieri etiam potest ut Tibi invideat (quemadmodum judicas) et ut gratum ipsi futurum fuerit, si fortuna te magis jussisset pendere ab ipso; talia prava quidem, sed tamen humana sunt; ut vero implacabili odio Te prosequatur, non ausim judicare. Scis voluntatem humanam, ut JCti ajunt, ambulatoriam esse, nec facile de corporis, de animi autem curatione nunquam esse desperandum. Ut video, plures adhuc fratres habes praeter duos mihi auditos. Laudandum censeo natu minimum, quod varias rerum vices vult experiri; et puto si qua vacabit statio Berolini, ipsi in copiis Electoris agenti prae aliis apertum fore. Possum illic commendare amicis, sed talibus, quibus ut de statione ejusmodi inquirant committere non ausim. Hoc alii facient facilius commodiusque.

Dominus Frater Tuus in literis, quibus mihi solutionem suam significat, proponit mihi observationem quamdam suam dioptricam, nempe si vitrum plano-planum ad axem visionis valde obliquum statuatur, dextrum per illud incipere apparere sinistrum et vicissim, supero tamen et infero situm suum servante; causam se ex principiis opticis nondum reperire potuisse. Hanc inquisitionem in responsione declinavi, cum longe aliis sim occupatus, et talia attentionem non vulgarem requirant. Venit postea in mentem, saepe fieri ut plana habeantur, quae circularia sunt ex centro admodum longinquo, vel alterius figurae; atque ita quaerendum foret, an ex quacunque distantia hoc ipsi apparuerit, et an in pluribus eodem modo. Si quid hic suppeditare poteris, operae pretium facies. Quaesivit etiam de Machina mea Arithmetica, cujus et nuper et olim visae Dn. de Tschirnhaus in novissima Libri sui editione meminit. Respondi nihil eam penitus habere commune nec cum Logarithmis, nec cum Rhabdologia Neperiana, quam alii postea in rotulis vel aliis formis exhibuere, et magnorum numerorum multiplicationes vel divisiones aeque esse in ea faciles ac parvorum, et nullis opus esse additionibus vel subtractionibus auxiliaribus in multiplicando vel dividendo: sed Machinam esse sumtuosam, et multarum rotarum instar horologii, nam interrogaverat an medioeri pretio haberi posset. Duo exempla habeo; sed malo rem eo deducere, ut plura elaborentur, antequam publicem. Rudimenta olim Galli Anglique viderunt. Magno cum applausu Hugenius, qui inspexerat, aliquoties admonuit ut absolvi curarem, quod non sine magno sumtu taedioque factum est, dum varie mihi cum opificibus fuit confligendum. Sed nunc contentus sum inventum ab interitu vindicatum esse. Productus multiplicationis potest in jam eloborato exemplo ascendere ad 12 notas, multiplicandus vero numerus ad notas 8, ne quis rem in exiguis tantum numeris exhibitam putet. Sed hoc occasione literarum Domini Fratris Tui. Vale.

Dabam Hanoverae 26 Mai 1697.

P. S. His jam scriptis, mitto quae in Actis Maji de Curva Brachystochrona variorum solutiones editae sunt, uti ad me misit Dominus Menckenius, cum Literis 22 Maji datis. Volui ut statim acciperes, quia Dominus Frater Tuus Tibi potissimum nova Problemata proponit*), termino et praemio statuto; quod videtur faciendum sibi putasse, quia Problemata quae proponit, mihi non satis elegantiae per se, vel utilitatis habere videntur, nisi quod forte artem inveniendi augebunt. Gaudeo interim, quod verba ejus nihil habent amari vel aculeati, imo commendationem Problematis Tui continent. Judicabis ipse, an putes per Problemata ejus augeri posse artem inveniendi, quo casu Te digna erunt.

Dum haec scribo, non possum mihi temperare, quin problemata considerem. Prius de curva, quae ex omnibus suae speciei et baseos promtissime ad perpendiculum datum accedat, determinatum numerum requirit, qui quantumvis prope verum (si rationalis non sit) haberi potest. In altero problemate (Isoperimetrorum) invenio aliquid obscuritatis. Nam si (fig. 100) linea BFN datae magnitudinis baseosque BN talis est assumenda, ut area NBZN fiat maxima, utique et area NBFN erit maxima (quippe ad maximam in ratione data constante PZ ad PF, ut ponit): ergo linea BFN erit circularis, BZN elliptica, cum tamen ipse neget NBFN aream esse maximam. Aliud est si ratio PZ ad

*) Siehe die Beilage zu diesem Briefe.

arcum BF sit data constans, ubi mihi quoddam Catenae genus obvenit, ni fallor. Sic figuram concipio, nam Dominus Menkenius non misit.

Videbis et Dnum. Tschirnhausium sua adjecisse. Sed de Cycloide videtur sibi solutionem non adscribere, etsi ejus mentionem faciat. Suspicatur, quod miror, adhuc alias curvas posse satisfacere, et putat problemata talia, quae proposuimus, esse valde laboriosa, et solere ab iis proponi, qui casu vias faciles repererunt; in quibus omnibus vides quantum absit ab eo, quod res est. Putat etiam Hugenii Librum de Cycloide mirum quantum nostrae inquisitioni profuisse, cum tamen de eo nemo nostrum, vel per somnium cogitaverit, nisi re aliunde comperta. Ita etiam loquitur, quasi et alterum Tuum problema solveret, nec tamen quantum video, solvit. Alia etiam nobis rursus promittit etc.....

Beilage.

Jac. Bernoullii solutio problematum Fraternorum peculiari Programmate Cal. Jan. 1697 *Groningae, nec non Actorum Lips. mense Junio et Decembr.* 1696 *et Febr.* 1697 *propositorum, una cum Propositione reciproca aliorum.*

Geometrae methodum de Maximis et Minimis ad illa duntaxat Problemata huc usque adhibuerunt, in quibus ex infinitis partibus seu functionibus unius datae curvae aliqua maxima minimave requiritur, neque cogitarunt de ejus applicatione ad talia, ubi ex ipsis infinitis curvis non datis una desideratur, cui maximum aliquod minimumve competat, licet et haec subtilitate inventionis et utilitatis praestantia caeteris minime sint inferiora. In eorum numero est, quod Frater mense Junio primum proposuit, cujusque solutioni terminum elapsi anni finem statuit, Problema de invenienda Curva Oligochrona, per quam descendendo grave a dato puncto brevissimo tempore perveniat ad aliud datum punctum. Quanquam autem hac Fratris provocatione me non teneri existimabam, nihilominus cum superaccessisset humanissima Celeberrimi Domini Leibnitii invitatio, laborem solutionis amplius subterfugere non potui. Postquam enim hic vir, litteris die 13 Septembris ad me datis, significasset se solvisse Problema, juxtaque desiderare ut et alii tentarent: ad ejus sollicitationem aggressus sum quod alias intactum reliquissem, idque optato protinus successu: solutionem enim sexto Octobris jam habui, et ab illo tempore amicis ostendi. Cur autem non potius ad Acta communicarim, causa est, quod cum terminum solutionis in exterorum gratiam ad Pascha usque praesentis anni prorogatum intelligerem; ego interea speculationem ad alia quoque difficiliora Problemata nunc una proponenda promovere statuissem. Priusquam vero ad solutionem praesentis Problematis accedam, sequens praemitto Lemma.

Si curva ACEDB (fig. 101) talis sit, quae requiritur, hoc est, per quam descendendo grave brevissimo tempore ex A ad B perveniat, atque in illa assumantur duo puncta quantumlibet propinqua C et D: dico, portionem curvae CED omnium aliarum punctis C et D terminatarum curvarum illam esse, quam grave post lapsum ex A brevissimo quoque tempore emetiatur. Si dicas enim, breviori tempore emetiri aliam CFD, breviori ergo emetietur ACFDB, quam ACEDB, contra hypothesin.

Esto igitur in plano utcunque ad horizontem inclinato (nec enim verticale sit, necesse est) curva desiderata ACB (fig. 102) per quam descendens grave ex A breviori tempore perveniat ad B, quam per aliam quamcunque in eodem plano positam; et sint in illa sumta ubivis duo puncta C et D infinite propinqua ductaeque intelligantur recta horizontalis AH ejusque perpendicularis CH et huic normalis DF, bisectaque CF in E, compleatur parallelogrammum DE ducta recta EJ. Quaeritur in hac punctum G, id est, inclinatio particularum curvae CG, GD ad se invicem, quae faciat, ut tempus descensus per CG + tempus descensus per GD (quod sic denoto $t.CG + tGD$, intellige semper post lapsum ex A) sit minimum. Ad hoc indagandum intelligatur in recta EJ aliud punctum L, sic ut GL sit incomparabiliter minor ipsa EG, ductisque CL, DL, super C et D descripta concipiantur arcuum elementa LM, GN; erit, ex natura minimi, $tCL + tLD = tCG + tGD$, adeoque $tCG - tCL = tLD - tGD$, quo posito, sic arguo:

$$\left.\begin{array}{l} CE : CG = tCE : tCG \\ CE : CL = tCE : tCL \end{array}\right\}\text{ ex natura descens. grav.}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Ergo} & CE : CG - CL(MG) = tCE : tCG - tCL \\ \text{Sed} & MG : GL = EG : CG \text{ (ob sim. tr. } MLG,\ CEG). \\ \hline \text{Quare} & CE : GL = EG \times tCE : CG(tCG - tCL). \end{array}$$

Pariter

$$\left.\begin{array}{l} EF : GD = tEF : tGD \\ EF : LD = tEF : tLD \end{array}\right\}\text{ ex natura desc. gravium}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Ergo} & EF : LD - GD(LN) = tEF : tLD - tGD \\ \text{Sed} & LN : LG = GJ : GD \text{ (ob sim. tr. } LNG,\ GJD) \\ \hline \text{Quare} & EF(CE) : LG = GJ \times tEJ : GD \times (tLD - tGD) \end{array}$$

ideoque $EG \times tCE : CG \times (tCG - tCL) = GJ \times tEF : GD \times (tLD - tGD)$.

et permut. $EG \times tCE : GJ \times tEF = CG \times (tCG - tCL) : GD \times (tLD - tGD)$ = (ex nat. minimi, ut dictum) = $CG : GD$.

Sed $EG \times tCE : GJ \times tEF = \dfrac{EG}{\sqrt{HC}} : \dfrac{GJ}{\sqrt{HE}}$, ex nat. desc. gr.

quare $\dfrac{EG}{\sqrt{HC}} : \dfrac{GJ}{\sqrt{HE}} = CG : GD$.

Ubi in transitu considerandum proponimus Celeberrimo Domino Nieuwentiit usum differentio-differentialium (quae ipse immerito explodit) in eo, quod assumere coacti fuimus particulam GL ipsis EG, GJ infinite parvis infinities adhuc minorem, absque quo non video quomodo ad solutionem Problematis via patuisset. Sunt enim EG, GJ elementa abscissarum AH, quemadmodum CG, GD elementa ipsius curvae, et HC, HE ipsae ejus applicatae, earumque elementa CE, EF, adeo ut Problema ad puram Geometriam redactum huc redeat, ut inveniatur curva, quae elementa sua habeat composita ex elementis abscissarum directe, et radicibus applicatarum inversa: qua quidem proprietate Isochronam illam Hugenianam nunc et Oligochronam futuram, tritam nempe notamque Geometris Cycloidem, gaudere deprehendo; quod in fig. 103, ubi ACP semi-cycloidem, CM, CN duas ejus tangentes, RQP semi-circulum genitorem refert, ita porro demonstro:

$$\begin{array}{l} GD : GJ = GN : GX^{*} = VP : VX = VR : RX = \sqrt{RP} : \sqrt{RX}\,(\sqrt{HE}) \\ GJ : EG = \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad = GJ : EG \\ EG : CG = CS : CM^{*} = QS : QP = RS : RQ = \sqrt{RS}(\sqrt{HC}) : \sqrt{RP} \\ \hline \text{Ergo } GD : CG = \sqrt{RP} \times GJ \times \sqrt{HC} : \sqrt{HE} \times EG \times \sqrt{RP} \\ \quad = EJ \times \sqrt{HC} : EG \times \sqrt{HE} = \dfrac{GJ}{\sqrt{HE}} : \dfrac{EG}{\sqrt{HC}}. \text{ Q. E. D.} \end{array}$$

*) ex nat. Cycloid.

Quod si nunc determinanda sit Cyclois, quae transeat per data puncta A et B, describenda est super basi horizontali AH quovis circulo genitori Cyclois AT, quae ductam rectam AB, et productam, si sit opus, secet in T; quemadmodum enim recta AT est ad rectam AB, sic diameter circuli genitoris Cycloidis AT est ad Diametrum genitoris quaesitae AB.

Alterius generis nec minus elegans Problema foret, si jam porro quaereretur, quaenam ex infinitis Cycloidibus (aut saltem Circulis, Parabolis aliisve curvis) per A transeuntibus, ac super eadem basi AH constitutis, illa sit, per quam descendens grave minimo tempore ex A ad datum perpendiculum ZB appellat. Qui speculationem de maximis et minimis promovere volet, tentabit. Nobis sufficiat proposuisse.

Atque ita curva haec, quae tot Mathematicorum ingeniis exercita fuit, ut nihil in illa eruendum restare videretur, nova proprietate conspicuam sese nobis sistit, quam velut perfectionum suarum colophonem, quasi nihil futuris saeculis debitura, sub finem adhuc praesentis adipisci voluit, postquam initio ejusdem natales, ac medio dimensiones omnes cum aliis praeclaris affectionibus accepisset.

Caeterum monendum est, quod iisdem insistendo vestigiis, pari facilitate reperiri possit curva, quam mobile per medium inaequalis densitatis vel raritatis latum minimo tempore percurrat, quae quidem convenienter principio Leibnitiano Mense Junio 1682 demonstrato, eadem reperiatur necesse est cum Curva refractionis, quam Hugenius in Tractatu de Lumine pag. **44** contemplatur, et cujus identitatem cum illa, quam primo consideravit Celeberrimus Dnus. Leibnitius Mense Septembre **1692** pag. **446**, nosque mense Junio **1693** pag. **254** construximus, conscio Fratre jam olim deprehendi.

Sed per has speculationes ad alia quoque difficiliora Problemata patet accessus, qualia sunt, quae de Figuris Isoperimetris formari possunt. Quaeritur ex. gr. quaenam ex iis omnium sit capacissima (vulgo creditur esse circulus, et recte, sed sine demonstratione); quaenam centrum gravitatis areae et peripheriae suae habeat a basi remotissimum, quam Frater observavit esse Funiculariam, sed ex diverso fundamento etc. Haec itaque et talia per Methodum maximorum ei resolvenda proponimus. Praesertim vero, si vicem reddere volet, sequens generale tentabit.

Quaeritur ex omnibus Isoperimetris super communi basi BN constitutis illa BFN (fig. **104**) quae non ipsa quidem maximum comprehendat spatium, sed faciat, ut aliud curva BZN comprehensum sit maximum, cujus applicata PZ ponitur esse in ratione quavis multiplicata vel submultiplicata rectae PF vel arcus BF, hoc est, quae sit quotacunque proportionalis ad datam A et rectam PF, curvamve BF? Huic ne detrectare possit, adjungimus alterum quod de infinitis Cycloidibus supra motum fuit, majoremque cum suo affinitatem habet. Et cum iniquum sit, ut quis ex labore in alterius gratiam et cum proprii temporis dispendio rerumque suarum damno, suscepto nihil emolumenti percipiat, prodit nonnemo, pro quo caveo, qui soluturo Fratri ultra laudes promeritas, honorarium quinquaginta imperialium decrevit, hac tamen lege, ut intra tertium ab hujus publicatione mensem se suscepturum promittat, ipsasque solutiones finito anno, utcunque licet per quadraturas exhibeat. Hoc enim elapso si nemo dederit, meas exhibeo.

Haec itaque occasione Problematis Physico-Mathematici a Fratre mense Junio primum propositi hac vice dicta sufficiant. Quae ibidem de Complanatione superficierum Conoidicarum attigit, cum me propius spectarent, jam mense Octobri pertractavi. Nobilissimum Tschirnhausium uterque eodem mense Junio notavimus. Unicum igitur in Schediasmate Fraterno superest, quod, ne quid intactum praetereamus, enucleandum restat, methodus videlicet, quam celavit, inveniendi curvam ex sola data relatione ipsorummet curvae punctorum ad se invicem. Quaerenda sit ex. gr. curva AEC (fig. **105**) talis, ut projecta utcunque ex dato puncto D recta DC, secante curvam in C et E, rectangulum CDE aequetur constanti spatio, puta unitati, quod primum est exemplum Fratris. Ad datam positione rectam DG ordinatim applicentur EF, CG in angulo arbitrario, et fit $DE = x$, $EF = y$, $DC = z$ et $CG = t$, erit per hypothesin CDE seu $xz = 1$ et $x = z^{-1}$; dein propter sim. Tr. DEF et DCG, EF seu $y = tx : z = tz^{-2}$. Fundamentum solutionis: Talis supponatur aequatio seu relatio inter x et y, ut substitutis ipsarum valoribus modo inventis, similis vel eadem inter z et t relatio resultet, quae inter x et y, quod hic ita fit: Pono $y = ax^m = bx^n$, erit facta substitutione $tz^{-2} = az^{-m} + bz^{-n}$ sive $t = az^{-m+2} + bz^{-m+2}$, quae ut assimiletur priori $ax^m + bx^n$, comparo az^{-m+2} cum bx^n, et bz^{-n+2} cum ax^m, ac reperio utrobique $b = a$, nec non $n = z - m$; unde concludo, naturam curvae quaesitae esse $y = ax^m + ax^{2-m}$ vel, quod eodem modo ostendetur, $y = ax^m + ax^{2-m} + bx^n + bx^{2-n}$.

Haud absimiliter solvuntur duo sequentia, quae habet, Problemata pag. 266, quorum posterius in Programmate suo generaliter ita proponit, ut loco utriusque segmenti sumatur quaecunque ipsorum potestas quae sit m. Huic curva satisfacit, quae exprimitur per $y = x(x^m - x^{2m})^n$. Quae vero ultimo subjungit pag. 267, sed absque solutione, his curvae satisfaciunt mechanicae, quarum natura est $y = x(a + \int dx : x\,lx)^n$ pro fig. 2; et $by + cyy + cy^3$ etc. $= (a + \int dx : x\,lx)^n$ pro fig. 3 (intellige per lx logarithmum ipsius x). Quanquam tacere non possum, assumi hic aliquid dubiae et suspectae veritatis, videlicet portiones semper esse unius ejusdemque numero curvae, quae eadem aequatione denotantur. Dari enim possunt exempla in contrarium, saltem in curvis mechanicis, ubi hoc non contingit, eademque aequatio diversas numero curvas designat, quod vel ex his ipsis exemplis liquet, quandoquidem haec aequationes $y = x(a + \int dx : x\,lx)^n$ etc. non magis quadrant pro hypothesi $xzz = 1$, quam pro quavis alia xz^3, aut xz^4 aut $xz^p = 1$; quibus tamen hypothesibus omnibus unam eandemque curvam satisfacere implicat. Hoc itaque ulteriori Lectorum scrutinio perpendendum relinquimus.

Pene haec absolveram, cum perferrentur ad nos Acta mensis Novembris, in quibus Nobilis A u c t o r M e d i t a t o r u m G e o m e t r i c o r u m, eodem mense Anni 1695 publicatorum, motis sibi scrupulis nonnullis satisfacere ac sua vindicare satagit, eoque ardentius in nobis desiderium accendit videndi penitiusque introspiciendi tam praeclara inventa. Dixi enim me nullatenus dubitare, quin pro excellenti quo pollet acumine, quicquid pollicitus est praestare possit, atque optare tantum, ut speciminum loco talia promat, quae etiam iis, quibus de vastissimo Viri ingenio aliunde non constat, persuadere queant, quo nomine ipsum iterata vice et perhumaniter pulsandum censemus. Nam quod proprietatem spectat, quam focis curvarum attribuit, cum ea quibusvis punctis, adeoque non focis, qua focis, competat, difficulter quis capiat, quid haec ad naturam focorum, aut curvarum per focos cognoscendam conducat. Quemadmodum etiam intellectu haud facile existimo, quomodo quae fig. 1 et 3 de Ellipsi et Parabola ostendit, ad omnes alias etiam dissimiles et diversorum generum curvas applicari possint, cum illa duntaxat ejusdem generis et speciei curvis quadrent

ac praesertim posterius illius tantum generalioris consectarium sit, quod jam Anno 1692 exhibui. Et quod ultimo docet de abscindendis ex quavis curva portionibus in data ratione, hoc plane fallere dixi in Parabola, quod etiam agnoscere videtur Acutissimus Auctor; aut si dubitet, ego paratus sum demonstrare: unde, si nihil aliud, saltem hoc novo exemplo roborari opus haberet.

LVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Placet quod de Dno. Marchione Hospitalio scribis, nihil in ipsius verbis fuisse, quod me nimis laedere posset: non opus erat, ut adderes honoris titulum, quem interpres omiserat, partim quia genius linguae latinae hanc omissionem facile patitur, imo postulat, partim quia Hospitalius ipse revidendo translationem addidisset titulum, si id, ut dicis, ipsius menti fuisset conforme.

Videris approbare solutionem meam pro curva habente $PL^2PK = a^3$, substituendo in radicibus $y = \frac{1}{2}q + \sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$ et $y = -\sqrt{\frac{1}{4}qq - rr}$ loco q valorem $\frac{a^6 + r^6}{a^3rr}$: interim revera hac substitutione radices in rationales abeunt, nec tamen destruitur id, in quo distinguuntur; proveniunt enim diversae, una $y = \frac{r^4}{a^3}$, altera $y = \frac{a^3}{rr}$. Quid ergo hic censendum? Unamne an duas diversas producunt curvas? Sed supposito hanc curvam non aptam esse, sed vitandam, quid judicas de altera illa p e r c u r r e n t e per Logarithmos inventa?

Quod attinet observationem Fratris de vitro plano-plano, eam jam olim Eruditis Parisiis proposueram; qui autem omnes illud ipsum responderunt, quod Tu jam suspicaris, et quod ego ab initio Fratri dixeram scilicet, vitra non perfecte plana esse, sed aliquantulum convexa, et quidem cylindrice potius quam sphaerice, quia dextra cum sinistris, non vero supera cum inferis mutantur. Caeterum, quantum memini, observationem hanc in unico tantum vitro fecit, quod alicui fenestrae hypocausti domus suae erat insertum, cujus facies magnam aream respicit, ita ut non nisi objecta multum distantia situm suum permutaverint, propioribus vero eundem retinentibus; praeterea oculus spectatoris ad minimum sex septemve passibus distare debebat a vitro valde obliquo; in minori distantia permutatio objectorum nulla fiebat. An vero in majori res successisset, dicere non possumus, quia ob angustiam conclavis major distantia non dabatur.

De Machina tua arithmetica jam aliquoties rogare volui, quod viderem illius mentionem fieri in Medicina mentis Tschirnhausii; vellem illam videre libenter, vel saltem descriptionem ejus accuratam. Potestne etiam usui quotidiano inservire? nam cum illam adeo sumtuosam et tot rotarum apparatu fabricatam dicas, vereor ne curiosa magis sit quam utilis. Quaestor noster Spanhemius nuper mihi monstrabat hujusmodi machinam arithmeticam simpliciorem plurimis cylindrulis instructam, quorum superficiebus varii numeri erant adscripti; isti cylindruli super axiculis circumaguntur pro ratione multiplicationis vel divisionis: plenum tamen usum probe mihi non poterat explicare, saltem dicebat inventorem ejus esse Gallum Parisinum.

Gratias ago pro Communicatione fragmenti Actorum: potuisses hoc labore supersedere, nam biduo ante Tuas heri acceptas, id est ante triduum, accepi literas Dni. Menkenii, una cum eodem fragmento et figuris. Schediasma Fratris quod ibi habetur, facit ut ita prompte Tibi respondeam. Dicit ab initio se non existimasse se teneri provocatione mea, interim per schedulam illam manu propria scriptam et a Marchione Hospitalio mihi communicatam clare ostendere possum, quod problemati huic diu misere et tamen gratis insudaverit', donec tandem post omnes exanthlatos labores nullam aliam solvendi viam invenerit, quam eam ipsam, quam tu uno die reperisti, et quidem modo longe breviori; quid enim, bone Deus! opus est tot analogiis, quibus utitur, cum unica nobis sufficiat. Dicit deinde pari facilitate reperiri posse curvam refractionis seu quam mobile per medium non uniforme minimo tempore percurrat; qui fit ergo, ut non observaverit hujus curvae identitatem cum nostra brachystochrona. Sed missis his, accedo ad ea, quae me speciatim concernunt. Suntne haec illa longe difficiliora, de quibus Tibi tanta pompa scripserat? haec, inquam, quae de figuris Isoperimetris, de maximo descensu Centri gravitatis, de citissimo appulsu ad datum perpendiculum etc. proponit; parturiunt montes etc. Imo haec, quae partim jam diu inter nos

agitata fuere, partim quae simplicissima tantum sunt Consectaria eorum, quae in hoc ipso mense Actorum publicavi. Scis enim, quod jam pronuper Tibi communicaverim modum solvendi funiculariam per methodum meam directam, sine interventu tangentium, considerando tantum maximum descensum centri gravitatis; vides autem iterum, quo animo erga me constitutus sit, dum fictum suum non neminem pro quo cavere dicit, introducit, qui soluturo mihi ultra laudes promeritas (ne detractare possim) honorarium 50 imperialium decreverit, hac scilicet ratione credens, se quam optime propalaturum imbecillitatem methodorum mearum, suarum vero excellentiam, et per consequens toti erudito orbi ostensurum, quanto post se intervallo me relinquat. Tacite tamen omnes etiam Mathematicos simul provocat, dum suas solutiones promittit, si elapso hoc anno nemo dederit. Sed ecce quam male iis cedat, qui omnia sua pede metiri solent; haud dubie haec problemata fratri fuerunt laboriosa, multumque negotii facesserunt, forsan per ambages ob prolixitatem inimitabiles caeca fortuna ad solutionem deductus est, cum alia prorsus ageret; hinc non credidit possibile esse, ut ullus alius ex destinato vadum tentare, nedum superare auderet vel posset. Interim cogita, quaeso, quantus dolor! quanta tristitia! quando viderit, in ipso isto Actorum Majo, ubi tam temere mihi insultat, ubi tam alto supercilio sua problemata proponit, neque ad eorum solutionem invidiose invitat, quando, inquam, viderit ibidem jam contineri (implicite quidem, sed quae, vel ab infante, tanquam Corollarium facile deduci possit) solutionem meam sui Problematis, imo ipsius praecise, pro cujus solutione mihi promittit honorarium 50 imperial. et quod plus est, solutionem infinities generaliorem quam Problema postulat. Quaerit enim Frater, quaenam ex infinitis Cycloidibus (fig. 106) per A transeuntibus, et super eadem basi AH constitutis, illa sit, per quam descendens grave minimo tempore ex A ad datum perpendiculum ZB appellat. Pone loco perpendiculi ZB aliam quamvis rectam positione datam in quovis angulo cum horizonte, et sic problema universalissime conceptum solvo facillime hoc modo. Sit (fig. 107) horizontalis AZ, positione data recta ZB, punctum datum A: dico Cycloidem AB descriptam super AZ et occurrentem rectae ZB ad angulos rectos, fore illam per quam grave a puncto A citissime pervenerit ad datam positione ZB.

Hoc utique immediate sequitur ex proprietate curvae meae Synchronae, quam ostendi normalem esse omnibus Cycloidibus ex A et super AZ descriptis. Hinc tangens Synchronae erit perpendicularis Cycloidi per punctum contactus transeunti, quod punctum determinat brevissimum descensum ad tangentem per naturam Synchronae, quia hoc solum punctum tangentis est in ipsa Synchrona, reliqua sunt extra. Si itaque ponatur ZB tangere aliquam Synchronam, erit punctum B contactus; ergo etc. Ostendendum vero restat (ne quid Frater desideret) quomodo Cyclois AB ducenda sit, ut occurrat normaliter rectae ZB, id quod sic facio. Super ZG diametro perpendiculari ad AZ et ad lubitum assumta, describatur circulus $Z\beta G$, secans rectam ZB in β; quo puncto delineetur Cyclois $\alpha\beta$. Jam si fiat ut arc. αZ ad ZG, ita AZ ad quartam, erit haec diameter circuli genitoris Cycloidis quaesitae AB. Si ducatur AB parallela ipsi $\alpha\beta$, erit B punctum citissimi appulsus.

En itaque Problema plenissime solutum, quod poteris Fratri per occasionem indicare, et simul monere, ut promissam summam apud Te deponat; Te enim Judicem nostrum constituam, non dubito quin id sis, consentiente Fratre. Sciat enim Frater, quod si promissis stare non vellet, non me, sed pauperes, quibus hanc summam destinavi, sit defraudaturus: me enim pudet capere emolumentum ex hac solutione, quam sine ullo labore, sine ullo temporis dispendio, sine ullo mearum rerum damno, non intra tres menses, quos mihi pro deliberatione ad suscipiendum concedit, sed intra tria horae minuta adinveni. Alterum Problema, quod de Isoperimetris proponit (quod nescio an etiam comprehendatur sub honorario, quidquid sit illud) pari facilitate solvi, et quidem etiam longe universalius, quam a Fratre postulatur. Nil in hoc Problemate obscuritatis inest, ut putas, sed ob defectum figurae (credo) male intellexisti.

Quaerit enim ex omnibus Isoperimetris (fig. 108) super communi basi BN constitutis, illam BFN, quae non ipsa quidem comprehendat maximum spatium, sed faciat, ut aliud curva BZN comprehensum sit maximum, cujus applicata PZ ponitur esse in ratione quavis multiplicata vel submultiplicata (NB. Non dicit multipla vel submultipla, ut Tu intelligis) rectae PF, vel arcus BF, hoc est, quae sit quotacunque

proportionalis ad datam A et rectam PF, curvamve BF. Brevius ita proponi potest: Quaeritur ex omnibus Isoperimetris BFN illa, ut facta alia curva BZN, cujus applicata PZ sit ut potestas quaecunque ipsius PF, spatium NBZN sit omnium maximum. Hujus solutionem, pro hac vice, sine methodo solvendi, ob brevitatem temporis exhibebo, ut affirmare possis, me tertio die post visum Fratris schediasma Tibi solutiones problematum ejus perscripsisse. Sit ergo numerus potestatis n; PF seu BG, x; et BP seu GF, y; recta arbitria a; fiat GF seu $y = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$; dico punctum F fore in curva optata BFN. Hinc statim patet, si n sit 1, curvam fore circularem; si vero n sit 2, id est, si PZ sint ut quadrata ipsarum PF, erit curva PFN illa ipsa quam format linteum a fluido stagnante expansum, quam Frater etiam suae Elasticae tribuit. Si vero n sit $\frac{1}{2}$, id est si PZ sint in subduplicata ratione ipsarum PF, erit curva BFN iterum Cyclois vulgaris, cui proinde hic singulare quid accidit, quod $\int dy \sqrt{x}$ sit omnium maximum, et (posito arcu BF, t) $\int \frac{dt}{\sqrt{x}}$ (ut ex citissimo descensu patet) omnium minimum. Sic itaque Cyclois egregia gaudet proprietate.

Caeterum generaliter observo, quod fratri non ita obvium erit, quod quotiescunque n sit fractio, cujus numerator sit unitas, denominator vero numerus par, erit curva quaesita BFN talis, ut ope rectificationis Circuli construi possit; si vero denominator sit numerus impar, erit tunc curva quaesita BFN semper algebraica. Sit exempli gratia $n = \frac{1}{3}$, id est sint PZ in ratione subtriplicata ipsarum PF, erit GF seu $y = 2a - \overline{2a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}\sqrt{a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}}}$. Hinc, ut puto, non mediocris affulget lux pro instituendis summationibus quantitatum differentialium, quae reducuntur ad hanc formulam $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$: determino enim casus ubi fiunt absolute summabiles, item et illos, qui requirunt extensiones circularium, et denique illos, qui neque summabiles neque circulares existunt. Quid si jam problema universalissime proponam et solvam, si scilicet loco quod PZ secundum Fratrem debeat esse ratione certae potestatis ipsius PF, jam sit quomodocunque composita ex PF et datis; id est, si PZ sit aequalis ipsi GH applicatae curvae datae BH, quae loco quod secundum Fratrem est ex Parabolarum genere, a me supponitur qualiscunque: annon multo plura praestitero quam a me exigitur? Si ergo in eadem proportione honorarium promissum augere teneretur Frater, non puta omnes ipsius opes suffecturas. Ecce autem solutionem: positis quae prius, appelletur GH, X (quae datur ex BG seu x); ergo datur spatium BGH seu $\int X\,dy$ algebraice, vel saltem transcendenter; ergo datur etiam $\int \frac{X\,dx}{x}$. Sit itaque $\int \frac{X\,dx}{x} = \xi$; dico, facta GF seu $y = \int \frac{\xi\,dx}{\sqrt{aa - \xi\xi}}$, fore F in curva quaesita BFN, quae scilicet ex omnibus Isoperimetris illa est, cujus applicatae FP productae ad Z, ita ut PZ sit = GH, efficiunt spatium NBZN, omnium quae ita fieri possunt maximum.

Hoc ipso momento, quo haec paulo acrius meditor, mirabilem deprehendo curvarum convenientiam, quod enim modo supra Cycloidi singulare credidi, dum in illa $\int dy \sqrt{x}$ est maximum et $\int \frac{dt}{\sqrt{x}}$ minimum; jam video hoc omnibus hisce curvis esse commune. Dico enim si BFN curva talis sit, ut $\int x^m\,dx$ sit maximum, fore etiam semper $\int \frac{dt}{x^m}$ minimum. Vellem aliquis hanc necessitatem a priori demonstraret.

Ne quid omittam (quamvis non necessarium, certus enim sum, nec ipsum fratrem solvisse) ex abundanti tamen Te certiorem facio, quod etiam geometrice solverim problema de invenienda curva, non tantum ex omnibus Cycloidibus, ut supra facile praestiti, sed ex omnibus alterius ejusdem speciei et baseos, quae promptissime non solum ad perpendiculum, sed ad quamvis rectam positione datam accedat; unde vides plane non determinatum curvarum numerum requiri, ut opinaris. Definio enim praecise, sive per quadraturas sive per rectificationes, illam ipsam quae ex infinitis suae speciei quaesito respondet. Et quidem res perpetuo eo recidit, ut

prius determinetur Synchrona curvarum datae speciei, quae curvae si sint Cycloides, Synchrona facile determinatur; est enim illa quae omnibus Cycloidibus est normalis, ut supra ostendi. Sed si curvae datae sint alterius speciei, exempli gratia, circulares vel parabolicae (quos casus non solvisse, sed nude aliis proposuisse contentum se dicit Frater) hoc opus, hic labor est. Tunc enim Synchrona curvis specie datis amplius non perpendicularis est, sed inclinationem ad illas ubique variat. In hoc profecto praecipue aliquid me praestitisse puto, in quo plus negotii frater reperiret, quam forte per totam suam vitam expediet, non obstante quod jam visurus est (si nondum viderit) constructionem meam Synchronae Cycloidum; neque ego facile eo penetrassem, nisi genius quidam, albus an ater sit nescio (ut cum Theologo quondam nostro loquar) peculiare mihi artificium inspirasset, quocum etiam alia problemata solvo insolubilia antehac mihi visa. Vides ergo quousque intra triduum progressus fuerim, cum prius ne per somnium quidem de hisce cogitaverim. Nil superest, nisi ut Te rogem, ut instiges Dnum. Menkenium, ut quamprimum, et si fieri possit hoc mense, publicum moneat, me brevi adeo temporis spatio potitum esse solutionibus problematum a Fratre mihi prae aliis propositorum, longeque plura praestitisse quam petierat: solutiones vero ipsas me exhibiturum, quam primum ille praemium, a se mihi promissum, a me vero pauperibus destinatum, Tibi Judici harum rerum fere soli intelligenti remiserit, ut illud mihi, si solutiones meas legitimas deprehenderis, adjudices, sin minus, Fratri reddas.

Prout Dnus. Tschirnhausius loquitur in suo Schediasmate*), videtur materiam hanc non satis intelligere. Facit quidem mentionem Cycloidis, minime tamen problema solvit: unde conjicio, Dnum. Menkenium ipsi communicasse solutiones nostras, antequam imprimerentur. Si videret demonstrationem meam Syntheticam, quam suppressisti, non dubito, quin mutaturus esset sententiam, in qua est, quasi plures aliae curvae praeter Cycloidem possent satisfacere.

Accepi literas a Domino Marchione Hospitalio et a Belvallio, ille significat Dnum. De la Hire praetendisse se triplici via perve-

---

*) De methodo universalia Theoremata eruendi, quae Curvarum naturas simplicissimas exprimunt. De Problemate item Bernoullitano etc. per D. T. Act. Erudit. 1697 p. 220.

nisse ad solutionem problematis celerrimi descensus, sed semper deceptum fuisse, quippe qui invenerit Parabolam cubicalem. Dominus Belvallius promittit se revocaturum per occasionem errorem commissum in recensione problematis mei, ubi de Tua solutione agitur; misit etiam fasciculum Observationum Tuarum in Philosophiam Cartesianam, quas perlegere nondum vacavit. Juvenem illum Hagiensem, qui problema meum tentavit, esse Filium Domini Dierckens, Praesidis in Curia Brabantiae; utrumque et Patrem et Filium maxime his studiis delectari, ex literis Belvallianis disco.

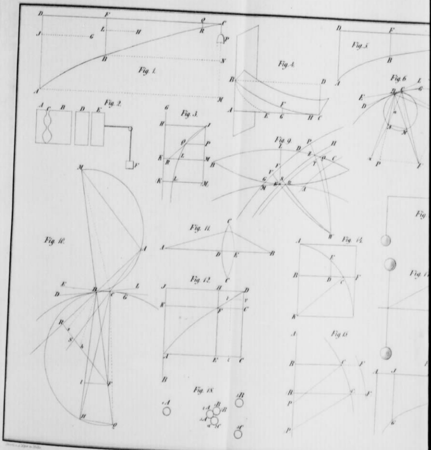
Pulchre utique agis, non nego, neque Te poenitere debet, quod fratrem mihi reconciliare niteris; sed doleo saltem operam Tuam perditam, ut olim illam Domi. Carcavi idem tentare volentis inter Cartesium et Robervallium. Non est quod putes me pejus aliquid vereri de fratre, quam res ipsa jubeat. Utinam semper satis de ipso veritus fuissem, potuissem sane unum et alterum declinare quod ab ejus nequitia mihi sustinendum fuit. Vae mihi, si fortuna me jussisset pendere ab ipsó. Praeter hunc fratrem morosum habeo duos alios, natu sc. minimum de quo jam audiisti, et alterum, natu me majorem, qui partem pingendi callet, sed parum exercet, quia in patria publico quodam munere fungitur. Oblitus sum nuper Tibi gratias agere pro gratulatione de nata mihi filiola; sed tristis eheu! illius obitus qui ante duas septimanas accidit mihi jam in memoriam revocat, quod congaudere Tuum repente adeo in condolere mutatum fuerit. Vale etc.

Groningae 7. Junii 1697.

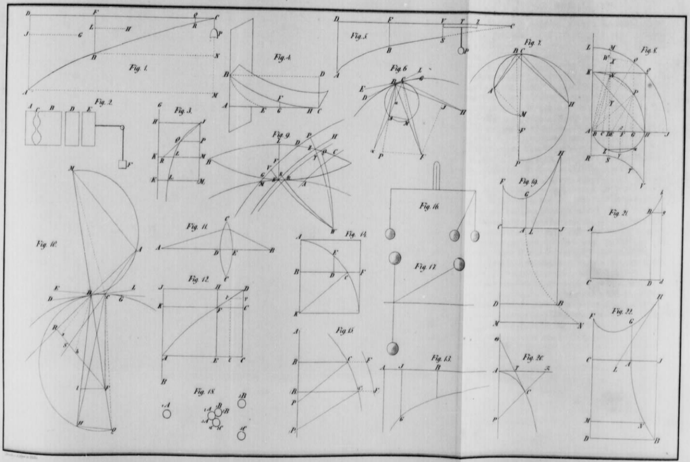
Rogo ut has literas asservare velis, ut solutiones meas (quandocunque opus sit) producere possis.

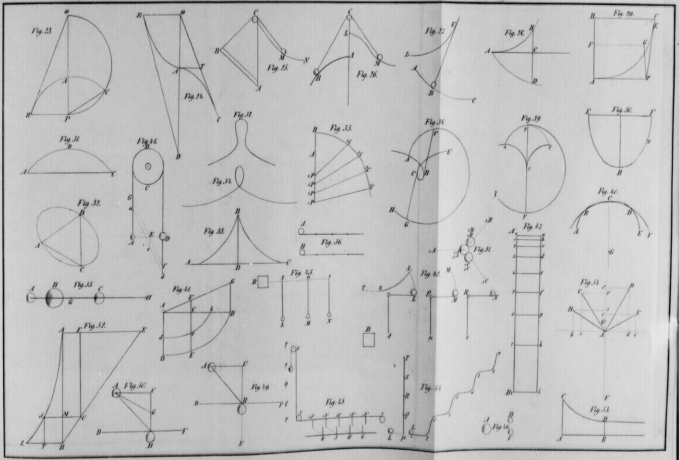
Remitto hac vice ex Actis tantum fratris schediasma, ne literae nimium gravarentur; quod restat alia occasione remittam.

Cures quaeso inclusas sine mora ad Dn. Menckenium.



lematis celerrimi descensus, sed semper
qui invenerit Parabolam cubicalem. Do-
se revocaturum per occasionem errorem
problematis mei, ubi de Tua solutione
alum Observationum Tuarum in Philoso-
perlegere nondum vacavit. Juvenem illum
a meum tentavit, esse Filium Domini
Curia Brabantiae; utrumque et Patrem et
delectari, ex literis Belvallianis disco.
non nego, neque Te poenitere debet,
iliare niteris; sed doleo saltem operam
illam Domi. Carcavi idem tentare volen-
ervallium. Non est quod putes me pe-
e, quam res ipsa jubeat. Utinam sem-
fuissem, potuissem sane unum et alte-
us nequitia mihi sustinendum fuit. Vae
sisset pendere ab ipso. Praeter hunc
uos alios, natu sc. minimum de quo jam
me majorem, qui partem pingendi cal-
aia in patria publico quodam munere fun-
r Tibi gratias agere pro gratulatione de
is eheu! illius obitus qui ante duas septi-
in memoriam revocat, quod congaudere
ndolere mutatum fuerit. Vale etc.
697.
sservare velis, ut solutiones meas (quan-
cere possis.
Actis tantum fratris schediasma, ne literae
restat alia occasione remittam.
s sine mora ad Dn. Menckenium.





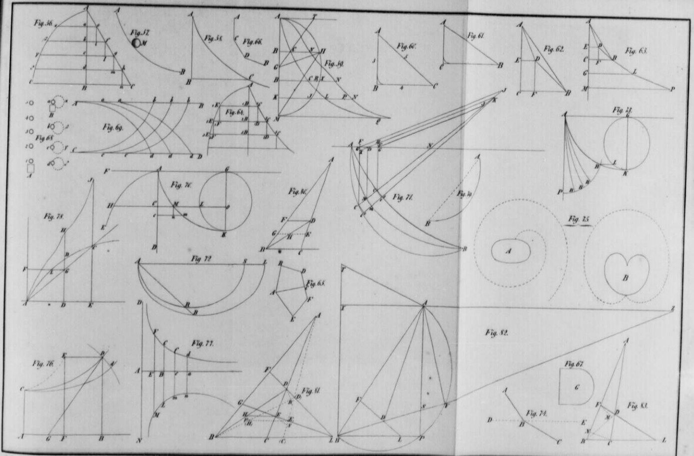


Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 66.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63.
Fig. 68.
Fig. 69.
Fig. 64.
Fig. 73.
Fig. 78.
Fig. 80.
Fig. 71.
Fig. 70.
Fig. 75.
Fig. 72.
Fig. 65.
Fig. 77.
Fig. 76.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 67.
Fig. 74.
Fig. 83.

Leibnizens
gesammelte Werke

aus den Handschriften

der Königlichen Bibliothek zu Hannover

herausgegeben

von

Georg Heinrich Pertz.

Leibnizens
gesammelte Werke

aus den Handschriften

der Königlichen Bibliothek zu Hannover

herausgegeben

von

Georg Heinrich Pertz.

Dritte Folge.

Mathematik.

Dritter Band.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1856.

Leibnizens
mathematische Schriften

herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Zweite Abtheilung.

Band III.

Briefwechsel zwischen Leibniz, Jacob Bernoulli, Johann Bernoulli und Nicolaus Bernoulli.

HALLE,

Druck und Verlag von H. W. Schmidt.

1856.

LVII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Primo cursore Tuas Dno. Menkenio misi, jussique ut mature publicari curet, Te Problematum Fraternorum solutiones brevissimo tempore dedisse.

Videris circa tuam curvam (ubi $PL^2 . PK = a^3$) frustra aliquid metuere. Extractio succedens in valore ordinatae hic nihil nocet, nec opus in hoc casu, ut discriminantia evanescant, sed pro illis tantum curvis, ubi radices eodem modo tractantur. Hoc vero discrimen inter $PL^2 . PK$ et $PL . PK^2$ tantum abest tolli oportere, ut potius sit conservandum. Sed talia ex festinatione excidere solent,

Et hanc veniam petimusque damusque vicissim.

Placet quod video suspiciones meas circa observationem dioptricam Domini Fratris Tui relatione Tua confirmari.

Putasne me tam male mihi consulere, ut sumtus conferre velim in Machinam, quae nihil aliud praestet, quam ea quae Tibi visa est? Si quicquid non a quovis redimi commode potest, curiosum magis quam utile esset, nec triremes scaphis praestarent, nec tormenta sclopetis. Illud quaeritur, annon ultra proportionem sumtuum, etiam effectus crescat. Equidem Morlandus in Anglia, Tubae stentoreae autor, Rhabdologiam ex baculis in cylindrulos transtulit, et additiones auxiliares peragit in adjuncta Machina additionum Pascaliana. De qua re et Librum scripsit. Tale quid post ipsum fecit et Grilletus Gallus; sed omnia ista nihili fere sunt, nullamque notabilem praestant utilitatem. Ego jam praedixeram, cum Rhabdologia aut inde deductis nihil ei instrumento commune esse, quod ego sum commentus. Descriptionem ejus dare accuratam res non facilis foret. De effectu ex eo judicaveris, quod ad multiplicandum numerum sex figurarum (exempli gratia) per alium sex figurarum rotam quandam tantum sexies gyrari necesse est, nulla alia opera mentis nullisque additionibus intervenientibus; quo facto, integrum absolutumque productum oculis objicietur. Idem est de divisione, ubi nullo in quaerendo quotiente opus est tentamento subtractionibusque nullis. Coram Tibi ostendere machinam, intus et extra, mihi aliquando jucundissimum erit. Non est facta pro his, qui olera aut pisciculos vendunt, sed pro observatoriis aut Cameris computorum, aut aliis, qui sumtus facile ferunt et multo calculo egent. Video Dnum. De la Hire expertum esse, quanto facilius sit Analyticas nostras Demonstrationes solutionum nostrarum vertere in syntheticas, quam solutiones talium problematum per se invenire.

Animadversiones meae in partem generalem Principiorum Cartesianorum scriptae sunt ad captum Lectorum, qui profundiora non attingunt.

Quod Domini Fratris Tui Problema attinet, utique curvam ex pluribus ejusdem baseos et speciei, a dato puncto, brevissimo tempore, ad datam rectam appellentem mihi ope Synchronae eleganter exhibere videris; nam ita rem praestas constructione lineari. Ego primo aspectu modum observavi parametrum lineae quaesitae exhibendi, numero quantumvis accurato, quoties algebraice haberi non potest; quo tunc contentus eram, quia hic de determinata tantum quantitate, nempe parametro, non de linea aliqua, seu indefinito quaerendo agitur. Melior quidem est constructio linearis, sed hanc ego tunc non quaesieram, quia id unice respexeram, quod levissima consideratione inter scribendum ad Te in mentem venerat. Interim verba mea nescio quomodo in transversum accepisti. Neque enim in mentem venit dicere determinatum curvarum numerum requiri, ut Epistola tua mihi ascribit, sed determinatum numerum, non curvarum, sed mensurae rationem parametri ad rectam constantem seu unitatem exhibentis. Caeterum post Synchronas semel ad hoc negotium a Te pulchre applicatas, non puto Tibi genio atro vel albo (ut cum

Zwinglio vestro per jocum loqueris) opus fuisse ad rem in aliis quoque praeter Cycloïdem curvis praestandam. Etsi enim in caeteris, recta positione data lineae quaesitae non sit perpendicularis, est tamen (quantum judico) semper tangens Synchronae, ac proinde tantum opus est describi Synchronam, quae rectam positione datam tangat. Sint (fig. 109) lineae specie convenientes et similiter ad A positae AFG, A(F)(G), et ipsam rectam ZGB(G) positione datam tangat Synchrona FB(F), tunc utique, ut in Cycloïde facis, merito Tecum concludemus, ipsam AB esse lineam quaesitam brevissimi appulsus. Nam quaevis alia ipsi ZB occurreret in G; est autem tempus per AFG longius quam per AF seu per AB. Hinc poteras solutionem tuam adhuc reddere generaliorem, ut praestet quaesitum, non tantum quando positione data, ad quam citissime pervenire debet, est recta, sed etiam si sit curva, imo si esset non linea, sed superficies, posses pro synchrona linea adhibere synchronam superficiem, quae superficiem positione datam tangat; sed haec Te (si modo animum advertas) latere non possunt.

Miratus sum Dominum Fratrem problemata Tibi proponere voluisse, pulchra quidem per se, sed de quibus tamen facile judicare potuisset, viam Tibi ad ea patere ex ipsa solutione Brachystochronae. Tota enim clavis hujus methodi inveniendae Formae maximum praestantis in eo consistit, ut maximum non solum in toto, sed et in parte praestetur, licet indefinite parva. Ita si descensus sit celerrimus ab uno extremo lineae ad aliud, etiam (fig. 110) in particula ejus BCD erit brevissimus descensus a puncto B ad D. Et quia curva infinite parva BCD sumi potest pro composito ex duabus rectis BC, CD, hinc oportet tantum quaerere punctum C tale, ut descensus in duabus rectis istis sit brevissimus; quo facto, habebitur Brachystochrona. Et quia tribus punctis indefinite propinquis seu curvedine determinatur osculans circulus, vel contra, hinc revera duae methodi, mea et tua, quam directam vocas, in fundo coincidunt. Hac methodo res etiam praestatur pro Catenaria; nam quia catenae longitudine datae, datis duobus extremis, situs debet fieri talis, ut Centrum gravitatis maxime descendat, patet etiam in Catenariae punctis indefinite vicinis hoc fieri, ut, data particulae curvae longitudine, seu summa rectarum BC, CD, et extremitatibus B, D, puncti C sit situs talis, ut hujus ex duabus rectis compositi datam longitudinem habentis centrum maxime descendat, unde curvatura et proprietas osculorum, imo et tangentium, determinari potest.

Eadem locum habent suo modo in maximis spatiis Isoperimetrorum, vel ut Isoperimetra relatorum.

Suspicor Dominum Fratrem Tuum etiam ope Synchronarum ad brevissimos appulsus venisse, quia video eum connexionem cum radiis et undis Hugenianis perspexisse; unde facile potuit Synchronas animadvertere. Sed miror, quod non Tibi eadem facile patere posse judicavit. Quae de quadraturis ipsarum $y = \int x^n dx : \sqrt{a^{2n} - x^{2n}}$ habes, fortasse Dominum Fratrem Tuum non latent. Si facias $x^n = z$, fiet $y = \int dz \, . \, z^{1:n} : n\sqrt{a^{2n} - zz}$, pro qualibus olim me Canones quosdam condidisse puto. Volebam monere, ne obliviscereris solvere eam problematis partem, ubi curvae novae ordinata est in ratione, non ad prioris ordinatam, sed arcum: sed video et hoc in Tua generalissima solutione curvae utcunque relatae contineri.

Haud dubie Dominus Frater Tuus solutionem omnium quae proposuit problematum exiget tanquam conditionem quae solutionem honorarii ingrediatur; diserte enim pag. 21 *) requirit solutiones.

Caeterum aliquem alium arbitrum mihi adjungi e re erit, quem Domino Fratri Tuo nominandum relinquemus, siquidem ipsi conditio placet. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 15. Junii 1697.

P. S. Reliqua Fragmenta ex Actorum Lipsiensium mense nuper transmisso remitti peto, et judicium tuum de meis ad Cartesium Animadversionibus expecto.

---

*) Act. Erud. 1697.

LVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quae narras de Machina Tua arithmetica faciunt, ut jam quid majus de ea concipiam. Si illam curiosam magis quam utilem suspicabar, nolim tamen Te putare quasi illam contemserim; contrarium potius, nam curiosum sine utili pluris aestimo, quam utile sine curioso: sed qui utrumque miscuit, omne tulit punctum: et hoc nomine Tuam Machinam licet mihi nondum visam, ex Tua tamen relatione maximi facio. Pergratum utique esset, eam aliquando coram videre.

Quod arbitratum me inter et Fratrem acceptaveris, mirifice gaudeo; scripsi nuper Bellavallio Epistolam satis longam, quam forsan imprimet *), ubi judicium meum aperui de solutionibus problematis mei quae novissime in Actis prodierunt, simulque mentionem injeci de reciproca propositione Problematum Fraternorum et de plenaria mea solutione eorum apud Te (nostrum Judicem) jamjam deposita. Non video, cur e re sit Tibi alium arbitrum adjungi a Fratre nominandum, vel qua fronte Te solum recusare audeat, cum nemo sit, qui ignoret Te nullo partium studio teneri, praesertim in illis rebus, per quas solas nos ambo Tibi noti sumus, ut adeo hac in parte non sit, cur uni magis faveas quam alteri. Interim urgendus est frater ante omnia, quod etiam in epistola ad Bellavallium monui, ut sine tergiversatione praemium promissum apud Te deponat. Ut autem ostendam, quam parum molior spe mercedis, pecuniam illam si mihi adjudicabitur, per publicas personas pauperibus distribui curabo.

Si verba Tua in Tuis praecedentibus, forsan ob coarctatam et confusam nimis scriptionem in transversum accepi, legendo d e t e r m i n a t u m n u m e r u m c u r v a r u m, pro d e t e r m i n a t o n u m e r o m e n s u r a e r a t i o n i s p a r a m e t r i a d c o n s t a n t e m, non minus sinistre interpretaris sensum verborum meorum, quasi ego non praeviderim Synchronam a me semel adhibitam in Cycloïdibus pro determinando celerrimo appulsu ad lineam rectam utcunque positione datam, generaliter posse applicari ad rem in

---

*) Siehe Histoire des Ouvrages des Sçavans. Juin 1697.

aliis quoque praeter Cycloïdem curvis praestandam; cum tamen in literis meis disertis verbis dixerim *rem perpetuo eo recidere, ut prius determinetur Synchrona curvarum datae speciei.* Scio etiam maxime, quod etiamsi recta positione data non sit perpendicularis in aliis praeter Cycloides curvis, tamen semper sit tangens Synchronae, et qui hoc ignorare potuissem, cum Synchronae natura hoc statim secum ferat, et impossibile sit ut illam contemplari potuissem, quin hoc ipso id viderim; ut verbo dicam, non potui non videre. Sed hic id ipsum quaero, quod Tu pro concesso tanquam postulatum assumis, ac si nihil difficultatis inesset, dum dicis, *ac proinde tantum opus est describi Synchronam, quae rectam positione datam tangat.* Imo maxime hoc opus est, et opus esse semper agnovi; sed quomodo, quaeso! describenda est Synchrona generaliter in curvis datae alicujus speciei? Habeo ego methodum pro hoc, quae est illa ipsa, quam a peculiari genio mihi inspiratam per jocum dixi, praeterea tametsi innotescat (quod quidem palmarium est) modus construendi Synchronam, non tamen inde statim deducitur modus ducendi ejus tangentes, quia si meministi, non ita pridem Tibi dixi, dari aliquas curvas quarum constructio simplissima habetur, quae tamen non facile aequatione differentiali, nedum algebraica, exprimi possunt; atque adeo cum tangens curvae duci non possit, nisi cognoscatur relatio inter dx et dy, id est, nisi habeatur aequatio differentialis naturam curvae exprimens, evidens quoque est modum construendi Synchronas (qui per se etiam maxime difficilis est) nondum sufficere pro determinatione Problematis, sed requiri insuper relationem inter dx et dy, ut habeatur tangens, vel potius ut data tangente seu inclinatione rectae positione datae habeatur punctum in Synchrona, cui ista inclinatio conveniat. Et sane exemplo nobis sit vel sola Synchrona Cycloïdum, cujus constructionem tam brevem, tamque simplicem trado: quomodo quaeso exinde ejus aequationem differentialem quaereres, vel saltem quomodo determinares ejus tangentes, si non aliunde constaret, nempe ex consideratione undae luminaris, quod sit perpendicularis Cycloïdibus? Non quidem dubito quin eo pervenias, si tentare digneris, namque et ego eo perveni et inveni modum reducendi hujusmodi curvas ad suas aequationes: sed repeto quod dixi, singulare scilicet artificium pro hoc requiri, quod fratri facile obvium non puto. Mirari itaque satis non possum, quod

ita perfunctorie hoc consideraveris. Quam frigide dixissem, me a genio quodam habuisse, si nihil aliud mysterii subesset quam id quod recta (vel si mavis curva) positione data tangere debeat Synchronam. Optarem ut periculum fecisses in unico illo exemplo, quod Frater proponit de circulis, quo difficultatem rei ipse expertus fuisses. Oportet utique ut Frater ipse illud pro desperato habeat, cum dicat, *se aliis relinquere tentamen ejus, sibi sufficere proposuisse.* Interim prima occasione mittam Tibi non solum pro hoc, sed generalem Methodum determinandi curvam ex infinitis speciei datis, per quam grave descendens citissime appellit ad rectam positione datam, idque sine interventu curvae Synchronae, quod haud facile credideris, quamvis id, mediante Synchrona, etiam praestare possim, quaerendo scilicet aequationem differentialem pro natura Synchronae. Sed hic modus non tam naturaliter nec tam simpliciter procedit, ac alter ille sine Synchrona.

Suspicaris Fratrem meum etiam ope Synchronarum ad brevissimos appulsus venisse: ego autem nil minus credo quam hoc; contra potius persuasus sum totus, per ingentes ambages quaesito tandem potitum fuisse (et quidem tantum in Cycloïdibus, nam ut jam dixi in aliis curvis id pro desperato habet). Atque adeo suam viam (qua breviorem dari non putaverit) mihi oppido imperviam credidisse. Perpende, obsecro, si vel per somnium de Synchrona cogitasset, annon pro recta verticali quamvis aliam obliquam positione datam citissime attingendam proposuisset, cum per Synchronam res aeque facilis sit, sive recta sit verticalis, sive obliqua: quod vero dicis eum perspexisse connexionem cum radiis et undis Hugenianis, pace tua, ego contrarium dixerim; id ipsum enim quod curvaturae radii (non vero undae) mentionem faciat, absque tamen ut quicquam dicat de identitate ejus cum Brachystochrona, satis indicio est, hanc connexionem omnino ignorasse, et de unda nequidem cogitasse. Unde non immerito suspicor, si mea in Actis nondum viderit, ne nunc quidem scire rectam suam verticalem debere esse perpendicularem ad cycloidem brevissimi appulsus, licet lectis illis se semper scivisse simulaturus sit, suam vero constructionem cujus prolixitatis pudebit studiose celaturus.

Quod attinet alterum Fratris Problema de Isoperimetris, quando credis illud ex hoc fonte posse solvi, considerando maximum non solum in toto, sed in parte praestari, et particulam curvae indefinite parvam censendam esse compositam ex duabus rectis, quarum situs sit determinandus ita, ut illae duae rectae quarum summa constans supponitur, praestent maximum vel minimum requisitum, quo situ invento, dari tria puncta, et per consequens Circulum per ea transeuntem, id est ipsum Circulum osculatorem, unde in fundo hanc methodum cum mea quam directam voco, coincidere concludis: hic iterum prius pronuntiasse quam satis examinasse videris. Scire Te volo, me initio etiam habuisse hanc meditationem, qua singulare quid efficere sperabam: concipiebam enim (fig. 111) BD ut subtendentem particulae curvae infinite parvae, ex cujus extremitatibus B et D, tanquam focis, imaginabar Ellipticulam ECF, per filum BCD aequale particulae curvae quaesitae descriptam. Jam in hac Ellipsi ECF (quae considerari potest ut finitae et ordinariae magnitudinis) quaerebam punctum C, ad quod ductae BC, DC praestarent aliquod maximum vel minimum desideratum. Sed praeterquam quod calculus prolixissimus et taediosissimus evaderet, videbam etiam statim, hoc mihi pro determinatione longitudinis radii circuli osculantis plane nihil facere, nam prout filum BCD longius breviusve intelligitur (licet excessus ejus super BD debeat esse incomparabiliter minor quam BD vel BCD) necessario alius atque alius Circulus per tria puncta B, C, D transibit; adde quod interdum accidit, ut maximum quod in toto praestandum est, in particulis infinite parvis diversimode considerari possit; unde etiam diversae solutiones prodirent, quod est absurdum. Exempli gratia, in ipsa Catenaria, ubi requiritur ut ejus Centrum gravitatis quam maxime descendat, et cujus quaelibet particula BCD consideratur aequaliter gravata, ponderculum ejus vel secundum totam longitudinem BCD extensum, vel in uno puncto C collectum, intelligi potest. Jam vero si quaeras situm puncti C, ita ut commune Centrum gravitatis linearum BC, CD quam maxime descendat, ad quod operoso calculo Tibi opus est; item si quaeras situm ejus, quando ponderculum collectum, id est ipsum punctum C quam maxime descendit, quem sine calculo vides esse in eo puncto, in quo linea horizontalis Ellipsin tangit; deprehendes duos illos situs esse diversissimos: unde in una hypothesi aliud specie triangulum BCD, et per consequens alius circulus osculator prodiret, quam in altera; quod non potest subsistere, et sic frustra hac via quaereres naturam Curvae.

Alia ergo via mihi incedendum erat ad determinandas ex Isoperimetris curvas, quarum summa applicatarum ad certam potentiam elevatarum vel alio certo modo cum constante permixtarum, faciat maximum. Ut totum Tibi mysterium quo usus sum detegam, en tale est: Quaerenda est generaliter curvatura lintei a liquore stagnante expansi, quoniam enim linteum eam figuram accipiet, quae Centro gravitatis liquoris concedat locum infimum. Si jam concipis liquorem dividi in filamenta parallela verticalia, quae sint vel quae fingantur potius gravata in applicatarum ratione vel simplici (ut in ordinaria lintei figura) vel duplicata, vel triplicata etc.: evidens est Centrum gravitatis omnium istorum filamentorum seu totius liquoris distare a basi horizontali (suppositis applicatis verticalibus x, et horizontalibus y, et numero potestatis, in cujus ratione filamentum liquoris supponitur gravatum, $n-1$; ipsa autem quantitate liquoris L) $\frac{\int x^n dy}{L}$. Distantia vero haec est maxima: ergo etiam $\int x^n dy$ est maximum: Ergo curvatura lintei continentis liquorem, cujus filamenta verticalia sunt gravata in ratione potestatis $n-1$ ipsarum applicatarum verticalium, est eadem quae foret curva ex omnibus Isoperimetris quaesita, cujus applicatarum ad potestatem n elevatarum summa produceret maximum. Ex hoc fundamento reperi pro natura curvae $y=\int\frac{b^n+x^n dx}{\sqrt{a^{2n}-(b^n+x^n)^2}}$, vel contractius, ponendo pro b, quod arbitrarium est, 0, $y=\int\frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}$. Quod autem haec expressio simplicior reddi possit, faciendo $z=x^n$, unde $y=\int\frac{z^{\frac{1}{n}}dz}{n\sqrt{a^{2n}-zz}}$, id mihi jam innotuisse ex eo potes colligere, quod in praecedentibus meis determinaverim casus, quando evadit absolute summabilis, quando requirit extensionem arcuum Circularium, et quando neque summabilis neque circulabilis est; nempe si n est fractio, vel, quod eodem redit, si $\frac{1}{n}$ est numerus integer impar, habebuntur casus primi; si $\frac{1}{n}$ est numerus par, habebuntur casus secundi; si vero n est numerus integer, habebuntur casus tertii. Hanc autem reductionem $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}$ ad $\int \frac{z^{\frac{1}{n}}\,dz}{n\sqrt{a^{2n}-zz}}$ consulto celabam, ut limitatio horum trium casuum tanto mirabilior appareret; loco quod per alteram expressionem artificium ipse detexissem. Quis enim facile crederet, si n sit numerus fractus, quantitatem $\frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}$ summabilem, vel saltem circulabilem; si vero n sit numerus integer, neutrum omnino posse esse, cum prima fronte contrarium potius videatur; in illo namque casu, ubi n est fractio, fit involutio plurium laterum radicalium diversi nominis; in hoc vero ubi n est numerus integer, unicum semper adest latus quadraticum. Non est ergo quod metuas, ne haec expressio $y=\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{a^{2n}-x^{2n}}}$ Fratrem meum non lateat; gaudebo magis in eadem inciderit; videbit enim eadem opera me legitimam reperisse solutionem, et simul longius quam ipse progressum esse, determinando casus algebraicarum et transcendentium. — Praeterea praestat adhibere hanc expressionem, quia ex hujus constitutione statim ipsa prodit curva quaesita; constitutio vero alterius expressionis $y=\int\frac{z^{\frac{1}{n}}\,dz}{n\sqrt{a^{2n}-zz}}$ non statim ipsam quaesitam curvam exhibet, sed aliam quamdam, cujus ope demum quaesita describitur.

Si missa constructione, explicanda dumtaxat esset curvae natura per insignem aliquam proprietatem, et si hoc sufficeret pro solutione, dicerem simpliciter curvam quaesitam BFN (fig. 112) eam esse, in qua (posito numero potestatis n, ad quam applicatae elevantur) circuli osculatoris radius FS est ubique ad perpendicularem curvae FR interceptam inter basin BN et curvam BFN, in ratione 1 ad n. Quid quaeso simplicius, quid elegantius hac proprietate? Miror quod nihil responderis ad mirabilem illam convenientiam, de qua in praecedentibus meis, ubi nimirum deprehendi, si (BP, y; PF, x; BF, t) $\int x^n\,dy$ sit maximum, fore simul etiam in eadem curva $\int\frac{dt}{x^n}$ seu $\int x^{-n}\,dt$ minimum; et vice versa, si illud sit minimum (quando nempe n est numerus nega-

tivus) tunc hoc fore maximum. Incidi in hanc convenientiam, conferendo curvas lintei, quibus illud competit, cum Catenariis, quibus hoc competit. Sed vellem ut aliquis necessitatem hujus convenientiae ex ipsa contemplatione curvarum erueret, id est, ut ostenderet ex suppositione $\int x^n\,dy$ maximi, inferendum esse, *ergo $\int x^{-n}\,dt$ est minimum.*

Mones ne obliviscar solvere Problematis alteram partem, ubi curvae novae applicata est in ratione multiplicata, non ad prioris applicatam, sed arcum. Etiamsi hanc partem non solvissem, non tamen crederem me solvere teneri; sufficeret enim ut alterutri partium satisfecissem; ideo quia Frater loquitur disjunctive, non copulative, dum dicit *rectae* BF vel *arcus* BF; item *rectam* PF *curvamve* BF, atque ita non utriusque, sed alterutrius tantum solutionem exigere videtur. Urges, diserte illum requirere pag. 215 *solutiones* in plurali, non solutionem in singulari, quasi vero non possent peti et dari diversae solutiones unius ejusdemque Problematis. Videtur insuper mihi honorarium proposuisse pro solutione dumtaxat ultimi problematis, de Cycloidibus; alias nescio, quod sibi velint haec verba: *ne detrectare possit,* annon idem est ac si dixisset: *Adjungimus alterum Problema, et ne detrectare possit, dabo ipsi pro solutione ejus 50 Imperiales.* Quantumvis interim ambigue et captiose sint posita ejus verba, ut in omnem eventum haberet litigandi ansam, eam tamen penitus praecidisse me puto, cum omnia tamen quae proposuit, millies generalius solvi; imo et ipsa illius problematis pars, ut probe animadvertisti, in mea generalissima solutione continetur, imitando namque formulam meam generalem; positis arcu BF, t; GH (utcunque composita ex t) T; $\int\frac{T\,dx}{x}=\vartheta$, reperitur pro aequatione curvae quaesitae $y=\int\frac{\vartheta\,dx}{\sqrt{aa-\vartheta\vartheta}}$, quae reduci potest ad hanc simplicissimam $ay=\int\vartheta\,dt$. Quoniam vero ϑ involvit indeterminatas T et x, fit ut aequatio $ay=\int\vartheta\,dt$ non possit construi per differentias primas;