oportet ergo ut recurramus ad differentias secundas, ad separandas indeterminatas; quod sic facio: quia $a y = \int \vartheta d t$ et $a d y = \vartheta d t = d t \int \frac{T d x}{x}$, erit $\frac{a d y}{d t} = \int \frac{T d t}{x}$, supponendo $d t$ constantem, et differentiando utrumque, habetur $\frac{a d d y}{d t} = \frac{T d x}{x}$ seu $\frac{a x d d y}{d x} = T d t$; substituto valore ipsius $d d y$ qui est $\frac{-d x d d x}{d t}$, erit $\frac{-a x d d x}{d t} = T d t$ vel $-a x d d x = T d t^2$. Et sic T, proinde etiam t, hujusque differentialis $d t$, seu $\sqrt{d x^2 + d y^2}$, dabitur per x et $d x$. Sit ergo $d t^2$ seu $d x^2 + d y^2 = X d x^2$, erit $d y^2 = X d x^2 - d x^2$, id est $d y = d x \sqrt{X - 1}$ et $y = \int d x \sqrt{X - 1}$. Hoc modo licet construere curvam, nec meliorem dabit constructionem frater; sed sufficit dedisse aequationem $y = \int \vartheta d t$, quae naturam curvae determinat.

Caeterum notabilis hujus curvae proprietas est, quod $FS . FR :: \vartheta . T$, quomodocunque demum T concipiatur composita, sive ex arcu BF, sive ex applicata PF, sive ex utroque simul; sic itaque Circulum osculatorem hujus curvae generalissime determinavi.

Non est quod judicium meum petas de Animadversionibus Tuis ad Cartesium; cum enim maxima pars versetur circa motum, judicium quod ferrem ignorare non poteris; habes enim assensum meum in omnibus quae circa motum Cartesio opponis. Correxi in aliquibus locis errores calami, qui sensum turbabant, quod non aegre feres; notavi etiam in margine, ne Lector offendatur, quod recensendo Regulam 7^{am} Cartesii sensum omnino contrarium ipsi attribueris, quod tamen nihilominus falsitas hujus Regulae ex Tuo ratiocinio, mutatis mutandis, demonstrari possit. Placet Tuum criterium pro examinandis Regulis motuum, quod Legem continuitatis vocas; est enim per se evidens et velut a natura nobis inditum, quod evanescente inaequalitate hypothesium, evanescere quoque debeat inaequalitas eventuum. Hinc multoties non satis mirari potui, qui fieri potuerit, ut tam incongruas, tam absonas et tam manifeste inter se pugnantes Regulas, excepta sola

prima, potuerit condere Cartesius, Vir alias summi judicii. Mihi videtur vel ab infante falsitatem illarum palpari posse, eo quod ubique saltus ille naturae adeo inimicus manifeste nimis elucet. Modus Tuus explicandi duritiem corporum per motum conspirantem particularum peringeniosus est; effecit ut recordarer speculationum mearum, quas ante aliquot annos, ambulando in horto Regio Versaliis, habueram circa ijactus et lusus aquarum, quorum aliqui adeo perfecte repraesentabant vasa diversarum figurarum, ut illa ex continuo vitro solido et pellucidissimo conflata dixisses, quae vero admota manu in mille guttas dispergebantur, qua remota dictum factum pristinam figuram induebant. Sentiebam tamen difficultatem aliquam et quasi resistentiam in disturbanda figura vasis. Hinc cogitare coepi, si qua arte aquae salienti velocitas reddi posset infinita vel saltem incomparabiliter magna quae omni impulsui resisteret, quod ista vasa tandem obrigescerent, et sic exhiberent solidum perfectum, quod quovis instanti mutaret materiam, servata semper eadem figura. Quod durities a motu conspirante particularum proveniat, etiam inde patet, quod materia fluidissima alias, qualis est aër, quando in vehementem motum agitatur, difficulter corpori duro penetrare volenti locum cedat, ceu videmus in ventis violentis. Et imprimis notabile est, quod observo explosione sclopeti mei pneumatici, quod ope aëris condensati globulum plumbeum trajicit per asserem satis crassum in distantia 50 passuum; observo, inquam, ibi aërem eo usque condensari, et deinde tanto cum impetu et velocitate erumpere, ut sub forma visibili corporis oblongi solidi et opaci appareat, et dicto citius iterum evanescat; ita ut firmiter credam, si possibile esset, ut eo momento quo aër iste condensatus erumpit, globulus aliquis aliunde veniens et ad aërem erumpentem appellens in directione perpendiculari ad directionem aëris, hunc globulum non solum non per transversum aëris penetraturum, sed ac si in durum Corpus allisisset, iterum resulturum fore. Caeterum videris impugnare atomos, quibus tamen Tua opinio circa duritiem favet; quid enim obstat, quominus credamus, materiam etiam fluidissimam constare corpusculis minimis, quorum singulorum partes sunt in perpetuo motu conspirante positae? Illa ergo corpuscula sunt atomi, mente quidem divisibiles, sed actu indivisae. Vale etc.

Groningae 26. Junii 1697.

LIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Statim monere volui, quod pro prudentia Tua ipse e re esse judicabis, non decere ut arbitrium recipiam, donec Dominus Frater Tuus consensum testetur, aut sibi hoc gratum fore significet, ne me scilicet ingerere videar. Itaque rogo, ne quicquam a Domino Bellavallio dici cures, quod significet me arbitrium recepisse, sed tantum me a Te nominari, et a Te sperari Dominum Fratrem Tuum in me esse consensurum. Nuspiam credo dixi, ignotam Tibi fuisse Synchronarum applicationem ad ceteras curvas, cum Tua ad Cycloïdes applicatio ostenderit, hoc non posse non Tibi esse facillimum.

Mirari non debes, si profundiora Tua non nisi perfunctorie attingere nunc possum, cui tot alia sunt meditanda, legenda, scribenda, agenda in Aula, in officio, cum amicis, cum exteris, coram et per litteras (quarum ultra 300 quotannis scribo), imo et per dissertationes, veluti de Juribus Principum, de Historia Brunswicensi, de aliis Historico-Politicis, de controversiis Religionis, in quibus saepe etiam scriptis exerceor. His adde inspectionem Bibliothecae Guelfebytanae Augustae et nostrae Electoralis; volutationem qualemcunque novorum Librorum et Relationum alicujus momenti, ne sim hospes in re Publica et Literaria; curam publicandi scriptores Historicos ineditos ex veteribus membranis (quales nunc sub prelo sunt) ubi opus recensione diligenti; prosecutionem Codicis Juris Gentium Diplomatici, cujus volumen jam edidi; tum multa quae quotidie veniunt in mentem non in Mathesi tantum, sed et Physica et Philosophia profundiore, et Historia et Jure, aliisque quae paucis verbis in schedis consignare soleo, ne pereant. Adde etiam cogitata de Elementis Juris Naturae constituendis longe aliter, quam vulgo opinantur, de quo subinde meditor; jam enim promisi publice ante multos annos; sed ita ago, ut rem conferam cum Legibus Romanis et usu Fori: sed imprimis molior novam Analysin, multo recepta sublimiorem pro omni ratiocinatione humana; Chimica etiam, Technica, Mechanica, in quae subinde operarios alo. Ita judicare potes, an liceat mihi saepe in profundioribus Geometricis versari. Ac proinde non debes vel indignari, vel verbis crudioribus impatientiam animi ostendere,

quoties non statim omnia videor dicere ad mentem Tuam. Neque ideo statim vel inconsiderantia, vel negligentia est objicienda. Me quidem hic stylus minus movet, qui scio nihil inde benevolentiae Tuae decessisse; alii tamen delicatiores vel mirarentur, vel aegrius acciperent, praesertim cum decentius absint: et dici res ipsae inter amicos possunt et vere simul et commode, atque ut Galli dicunt „obligeamment“.

Interea dum fateor non posse me semper satis attentionis adhibere, non ideo tamen profiteor me, si adhiberem, statim rem assecuturum. Non dubito quin aliquid egregii artificii Tibi inciderit, neque id a me memini contemni, etsi mentem Tuam non satis perceperim. Quod me attinet, quantum nunc tumultuaria consideratione inter scribendum assequi licet, puto Synchronas semper posse haberi per quadraturam. Nam cum, dato tempore, determinari queat punctum in curva data, ad quod mobile pervenit, utique si pro eodem tempore id fiat in qualibet curva ordinatim positione datarum, hoc modo habebitur quodvis punctum Synchronae. Quia autem praeterea id quaeritur, ut Synchrona exhibeatur ea, quae datam rectam tangat, id quidem ob lineas ejusdem speciei seu similes atque etiam similiter positas ad punctum fixum, sic fiet: Assumatur aliqua ex Synchronis, et ad eam ducatur tangens datae rectae parallela, quod utique fieri potest, saltem transcendenter. Inde ex puncto fixo, ad quod similiter sitae sunt lineae, ducta recta ad punctum contactus producatur, dum ipsi rectae datae occurat, et habebitur punctum, in quo Synchrona quaesita rectam datam tanget, quod est punctum appulsus. Unde dato uno puncto, describi jam potest Synchrona, quanquam hac jam non sit opus hoc loco. Eo ipso enim quod habetur punctum appulsus, adeoque punctum lineae celerrimi appulsus quaesitae, habebitur linea ipsa, quippe speciei, jam data. Eadem methodus videtur etiam inservire, si celerrimus appulsus quaeratur non ad rectam, sed ad curvam positione datam. Caeterum non semper curvas constructione datas commode ad tangentium inversas reduci, vel non semper facile haberi valorem $dy:dx$ per ordinarias, satis superque ipse expertus sum, et alios methodi differentialis defectus plus satis, vetere jam usu, compertos habeo. Hoc loco tamen eos puto evitari; et nihil est quod impediat haberi tangentem Synchronae, seu valorem $dy:dx$ per x et a, licet transcendenter, saepe ex suppositis tamen quadraturis. Cumque aliunde habeatur iterum $dy : dx$ ex eo, quod tangens Synchronae quaeritur parallela rectae datae, habebitur valor ipsius $dy : dx$ bis, quod determinat ipsam x, adeoque punctum Synchronae, et semper hoc casu inveniri potest hoc punctum intersectione duarum linearum, ex quibus ad minimum una est transcendens, si non ambae, quoties nempe valor ipsius $dy : dx$ est transcendens. Agnosco interim nos ad Synchronam ducendam non esse obligatos, et ex ipsis per se lineis adhuc brevius eam lineam posse eligi, quae est brevissimi appulsus. Nempe, assumta linea ex specie datis communis initii quacunque, semper determinari potest, quam in quovis ejus puncto recta, ad quam ibi celerrime appellitur, inclinationem habeat, seu angulum faciat cum horizonte, si placet, vel ad rectam datam si mavis. Eligatur ergo illud punctum curvae assumtae, in quo recta, ad quam ibi celerrime appellitur, sit parallela rectae datae. Quo facto, recta per hoc punctum, et per punctum communis initii trajecta occurret rectae datae in ipso puncto celerrimi ad ipsum appulsus, adeoque habebitur et punctum lineae celerrimi appulsus quaesitae. Unde ipsa linea quaesita determinatur. Sed in Tuis Methodis altius aliquid latere puto.

Pro Isoperimetris perelegantem et ingeniosam esse fateor Methodum Tuam per centrum gravitatis. Interim indirecta est censenda, qualis est qua Dominus Marchio Hospitalius Brachystochronam solvit, et nos Catenariam. Sed illa quam propono est magis Analytica, et hac revera Brachystochronam determinavi, quaerendo non, ut alias solemus, directionem, sed curvedinem, id est, datis duobus rectae indefinitae parvae in angulum fractae extremis, quaerendo punctum anguli, sic ut optime praestetur desideratum. Qua ratione non puto metui debere quod metuis, ut prodeant inter se pugnantes solutiones. Nec Ellipticula adhibenda, nisi cum data ponitur longitudo fili seu curvae inter extrema interceptae, ubi, etsi non cogites de Ellipsi, ipsa Optimi consideratio determinabit punctum. Nec dubito hoc modo et Catenariam et similes, cum curva est magnitudinis datae et formae quaesitae, directe et satis facile pro re nata posse determinari. Hoc autem posito, nec (fig. 110) filum BCD longius aut brevius assumi potest. Si non possit, filum utique vel Ellipsis frustra ibi adhibetur, nec quicquam determinare potest. Sed et alteri objectioni Tuae facile satisfit. Neque enim in Catenaria, verbi gratia, pondus filo BCD incumbens in punctum C collectum initio supponi debet, sed per

totum filum dispergendum est aequaliter, vel quod eodem redit, concipiendum est pondus ipsius BC suspendi ex ipsius BC medio, et ipsius CD similiter ex ipsius CD medio. Quo facto, quaerendo situm talem, ut, data magnitudine ipsius $BC + CD$, centrum gravitatis commune maxime descendat, reperietur id verticaliter imminere ipsi C, et alia habebuntur, quae curvedinem determinabunt. Itaque non miror, quod Methodum secius acceptam habuisti suspectam. Nolim tamen Tibi reddere, quod mihi dicis, prius pronuntiasse quam satis examinasse. Etsi enim id saepe, credo, in nobis ambobus sit verissimum (cum error non adeo est periculosus, imo fortasse aliquando utilior veritate, si semper haec in istis primo statim aggressu nimia attentione esset redimenda) tamen magis ex decoro esse puto his formulis abstineri.

Quae Dominus Frater Tuus jam viderit, non satis dixerim; miror ipse, quod problema accuratius proposuerit quam opus erat. Interim, cum curvaturae radii cum Brachystochrona connexionem viderit, verisimile est, modo Hugenii Tractatum De lumine cum attentione tunc consuluerit, non latuisse ipsum undas, adeoque et nec Synchronas. De pulchra illa convenientia, quod ubi $\int \overline{x^n dy}$ maximum, ibi $\int \overline{x^{-n} ds}$ minimum, et contra, non possum aliquid dicere, nisi in ipsas illas curvas attentius inspiciam, quod vides mihi nunc vix licere.

Ego potius proponam Tibi examinandam Methodum, quae tunc statim in mentem venit, cum, admonitione Tuae solutionis, relegi convenientiam undarum et Synchronarum ad radios, olim fugiente tantum oculo atque animo consideratam. Nempe videbar mihi hinc ducere posse Methodum generalem ad curvas ordinatim positione datas ducendi curvam ubique normaliter occurrentem, fingendo scilicet medium esse resistentiae sic variantis, ut radii exhibeant illas ipsas lineas ordinatim positione datas. Quo facto undae seu Synchronae erunt curvae quaesitae radiis normales. Quid vero si ordinatim positione datae non habeant initium commune, quomodo tunc radios applicabimus? Respondeo, ne sic quidem deficere Methodum, possunt enim radii ab uno puncto originarie venientes colligi prius in Acamptam seu focum linearum sive causticam. Et ita radii rursus emissi ex hoc foco lineari debebunt in medio pergere, per quod curvaturas linearum ordinatim datarum assumant. Fateor haec facilius proponi, quam praestari: puto tamen consideratu digna Tibi visum iri.

Non est cur disputemus, utrum ex verbis Domini Fratris Tui utrumque problema solvere tenearis, quandoquidem utrumque solvere potes, quemadmodum jam tum notavi; alioqui res litigiosa foret.

Gratum est, quod meas in Cartesium Animadversiones percurristi; gratius quod placuere. Non tamen putem maximam partem circa motum versari (etsi fortasse potissimam) sed alia quoque attingi, quae itidem a Te expendi desidero, si scilicet vacat. Lex Continuitatis, cum usque adeo sit rationi et naturae consentanea et usum habeat tam late patentem, mirum tamen est, eam a nemine (quantum recorder) antea adhibitam fuisse. Mentionem ejus aliquam feceram olim in Novellis Reipublicae Literariae *), occasione collatiunculae cum R. P. Malebranchio, qui ideo meis considerationibus persuasus, suam de Legibus motus in Inquisitione veritatis expositam Doctrinam postea mutavit; quod brevi Libello edito testatus est, in quo ingenue occasionem mutationis exponit. Sed tamen paulo promptior, quam par erat, fuit in novis Legibus constituendis in eodem Libello, antequam mecum communicasset: nec tantum in veritatem, sed etiam in illam ipsam Legem continuitatis, etsi minus aperte, denuo tamen impegit; quod nolui Viro optimo objicere, nè viderer ejus existimationi detrahere velle.

Nec minus gratum est quod mea explicatio duritiei per motum conspirantem ad mentem tuam fuit. Cum anno 1670 vel 1671 ederem Hypotheseos Physicae Novae Specimen, jam propugnabam duritiem non a quiete, sed a motu esse. Et Dominus Wallisius in Transactionibus Anglicis meam illam hypothesin tunc recensens notavit, Guil. Neilium quoque (cum cui primam dimensionem curvae Algebraïcae tribuunt) judicasse, firmitatem a motu, non, ut vult Cartesius, a quiete petendam. Motus autem conspirans non tantum resistit turbanti, sed et se restituit et quae dura sunt, ea revera sunt Elastica admodum prompta. Interim quantacunque vis motus conspirantis ponatur, nunquam tamen revera erit infinita, neque adeo ullae atomi dabuntur in natura, et motus utique semper vinci ac debilitari potest, imo debet, ob corporum perpetuum collisum inter se. Itaque nullum ego puto vel perfecte durum vel perfecte

*) Juillet 1687 p. 744.

fluidum exstare, sed in omni corpore esse quendam gradum firmitatis et fluiditatis. Et multae sunt aliae rationes, quae atomos et vacuum quoque in natura non patiuntur. Vale etc.

Dabam Hanoverae 2. Julii 1697.

P. S. Beneficium in me conferes, si locum, in quo me putas mentem Cartesii sinistre (salva licet objectionis meae vi) accepisse, in melius mutes, schedula inserta.

LX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postremas Tuas accepi recte; schedulam inclusam ad Dominum Bellavallium postridie rite curavi. An Epistolam meam iamdiu ipsi missam impresserit, nescio. Interim frustra metuis ne quid a me dictum sit, per quod appareat, quasi arbitrium Tuum ingerere volueris; nam contrarium dixi, me scilicet Te rogasse, ut velis agere nostrum judicem; in hunc finem me Tibi jam misisse meas solutiones, quas suo tempore publicare possis et sententiam ferre; aequum itaque esse ut pariter Frater praemium apud Judicem deponat. Miror quod dicis me fuisse indignatum vel verbis durioribus impatientiam animi ostendisse, quando non minus placide quam candide mentem meam exprimere volui. Eo sum animo, ut scribam quod sentio, et hunc Germanorum candorem Tibi magis placere putabam quam Gallorum civilitatem (ut plurimum meris complimentis fucatam) quam mihi obliganter commendare videris. Agnosco lubens, in meis ad Te literis de stylo parum esse sollicitum, quippe contentus cogitata mea utcunque aperuisse; eo fateor adniti deberem ut uterer verbis officiosioribus, quae dignitati Tuae convenirent: at tantam a Te spero aequitatem animi, ut non putem Te ideo offendi, si saepissime concinnitatis regulas non satis observavero; nosti me intus et in cute, quid ergo opus ut perpetuo privatim repetam quod semel iterumque a me audiisti? ut in singulis meis literis quas praeter Te nemo legit, testificer, quantum Te suspiciam et colam. Hoc publice potius faciendum puto, quod ni fallor jam saepe saepius feci, et nuperrime adhuc in epistola ad Dn. Bellavallium, ubi videbis quam expressionem adhibuerim ad testandum quanta apud me sit Tui existimatio. Caeterum si acrius quam par est, scripsisse visus sum, possem allegare hoc factum esse studio augendi utriusque nostrum attentionem; item admonitiunculam illam non esse profectam ab indignatione, sed ab amico animo, id quod mihi non semel tantum respondisti, cum conquererer de terminis satis acerbis, quibus in nonnullis Tuis literis exprobrabas mihi festinationem in judicando, iisdem fere formulis utens, a quibus me jam abstinere jubes; noli tamen putare, me Tibi reddere voluisse talionem; scio inter nos disparitatem; non statim mihi aequum censeo quod Tibi non iniquum est.

Miror ingentem numerum negotiorum diversissimorum, quibus quotidie occuparis, sed magis miror humeros Tuos qui illa ferre valeant; habes sane singulare donum singulis eodem die vacandi et attentionem praebendi, quo nihil difficilius mihi videtur: id saltem in me experior; adeo enim non sui juris est mea attentio, ut non sine summa animi molestia illam avocare possim a re, cui semel affixa, et alii adhibere. Hinc, si lectiones, quarum quotidie tres, nonnunquam plures, tam publice quam privatim, in Mathematicis et Philosophicis mihi habendae sunt, non ita in promtu haberem, sed si illas in charta consignare deberem, quod plerique Professorum facere solent, nescio an huic oneri par essem. Sunt tamen et alia mihi peragenda, quae pariter non multum otiandi tempus mihi relinquunt; unde vides nec me semper rem meditari satis posse, prout vellem, atque adeo eamdem mereri veniam quam petis. Quod si igitur non statim alteri vacaverit attente considerare quae ab altero proponuntur, credo nos optime facturos, quando nihil urget, si uterque opportunitati nostrae consulentes otium sponte se prodens exspectaverimus, ut negotiis ordinariis non interruptis, eo attentius et accuratius rem examinare queamus.

Interim, cum putem me mature satis perscrutatum fuisse Synchronarum naturam, et diu multumque in hac materia fuisse, jam sine scrupulo pronuntiare audeo, quae mihi verissima videntur. Facile credam, quod tumultuaria consideratio inter scribendum Tibi suggessit, Synchronas semper posse per quadraturas haberi: primum enim hoc est quod sese offert in contemplatione harum curvarum, quod scilicet dato tempore determinari queat

punctum in curva data, ad quod mobile pervenit, et quod hoc fieri possit pro eodem tempore in qualibet curva ordinatim positione data, et sic tota Synchrona construi. Sed hujusmodi constructio eo ipso non est aestimanda, quia non per continuam Quadraturam unius ejusdemque indeterminati spatii peragitur, et quia per consequens exinde non haberi potest modus ducendi tangentes ad Synchronam, qui tamen hic summe necessarius est. Rogo itaque ut paulo penitius inspicias negotium; forsan revocabis Tua verba, quando dicis: Assumatur aliqua ex Synchronis, et ad eam ducatur tangens datae rectae parallela, quod utique fieri potest, saltem transcendenter; nam nondum video quomodo vel transcendenter vel algebraïce duci possit tangens ope constructionis illius per quadraturas diversorum spatiorum. Ego quidem in hoc puto latere maximum artificium, ut diversae istae quadraturae reducantur ad quadraturam indeterminatam unius spatii continui, quod ego feliciter praestiti: unde mihi facile fuit tangentes Synchronae determinare, non solum transcendenter, sed algebraïce prorsus. Ne sine ratione haec me dixisse putes, dabo exemplum simplicissimum, ubi statim Tibi apparebit, quam necessaria sit ista reductio, si modo animum vel tantillum advertere voles, quod rogo ut facias; est enim Tua applicatione dignum, quod forsan ad novas speculationes curvarum ansam praebebit. Concipe (fig. 113.) super axe dato AB descriptas Ellipses infinitas ACB, ACB, ACB etc. Quaeritur aequatio differentialis, et proinde modus ducendi tangentes Curvae CCC, cujus constructio talis est, ut ductis applicatis CD, CD, CD etc. segmenta Ellipsium CDB, CDB, CDB etc. omnia inter se sint aequalia. Hoc problema per reductionem segmentorum CDB, CDB, CDB etc. Ellipsium diversarum ad segmenta Ellipsis ejusdem facillime solvo. At si curva CCC, non segmenta, sed arcus Ellipsium BC, BC, BC etc. aequales absciuderet, licet priori quodammodo simplicius appareat, hic tamen methodi meae imbecillitatem agnosco. Jam enim arcus diversarum Ellipsium ad arcus ejusdem reduci nequeunt; neque hactenus perspicere potui ullam viam perveniendi ad tangentes: si aliquam mihi monstrabis, quamvis transcendenter, habebo Tibi gratias haud mediocres. Vides ergo in quo methodus mea consistat, scilicet in reductione illa quadraturarum vel rectificationum; haec autem reductio perpetuo locum habet, quando curvae sunt similes et similiter positae, adeo ut Synchronarum aequatio differentialis proindeque tangentium determinatio algebraica hac methodo nunquam non reperiri possit. Quoniam vero etiam problema celerrimi appulsus solvi citra Synchronae considerationem singulari et eleganti quadam constructione, communicabo libens si desideraveris. Caeterum, si loco lineae rectae positione datae adhibeatur curva, res non aeque facilis est, ut credis: tunc enim recta parallela tangenti hujus curvae in puncto appulsus duci non potest; ipsius enim inclinatio jam non datur, ut antea.

Fateor methodum meam pro Isoperimetris esse indirectam, sed non puto aliam habere Fratrem; cum enim olim tam multus fuerit in curvatura sua lintei a liquore expansi, inibique adeo demersus, ut fere suffocatus fuerit, suspicor hoc idem ipsi ansam dedisse ad considerationem problematis de Isoperimetris. Interim Tuam methodum (quae utique magis analytica esset) bene procedere nondum asserere ausim; dicis Te illius ope determinasse revera Brachystochronam; memini quidem Tuae solutionis, quam mihi communicaveras, erat autem similis fraternae. Optarem itaque ut mihi ostenderes, quomodo per Calculum determinares Circulum osculatorem ex inventione situs trium punctorum. Fac si placet applicationem in Isoperimetris nostris, ut videam an pervenias ad simplicissimam illam determinationem radii osculantis, quem ostendi semper secari a basi curvae in ratione data 1 ad n. Praeterea si haec methodus rite valeret, deberes etiam posse solvere Brachystochronam inter duo puncta determinatae longitudinis; id est, si (fig. 114.) data duo puncta A, B conjungenda sint linea curva AMB, ipsi datae rectae C aequali, determinare poteris curvaturam AMB, quae ex omnibus curvis ejusdem longitudinis citissime percurratur. Problema utique possibile est; sed ingenue fateor, meae methodi hic nihil praestant. Si Tua eousque penetrat, agnoscam praestantiam ejus; gratissimum facies si calculum communicaveris.

Iterum dicis, Fratrem meum vidisse connexionem inter Brachystochronam et curvaturam radii, sed puto ego non vidisse: nullibi enim mentionem facit hujus connexionis, sed dicit duntaxat, insistendo iisdem vestigiis etiam inveniri posse curvaturam radii, et sic identitatem illam non animadvertit; alias ridiculum esset dicere, insistendo iisdem vestigiis reperiri posse curvam radii, quae jam simul reperta est cum Brachystochrona.

Methodus, quam mihi examinandam proponis, quamque desumsisti ex convenientia undarum et Synchronarum, revera peringeniosa est; de illa etiam jam ante annum, cum primum huic speculationi vacarem, cogitabam. Usus vero acamptarum seu causticarum, quas acute huic negotio accommodas, mihi tunc non venit in mentem. Interim haec methodus ducendi normalem ad curvas ordinatim positione datas, maxima laborat difficultate, quia si in uno exemplo succedit, infinita alia sunt, ubi inutilis est, licet curvae ordinatim positione datae commune initium habeant; quod vel exinde intelliges, quod plerumque impossibile sit fingere medium qualiscunque resistentiae variantis, quod exhibeat omnes illas lineas ordinatim positione datas; quin-imo est purum putum accidens, si id contingat. Verum quidem est omne medium exhibere infinitos radios seu curvas ordinatim positione datas; sed vicissim unica linea jam sufficit ad determinandam resistentiam medii quaesiti, et omnes reliquae positione datae sint superfluae; et sic saepissime eveniet, ut quaelibet ex curvis ordinatim positione datis peculiare medium requirat, atque adeo methodus evadat impossibilis; unde vides problema hoc: Quaerere medium resistentiae variantis, quod exhibeat curvas ordinatim positione datas, esse ex eorum numero, quae dicuntur plus quam determinata, id est, quae habent conditiones superfluas, quae nunquam (nisi per accidens) simul impleri possunt. E re tamen est notare casum, quando haec methodus usui esse potest; tunc nempe, ut plurimum (non ausim dicere, semper) quando curvae ordinatim positione datae sunt similes et ex puncto dato similiter positae. Interim hoc casu non opus habeo recurrere ad Methodum hanc indirectam; est enim mihi alia naturalior, ex fundamento supra memoratae reductionis quadraturarum et rectificationum desumta, mediante qua directe determino curvam ordinatim datis normaliter occurrentem, quando scilicet ordinatim positione datae sint transcendentes; quod olim Tibi, si meminisse velis, tanquam difficile quid proponebam; nam si algebraicae sunt, res adeo facilis est, ut proponi non mereatur.

Concedo non dari corpuscula perfecte dura, sed non sequitur non dari atomos: per atomum intelligo corpusculum mente quidem divisibile, sed quod actu divisum non est neque divisum fuit; non quod actu dividi non potest; tales enim atomi, ut vere sentis, non darentur, quia requirerent perfectam duritiem; sed per meam definitionem sufficit, ut dentur talia corpuscula, quorum particulae a Mundo condito in hunc usque diem nunquam fuerunt separatae, quod forsan motum conspirantem habeant satis validum ad resistendum. Non tueor vacuum neque atomos a Gassendo propugnatas; interim meas meo modo conceptas mihi largiri debes, nihil derogant Tuae hypothesi. Sed de his alias.

Libellus Malebranchii, in quo novae Leges motus constituentur, conscriptus fuit cum Parisiis essem, me praesente et approbante; nihil enim in eo posuit Author, nisi prius consultis nobis, Hospitalio et me; quod autem etiamnum in pluribus a veritate alienus sit, hoc ne mirere; veram enim quantitatem virium tunc nondum admittebamus. Quod autem Tecum non communicaverit, antequam ederet, ratio est quod Te hac in parte falso principio nixum credidit. Audivi Tractatum aliquem Hugenii posthumum propediem lucem visurum, De Mundo Saturni; nescio an id ipsum sit quod a Bellavallio quaeris, De Cosmotheoro. Vale et ama etc.

Groningae 17. Julii 1697.

LXI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

De benevolentia Tua mihi semper visus sum certissimus; verba fucata nec dare soleo, nec expectare. Dura et molestum aliquid spirantia libenter vito, et me puto vitasse; certe ut vitarem, operam dedi. Itaque vide ne inique facias, si me humanitatem laudantem, fucos commendare dicas.

Vellem me multis posse sufficere, quemadmodum pro benignitate Tua pronuntias. Ego vero cogor agnoscere, saepe id parum procedere, quoties scilicet occurrunt, quibus profundius immergendus sit animus, qualia sunt Analytica illa Tua, in quibus plus satis experior Tecum, non posse me distractum Tibi satisfacere, prout vellem: sed bene habet, quod non indiges ope mea.

Video non tam facile esse, quam mihi primo aspectu visum erat, Synchronae quadratorie determinatae tangentem ducere; quod si quadratura effici posset vel algebraice, vel transcendenter

quidem, sed tamen exponentialiter, eo casu cessaret difficultas. Exponentialiter autem exhibere licet non tantum, quae ex Hyperbolae quadratura pendent, sed et quodammodo, quae pendent ex quadratura Circuli. Interim nondum hoc praestare licuit in altioribus. Et jam aliquoties dicere memini perfectissimam Transcendentium expressionem esse per Exponentiales. Recordor, et mihi olim occurrisse istos transitus a quadraturis ad quadraturas, et difficultatem apparuisse, sed nullam tunc apparuisse superandi rationem, nisi vel per Series, vel per Exponentiales. Illa imperfecta est, nisi cum a serie rursus deinde regressus ad aequationem differentialem quadratoriam haberi potest; haec est limitata bactenus. Itaque Tuum artificium reducendi rem ad unam quadraturam continuam non parvi momenti erit, et licet etiam limitatum sit, desideretque ut curvae ordinatim positione datae sint similes et similiter positae, fortasse tamen aliquando vel a Te ipso vel ab alio inventum ulterius promovebitur. De his ergo plurimum Tibi debebimus; grata etiam et utilis constructio Tua erit sine Synchronae consideratione. Et cum tale sit quod Tibi in mentem venit, video utique habuisse Te causam, cur genio admonenti tribueres, quod ingenio erueras. Solet scilicet nobis momento quodam lux subita interdum affulgere.

Sed quod ais, problema esse plus quam determinatum, quoties quaeritur medium, in quo radii in datas Lineas transeant, id velim denuo examines; fortasse enim rem semper possibilem deprehendes. Nam in omni superficie, adeoque et plano assumi possunt non tantum infinita, ut in linea, sed infinities infinita. Si igitur varies medium uno tantum modo, ita, verbi gratia, ut (fig. 115.) varietas solum assumatur secundum lineam ABCDE, et ut linea AA, tota BB, tota CC, etc. unam subeat legem variationis, seu ejusdem sit densitatis, tunc fateor, problema fore plus quam determinatum (nec refert BB, verbi gratia, recta sit an curva) sed si rursus alia variatio concurrat secundum lineam ALMN seu ut variatio sit duarum dimensionum, ita ut quodlibet plani punctum a quolibet densitate differat, seu ut punctum BL non tantum differat a puncto BM, sed et a puncto CL; tunc possibile utique est variationem diversitatis in quovis puncto eam esse, ut ibi linea radii transeat, prout desideramus.

Nuspiam memini me dicere, rem aeque esse facilem in appulsu ad rectam et ad curvam.

Cum Tibi methodus mea pro maximis et minimis sit perspectissima, quae in eo consistit, ut lex minimi vel maximi et in particula locum habeat, Tibi ipsi facillimum erit, et multo facilius quam mihi, applicationem ad Isoperimetra constituere. Et puto hanc Methodum etiam applicari posse ad Brachystochronam datae longitudinis, inter duo puncta interceptam, in qua experimentum Methodi fieri vellem. Ecce enim quaeritur (fig. 114.) AMB, in qua grave brevissimo tempore perveniat ab A ad B, sed ea lege ut sit AMB aequalis datae C. Posito igitur has leges etiam in particula quavis indefinite parva LMN esse veras, ut LMN sit recta, semel fracta, datae longitudinis brevissimique descensus; utique manifestum est Tibi ipsi, rem prius posse reduci ad hoc problema ordinarium: Datis (fig. 116.) focis L et N et fili longitudine LM + MN, vel LQ + QN, descriptaque Ellipsi PQR, invenire in ea punctum M ita se habens, ut descensus LMN sit talium citissimus; posito dari A initiale punctum descensus, adeoque quae sit velocitas gravis in L vel M. Hoc autem problemate soluto, exinde jam considerando LM, MN esse infinite parvas, habebitur proprietas aliqua saltem differentio-differentialis curvae quaesitae.

Aliud est Dominum Fratrem Tuum vidisse connexionem Brachystochronae et curvaturae radii, aliud vidisse aut attendisse identitatem. Possumus connexionem videre imperfecte, ut non statim videamus ejus gradum. Keplerus vidit connexionem vel convenientiam inter Diaclasticam et Hyperbolam, sed non vidit Hyperbolam esse ipsam Diaclasticam, quod Cartesius fortasse ex Kepleri meditationibus admonitus invenit.

Agnosces ipse, credo, Dn. Malebranchium melius facturum fuisse, si me, cujus admonitione correxerat regulas suas, de ipsa correctione consuluisset, antequam eas in publicum denuo praecipitavisset; quantillum enim erat aliquot septimanas expectare? Nec tam facile sibi de me persuadere debebat, falsis me principiis niti, cum res ostenderit ipsum potius talibus fuisse nixum.

Praeterea error ab eo commissus est in Regulis novis, non tantum contra principium meum, cui non assentiebatur, sed et contra illam ipsam meam continuitatis Legem, cui assentiebatur: quod ego admoniturus eram (si tempestive me consuluisset) dissimulaturus ea, de quorum principiis pugnabamus.

Ubi meas ad Cartesium Animadversiones remittere voles, quod rogo ne sine Tuis notis separatim scriptis facias, poteris dirigere ad Dominum Gerardum Mejerum, Theologum Bremensem.

Circa corpora indivulsa possunt constitui gradus. Et summus quidem gradus est, cum partes eundem semper servant situm inter se, seu cum corpus est perfecte rigidum, atque hoc est, quod omnes hactenus Atomi nomina accepere, et quod Democritici et Gassendistae et ex Cartesianis Cordemoius in rerum natura esse credidere; quibus etiam nuper accessit Hartsoekerus, eo tantum discrimine, quod Democritici ex solis Atomis omnia componunt, eisque vacuum interjiciunt, sed Hartsoekerus materiam perfecte fluidam inter Atomos perfecte duros diffudit, duo extrema inter se conjungens. Ego vero pro demonstrato habeo, nec perfecte dura nec perfecte fluida dari. Et gaudeo quod nunc video Te mecum perfecte dura ac vacuum etiam rejicere. Nam omne corpus etiam quantulumcunque, meo sensu, dividitur in partes actu, et quidem non tantum mente assignabiles, sed et diversitate motuum reapse discretas, ut in vorticibus ipsisque jactibus aquarum, ita ut pars quidem in tali corpore a parte recedat, non tamen statim a toto.

Ita jam venimus ad secundum indivulsi gradum, ut licet partes mutent situm inter se, nulla tamen pars unquam recedat a toto, seu ut semper servetur continuitas partium omnium. Huc, si bene Te intelligo, inclinare videris; et fateor me quoque saepe deliberasse, an talia dentur corpora, necdum impossibilitatem videre; nec tamen hactenus demonstrare posse quod dentur.

Tertius gradus indivulsorum est in corporibus, quae aliquas quidem partes mutant, sed tamen aliquas servant: ubi rursus quaeritur, an datur corpus a, in quo aliqua pars b semper fuerit semperque futura sit; aliqua, inquam, pars b non quidem ita ut totum b semper fuerit unum continuum (id enim recideret in gradum praecedentem) sed ita tamen, ut licet ipsum b divulsum fuisse ponatur, partes nihilominus omnes ipsius b semper manserint mansuraeque sint in a, adeoque nisi intra certos limites a se invicem recedant.

Quartus gradus est, an detur a et in eo pars b sic, ut non quidem totum b, nec etiam aliqua determinata ipsius b pars c semper maneat in a (eo enim casu recideremus in gradum tertium) sed ut aliqua tantum pars ipsius b indefinita x maneat in a, licet forte semper imminuenda, vel ut distinctius loquamur, quaeri potest, an dentur in a duae partes b et p, sic ut semper ipsius b aliqua pars x, et ipsius p aliqua pars y nunquam nisi intra certos limites, quos per ipsum a definimus, a se invicem recedant. Quanquam rursus distingui possit, an limites per a definiti sint certae magnitudinis, si ponamus ipsum a eam magnitudinem nunquam excedere; an vero sint potius limites certi officii, ut si a (velut animal) etiam ipsum indefinite crescere vel minui intelligeretur. Et possent multo plura adhuc in considerationem venire non parvi momenti ad penetrandum in rerum interiora; sed haec Tu, pro acumine Tuo et pro aetate Tua, melius prosequere. Vale.

P. S. Cogitavi, annon artificium Tuum puncta Synchronae una quadratura continua inveniendi, aliquid cognatum habeat methodo sequenti. Assumta (fig. 117.) una AC ex curvis positione datis, et in ea assumto quocunque puncto ${}_1$C, ad quod tempore certo BT perveniendum est, quaeratur id tempus per quadraturam, atque ita quadratorie exhibeatur linea temporum AT, seu cujus ordinatae sint ut tempora ordinatim respondentia punctis C curvae assumtae AC. Jam pro alia curva A(C) simili cum assumta et similiter posita ad A, quaerendum est punctum ${}_1$(C) in curva A(C) ad quod in ea perveniatur a gravi eodem tempore, quo ad ${}_1$C in curva priore AC. Eam ob rem redeamus ad curvam AC; et ut se habet curvae novae A(C) parameter ad parametrum curvae AC, ita (nova hypothesi) eadem proportione in AC ponamus vim gravitatis fuisse fortiorem; sic omnia in curva AC hac nova gravitate fient proportionaliter ad ea, quae in curvae A(C) priore gravitate. Porro linea temporum nova A(T) pro AC, aucta gravitatis vi percursa, habebitur nulla nova quadratura, sed ordinatis prioris lineae temporum in eadem ratione imminutis, in qua vis gravitatis fuit aucta. Itaque habebimus etiam punctum ${}_2$C in ipsa AC, ad quod, aucta vi gravitatis, perveniretur eodem tempore, quo priore gravitate antea ad ${}_1$C. Cui puncto ${}_2$C similiter positum punctum quaeramus in curva secunda A(C); id erit punctum ${}_1$C quaesitum, quo grave in ea curva, vi priori seu ordinaria gravitatis, esset perventurum eo tempore, quo, eadem vi gravitatis ordinaria, perveniret grave ad ${}_1$C in curva prima AC. Sed haec

nonnisi per transsennam nunc intueri possum. Itaque parum omnia assequenti veniam dabis.

Dabam Hanoverae 25. Jul. 1697.

LXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas meas nuperrimas acceperis. Interea Moscorum Monarcham ejusque Legationem in vicinia vidimus, et quidam ex comitatu in se recepit mihi procurare responsiones ad quaesita quaedam mea circa res Moscorum scripto consignata. Dum huc redeo, more meo in itinere meditatus, desideratam a Te Methodum generalem inveni, per quam Tangentes ducuntur ad curvam, cujus puncta per ordinatim diversarum curvarum figurarum quadraturas determinantur, ut jam necesse amplius non sit, vel curvas esse similes et similiter positas, vel quadraturas diversarum ordinatim curvarum reduci ad unam vel recurri ad Series, vel rem revocari ad Exponentiales, quorum nihil generalem methodum praebet. Exemplum exhibebo, quod primum in mentem venit, unde facile ad Ellipses tuas applicabis; et licet exemplum, quod affero, etiam particularibus illis Methodis obedire possit, videbis Methodum, quae adhibita est, nullis limitibus coërceri. Sint (fig. 118.) Lineae Logarithmicae quotcunque VC, V(C), V((C)) etc. quarum axis communis AB, asymptota AS, commune in axe punctum V: ducenda est ${}_1$Cϑ tangens curvam ${}_1$C ${}_1$(C) ${}_1$((C)), quae curva talis sit naturae, ut arcus logarithmicarum V${}_1$C et V${}_1$(C) itemque V${}_1$((C)) sint aequales inter se. A${}_1$B sit x, parametri harum curvarum sint a, (a), ((a)) etc. ita ut ${}_1$B${}_1$C, ${}_1$B${}_1$F, ${}_1$B${}_1$G sint respective $a\int dx:x$, vel $a)\int dx:x$, vel $((a))\int dx:x$ etc. manente x variataque tantum parametro a; porro patet si habetur ratio ipsius ${}_1$C${}_1$F ad ${}_1$F${}_1$(C), habitum iri tangentem curvae ${}_1$C${}_1$(C)${}_1$((C)). Ducta enim ${}_1$Bϑ quae sit parallela ipsi ${}_1$F${}_1$(C) seu tangenti curvae V${}_1$C in ${}_1$C, et ad partes ${}_1$(C) et quae sit ad ipsam ${}_1$B${}_1$C ut ${}_1$F${}_1$(C) ad ${}_1$F${}_1$C, tunc juncta ${}_1$Cϑ erit tangens quaesita. Porro ex dictis patet ${}_1F_1C$ esse $da\int dx:x$. Superest ergo, ut inveniatur apte etiam ${}_1F_1(C)$ atque in hoc consistit negotii cardo. Jam ${}_1F_1(C)$ est differentia inter duos arcus V_1C et V_1F et summa ex differentiis partium est differentia totorum. Ergo si ducantur parallelae innumerae, indefinite sibi vicinae, nempe ${}_1B_1C$, ${}_2B_2C$, ${}_3B_3C$ etc. et his interceptarum respondentiumque sibi portionum ex curvis V_1C et V_1F, quaerantur differentiae, nempe ${}_1C_2C - {}_1F_2F$ et ${}_2C_3C - {}_2F_3F$ etc. et harum differentiarum quaeratur summa, ea exhibebit ipsam differentiam totarum linearum V_1C et V_1F, nempe ipsam ${}_1F_1(C)$. Jam ut respondentium, veluti ${}_1C_2C$ et ${}_1F_2F$, quaeramus differentiam, considerandum est ipsam ${}_1C_2C$ et ${}_1F_2F$ communi expressione fore $\sqrt{dxdx + dydy}$, seu quia hic $dy = adx:x$ (posita tamen a variabili, non quidem in eadem curva, sed tamen pro transitu a curva ad curvam) ideo ${}_1C_2C$ vel ${}_1F_2F$ fore $dx\sqrt{aa+xx}:x$. Unde ad habendam differentiam inter ${}_1C_2C$ et ${}_1F_2F$, patet tantum $\sqrt{aa+xx}$ differentiari debere secundum a, manente x more meo dudum exposito; et differentiam multiplicandam per $dx:x$, unde reperietur ${}_1C_2C - {}_1F_2F$ fore $adadx:x\sqrt{aa+xx}$. Jam contra in summandis rursum omnibus talibus differentiis eleganter evenit semperque evenire debet, ut a vel da rursus sint constantes, ergo summa omnium ${}_1C_2C - {}_1F_2F$ et ${}_2C_3C - {}_2F_3F$ etc. seu ${}_1F_1(C)$ erit * $ada\int dx:x\sqrt{aa+xx}$, qualis quantitas semper habetur per quadraturas; ergo jam habetur tangens quaesita. Nam tantum oportet facere ${}_1B\vartheta$ ad ${}_1B_1C$ ut $a\int dx:x\sqrt{aa+xx}$ ad $\int dx:x$ seu ut ${}_1F_1(C)$ ad ${}_1F_1C$, ubi communis utrique rationis terminus inassignabilis da necessario et semper evanescit. De ipsis istis quadraturis amplius reducendis, quemadmodum sane hic fieri potest, nunc equidem non laboro. —

Si ${}_1B_1C$ vel ${}_1B_1F$ etiam habitae fuissent per quandam quadraturam, ubi a fuisset ingressa vinculum quadratorium, eodem modo fuisset procedendum pro differentia inter ${}_1B_1C$ et ${}_1B_1F$ seu pro ${}_1F_1C$, ut processimus in exhibenda differentia inter V_1C

et V_1F, nempe differentianda fuisset quantitas sub vinculo quadratorio contenta, sed secundum a; et proveniens rursus summandum, sed secundum x. Nec video quid hunc processum impedire unquam possit, usque adeo ut adhiberi etiam suo modo queat, cum quantitates ne quadratorie quidem, sed tantum differentialiter vel quacunque alia expressione ex summis differentiisque cujuscunque gradus complicata dantur. Etsi tunc etiam determinatio tangentis quaesitae non semper constructione quadratoria, sed tamen aliqua differentiali explicatione utcunque possit haberi. Hanc novam nostrarum methodorum applicationem, qua defectus aliquis Calculi differentialis tollitur, Tibi non displicituram puto, Tuoque ingenio praeclare illustrari atque augeri posse confido. Vale etc.

Dabam Hanoverae 3. Augusti 1697.

Beilage.

Invenire*) tangentem CT (fig. 119.) curvae CC ita descriptae, ut puncta ejus C designentur in quavis Ellipsi VCE ejusdem axis (seu fili) VE, sumendo inde a vertice V arcum VC aequalem rectae datae R. Hujus problematis sane difficilis et nostris Methodis hactenus non parentis similiumque aliorum solutionem a me petiit Dn. Johannes Bernoullius mense Julio 1697. Re aliquandiu considerata mihi tandem videor quaesitum assecutus. Quod sane magni est momenti et insignem aliquem in nostro calculo differentiali defectum supplet. Devenimus autem in hujusmodi quaestiones occasione eorum, quas Dn. Jacobus Bernoullius, Professor Basileensis, Dn. fratri suo Johanni, Professori Groningano, proposuit, quas iste quidem solvit, quia tantum agebatur de curvis ejusdem speciei seu similibus et similiter positis, ubi res alio artificio praestari potest; sed ubi curvae non sunt ejusdem speciei (quemadmodum sane tales non sunt Ellipses diversae ejusdem axis vel fili) vel alia ratione, una dimensio ad aliam revocari non potest, uti sane non licet, arcus unius Ellipsis mensurare ex data mensura arcuum alterius harum Ellipsium (uti cum alias possimus areas unius mensurare ex mensuratis alterius

*) Leibniz hat am Rande des Manuscripts bemerkt: Initio Augusti 1697. Inseratur literis cum Joh. Bernoullio commentatis eo tempore.

areis ob reductionem scilicet omnium ad quadraturam circuli) tunc hactenus non apparebat modus investigandi tangentes curvarum, in quibus unumquodque punctum per propriam quadraturam determinatur.

Ex. gr. sit AB, x, et BC, y, erit $VC = \int \sqrt{dx^2 + dy^2}$. Sit $dy = a\,dx : x$; si curva VC scilicet sit logarithmica, fiet utique $VC = \int \frac{dx}{x} \sqrt{aa + xx}$, cujus dimensio ex quadratura Hyperbolae haberi potest. Ubi quidem possent omnes reduci ad unam quadraturam, cum sint logarithmicae omnes similes inter se et praeterea quadraturae hyperbolarum ad se invicem reduci queant; sed hoc jam dissimulato, quaeramus quomodo inveniantur duo puncta C, (C) sibi indefinite vicina, seu quomodo ducatur tangens C(C), posito VC et V(C) debere esse aequales. Ibi tale quid in mentem venit. Ductis parallelis quotcunque indefinite sibi vicinis BFC (fig. 118.), nempe ${}_1B_1F_1C$, ${}_2B_2F_2C$, ${}_3B_3F_3C$, et ita porro, resolvatur curva VC in partes quotcunque indefinite parvas ${}_1C_2C$, ${}_2C_3C$ etc. et curva V(C) in partes totidem ${}_1F_2F$, ${}_2F_3F$ etc. patet autem differentiam inter totas lineas VC et V(C) esse summam differentiarum inter partes seu ${}_1C_2C - {}_1F_2F$, ${}_2C_3C - {}_2F_3F$ etc. esse aequal. VC − V(C); servatis semper iisdem signis, si ponatur semper pars majoris major parte respondente minoris, quod secus est, si in summa quidem totum sit toto majus, non tamen semper pars parte, ubi signa pro illa parte mutantur, saltem enim semper in integra parte assignabili eodem modo procedunt signa. Porro ${}_1C_2C$ est $dx\sqrt{aa + xx} : x$ et ${}_1F_2F$ est $dx\sqrt{(a)(a) + xx} : x$, variante scilicet *a* parametro Logarithmicae, ita ut (a) sit a − (da); itaque ut habeatur differentia inter ${}_1C_2C$ et ${}_1F_2F$, oportet differentiari $dx\sqrt{aa + xx} : x$, sed secundum *a* variabilem, non secundum x aut dx, quippe quae eaedem sunt in ${}_1C_2C$ et in ${}_1F_2F$, et reperietur perinde esse sive calculum nostrum differentialem applices secundum *a*, sive a quantitate $dx\sqrt{aa + xx} : x$ subtrahas quantitatem $dx\sqrt{aa - 2ada + dada + xx} : x$. Ut autem $dx\sqrt{aa + xx} : x$ differentietur secundum *a*, perinde est ac si $\sqrt{aa + xx}$ secundum *a* differentietur et productum multiplicetur

per $dx : x$; differentiando autem constat $d\sqrt{aa + xx}$ esse $ada : \sqrt{aa + xx}$, ergo $dx\sqrt{aa + xx} : x$ secundum *a* differentiata dat quantitatem $adadx : x\sqrt{aa + xx}$. Summa autem harum differentiarum omnium, seu differentia inter VC et V(C) est $ada \int dx : \sqrt{aa + xx}$, ubi rursus a et da manent invariabiles seu constantes; in quolibet scilicet transitu ab VC et V(C) seu in ipsa differentia inter ${}_1C_2C$ et ${}_1F_2F$ eadem est *a*, quae est in differentia inter ${}_2C_3C$ et ${}_2F_3F$. Cum ergo ${}_1F(C)$ sit differentia inter VC et V(C), erit utique $ada \int dx : x\sqrt{aa + xx}$. Quaeramus et ${}_1F_1C$ seu $d, a \int \frac{dx}{x}$ secundum a, fiet $da \int \frac{dx}{x}$ et fiet ${}_1F_1C$ ad ${}_1F(C)$ ut $\int \frac{dx}{x}$ ad $a \int dx : x\sqrt{aa + xx}$. Ac proinde ducta ${}_1B\vartheta$ parallela tangenti curvae VC in ${}_1C$ vel ${}_1(C)$ et ad partes (C), sed ita ut sit ${}_1B\vartheta$ ad ${}_1B_1C$ ut $a \int dx : x\sqrt{aa + xx}$ ad $\int dx : x$, tunc juncta ${}_1C\vartheta$ sit tangens quaesita curvae ${}_1C_1(C)((C))$. Patet ex his, differentialis quantitas seu elementum ipsius $\int dx \,.\, x \overset{\infty}{;} a$ secundum *a* seu $d(\text{secund. a}) \int dx \,.\, x \overset{\infty}{;} a$ sit $= da \int dx\, d(\text{secund. a})\, x \overset{\infty}{;} a$.

Patet etiam ex his, summari hinc ipsas differentias arcuum per arcus, nempe: Summa differentiarum elementarium simul sumtae ${}_1F_1(C)$, ${}_1F_1((C))$ etc. aequatur differentiae integrali seu differentiae inter arcum ultimum et primum, et ita habentur summationes duplicatae antea ignotae, veluti hic $\int (ada \int (dx : x\sqrt{aa + xx})) = \int dx\sqrt{aa + xx} : x$ (secund. prim. x et a) $- \int dx\sqrt{aa + xx} : x$ (secund. ultim. x et a). Nempe hactenus non nisi secundum unius literae variationem summare potuimus vel differentiare, vel secundum plures simul variatas ubique, sed non si plures pro parte variatae, pro parte invariatae concurrant, ut hic sit; possunt etiam intervenire constantissimae. Et hoc inserviet ad secunda solida quae Newtonus frustra metiri tentavit, et ad similia problemata alia quae et mihi aliquando occurrere memini. Inde etiam procedi poterit ad summationes triplicatas et his altiores, quodsi jam x et a coincidere ponamus, quod semper intelligi potest. Hinc reductio habebitur replicatarum summationum ad simplices. Applicandum hoc ad frustra tentatum a nobis $\int dx\, l\,\overline{1+x}$, unde pendet $\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$ etc. Videtur hinc nova plane et inexpectata consequi promotio geometriae sublimioris. Et video, nisi hanc Methodum invenissem, non fuisse mihi profuturam inventionem meam pro Tangentium inversis per mirabilem illam constructionem curvae transformatae et simul sibi in ea ubique extensionem mutantis. Nam non satis methodum examinans supponebam, curva materiali transformata semper puncti constantis in ea sumti motum vel directionem posse inveniri durante transformatione adeoque tangentem duci curvae novae imaginariae a puncto illo inter transformandum descriptae; supponebam enim, quoties puncti moti loca haberi possunt omnia, licet quadratorie, non posse non haberi directionem motus vel tangentis ductum, sed video eam tangentis ductionem ante hanc methodum repertam non fuisse in potestate.

LXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Binas meas acceperis. Priores Tuis respondebant: sequentes novam Methodum differentiationis a Te desideratam continebant. Has nunc scribo, ut aliquid addam, quod nuperrimas scribenti effluxit. Sententia nimirum mea est, recte nos facturos, si nonnihil adhuc novam hanc Methodum dissimulemus, donec ipsi satis usi simus; nam multa ibi latent majoris momenti, quam quis prima fronte suspicetur. Itaque optimum puto, ut neque proponamus aliis quaerendam hanc differentiandi vel tangentes ducendi rationem, neque a nobis inventam dicamus, multo minus expo-

namus in quo consistat artificium, donec nobis ipsis licuerit prosequi pro dignitate. Nam ex nova differentiandi Methodo necesse est vicissim novas etiam summandi rationes oriri, ad quas aliter fortasse aditus vix pateret. Exempli causa, in figura et casu Epistolae meae novissimae, patet Arcum VC dare summam omnium $ada \int dx : \sqrt{aa+xx}$, atque ita, cum binae sunt variationes inter se diversae, institui potest summatio, quod saepe requiri jam olim deprehendi. Quin amplius cum a possit variam accipere significationem, consequens est tum pro quadraturis, tum pro reductione aequationum differentialium, hac ratione obtineri posse, quae antea Methodis nostris obstinate sese opponebant, ut res ipsa Te mox docebit.

Et ea multorum problematum natura est, ut nonnisi per quadraturas istas disgregatas, ut ita dicam, seu ordinatim diversas construi possint, quas utique communi more construere non licet, quoties illae quadraturae ordinatim diversae ad unam reduci non possunt. Sed cogor nunc abrumpere, quoniam Brunsvigam discedendum est, paulo ante nundinas, ita jubente Serenissimo Brunswicensium Duce, quod in ipsis nundinis exterorum multitudo otium ei mecum satis colloquendi neget. Dominus Beauval Basnage mihi ad nuperam schedam a Te curatam respondit. Mea in Cartesium cum Tuo judicio Tuisque animadversionibus demum suo tempore expecto. Vale etc.

Dabam Hanoverae 9. Augusti 1697.

LXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si de benevolentia mea, ut dicis, fuisti semper certissimus, gaudeo speroque Te etiam id esse et fore. Non puto me dixisse, quod commendaveris fucos, absit hoc. Omnia quae mihi ab Amico dicuntur, in meliorem sensum interpretari soleo. Nimia scrupulositas amicitiae cursum sufflaminat.

Gratum est, quod tandem agnoscis, non tam facile esse Synchronae quadratorie determinatae tangentem ducere. Dolebam sane, cum viderem a Te verbis meis parvam adeo fidem haberi, ut nolueris tantisper cedere in iis, quae *tumultuarie* tantum considerasti, ego vero improbo meditandi labore penitus enucleavi et plus satis examinavi.

Methodum puncta Synchronae una quadratura continua inveniendi, cujus adumbrationem in fine literarum adjecisti, velim ut accuratius perficias; videtur pulchri quid habere: interim nondum recte video, quo tendat, aut quid faciat ad determinationem tangentis Synchronae, neque satis capio mentem Tuam, quod scilicet intelligas per: *vim gravitatis fortiorem factam*, et per haec verba: *sic omnia in curva AC hac nova gravitate fient proportionaliter ad ea, quae in curva A(C) priore gravitate*; mihi quidem videtur, prout ego rem concipio, jam per se, gravitate non mutata, omnia esse proportionalia in utraque curva, siquidem similes supponantur.

Ecce jam meam solutionem et constructionem pro brevissimo appulsu, quia illam gratam fore dicis. Videbis ipse optime an aliquid cum idea Tua cognati habeat; peragitur quidem sine Synchronae consideratione; interim et hujus tangentes facillime per illam ducuntur. Problema ita se habet: *Datis* (fig. 120) *ordinatim positione curvis similibus ex eodem puncto A similiter descriptis* AIF, AHD, AGB etc. (NB. non est necesse ut habeant commune initium) *et data positione recta CD, quaeritur ex omnibus istis curvis illa, per quam grave a puncto A descendens, tempore brevissimo appellat ad rectam CD.* Solutio. Assumatur ex curvis similibus una quaedam constans, ut AGB, sintque duae variabiles AIF, AHD, situm proximum habentes. Jam si AHD vel AIFE illa sit, per quam grave celerrime descendit ad datam CE, oportet ut tAIFE sit = tAHD (per tAIFE, tAHD intelligo tempus per AIFE et per AHD,) utrumque enim tempus minimum, et hinc inde crescere supponitur. Ductis per D et E, rectis ADB, AEN, secantibus curvas in F, D et N; intelligatur ducta NP parallela ipsi CD, quae secet AB, productam in P; ita fient Triang. similia FED et BNP, in quorum laterum FE, FD vel BN, BP ratione invenienda consistit caput rei, ut videbis. Jam facile demonstratur *tempora per arcus similes esse in subduplicata ratione eorum subtensarum, aliarumve linearum homologarum*: Ergo tAAHD seu tIFE . tAIF :: $\sqrt{AD} . \sqrt{AF}$

:: $\sqrt{AP} . \sqrt{AB}$. Est autem iterum, ob similitudinem curvarum tAIFE . tAIF :: tAGBN . tAGB, ideoque tAGBN . tAGB :: $\sqrt{AP} . \sqrt{AB}$ et dividendo tBN . tAGB :: $\sqrt{AP} - \sqrt{AB} . \sqrt{AB}$ :: (ob BP infinite parvum) BP . 2AB. Exprimitur autem tBN per $\frac{BN}{\sqrt{NL}}$ adeoque tAGBN per $\int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$, unde $\frac{BN}{\sqrt{NL}} . \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$ (:: BN . $\sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$) :: BP . 2AB, permutando BN . BP :: $\frac{1}{2}\sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$. AB. Producto itaque latere NB ad R, id est ducta ad curvam AGB tangente BR, illaque sumta aequali $\frac{1}{2}\sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$, jungatur AR, erit triangulum BAR simile parvo triangulo NBP vel EFD, et proinde AR parallela positione datae CD. Ex inventa hac proprietate seu ratione laterum trianguli characteristici BP, BN problema facillime construitur sic: In omnibus punctis curvae assumtae constantis AGB ducantur tangentes, et fiant singulae aequales huic respective quantitates $\frac{1}{2}\sqrt{NL} \int \frac{BN}{\sqrt{NL}}$ (quod utique semper per unam continuam quadraturam peragitur) tunc habebitur nova curva AOR; per A ducatur ipsi positione datae CD parallela AR, secans Curvam AOR in puncto R, a quo si ducatur tangens RB ad datam curvam AGB, determinabitur punctum B, quod quaesito est analogum; ducta enim recta AB, et si opus producta, secabit positione datam CD in puncto brevissimi appulsus D, per quod si describatur AHD similis ipsi AGB, erit haec AHD illa ipsa quae quaeritur. Q.E.F. Vides, quam brevem et simplicem constructionem repererim hujus difficillimi alias Problematis; vix puto aliam simpliciorem vel concinniorem adinveniri posse.

Id hic notabile existimo, quod licet Synchronam consideraverim, hujus tamen tangens eadem opera inventa est, sed constructione omnino inversa, quia quae antea data sunt, jam sunt quaesita, et vicissim; datur enim punctum D, et quaeritur recta DC, tangens Synchronae transeuntis per D, quod sic retrogrado ordine efficio: Duco per D rectam ABD secantem curvam assumtam

AGB in puncto B, ex quo ducta tangens BR occurret curvae AOR in puncto R, quod si jungatur cum A recta RA, huic ducenda est parallela DC, quae erit tangens Synchronae quaesita.

Jam spero Te mihi assensurum, quod summo jure dixerim, illum qui licet solverit problema brevissimi appulsus in Cycloidibus, non ideo etiam statim id solvisse in aliis curvis similibus, quia in Cycloïdibus solutio facile habetur, sed indirecte ex fundamento optico, nempe ex normalitate undae cum radiis seu Synchronae cum Brachystochronis; id quod in aliis non obtinet. Quae cum ita sint, dicas quaeso, annon ipse credas, fratrem meum ad summum solvisse problema in cycloidibus et nec hic plenarie, quia pro recta positione data proponit tantum verticalem, quod me valde obfirmat in suspicione mea, quod scilicet undarum usum huc transferre nesciverit, imo de illis ne cogitaverit quidem. Et prout loquitur, concludendum est, illum rem pro desperata habuisse in circulis et parabolis, dum ipse suam imbecillitatem fatetur his terminis: s o l v a n t a l i i, n o b i s p r o p o s u i s s e s u f f i c i a t. Interim in Circulis ex constructione mea universali res adeo facilis est. ut quadratura continua reducatur ad rectificationem curvae alicujus algebraicae. Scis enim, quod si radius sit a, et NL, x; erit $\frac{BN}{\sqrt{NL}} = \frac{a\,dx}{\sqrt{aax - x^3}}$, cujus summatio dependet a rectificatione curvae Lemniscatae, per quam construximus olim Tuam Isochronam paracentricam. Et sic, quod notabile est, duo haec problemata Isochronae paracentricae, et brevissimi appulsus, licet utrumque transcendens, inter se tamen habent connexionem algebraicam, id est, uno constructo, alterum algebraice construitur.

Caeterum artificium meum reducendi diversas quadraturas ad unam continuam, agnosco hic limitatum esse et desiderare, ut curvae ordinatim positione datae sint similes et similiter positae; in aliis autem occasionibus quamplurimis eo commode utor, licet curvae ordinatim positione datae non sint similes, ut in exemplo Ellipsium super eodem axe descriptarum, cujus in praecedentibus meis mentionem injeci, sed quod miror, in responsione non attingis. Imo ope hujus artificii solvo infinita alia hujusmodi problemata, ubi nunquam curvae similes requiruntur; horum aliquot curiosa perscripsi nuper Dno. Varignonio, quae proponat suis

Geometris *). Unde colligere poteris hoc artificium latius patere nec adeo limitatum esse, quam statim Tibi visum est.

Et ego semper censui perfectissimam transcendentium expressionem esse per exponentiales, sed mihi videtur frustra illam quaeri in iis, quae non dependent a quadratura Hyperbolae; unde imaginari non possum, quomodo etiam exponentialiter exhiberi posse velis, quae supponunt quadraturam Circuli. Optarem unicum exemplum. Certissimum puto omnem quantitatem exponentialem, quam voco percurrentem, per Logarithmicam construi posse. Sed forte aliud genus exponentialium habes, cujus participem me reddas, rogo.

Cedo manus: Problema radii non est plus quam determinatum, prout intelligis medium variari juxta duas dimensiones: sed, si placet, attende quod longe difficilius sit, determinare leges harum variationum, ut radii in datas lineas transeant, quam earundem linearum invenire curvas normaliter secantes, unde gratis hoc ex illo quaereres. Praeterea observo, quod superficies, verbi gratia, verticalis, repraesentans medium varians secundum ambas dimensiones, id est, secundum rectam verticalem et horizontalem, considerari tamen possit tanquam varians secundum unicam tantum dimensionem, si vis, verticalem. Si enim (fig. 121) varies medium quocunque modo secundum ABCDEF, ita etiam, quovis alio modo, secundum ALMNOPA, manifestum jam est, etiamsi omnia puncta in horizontali FF sint diversae densitatis, dari tamen aliquod punctum G, in proxima linea EE, quod sit ejusdem densitatis cum F, et aliud H in proxima DD, item I in CC, K in BB, P in AA etc. omnia aeque densa ac F; quocunque enim modo medium per superficiem AFFA variari concipiatur, haec tamen successio punctorum aeque densorum perpetuo locum habet, quod, ni fallor, clarum est ex ipsissima Tua c o n t i n u i t a t i s L e g e. Datur ergo integra FGHIKP, secundum quam medium aequaliter est densum; jam si eodem modo concipias reliquas lineas EO, DN, CM, BL etc. transire per puncta ejusdem respective densitatis gradus, habebis medium, cujus variatio, quae licet duarum sit dimensionum, jam unius tantum dimensionis est. Hinc concludo a Te non sat bene dictum esse: S i v a r i e s m e d i u m u n o t a n t u m m o d o, t u n c f a t e o r p r o b l e m a f o r e p l u s q u a m

*) Siehe Journal des Sçavans 1697, Aoust.

determinatum (nec refert, BB verbi gratia recta sit an curva); refert enim maxime recta sit an curva. Vidisti enim, si curva admittenda esset, omne medium, quocunque modo varietur, uno tantum modo variari intelligendum esse; quod itaque palmarium est in determinatione medii, ut radios transmittat per lineas ordinatim positione datas; perspexi rem eo recidere, ut determinentur lineae FGHIKP, EO, DN etc. quod autem, ut supra monui, longe difficilius est, quam inventio curvarum ad datas normalium. Sed haec, pro perspicacitate Tua, me multo melius penetrabis; velim per otium cogites. Offert sese mihi difficultas insuperabilis in eo, quod infinitae lineae curvae sunt determinandae, forsan omnes diversae naturae.

Nuspiam quidem diserte dixisti, rem aeque esse facilem in appulsu ad rectam et ad curvam; id tamen ex verbis Tuis sequi credebam, cum dicis: *Eadem methodus videtur etiam servire, si celerrimus appulsus quaeratur, non ad rectam, sed ad curvam positione datam.* Si duo diversa per eandem methodum solvuntur, illa duo mihi sunt aeque facilia.

Video verissimum esse, legem minimi vel maximi et in particula curvae minima locum habere, sed sane non possum applicationem ad Isoperimetra constituere, neque etiam ad Brachystochronam datae longitudinis. Verum non minus est rem posse (fig. 116) considerari in Ellipsi ordinaria et finita PQR (hoc enim jamdiu et ego concipiebam) et determinari in ea punctum M, ut ex focis ductae LM, MN percurrantur citissime ex data altitudine. Demus porro haec deinde posse applicari ad infinite parva, ita ut ratio LM ad MN dari possit: nondum tamen video, nec videbo, donec mihi ostenderis, quomodo postea iterum regressus detur a cognitione speciei trianguli infinite parvi LMN, ad cognitionem ordinarii, curvae scilicet quaesitae, vel saltem ad aequationem differentio-differentialem. Quomodo, quaeso, eo pervenire posses, cum in aequatione litera reperiri necesse sit, quae determinet longitudinem curvae (alias indifferens esset pro omnibus Brachystochronis) illa litera vero, vel illud quidquid sit quod determinet longitudinem curvae, nequidem ingrediatur in considerationem, quaerendo speciem trianguli LMN. Dixi perpetuo inveniri posse speciem trianguli LMN, ita ut descensus per LMN sit citissimus; sed fateor me id nondum quaesivisse, quia a me

impetrare non possum, ut absolvam calculum prolixissimum, qui requiritur. Interim ut obstacula omnia removeam, ponamus calculum nobis ostendisse in Ellipsi ordinaria et finita punctum M ita se habere, ut triangulum LMN habeat unum latus LM duplum alterius MN, atque adeo idem etiam obtinere in Ellipticula infinite parva. Quo pacto mihi jam quaeres curvam datae longitudinis, ex eo quod ejus particulae minimae LMN faciant ubique triangulum, cujus unum latus LM duplum sit alterius MN? Si triangulum LMN posuissem isosceles, praevideo quod mihi responsurus esses, curvam quaesitam esse circulum, quamvis id nullo calculo invenire posses, ideoque ut superfluam disputationem evitem, pono unum latus duplum alterius, vel si mavis triplum, quadruplumve etc. modo non sit isosceles.

P. Malebranchius utique non egit ut decet, quod Te inconsulto libellum suum in lucem protruserit; dissuasissem id ego ipsi si tum temporis cogitassem quod jam cogito, aut saltem si de privato inter vos commercio, quod Malebranchius apud me ex parte dissimulaverat, constitisset magis. Quid in isto Libello contra continuitatis Legem contineatur, jam non memini; ex quo enim Galliam deserui, Libellum amplius haud vidi.

Corporum indivulsorum gradus Tuos admittam; mihi tamen videtur partes eumdem servare posse situm inter se, absque ut statuatur corpus perfecte rigidum (loquor de corpusculis exiguis, ex quibus majora componuntur); sufficit utique motum conspirantem partium alicujus corpusculi tantum esse, ut ab ambientibus disturbari non possit; quo casu primus indivulsi gradus habetur sine perfecta rigiditate seu duritie. Video clarissime perfecte dura non dari posse, eaque proin absolute rejicio, sed vacuola interspersa Democriti et Gassendi eatenus tantum rejicio, quod jam videam, iis non opus esse ad explicandos naturae effectus: contra quam olim credebam, motum scilicet nullum fore, si omnia in Universo essent plena, vulgari opinione nixus duritiem dependere ab immediato contactu et pressione materiae ambientis. Quod autem actu ista vacuola non dentur, credo non tam facile demonstrari posse, ab illis praesertim qui corporis essentiam non in nuda extensione statuunt. Et sane multis ex locis haud obscure colligo, etiam Hugenium vacui fautorem fuisse. Caeterum Democriticorum et Gassendistarum atomos perfecte duras statuentium, illisque vacuum interjicientium opinio non tam obsona mihi videtur, quam Hartsoekeri, duo extrema inter se conjungentis, nempe perfecte durum et perfecte fluidum, quo absurdius nihil excogitari potuit; nihil enim magis continuitatis Legi adversatur, quam saltus ille ab uno extremo ad alterum. Parum soliditatis Hartsoekerus ostendit in scriptis suis, multoque minus alter ille Professor Matheseos Parisinus La Montre. Miror qui potueris interpositione Tua dignari hos duos inter se inepte admodum disputantes; me sane non moveret duorum coecorum de coloribus altercatio, neque ei me miscerem. Quid obsecro boni ab homine expectandum, qui in notiones communes misere adeo peccat, ceu factum fuit ab isto La Montre, qui 47am propositionem Euclidis demonstare volens immediate per Axiomata *), crassum adeo et palpabilem commisit paralogismum, ut Mathematicorum nemo eum refutare dignaretur; sed oportebat, proh pudor! ut quaedam de sequiori sexu eum castigaret, id quod revera fecit Domini Marchionis Hospitalii Uxor, ut forte vidisti in Diario Parisiensi. Hiccine Professor est, qui alios Mathesin docere debet? Pudeat hominem ignorantiam suam ita turpiter prodidisse. Quid id ad nos? dices. Ignosce; verum est, ejus errores nobis parum imponent; interim quia incidenter de isto homine cogito, non possum non stomachari, quod tam male consultum sit illis, qui scientiam ab eo haurire volunt. Vale.

P. S. Praeterito die Lunae hasce literas jam scriptas habui postridie dimissurus, cum eodem die acciperem novissimas Tuas 3 Aug. datas, quae fecerunt ut dimissionem in hunc diem distulerim, quo interea tuas diligenter perlegere, et quod forte notaturus essem, huc adjicere possem. Ut dicam quod res est, incredibili gaudio perfusus sum, cum viderem eundem genium Tibi totum mysterium pandisse; sed indignor quod Te altius admiserit quam me. Utique rem probe penetrasti, annotando totius negotii cardinem in eo consistere, ut inveniatur ratio laterum trianguli characteristici $_1C_1F_1(C)$ in Tua figura (fig. 118); colligere poteris ex solutione mea supra allata problematis celerrimi appulsus, ubi pariter rationem assigno laterum trianguli PBN vel DFE, methodum meam eodem artificio niti. Sed fateor mihi unicum defuisse, quin perfecerim methodum, quod scilicet mihi non venit in mentem differentiatio parametrorum seu quantitatum in eadem curva

*) Siehe Journal des Sçavans 1691, Juillet.

invariabilium. Sed pro transitu a curva ad curvam variabilium, de hujusmodi differentiatione, licet jam olim etiam inter nos actum fuerit, nunc tamen ingenue fateor, non cogitavi. Quam vero ingeniose, quam acute illum huic negotio accommodaveris, satis mirari nequeo; profecto nihil elegantius est neque excogitari potest, quam modus ille Tuus differentiandi curvam per summam differentiuncularum numero infinitarum. Quin crebrius conscendis currum, si tunc Tibi vena Mathematica apperitur? Imo vero defectus haud mediocris differentiales, sublatus est. Hinc quid censes? Annon possent depromi problemata, qualia jam dedi in Ellipsibus, quibus miserie exercere possemus Geometras, interiori Geometria licet maxime versatos? Viderent sane omnes suos conatus iritos, quamdiu in nostrum artificium non penetrarent, suamque infirmitatem tanto magis mirarentur, quod hujusmodi problemata videantur facilia et ex directa tantum methodo tangentium desumta. Haud dubie quadraturae illae $a\int dx : x\sqrt{aa+xx}$ et $\int dx : x$, quas in Logarithmicis pro ratione linearum $B\vartheta$, BC invenisti, amplius possunt reduci. Ambae enim dependent a quadratura Hyperbolae, et per consequens per ipsissimas Logarithmicas construi possunt. Potuisses explicare methodum brevius et universalius, per figuram abstractam, id est, non ad certum exemplum Logarithmicarum adaptatam. Spero non ingratum fore, si hic methodum generalissime exposuero: Sint ergo (fig. 118) curvae ordinatim positione datae, quacunque lege cognita progenitae VC, $V(C)$, $V((C))$, quarum axis communis VB, et parametri variabiles a, (a), $((a))$. Sint jam portiones curvarum VC, $V(C)$, $V((C))$ (quas Tu aequales posuisti) data lege crescentes vel decrescentes, dest. sit $VC = \alpha$, $V(C) = (\alpha)$, $V((C)) = ((\alpha))$ etc. per α, (α), $((\alpha))$ etc. intelligo quantitates datas per a, (a), $((a))$ etc. Quaeritur jam tangens curvae $C(C)((C))$ transeuntis per extremitates illarum portionum, quod sic facio. Quoniam VC seu α datur per a, ejus differentialis dabitur per da. Sit itaque $VC - V(C)$ seu $d\alpha = \overset{1}{\alpha} da$ (per $\overset{1}{\alpha}$, $\overset{2}{\alpha}$, $\overset{3}{\alpha}$ etc. intelligo quantitates diversimode datas per a). Sit jam VB, x; ergo particula curvae $_1C_2C$ dabitur per dx affectam quantitate composita ex x et a (hujusmodi quantitates datas per x et a, quaecunque hic occurrere possunt, vocabo α_x, $\overset{1}{\alpha}_x$, $\overset{2}{\alpha}_x$, $\overset{3}{\alpha}_x$ etc.) Sit itaque $_1C_2C = \alpha_x dx$; jam si differentietur $_1C_2C$ secundum a, manente x, habebitur ${}_1C_2C - {}_1F_2F$ seu $d\alpha_x dx = \overset{1}{\alpha}_x dx\,da$; hoc si iterum summetur, sed secundum x, manente a, erit $VC - VF = da\int \overset{1}{\alpha}_x dx =$ (quia $\int \overset{1}{\alpha}_x dx$ datur per a et x) $\overset{2}{\alpha}_x da$; quoniam vero supra inventum est $\overset{1}{\alpha} da = VC - V(C) = VC - VF - {}_1F(C) = \overset{2}{\alpha}_x da - F(C)$, habebitur $F(C) = \overset{2}{\alpha}_x da - \overset{1}{\alpha} da$. Tandem quia BC datur per x et a, si secundum a differentietur, manente x, proveniet FC data per da. Esto ergo $FC = \overset{3}{\alpha}_x da$. Unde si ducatur $B\vartheta$ parallela ipsi F(C), id est tangenti curvae datae VF et si fiat $CB \,.\, B\vartheta :: FC \,.\, F(C) :: \overset{2}{\alpha}_x da - \overset{1}{\alpha} da \,.\, \overset{3}{\alpha}_x da :: \overset{2}{\alpha}_x - \overset{1}{\alpha} : \overset{3}{\alpha}_x$, tanget ducta $C\vartheta$ curvam C(C)((C)) in puncto C. Si nunc regula generalis inventa ad certum exemplum esset applicanda, dispiciendum tantum esset, quid sit $\overset{2}{\alpha}_x$, $\overset{1}{\alpha}$ et $\overset{3}{\alpha}_x$: primum enim et ultimum semper dabuntur per a et x promiscue, medium vero per a tantum; dari per a et x, vel per a, comprehendo etiam quando transcendenter, vel ut Tu vocas, quadratorie dantur; hoc enim processum regulae generalis non impedit.

Quod si hanc methodum ad Problema brevissimi appulsus applicare velimus, reperiemus quidem facile tangentes Synchronarum, licet ordinatim positione datae curvae non sint similes, ut in superiori mea solutione supposui: sed fateberis, rem nondum confectam esse. Etenim per hanc methodum quaeritur tantum positio tangentis ex dato puncto contactus in data Synchrona; interim in celerrimo appulsu res secus se habet, quia ex data positione tangente quaeritur punctum contactus. Superest itaque, quo exerceas ingenium, ut tam nobile inventum omnibus numeris completum reddas. Mihi videtur id praestari posse per intersectionem duarum aliarum curvarum, quae semper construi possunt. Sed hisce jam missis, pervenio ad aliud egregium inventum pariter generalissimum, in quod harum occasione incidi, et quod defectum tollit maximum methodi Tangentium inversae, sicuti Tuo sublatus est aliquis methodi Tangentium directae. Consistit illud in solutione hujus Problematis: Construere curvam datas ordinatim positione curvas sive similes sive non similes in dato angulo sive invariabili sive data lege variabili secantem. Supposita similitudine curvarum ordinatim positione datarum, Problema jamdudum solutum habui, ut et in paucis aliis dissimilibus; nunc vero quomodo in similibus et dissimilibus generaliter id solverim paucis explicare, haud ingratum Tibi fore confido. Sint (fig. 122.) curvae ordinatim positione datae AF, AE, AC etc. secandae a curva quaesita FEC in angulo dato, quem hic exempli loco ponamus ubique rectum (ut videas, quam facile solutu sit, quod operose ex Opticis deducere volebas). Ad AH axem communem intelligatur applicari HG parameter curvae AE, cujus intersectio cum GH producta, determinet punctum E in curva quaesita. Si hac ratione ubique parametri applicari concipiantur, fiet curva AG, quam si determinaverimus, eadem opera etiam FEC erit determinata. Esto itaque AH, x; HG parameter variabilis a; HE vel HB (data per x et a) α_x; quae si differentietur secundum a, manente x, habebitur BE; sit itaque $BE = \overset{1}{\alpha}_x da$: differentiando vero BH seu α_x secundum x manente a, proveniet CI seu BD. Sit itaque $BD = \overset{1}{\alpha}_x dx$, et proinde $DE = \overset{1}{\alpha}_x da - \overset{2}{\alpha}_x dx$; est autem $DC = dx$; ergo, quia ex conditione problematis angulus BCE est rectus, erit $\square DC = \square BDE$, id est $dx^2 = \overset{1}{\alpha}_x \overset{2}{\alpha}_x da\,dx - \overset{2}{\alpha}{}_x^2 dx^2$, seu $dx + \overset{2}{\alpha}{}_x^2 dx = \overset{1}{\alpha}_x \overset{2}{\alpha}_x da$. Haec igitur aequatio differentialis determinat curvam AG, qua constructa construitur etiam quaesita FEC. Nam data GH parametro, dabitur etiam curva AE, cujus illa est parameter; atque adeo producta GH, occurret curvae AE in puncto E, quod erit ad curvam quaesitam FEC. Hujusmodi constructio per parametrorum variabilium applicationem non inelegans mihi videtur; non dubito quin alibi quoque possit inservire, Tuo praesertim accedente ingenio. Notare hic convenit, quod si curvae ordinatim positione datae sint Algebraïcae, erit curva parametrorum AG transcendens primi generis; si illae sint transcendentes primi generis, erit haec transcendens secundi, et ita consequenter. Patitur quidem hoc exceptionem in nonnullis exemplis particularibus, quando scilicet quantitas $\overset{1}{\alpha}_x$ evadit Algebraïca, id quod per accidens fieri potest, etiamsi AF, AE, AC sint transcendentes. Iterum vale.

Groningae d. 14. Augusti 1697.

Ut impleam vacuum hujus paginae, transcribam huc quaedam ex literis Dn. Varignonii, quas eodem die cum Tuis accepi, ut videas quam misere luat noster calculus apud invidos et ignaros; vix putem Lutheri et Calvini reformationem durius habitam fuisse. „Mr. le Marquis de l'Hospital, inquit, est encore à la „campagne, desorte que je me trouve seul icy chargé de la dé„fense des infiniment petits, dont je suis le vray martyr, tant j'ay „désja soutenu d'assaux pour eux contre certains mathematiciens „du vieux style, qui chagrins de voir, que par ce calcul les jeunes „gens les attrapent et même les passent, font tout ce qu'ils peu„vent pour le décrier, sans qu'on puisse obtenir deux d'écrire „contre. Il est pourtant vray que depuis la solution que Mr. le „Marquis de l'Hospital a donnée de vôtre problème de Linea „celerrimi descensus, ils ne parlent plus tant ni si haut „qu'auparavant.“ Quos hic vocat mathematicos styli veteris, haud dubie collimat in Catelanum, de la Hire, Roolium aliosque obscuri nominis, qui nominari non merentur.

Jam diu est quod nihil Actorum viderim; fac quaeso ut sciam, an ibi in tempore monitum sit me solvisse problemata fraterna. Ecce ultimus labitur mensis praestituti temporis, intra quod mihi conceditur me soluturum declarare.

Prima occasione per studiosum aut alium hac transeuntem mittam Dno. Meyero Tuas ad Cartesium Animadversiones. Praecipua quae ibi notavi, Tibi jam perscripsi.

LXV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum multa mihi essent dicenda literis Tuis pro merito respondere volenti, et tempore exclusus, ob negotia de die in diem proferrem scribendi officium, tandem malui necessariis defungi, quam prorsus silere, sperans interim Tuum silentium diuturnum ex causa ingrata non oriri.

Gaudeo Tibi tantopere methodum meam novam, quo pomeria calculi nostri proferuntur, placuisse. Sane hac ratione non tantum ad aequationem differentialem primi gradus reducitur inventio curvae ordinatim positione datas perpendiculariter secantis, aut eis angulo vel constanter, vel ordinatim dato occurrentis; sed etiamsi angulus non sit ordinatim datus, modo quae ipsum determinant, cum aliis functionibus constituant aliquid ordinatim datum, idem obtineri potest, multaque adhuc ampliora insunt.

Solutio Problematis brevissimi appulsus non est, quod Te jam amplius moretur, licet curvae ordinatim positione datae non sint similes et similiter positae. Quaeritur nimirum, per quam ex his grave brevissime appellat ad rectam positione datam. Ad quamvis Synchronarum ducatur recta ipsam tangens, sed datae rectae parallela, habebitur curva quae transibit per omnia puncta contactuum, cujus cum recta data intersectio dabit quaesitum appulsus punctum, unde caetera pendent.

Dn. Marchio Hospitalius mihi solutionem Tuorum quorumdam Problematum in Diario Gallico propositorum misit, demto primo nescio quo, ut eas in Actis Lipsiensibus edi curem, quod et fiet*), tunc cum Tua edetur solutio. Tibi ipsi sese de ea re scripturum esse indicavit, nec dubito factum. Mihi haec Problemata Tua non innotuerant. Solutiones Hospitalianae ad casus nova Calculi promotione solvendos non pertingunt. Vidi quae Historiae Operum Eruditorum inseri curasti, ubi aemulos eleganter defricas.

Durat adhuc, etsi per longa intervalla subinde dilata, disputatio inter Dn. Papinum et me. Valde innititur ei, quod duo corpora reciprocis ad corporum rationem celeritatibus concurrentia se mutuo sistunt. Hinc putat vim eorum esse aequalem, non considerans aequalia ab ipsis absolute non posse effici, etsi se mutuo possint impedire.

Inter alia objecerat: Si fingamus corpora A et B esse perfecte dura et inflexibilia, A massa 1, celeritate 4, et B massa 4, celeritate 1, et concurrendo elastrum tendere, atque ita eo tenso simul ad quietem redigi, tum D massa 8 fingi substitutum in locum B, idque ipsum D recipere totam vim quam dederat elastro corpus B, seu quam corpus B ab eo reciperet, et tamen celeritatem, quam recipit D, esse celeritati ejus quam recipit A reciproce proportionalem; hinc infert, nunc plus, nunc minus virium in mundo esse, diverso tempore, contra sententiam meam. Respondi, verum esse, A et D hic recipere ab Elastro se restituente velocitates molibus reciproce proportionales; sed verum non esse,

*) Act. Erudit. 1698. Januar.

quod D tantum recipiat virium, quantum recepisset B; itaque dixi, rem perinde fore ac si A, 1, et D, 8, concurrissent velocitatibus A, ut $\frac{4}{3}\sqrt{10}$, et D ut $\frac{1}{6}\sqrt{10}$; ita enim iisdem velocitatibus ab Elastro reflexum iri, et conservatum iri tum reciprocam celeritatum ad corpora rationem, tum etiam virium summam.

Nunc novum casum objicit, nempe ut concurrant A massa 10, velocitate 4; B massa 1, velocitate 10, et ubi B in concursu ad quietem redactum est, substituit ei D duplum, seu cujus massa 2. Et putat tunc perinde omnia eventura esse, ac si concurrissent A, ut prius massa 10, velocitate 4, sed D massa 2, velocitate 5. Quo facto facile colligit eventum proditurum, quo minorem in corporum a se invicem discessu virium summam habituri essemus, quam ante. Supponit autem, ut ante, corpora A, B, D esse perfecte rigida; Elastrum autem non in ipsis esse, sed in corpore intercepto, quod fingendum est, statim iterum tolli, ubi libertatem recuperavit, ne forte corporis progressui obstet; etsi constet has fictiones revera locum non habere.

Respondi, negando D massa 2, velocitate 5, absolute idem efficere quod B massa 1, velocitate 5, aut unum pro alio substitui posse, cum casus ipsius B sit duplo fortior casu ipsius D, seu duplo altius pondus ad eamdem altitudinem elevare possit. Interim operae pretium esset definire paulo distinctius, quantum celeritatis retineat A, quando B reductum est ad quietem, et quantum tunc virium sit translatum in Elastrum, ut scilicet melius determinari queat, quid futurum sit, si eo momento, quo B reducitur ad quietem, substitui fingatur ejus duplum D. Hoc igitur per otium a Te considerari non inutile erit; res certe in potestate est.

Huetius aliique amici in Gallia desiderant meas ad Cartesium Animadversiunculas. Erunt mox mittendi occasiones; itaque rogo, ut ad Dnum. Mejerum Bremam cures. Interim vale etc.

Dabam Hanoverae 2. Novembr. 1697.

LXVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Silentium Tuum diuturnum me anxium reddebat de valetudine tua; sed bene est quod valeas, et gaudeo. Subverebar initio, ne forte postremae meae intercidissent. Nescio cur dicas, Te sperare meum silentium diuturnum ex causa ingrata non oriri, cum tamen ego a Te responsum expectaverim; non puto gratum Tibi posse esse, si copia scribendi deficit, ut inanes literas literis cumulem.

Etiam ego laetor Tibi probari modum meum, ex Methodo Tua nova differentiandi curvas deductum, quo curvam invenio curvas ordinatim positione datas secantem vel perpendiculariter, vel in angulo constanti, vel denique in angulo utcunque variante secundum datam legem; nec per hoc aliud intellexi, quam ut angulus vel per se sit determinatus, vel per certas quasdam (ut vocas) functiones quae constituant aliquid ordinatim datum. Non nego alia plura inesse, quae Te nemo melius rimari poterit; optarem praeprimis, ut (quemadmodum in praecedentibus Tuis ante abitum ad Nundinas Brunsvicenses scriptis innuis) inde eliceres novam summandi rationem; raro occurrunt hujusmodi summationes, qualis ex. gr. est haec $\int da \int \frac{xdx}{\sqrt{2ax-xx}}$, quae per quadraturam segmenti circularis construitur; sed id alicujus momenti esset, si exinde pateret modus separandi indeterminatas in aequatione differentiali; hoc enim unicum est, quod se methodis nostris adhuc obstinate opponit. Asseris quidem aequationem construi posse, si non per quadraturam continuam, saltem per istas disgregatas seu ordinatim diversas; fateor autem me id nondum potuisse assequi, licet id tentaverim in levissimo hoc exemplo $xxdx+yydx=aady$, cujus constructionem vellem ut mihi dares, sive id fiat per quadraturam continuam, sive per disgregatas; nec profecto majorem capies fructum ex novo Tuo invento, praesertim si hanc separandi difficultatem hactenus insuperabilem non solum in hac, sed generaliter in omni alia aequatione tollere posses.

Solutionem generalem problematis brevissimi appulsus non absimili modo conceperam; restat tamen aliquid quod desideretur, nimirum quod ad Synchronam tangens duci posse assumatur positione datae parallela; id quod haud adeo facile judico. Sed habeo etiam alias solutiones, quae id non supponunt.

Proposueram ante novam calculi promotionem problemata, de quibus Dn. Hospitalius ad Te scripsit; alias non proposuissem: non ideo tamen statim alii in artificium nostrum penetrabunt. Verum dicis, solutiones Hospitalii ad casus curvarum dissimilium non pertingunt; quod idem cum objecissem, me scilicet per curvas ejusdem speciei non tantum intelligere curvas similes, sed quascunque alias ordinatim datas, ex. gr. omnes Ellipses super eodem axe descriptas, atque adeo ipsum problemati nondum plenarie satisfecisse; respondit nuper se agnoscere aliquid amplius requiri pro curvis dissimilibus. („Je vous avoue, inquit, que lorsque les courbes ne sont pas semblables, il faut quelque chose de plus; en tout cas je ne pretens avoir resolu vos derniers problémes, que dans ce sens, et j'attens de l'apprendre de vous lorsque les courbes sont dissemblables etc.") Si urget Dn. Hospitalius ut edas solutiones suas, poteris edere meis non exspectatis; cum enim perfectae solutiones pro omnibus curvis ordinatim datis ipso Tuo judicio adhuc dissimulandae sint, operae vero pretium non esset solutiones imperfectas publicare, tantum nempe pro curvis similibus, praestat omnino silere et nihil dare, quam pauca dare. Quandoquidem nondum videris illa problemata, mitto ecce foliolum ex Diario Gallico *). Tua forte applicatione dignum censebis primum, ubi quaero modum ducendae in superficie convexa lineae brevissimae a puncto ad punctum. Hospitalius de eo desperavit; ego vero illud reduxi ad aequationem differentialem, quae si separentur indeterminatae, construi poterit.

Quae Dn. Papinus de novo movet contra aestimationem virium, speciosa quidem sunt, sed si penitius inspiciuntur, fundamentum nullum habent. Aptissime ipsi respondisti, quod quando duo corpora velocitatibus reciprocis ad massarum rationem concurrentia sese sistunt, non ideo sequatur eorum vim esse aequalem; nam vis vim non destruit, seu vis vi non est contraria; eodem modo quo quadratum lineae affirmativae et quadratum lineae negativae non dicuntur contrarium efficere, utpote utrumque affirmativum. Dicendum itaque duo illa Corpora sese sistere, quia habent aequalem quantitatem directionis sibi mutuo contrariam; quae, si re-

*) Journal des Savans 1697 p. 394.—396.

spective consideretur, nulla est: est enim directio respectiva progressio communis Centri gravitatis corporum, quod cum non progrediatur ante concursum, pariter non progredi poterit post concursum. Secus sequeretur, aliquid quod quiescit a se ipso moveri posse, quod est absurdum. Hinc, ut Centrum gravitatis quiescat post concursum, ut ante concursum, oportet ut vel et ipsa corpora in conflictu sistantur, tenso elastro interposito manente, vel si elastrum sese restituat, ut pristina celeritate repellantur. Hi enim duo soli casus possibiles sunt, quibus Centrum gravitatis in quiete conservatur. Hanc puto genuinam causam esse ejus quod Papinus aequalitati virium ascribit, sicque paralogismum commisit non causae pro causa. Ex hoc errore etiam reliqui ejus errores pullulant; ut in priori objectione, si A massa 1, velocitate 4, et B massa 4, celeritate 1 concurrant, et elastro tenso, ipsis ad quietem redactis, substitui intelligatur D massa 8, in locum B. Quis non statim videret Papinum gratis hic supponere, corpus D tantumdem virium ab elastro recipere, quantum ipsi dederat corpus B, seu quantum jam B ab elastro iterum reciperet, si maneret? Ut autem inveniatur, quantum praecise celeritatis corpus D recipiat ab elastro, et quanta item celeritate repellatur corpus A, considerandum est, quod tota vis quam habebant ante concursum corpus A et corpus B, in concursu transferatur in elastrum interjectum; hoc proinde elastrum ita tensum (quod ope vinculi in tensione ista manere concipio) si e medio duorum illorum corporum A et B eximi, et inter duo alia corpora quiescentia C et D interponi intelligatur; evidens utique est, quod jam subito soluto vinculo, totam suam vim transferet in corpora C et D, quarum perconsequens aggregatum idem praecise debet esse, quam aggregatum virium corporum A et B; res itaque eo recidit, ut distribuatur hoc aggregatum virium corporum A et B in duas partes, quarum una, quae C communicabitur, sese habeat ad alteram ipsi D communicandam reciproce ut D ad C; atque istae vires dividantur per moles C et D, et demum ex quotientibus extrahantur radices quadratae, quae dabunt velocitates, quas corpora C et D ab elastro recipient. Hinc in casu particulari Papini, ubi corpora A et C sunt aequalia, vel potius eadem utrumque massa 1, B massa 4, D massa 8; et A celeritate 4, B celeritate 1, reperietur reflexum iri A et D velocitatibus, ut $\frac{4}{3}\sqrt{10}$ et $\frac{1}{6}\sqrt{10}$, prorsus ut Tu invenisti.

In altera objectione, quando concurrunt A massa 10, velocitate 4; B massa 1, velocitate 10, ubi in concursu reducto B ad quietem ei substituit D duplum, seu cujus massa 2, putans tunc perinde omnia eventura esse ac si concurrissent A, ut prius, massa 10, velocitate 4, sed D massa 2, velocitate 5, petit principium, supponitque quod probare tenetur, nimirum D massa 2, velocitate 5, idem efficere seu tantumdem habere actionis, quantum B massa 1, velocitate 10: id quod absolute falsum est, et nil nisi vetus error. Interim cum a me desideres, ut per otium me applicem ad definiendum, quantum celeritatis retineat A, quando B reductum est ad quietem, et quantum tunc virium sit translatum in elastrum, ut scilicet melius determinari queat, quid futurum sit, si eo momento quo B reducitur ad quietem, substitui fingatur ejus duplum D, fateor id esse in potestate; requirit tamen plus meditationis quam praecedens, quae quia jucunda admodum mihi visa fuere et digna quae penitius inspicerem, tanto fortius me compulere ad desiderio Tuo satisfaciendum, et quidem post brevem meditationem generaliter omnia determinavi, positis tum corporibus tum velocitatibus in quacunque ratione. Dico itaque, in hoc Papini casu, corpus A, eo momento quo B reducitur ad quietem, retinere celeritatem 3, vel in elastrum translatam esse integram vim ipsius B, et praeterea septem decimas sextas partes vis ipsius A; quae quidem facile patent. Sed, quod caput rei est, dico porro, quod si, eo momento quo B reducitur ad quietem, substituitur D, amittet A gradatim de sua velocitate residua 3, D vero gradatim acquiret, et quidem decrementa illius et incrementa hujus erunt reciproce ut moles, ita ut tandem (quod contingit eo ipso instante, quo elastrum est in maxima sua tensione) A et D habitura sint aequalem seu communem celeritatem, quae proinde erit $\frac{5}{2}$: tunc autem elastri vis seu tensio maxima erit aequalis vi integrae ipsius A simul et quartae parti vis ipsius B, earum scilicet quas ante concursum habebant. Inventa itaque vi elastri, invenietur per modum supra exhibitum, quantum celeritatis elastrum a sua tensione sese restituendo, corporibus A et D imprimet, nimirum ipsi A dabit celeritatem $\sqrt{\frac{37}{12}}$, ipsi D vero $5\sqrt{\frac{37}{12}}$ in plagam contrariam. Hinc si illa a celeritate communi auferatur, haec vero ad eandem addatur, habebitur quaesitum. Dico itaque, quod post substitutionem illam

factam A feretur velocitate $\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{12}}$, D autem $\frac{5}{2} + 5\sqrt{\frac{37}{12}}$ in plagam eandem. Hoc ratiocinium egregie confirmatur, si analytice quaeratur, supponendo quantitatem tum virium tum directionis post concursum et substitutionem debere manere eandem, quae fuerat ante concursum. Sic, si ponatur velocitas futura ipsius A, x; velocitas futura ipsius D, y, erit quantitas virium $10xx + 2yy = 260$ quantitati virium ante concursum; et quantitas directionis $10x + 2y = 30$ quantitati directionis ante concursum; ex his enim duabus aequationibus reperietur $x = \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{12}}$ et $y = \frac{5}{2} + 5\sqrt{\frac{37}{12}}$, ut ante.

Cum hactenus nulla occasio sese obtulerit mittendi Bremam Tuas in Cartesium observationes, misi illas tandem per Cursorem ordinarium ad Dn. Meyerum. Rogo ut Menckenio nostro transmittas (communi prius involucro inclusas) has literas adjunctas una cum schediasmate hoc Actis inserendo*), quod apertum reliqui, ut statim legere possis, quid ad nupera Tschirnhausiana respondeo. Hirium turpiter paralogizantem paulo acrius castigo; sed qui nostra ita contemnit, meliora non meretur: discat inposterum abstinere ab iis, quae non intelligit. Frater meus junior ex castris huc redux hyemem apud me transiget, etiamnum Berolinum appetit; ego vero optarem, ut in aliqua officina vestratium conditionem quaereret versus Pascha. Hic ab eo sunt literae ad Jägerum filium, quas per famulum curare velis rogo; vidit hunc Jägerum olim in Germania et nuper in Gallia. Vale etc.

Groningae d. 4 Decembr. 1697.

P. S. Hoc ipso momento accipio Diarium Gallicum, in quo reperio solutiones meas problematum fraternorum; has Tibi etiam mitto, ut perlectis illis simul cum reliquis Lipsiam expedire haud graveris.

---

*) De Arcuum Parabolicorum comparatione.

LXVII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Justo rigorosius mecum ages, si nihil mihi Tuorum perscribes, nisi cujus meae Tibi occasionem suppeditent; quae vereor ne inposterum cogantur esse steriliores quam vellem. Inanes non fuissent Tuae, si eorum participem me fecisses, quae interim a Te acta video. Idque, ut imposterum facias, rogo.

Pro differentialibus ad quadraturas revocandis habui sane meditationes, quarum executio nunc novo differentiali genere egregie juvatur. Sed mihi non licet quae meditor, mature exequi. Itaque cogor comperendinare.

In tangente Synchronae ducenda quae sit datae rectae parallela, difficultatem esse non puto. Idem est si pro recta data sit curva; tunc ordinatim similes ducendae.

Putem sufficere, ut Domino Fratri Tuo in Actis Eruditorum satisfacias, ut in Diario Gallico*) jam fecisti, nec opus esse ut omnia des, quae interim es assecutus. Misi in hanc rem Tua Lipsiam**), sed nescio an ipsi ex Gallico versuri sint Tua; fortasse fecisti ipse, et ut exhiberi debeant, perscripsisti in Tuis ad Dominum Menckenium literis.

Ut Dn. Papino melius satisfacerem, ipse calculandi laborem post literas Tibi scriptas in me sumseram, et quantum judico, eadem qua Tu methodo sum usus. Certe et mihi provenit: eandem manere quantitatem progressus seu vim directivam, praeter vim absolutam totalem. Mitto Tibi meae ad ipsum Epistolae duplicis praeformationem, rogoque ut remittas, quo integrum habeam meum cum ipso de hoc argumento commercium.

Vim directivam hic manere potuissem assumere nam id hoc quoque casu demonstrari potest. Sed malui rem aliunde derivare, ex ipsa scilicet distincta consideratione conflictus, quod a Te quoque recte factum video. Spero et numeros consensuros.

Miror Dn. Tschirnhausium, Virum alioquin ingeniosissimum, in rebus non difficilibus et in potestate existentibus tam saepe labi. Id distractionibus tribuo, et festinationi non satis considerata proferendi. La Hirium usque adeo παραλογίζειν in re clara magis adhuc miror.

Problema minimae lineae in superficie curva a puncto dato ad datum ducendae olim consideraveram, sed mihi non satisfeceram; cum vero proponeres mihi Brachystochronam, meditationem absolvi; sunt enim haec problemata sic satis cognata, sed ad praxin Methodi non accessi.

Dominus Ezechiel Spanhemius mihi Berolino scripsit, sese jussu Electoris sui ad Regem Galliae proficisci, et Hanovera transiturum. Ea occasione Animadversiunculas ad Cartesium Huetio transmittam desideranti. Itaque gratias ago, quod eas Domino Mejero Bremam misisti. Vale et mihi subinde quid agas significa, et si videtur etiam communica.

Dabam Hanoverae 17 Decembr. 1697.

*) Journal des Savans 1697 Decembr.

**) Acta Erudit. 1698 Januar.

LXVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Gratias ago quod mea curaveris Lipsiam. Diarium Gallicum sine versione quidem Latina misi, sed rogaveram Dn. Menckenium, ut ipsi excerperent pro beneplacito, quasi id factum esset me inscio et non curante; alias si pro merito respondendum esset fratri, durioribus abstinere vix possem, licet in literis ad me Dn. Menckenius serio monuerit moderate agere, se enim in Actis omnia contentiosa evitaturos.

Remitto ecce scripta Tua, ubi quae Dno. Papino respondisti, abunde perspexi. Gaudeo nos concurrisse non solum in determinatione velocitatum, quibus A et D separantur, sed in eadem prorsus methodo, qua uterque usi fuimus.

Calculi Tui examine facto, video etiam numeros consentire, nam in figura Tua (fig. 123.), ubi velocitas A ante concursum seu AP est 44, velocitas B seu PB, 110; facis P(G) $27\frac{1}{2}$ et retrosumis (G)(A) $\frac{1}{6}\sqrt{13431}$; a puncto A versus anteriora accipis (A)(D) $\sqrt{13431}$; erit per consequens P(A) seu velocitas postfutura A $27\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{13431}$, et P(D) seu velocitas D erit $27\frac{1}{2} + \sqrt{13431}$. Ego vero positis AP, 4, et BP, 10, dixi esse P(G) $\frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{12}}$ et P(D) $\frac{5}{2} + 5\sqrt{\frac{37}{12}}$; sunt autem $44 . 4 :: 110 . 10 :: 27\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{13431} . \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{37}{12}} :: 27\frac{1}{2} + \sqrt{13431} . \frac{5}{2} + 5\sqrt{\frac{37}{12}}$ omnia proportionalia; ergo consentimus. Quid ad responsionem Tuam reposuerit Papinus, lubentius viderem; dic ipsi quod nos uterque eadem reperimus, alter alterius nesciens cogitata; forsan agnoscet tandem a nostris esse partibus veritatem, nisi nos ambos prae se vidente coecutire arbitretur. Cum nuper, La Hirii errore deprehenso, etiam reliqua Tractatus mechanici*) ejus pervolverem, inveni Regulas pro communicatione motus, quas nostris consentire reperio, absque tamen, ut Author veram aestimationem virium vel statuat vel praesupponat: deducit illas ex natura elaterii, seu, ut dicere soles, ex lege vis mortuae, quae celeritates imprimit in simplici reciproca ratione molium. Unde hoc lumen hauserit La Hirius nescio; a se habere dubito. Videtur ex ipsis illis Regulis tanquam jam suppositis, La Hirium aliosque qui cum eo faciunt (etiam Papinum, si La Hirii ratiocinium admitteret) convinci posse de vera quantitate actionis; quippe facile ex illis demonstrabitur, eandem perpetuo conservari summam producti quadrati velocitatis in molem, non vero simplicis velocitatis in molem, ut haud dubie ipse Hirius putat, qui proinde proprio se jugulat gladio. Dno. Marchioni Hospitalio Tua, ut dixit, venia communicavi Tuam methodum pro solvendo secundo meo Problemate Programmatis ante annum impressi, quae Newtonianae similis est. Hic abrumpere cogor, deficiente scribendi copia, et ego vereor, ne meae inposterum futurae sint interdum steriliores, quam vellem. Ordines nostri novam mihi imposuerunt docendi provinciam, atque in eum finem certam decreverunt summam ad emenda instrumenta experimentalia, ut, exemplo Volderi Lugdunensis, Studiosos nostros etiam experimentis Mathematico-physicis exerceam et delectem. Hisce vale, et cum novi anni auspiciis etiam novis fruere animi corporisque viribus etc.

Groningae d. 8 Jan. 1698.

*) Traité de Méchanique, Paris 1695, p. 384 sq.

LXIX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

. . . .

La Hirii Mechanica aliquando ut legere possim, operam dabo. Quae de concursibus corporum habere ais, recta ea suspicor ex Mariotti scriptis habuisse, cujus schedae in manus ejus venere. Ego autem cum Mariotto de his contuli jam Parisiis, et licet ipsi sententiam meam de vera virium aestimatione non satis exposuissem, alia tamen ratione, per vim scilicet mortuam ab elastro exercitam, rem explicabam.

Interim ex solo principio vis mortuae vix poterit definiri gradus tensionis Elastri a corporum concursu factus, aliaque multa.

Non laudo, quod Viri docti interdum non nominant eos, a quibus profecere. Sic Dn. Ozanam ausus est meam Quadraturam Arithmeticam in sua Geometria Practica, Autore dissimulato, proferre, et demonstrationem pene verbotenus meam sibi ascribere. Et Dn. La Hirius ipse, quod non satis mirari possum, Epicycloïdum usum ad figuras dentium sibi tribuere videtur in peculiari de iis dissertatione*), cum tamen certum sit inventum esse Roemeri Dani. Nam eram Parisiis eo tempore, quo is invenit, remque non tantum ab ipso Roemero, sed et Hugenio intellexi; quo tempore nondum La Hirius in Academiam Scientiarum Regiam erat receptus, nec in hoc genere quicquam praestitisse dicebatur. — Roemerum, qui in Dania agit Regi aestimatus, miror sibi sua non vindicare.

Gaudeo praeclarum consilium coepisse Ordines vestros, suppeditandi sumtus in experimenta, tantumque abest ut ea re putem literas Tuas futuras steriliores, ut contra tantum expectem abundantiores, nisi me scilicet solis abstractis delectari putas.

Interea a Tua benevolentia id mihi spondeo, ut tum de Tuis meditatis, tum et de aliis, quae Tecum communicantur nova, aliquam notitiam mihi non invideas; neque enim dubito a Dno. Marchione Hospitalio vel Dno. Varignonio, et aliis subinde aliqua scitu digna ad Te perscribi, et magis etiam a Te ad illos. Gratum

*) Traité des Epicycloides et de leurs usages dans les Méchaniques, Paris.

est quod Dno. Marchioni communicasti Methodum meam pro locis datae ad plura puncta proprietatis. Etsi enim Newtonianae non sit absimilis, tamen ex his, quae dicit Newtonus, non aeque ac ex meis origo inventi apparet.

Dn. Papinus, quod miratus sum, non satis ad rem respondit, persuasus distinguendum esse inter haec quae fiunt apud nos, ob insensibilis materiae actiones, et ea quae fierent in concursu corporum libero; similibus praejudiciis et Malebranchius laborat. Hortatus sum ut dicat, quas Regulas liberis corporibus tribuat; significabo ipsi consensum nostrarum determinationum. Dum literas meas a Te remissas inspicio, noto verum esse ut dixi, quod celeritates in corporum concursu amissae sunt reciprocae molibus; idem tamen non verum esse de celeritatibus recuperatis, cum corpora se restituunt, et rursus a se incipiunt recedere; at verum esse quodammodo de recuperandis. Vale vigeque et in hunc annum et in alios multos etc.

Dabam Hanoverae 18 Januar. 1698.

LXX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Num quae in Diario Gallico edidi, in Acta sua Latine transtulerint Lipsienses, hactenus ignoro, sed scire percuperem; parum quidem refert sive imprimatur sive non, sufficit semel publice extare ad satisfaciendum fratri; at ideo Actis quoque inserta optarim, ut cum problemata ibidem mihi fuerint proposita, etiam solutiones Acta legenti occurrerent.

Gratum est scire, quod La Hirius, quae de Corporum concursibus habet, ex Mariotti scriptis hauserit; non modo Authorem dissimulat, sed eum bis vel ter citat, tanquam contrarium sententem, ut scilicet plagium tanto scitius tegeret; quis enim suspicari ausit La Hirium a Mariotto didicisse, quem in ea re ab ipso dissentientem dicit? Vitium sane intolerabile in La Hirio non semel animadverti; virorum Doctorum nomina contemptim nimis et incredibili crista, sed dolose subticet, infra suam dignitatem

censens quicquid ab aliis provenit, quando interim vel maxime illorum inventa sibi arrogare affectat.

Dissertationem De Epicycloïdibus nondum vidi, sed aliquid de ipsarum usu ad figuras dentium etiam in ipso Tractatu mechanico*) habet; inter alia constructionem alicujus rotae hoc modo dentatae, omni notabili frictione carentis, quam se ipsum executioni dedisse ait prope Lutetiam, cujus tamen primam inventionem Dno. Des-Argues tribuit. Unde vero figuram dentium ad procurandum motum aequabilem didicerit, altum est silentium. Credebam equidem primo non nisi conjecturando voluisse divinare figuram debere esse Cycloidalem, quia forsan haec ipsi prae alia aptior visa fuerit: etenim, ut modo dixi, Dissertationem de Epicycloïdibus non vidi, neque in Tractatu mechanico demonstrationem addit; postea vero, ut rei certior fierem, figuram debitam ex me ipso quaesivi, atque ex calculo comperi, Cycloidem communem satisfacere, sed illam non solam, namque (quod La Hirius non habet) et protracta, et contracta, idem praestant. Mirabar itaque quis Genius hunc hominem, Calculi nostri aliusve novae methodi omnino rudem et osorem, in cognitionem harum figurarum deduxisset: ast postquam Roemeri inventum esse ex Te cognovi, cesso mirari, et Tecum jam potius miror, qui illi vivo etiamnum et legitimo parenti prolem subducere et pro sua publice obtrudere audeat. Quod Mariotto fecit demortuo, arguit iniquitatem, ast vivum inventi proprii gloria privare velle, ostendit perfrictam hominis frontem et impudentiam haud vulgarem, quasi quod luberet sibi, in alios liceret. Non dubito, Roemerum sua sibi vindicaturum, si haec ad cognitionem sui provenerint; sed ut audio ex Fratre meo juniore, qui illum Hafniae saepius adiit, in rebus Aulicis jam totus est, quibus haud dubie tempus utilius teret, quam plagiario respondendo.

Cum olim Genevae agerem, Dni. Ozanam Geometria Practica forte in manus incidit; quam volvendo, cum reperissem Quadraturam arithmeticam, memini me dixisse ad Dn. Fatio Duillierium, qui praesens erat, me antea hanc progressionem, quanquam sine demonstratione, vidisse in Actis, quae Te auctorem agnosceret: mirari me cur Ozanam aliena sibi ascribere ausus fuisset; me

*) Traité de Méchanique, Paris 1695, p. 368.

enim non dubitare, illum demonstrationem suam a Te ipso prius edoctum fuisse. Sed hic fere Gallorum omnium laudabilis mos est; ego etiam tale quid expertus sum in ipso Marchione Hospitalio (inter nos dictum) qui ante aliquot annos apud Hugenium vanam ex meis captavit gloriolam; rescriveram id quidem paulo post, sed facile ignovi, ita tamen ut videret, me non latere quod Hugenio scripsisset. Nec profecto multo sincerius mecum egit, quando nuperum suum Opusculum vulgavit. Licet in praefatione mihi ut aliis multum debere profiteatur, vaga nimis est haec confessio, nec eo melior, quod Author Diarii Parisini recensendo hoc Opusculum, eam nescio a qua generosa modestia profectam depraedicet; si vere modestus fuisset, imitari debuisset Erasmium Bartholinum candide edicentem se, quae conscripsisset tantum, Principia matheseos universalis a Schotenio accepisse: quippe non majori jure sui dicendus est Author Opusculi, cum totum quantum est, paucis paginis exceptis (Tibi in aures dico et nemini alii) a me partim scriptum, partim in calamum dictatum, partim etiam, postquam Parisios deserluissem, per literas communicatum acceperit: in cujus documentum omnium copiae a me asservantur, et quandocunque libuerit produci possunt; quas etiam ante vulgatum Opusculum nonnulli amici viderunt, et bonam partem descripserunt; et quid multum! habeo literas Hospitalii ad me scriptas, quae testantur, quantum mihi arrogare liceat. Praecipuum quod ibi praestitit, est quod in ordinem digessit et gallico idiomate nitide conscripsit, quae ipsi confuse, modo latine, modo gallice exhibueram. De suo, ut jam dixi, aliud nihil addidit, nisi quod tres quatuorve paginas repleat. Sed nolim quicquam ipsi de hisce referas, quae in fidem arcani communicavi; alias qui jam amicissimus mihi est, eum haud dubie infensissimum haberem.

Pecunia, quam Ordines nostri erogaturi sunt in experimenta, tanta non est, quantam forsan Tibi imaginaris: destinata est summa **1000** vel **1200** florenorum ad plurimum, ad emendum tantum instrumenta communia et ordinaria, quibus non magni quid vel extraordinarii praestiturum polliceor, neque adeo dignum, quod Tibi communicetur. Delectamentum forsan capient ipsi Ordines, si primis vicibus, ut spero, interesse dignentur et spectatores agere; id quod facile majori liberalitati ansam praebere posset.

Diu est quod nihil neque a Dno. Marchione, neque a Dno. Varignonio literarum acceperim, cum tamen uterque mihi debeat. Varignonius discendi cupidus est nec minus docilis, proficit in nostris insigniter, sed unde profecerit, agnoscet ingenue. Laudo hujus Viri mirum candorem et raram modestiam; non certe Gallum esse diceres, adeo alienus est a nationis ingenita ferocitate et fastu; odit ipse vanitatem suorum popularium, qui superciliose super extraneos se attollunt, nostra contra invidos strenue defendit.

Papinus utique distinctione sua subterfugium quaerit: abstrahimus ab insensibilis materiae actione; alium enim non consideramus concursum corporum quam liberum; sufficit ergo nobis, si pro hoc nostras regulas concedat. Non satis capio, cur in corporum concursu celeritates recuperandas molibus reciprocas esse dicas, recuperatas non item; mihi saltem videtur Elementa celeritatem et amissarum et recuperatarum seu recuperandarum (nullam differentiam hic capio) molibus esse reciproce proportionalia; quod utique sequitur est natura vis mortuae. Vale etc.

Groningae d. 8 Febr. 1698.

LXXI.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Mitto ecce quae Dn. Frater Tuus Diario Eruditorum Gallico*) inseri curavit, tametsi suspicer, ea Tibi jam esse visa. Vides quam habuerim gravem causam declinandi receptionem arbitrii, antequam constaret ab utraque parte ad me deferri. Vides enim Dn. Fratrem Tuum aliam rei definiendae rationem proponere. Dn. La Hirii Librum de Epicycloïdibus habeo, sed attente legendi otium non est. Inspiciens obiter observavi passim inter demonstrandum ad infinite parva delabi, atque ita a rigore Veterum deflectere, non male quidem, nisi aliud professus videretur. Hoc enim semel admisso, non erat opus tanto apparatu. Est tamen, fateor, Do-

*) Journal des Savans 1698 Fevr.

ctrina ejus mathematica non vulgaris; nam Conicas meditationes universales Des-Arguesii et Pascalii egregie persecutus est. In Astronomia Observator diligens et in aliis quoquè rebus excutiendis accuratus habetur; et cum delinationibus valeat, perutilem Academiae Scientiarum Regiae operam navat. Contra Dn. Tschirnhausium quaedam recte monuit, vellem tamen usus fuisset majore moderatione. Quemadmodum et ipsum Dn. Tschirnhausium optarem apertius agere, ne dum praeclariora premit, cogatur inferioribus applicare nomina, quorum mensuram non implere subinde deprehenduntur. Ille tamen in Literis ad me suis, ac publicis etiam scriptis, testatur gloriam a se non curari, nihilque eo affectu esse nocentius, quoad scientiarum incrementa, idque nuper quoque repetiit ea occasione quam nunc dicam.

Nempe Dn. Menckenius, qui non libenter aliquid Actis Eruditorum inserit, quod Dno. Tschirnhausio displicere possit, rem eo deduxit, ut is Literas ad me dederit humanissimas, iisque inseruerit responsionem ad nuperum schediasma tuum de Comparatione arcuum parabolicorum, rogans ut Tibi eam communicare velim. Cur autem hanc Tibi respondendi elegerit rationem, duas attingit rationes: unam, quod si qui gloria ducuntur, qualem Te esse appareat, in publicis concertationibus facillime offendunt offenduntur que, tum etiam quod apertissime Tibi ostendere possit, erroneam esse Tuam regulam, atque ita Tua interesse eam non prodire. Nam si cum Tua regula conjungatur id quod jam constat, areas Hyperbolicas, secundum progressionem geometricam linearum assumtas, esse aequales, oriri absolutam quadraturam Hyperbolicae areae. Addit Te non debuisse spernere eam rationem secandi areas, qua ipse sit usus, licet magis remotam, quoniam per ipsam praestetur aliquid aliud magni momenti, nempe ipsius areae quadratura, quoties est possibilis. Hoc si verum est, fatebor ego maxima elogia hanc Dni. Tschirnhausii methodum mereri. Jam deberem Tibi ipsam responsionem Dni. Tschirnhausii communicare, sed cum excerptum tantum ex Epistola sua Tibi mitti jusserit, nec alius commode exscribere recte possit, mihi vero non vacet, differenda in proximas erit haec communicatio.

Miror jamdudum nihil amplius a Dno. Marchione Hospitalio ad nos perscribi; spero nec a valetudine adversa, nec ab aliqua

erga nos animi mutatione silentium hoc oriri. Videtur autem in amicitia ejus inesse aliquid inaequabilitatis, ut nunc incalescere, nunc refrigerari videatur, nulla manifesta causa.

Vellem esset Tibi amicus Parisiensis, per quem discere liceret, quae illic, praesertim apud Academicos Regios Scientiarum aliosque, non in his geometricis tantum, sed et in aliis, geruntur. Nam Dn. Hospitalius, a quo talia subinde perscribi, vel amicum, qui faciat, parari mihi petii, ab eo commercii genere videtur alienior. Ego vero non arcana peto, sed quae Parisiis nota in vulgus. Nescio an per Dn. Varignonium tale aliquid efficere possis, sed ita ut a me non quaesitum videatur, et ut ipse non nimis ostendas cupiditatis. Fortasse tamen et alius extra Academiam satisfaceret liberius.

Si distinctionem inter celeritates recuperatas et recuperandas, qualem feci, attentius consideraris, non inanem reperies. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 25 Martii 1698.

LXXII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Accepi Tuas postremas recte cum Fratris mei admonitione Diario Gallico*) inserta, quae jam antea bis mihi fuerat missa a Dno. Varignonio primum, et deinde a Dno. Marchione Hospitalio. Gratias tamen ago pro cura Tua. Video maxime, Fratrem nolle sese subjicere arbitro, sed aliam rei definiendae, imo in longum producendae rationem quaerere et subterfugia, quod forsan causae suae timeat. Sed non est cur diutius tergiversetur: respondi**) enim me non accepturum, quidquid inposterum replicaturus sit, nisi ipse prius oblatum a me Judicem acceperit, aliumve mihi nominaverit: me namque idem de ipsius solutione posse dicere, quod ille de mea; utri tunc publicum plus fidei haberi debeat,

*) Febr. 1698.
**) Journal des Savans 1698 April.

ipsine, an mihi? Hanc ergo litem dirimendam esse a tertio. Me sustinere etiamnum problema in ea extensione sumtum, in qua Frater proposuit, a me in Diario legitime fuisse solutum; me tamen non negare, ex festinatione irrepsisse leviusculum aliquem errorem, qui autem ortum suum habeat non ex falsitate methodi, sed unice ex applicatione non rite instituta, praeterquam quod ille lapsus non tangat problema, prout illud a Fratre specialiter propositum sit (hoc enim, ut jam monui, plenarie solutum esse) sed tantum quatenus ego ipse universaliter conceptum illud exhibuerim. Quicquid sit, hunc lapsum paucis verbis emendari posse, et revera emendationem in responsione adjeci, quod idem feci ad calcem praesentis schediasmatis, ut in Actis quoque tanquam error typographicus cum caeteris corrigatur. Unde colligi posse, methodum ipsam bonam esse, licet in applicatione ad omnes circumstantias non satis attenderim et quidem directam invenerim (quod Tibi, ut puto, nondum significavi) quae mihi eandem solutionem, quam altera illa indirecta, qua ab initio usus fueram, suppeditaverit: mirumque consensum non solum in hisce sed etiam in aliis speculationibus detexerit. Me praeterea in antecessum posse divinare, quid Fratri occasionem dederit credendi se divinaturum Analysin meam, scilicet quod in solutione mentionem fecerim de curvatura lintei a fluido expansi, unde illum conjecturasse me in Analysi usum fuisse consideratione maximi descensus Centri gravitatis in fluidis stagnantibus: sed ipsum falli; me enim, praeter hanc viam, quae dextre adhibita etiam eo porrigatur, possidere etiam directam, quam ille nunquam divinaturus sit: me itaque, ut Fratrem decet, Fratris commodis consulentem ipsi suadere ut decertationem oblatam revocet etc. Sed haec amplius videbis in ipsa responsione impressa.

De Dn. La Hirio nihil est quod dicam: valeat ejus Doctrina mathematica non vulgaris, per me licet, modo aliorum quoque apud eum valeret, nec tantopere sperneret, quae ab aliis proveniunt, si displicent, nec statim sibi arrogaret, quae placent. Nosti Tu hominem, et ego novi; manet alta mente repostum, quod olim coram ab ipsius rusticitate expertus sum. Laudandus est, fateor, in plurimis, sed in plurimis quoque vituperandus. Subintelligo ex Tuis literis, licet id non exprimas, Dn. Menckenium apud Te questum esse de meis nimium rigidis (ut vocat) annotatiunculis in insulsam illius demonstrationem Lineae tautochronae,

quas imprimere gravatur, nescio quo praetextu, quod, ut ait, Acta non imprimantur ad viros doctos perstringendos, quasi id nunquam factum fuisset in ipsis his Actis, sumamus exemplum ipsissimi nostri Tschirnhausii olim vehementer adeo debacchantis in Dn. Craigium: quasi jam non liceret errores virorum doctorum detegere, praesertim si id fiat intra modestiae limites nominique auctoris parcatur, ut a me factum puto.

Quod Dn. Tschirnhausium attinet, adhuc magis miror, quod Dn. Menckenius schediasma meum de Comparatione arcuum Parabolicorum Actis inserere noluerit, cum tamen ibi usus fuerim verbis humanissimis et modestissimis, quibus efficaciora vix invenire potuissem ad persuadendum, quanto apud me sit in pretio. Si talia displicent, nihil est quod inposterum placebit, nihilque quod imprimetur. Non sane verborum meorum acerbitas (nam nulla fuit) bonum nostrum Tschirnhausium urit, sed res ipsa, quae ipsius errores detegit, ipsi est invisa. Hoc in ipso persaepe animadverti, quod satis quidem habeat ingenii ad perspiciendum, ubi erraverit, sed non satis candoris ad errorem agnoscendum et fatendum. Dicit gloriam a se non curari, me vero ea maximé duci; scilicet eam non curat, at affectat adeo et anhelat, ut etiam Fortunae ipsi suas opes invidere videatur, et aegre ferat, si alios praeter ipsum earum participes faciat. Quid quaeso in Geometricis facimus, quid invenimus, quod sibi non antea cognitum dixerit, vel simile aliquid praesenserit, vel si problema sit sibi insolubile, ambiguis tamen verbis Lectorem in dubio relinquat, an solverit nec ne; ut ante annum ab eo factum est in Actis, cum ageret de curva brachystochrona, ubi non quidem ausus est diserte dicere se solvisse, quia revera non solvit, nec tamen etiam se non solvisse dicere voluit, ut saltem imperiti ambiguo verborum sensu deciperentur. Sed cur ita fecit? haud dubie ut non omnino expers esset gloriae hujus inventi, quam ab aliis reportari solam perferre non potuit: eat jam et persuadeat cui volet, se non curare gloriam, cum tamen laureolam in mustaceo quaerat. Dicit porro se posse apertissime mihi ostendere, meam regulam esse erroneam, atque ita mea interesse eam non prodire: terriculamenta sunt, quibus pueros deterreat; mihi vero permittat ut edam, aut ipso invito prodibit. Ille qui vix unquam veritatem puram sine errore admixto exhibuit, ille qui quicquid hactenus in lucem edidit, paralogismis fere nunquam caruit, ille iam mihi ostenderit errorem, mihi qui solitus sum nihil in lucem protrudere, nisi prius mature et accurate singula pensitaverim: Quis tulerit Gracchos de seditione querentes? Ast facile judico, cur schediasma meum supprimendum suadeat, ne scilicet sua regula pro comparandis arcubus Parabolicis*), quam ipse pro falsa agnovit, tanquam inutili rejecta, jam ab alio meliorem editam approbare cogatur, imitando vulpem in fabula quae, nescio quo infortunio, amissa cauda, sociis persuadere conabatur, ut pariter caudas amputarent, tanquam impedimentum inutile et indecorum. En hic alterum schediasma**), quo fundamentum meae regulae explico, quod rogo ut paulo attentius legas; judicabis dein, quo jure Dn. Tschirnhausius meam regulam falsitatis accuset, aut quam aperte, ut jactat, ostendere mihi possit, eam esse erroneam. Lectum Dno. Menckenio, si placet, transmitte, cum literis adjectis; non dubito quin illud jam sine scrupulo sit Actis inserturus, et vel ideo, quia nulla ibi fit mentio Dni. Tschirnhausii. Quantum ad ejus rationem secandi areas, sprevi eam, quia remota est et magno conatu parum praestat. Judicare utique debui ex iis, quae vidi. Si praeterea aliquid aliud in se habet, nempe, ut jactat, modum determinandi areae quadraturam, quoties est possibilis, id ego non somniavi: ostendat ergo; tunc demum laudabo ejus methodum: ast vereor, ne hic iterum pro more suo solito plus sibi suaeque methodo ascribat, quam praestare possit. Si nudis promissis mundus decipitur, sane nemo ei eruditione cedet; promittit usque et antiqua promissa novis continue cumulando ex oculis nostris quasi subducit, ne scilicet eorum commonefieri possit: at vero sciat se ipsum maxime decipere, quando ingenuos quoque viros, qui inani jactantia nec pasci nec pascere solent, frivolis hujusmodi promissis contentos esse putat, multum enim ab existimatione ejus decedit, quam alias conceperunt de ejus acumine ingenii, aliisque animi dotibus.

Dn. Marchio Hospitalius nuper quidem, sed vix tribus qua-

*) Sie findet sich in der Abhandlung: Nova et singularis Geometriae promotio circa dimensiones quantitatum curvarum, Act. Erudit. 1695.

**) Investigatio Algebraica arcuum parabolicorum assignatam inter se rationem habentium etc. Act. Erudit. 1698.

tuorve lineis ad me scripsit, nimirum occasione sumta mittendi Fratris schedulam; nihil plane praeterea de rebus mathematicis aliisve attingens, ut olim facere solebat. Ego quidem hoc non miror, qui novi Gallorum morem tunc tantum adulantium, quamdiu opera nostra indigent. Spero quam optime desiderio Tuo satisfieri posse per Dn. Varignonium, qui mihi multis nominibus obstrictus est, et se etiam obstrictum agnoscit; nec obstat quod ipse sit membrum Academiae, quin potius tanto commodius quod petis, efficere poterit. Vir est officiosus et aperti cordis; faciet, si potest; si non potest, rationem dicet: prima occasione hac super re ipsi scribam. Vale etc.

Groningae d. 16 Aprilis 1698.

P. S. Jam ab aliquo tempore Dn. Bellavallius communicavit mihi aliquot propositiones Parisiis sibi transmissas, quibus auctor jactat se invenisse quadraturam circuli; et rogat Bellavallius, ut eos etiam Tibi communicem, sed puto Tibi jam esse visas. Ego quidem pro deliriis habeo indignis quae audiantur.

LXXIII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas Tuas et perelegans Schediasma pro secando arcu Parabolae ad Dominum Menckenium misi, et hortatus sum, ut tuo meoque periculo edat, quando nihil in eo est, quod Dnum. Tschirnhausium nostrum tangat. Quantum mediocri attentione judicare licuit, et recte et pulchre procedis.

Hujus autem objectionem jam Tibi mitto, ex literis ad me excerptam. Misissem citius, nisi oblitus fuissem literas ejus mecum deferre Guelferbytum, ubi ferias et unam alteramve septimanam animi gratia exegi. Nunc reversus officio satisfacio. Examinandi nec otium nec voluntas fuit, praesertim cum alias a Tuis notas assumens, duplicaverit laborem comparationem instituere volenti, quam ipsum absolvere maluissem, ut facile suspicer aliquid ipsum fugisse, sive in calculo, sive in calculi applicatione, cum id ipsi saepe evenire ob distractiones jam sim expertus, et fieri potest, ut quas ille diversas habet aequationes, quarum ope arcum incognitum rectificari debere judicat, coincidant in extremo et in identicum aliquid desinant, ut incognita arcum designans postremo, praeter opinionem, evanescat, quod in talibus etiam saepe sum expertus, cum singulares methodos excogitatas in rem contulissem, quibus quadraturae particulares Hyperbolae, vel partium Circuli haberi posse videbatur.

Caeterum de Dni. La Hirii modo agendi secum coram parum humano parumque etiam urbano, etiam Dn. Tschirnhausius olim apud me querebatur. Ego Dmn. La Hirium de facie non novi, sed, quod postea didici, inscius ei obstaculum dedi, nam cum diu id fuisset actum ab ejus amicis, ut in Academiam Scientiarum Regiam reciperetur, me demum a Duce Brunswicensi Serenissimo Johanne Friderico in Germaniam evocato, res confici potuit, quod antea de me retinendo ageretur, eo autem tunc res ob bellum loco essent, ut ipsum pariter et me vocare Colberto non placeret. Ego vero libens fateor, Virum, qualis ipse est, industrium in observando atque etiam in delineando utiliorem fuisse ad solitos Academiae Regiae labores, quam me, qui in varia diffundor et aptior sum ad consulendum, quam ad laborandum, quem vereor ne ipsi dicturi fuissent hominem ignava opera, philosopha sententia. Ita fata utrique nostrum recte prospexere, praesertim cum ego, non minus quam Hugenius, mutationem postea secutam, sublato Nannetensi Edicto interdictaque Religionis libertate, haud dubie fuissem discessu praeventurus.

Caeterum nescio quomodo literae in Gallia declinant, nec mortuis Viris egregiis alii pares succedunt. Sed meliora jam spero studio Abbatis Bignonii, qui Pontchartrainio est ex sorore nepos, et res Academiae Scientiarum Regiae curat. Eum enim puto esse simul bene animatum et intelligentem. In Dno. Marchione Hospitalio aliquid inaequalitatis observo, quod valetudini ejus, an genio adscribendum sit nescio. Vides opinor, quam recte consilio meo usus suppresseris apud ipsum illam nuperam meam tangentium calculi promotionem, cujus quam late pateat usus ipse observasti. Et danda opera est, ut ne suspicetur quidem tale aliquid nobis esse; sed nescio quas alias potius artes indirectas a nobis ad similia conficienda adhiberi arbitretur; ita enim non tam facile ipsi in mentem veniet methodus nostra, quanquam ipsa per se satis sit abstrusa.

Cum credibile sit, relationem inter areas ejusdem curvae, in

Conicis coeptam, longius progredi certa serie in altioribus curvis, optandum esset lucem aliquam nobis in hoc genere accendi. Id si posset Dn. Tschirnhausen, faceret operae pretium; nunc quae promittit de sectionibus, quae ubi non succedant, impossibilis sit quadratura, vereor ut sit praestiturus; neque enim satis ea in re video connexionis.

Singulari nos beneficio obstringet Varignonius, si quae in Gallia per varias Matheseos partes geruntur, significare subinde Tibi velit, ut per Te ad me porro eorum notitia perveniat. Grata mihi erit via Tua directa, pariter et indirecta, omnisque adeo Analysis pro Problematibus Fraternis. Vale.

Dabam Hanoverae 15 Martii 1698.

Beilage.

Aus Tschirnhauss' Brief an Leibniz, d. 8. März 1698.

Ich habe bey vergangener Newen Jahres Messe in Leipzig bereits den Modum des Hrn. Bernoulli gesehen, die Arcus Parabolicos zu compariren; nun hette zwar ex tempore gleich darauff antworten können, obschon mediis Aulae occupationibus et diverticulis damahl abgehalten zu sein schiene; doch nicht praecipitanter zu verfahren, so habe erwartet, bies zu meinem ordinairen otio vor die studia gelanget. Da annoch gleicher gedanken bin, das nehmlich vorerst dessen inventum, die Arcus Parabolicos zu compariren, absolute falsum sey, und dan dass Er mir unterschiedene Sachen affingirt, welche mir niehmahls in Sinn gekommen. Das erste wihl ich so klar darthun, dass es niemand wird leugnen können, der nur aliqualem cognitionem in hisce studiis hatt. Sit (fig. 124) CFILN hyperbola aequilatera, cujus Asymptoton AM angulum CAO bifariam dividens, dupla AC tanquam latere recto describatur Parabola ARSTV. Notum est vel ab Heuratii tempore rectangulum ex recta CA in curvam AS aequari semper spatio Hyperbolico CAQ. Secundo ist auch bekand, si duo spatia sint hyperbolica FDGI et LKMN hac ratione in se posita, ut AD sit ad AG sic AK ad quartam proportionalem AM, spatia haec fore aequalia, welches auch gantz leicht per Methodum Indivisibilium Cavalerii zu demonstriren. Wir wollen nun setzen, dass der Arcus Parabolicus RS sey aequalis x, und der Arcus TV sey ex. gr. duplus prioris; sit $AB = a = BC$, $AD = b$,

$AG \approx c$, $AK \approx f$, $AM \approx g$, $\sqrt{area} \approx k$. Dieweilen nun spatium ex AC in RS und TV aequalia sind den spatiis hyperbolicis PFIQ und TLNO, und ex his spatiis gantz leicht zu deriviren die spatia FDGI und LKMN, ponamus haec jam aequalia et obtinebitur aequatio talis $f^4 \approx \frac{bbceff + a^4ff}{cc} + \frac{akbbccffx}{c^4 - bbcc} - \frac{a^4bb}{cc}$, in welcher ad determinandam f nihil obstat, quam quantitas x seu Arcus Parabolici mensura. Aber diesem ist leicht zu helffen, nam quia ad determinandas AN et AO a Dn. Bernoullio aequatio inventa, ubi Arcus Parabolicus non comprehenditur, ope duarum harum aequationum non solum determinabitur Arcus duplus, sed etiam absoluta mensura Arcus Parabolici dati (quia duae aequationes, Joh. Bernoullii et haec mea, et duae hic incognitae sunt Arcus $RS \approx x$ et $AK \approx f$) adeoque certo hinc sequitur vel spatii Hyperbolici mensura hactenus desiderata, vel quod Methodus, quam nobis exhibuit, falsa sit, et quia ipse prius negat (quadraturam nimirum hyperbolae) hinc impetrari, suspicor calculi lapsum Authori inanimadversum alicubi haerere, prout expertissimo circa similia facile accidere potest. Und kan diese Methode (so ich bieshero gebraugt) gantz leicht durch einen generalem Calculum verificirt werden, dass man multiplicire datum arcum wie man wihl, niehmahls das intentum Geometrice kan obtiniret werden, ohne die quadraturam Hyperbolae, ausser wan Arcus aequales desideriret werden, aber alsdan kombt Arcus ab altera Parabolae parte existens herauss, welches wohl kein novum inventum zu nennen eo respectu, dass es nicht bieshero bekand, aber doch novum ea ratione ist, wen man demonstriren kan, dass ohne die quadraturam hyperbolae dergleichen nicht zu erhalten, wie vorietzo gethan. Wiewohl einen gantz andern weg weiss, solam naturam curvae Parabolicae considerando, ohne einzige reflexion auff die hyperbolam zu haben, da den eben diess conclusum herauss kombt, und ea ratione glaube dass es noch weniger unrecht als aliquid novi vormahls erwähnet habe. Wie den Meine Methodus universalis non ejusdem saltem curvae, sed qua quarumvis diversarum curvarum inter se comparandos arcus non absolute kan geschehen, wie mir affingiret wird; sondern nichts anderes anweiset, als wieweit es möglich oder unmöglich, wie der Hr. Bernoulli ingleichen vorietzo in der Parabola intendiret hatt zu thun, obschon infelici successu.

Ferner habe niehmahlen nirgends wo gesaget, dass secare curvam rectificationis ignotae et secare spatium curvilineum quadraturae ignotae, ejusdem difficultatis res sit; sehe also nicht, auss was vor ursachen mir dergleichen affingiret wird. Wie mich endlich auch nicht wenig gewundert, das der Hr. Bernoulli mir die hierauff folgenden objectiones macht, dan ob zwar schon von des Cavalerii Zeiten an das bekandt ist, was Er hierbey saget, dass man nehmlich ex. gr. Ellipsin per infinitas Ellipses, und so alle spatia curvae per curvas ejusdem generis dieselbige in data ratione dividiren kan, ob auch gleich einer, der bloss den titulum meines inventi ansehe, auff diese gedanken gerathen kondte, so dächte doch nicht, dass wen Er die sache selber ferner deduciret sehe, die curvas so produciret, und da besonders des Hrn. Gregorii Scoti 62 propos. seiner Geometriae Universalis citiret, dass sage ich iemand mir dies objiciren kondte, den hierdurch werden nicht curvae ejusdem gradus gefunden, sondern diversae naturae, die aber sehr nahe beykommen, wie dan in der Hyperbola und Circulo curvae können gegeben werden, deren indeterminatarum dimensio saltem ad 3 dimensiones ascendit. Aber hierauff antwortet der Hr. Bernoulli, se non videre quid me permoverit ad indagandum per aliena et remota, quod in ipso statim vestibulo nulli non obvium; dieweilen aber durch meine Methode, die spatia in data ratione zu seciren, allezeit zugleich die quadratura spatii, wen es möglich, herauss kombt, welches wie bekand, durch den vorigen weg nicht erhalten wird, so versiehet man leicht, was mich diess zu indagiren bewogen, und dass dieses non cuilibet obvium sey, und also noch wohl Eruditi Orbis conspectum meritiret. De Circulo habe dergleichen auch nirgendswo gesagt: dass solche per lineas rectas in data ratione seciren kan, und also können die letztern worte auff mich nicht gerichtet sein, wie zwar alle Lectores nicht anders denken werden. Dan auss meiner Methode klar folget, dass die allergeringste Curva geometrica, dadurch wir solches thun können, ad tertium gradum gehöre, und also solches unmöglich sey, welches ein fein specimen, quanti momenti haec Methodus sey, zumahlen es cuivis curvae kan appliciret werden.

Dieses wehre also, was Ich, wie gesagt, den Actis zu inseriren vorhette, wihl aber solches zu dero überlegung vorhero communiciren, und aus dero antwort sehen, was hierbey zu thun sein wird. Was die cycloiden anlangt, ist Demselbigen und mir lange bekand gewesen, wie die singularis proprietas Hugenii gar leicht zu demonstriren, wie auch Pardies publice gethan, und in Actis Anglicanis längst dergleichen etwas publiciret.

LXXIV.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quamvis non opus sit defendere modum meum secandi arcus parabolicos contra objectionem Tschirnhausianam, quippe quem vidisti et approbasti, percurram tamen breviter principaliora hujus objectionis capita, inibique sequentia notabo. Initio habentur haec verba: „Hette zwar ex tempore darauff (auff diesen modum) antworten können, obschon mediis aulae occupationibus et diverticulis damahl abgehalten zu seyn schiene; doch nicht praecipitanter zu verfahren, so habe erwartet biss zu meinem ordinairen otio vor die studia gelanget; da annoch gleicher gedanken bin, dass nämlich dieses inventum die arcus parabolicos zu compariren absolute falsum seye." Ergo fatetur se non praecipitanter egisse, sed bono cum otio mature omnibus perpensis, ut putabat, judicium tulisse: hinc judica, si seriae etiam et diuturnae ipsius meditationes paralogismis adeo crassis non carent, quid de caeteris promissis quae nobis facit sit tenendum, quid de universali methodo quam jactat curvam quamvis secandi, quid item de illa altera possibilitatem vel impossibilitatem quadraturarum determinandi: vanitas vanitatum! Pergit „Das erste (dass nämlich dieses inventum falsch seye will ich so klar darthun, dass es niemand könne läugnen, der nur aliqualem cognitionem hisce studiis hatt." Scilicet nemo negabit, qui aliqualem tantum cognitionem in hisce studiis habet, quia peritiores etiam rem obscure satis ab ipso expositam, quando non intelligunt, negare non audent, sed viso demum novo meo schediasmate negabunt. Calculum quem jam init, ut Tibi, ita nec mihi, animus fuit ob prolixitatem examinare, praesertim cum etiam Tecum divinare nequeam, qualem valorem per literam k intelligat. Examinavi tantum modum procedendi, ubi oppido paralogismum detexi evidentem adeo, ut mirer Tanto Viro et vel leviter attendenti, nedum serio meditanti, excidere potuisse. Supponit enim

ad quaerendum arcum TV duplum ipsius RS, debere necessario spatium hyperbolicum LKMN, correspondens arcui TV, aequari spatio alteri hyperbolico FDGI, correspondenti arcui RS. At vero unde haec necessitas? Quid, quaeso, me cogit ad supponendum potius LKMN = simplici FDGI, quam cuivis alii multiplici ejusdem? Adeoque hoc unicum omnibus fidiculis deducere poterit Dn. Tschirnhausius ex sua objectione, quod nempe sine quadratura hyperbolae vel rectificatione parabolae inveniri non possit arcus TV, qui sit duplus ipsius RS, et simul ut spat. hyperbol. LKMN sit aequale spat. hyperb. FDGI. Exinde vero, quod secundum hanc conditionem ex superfluo adjectam comparatio arcuum sit impossibilis, male concludit, illam esse absolute impossibilem. Peccavit ergo (ut Logici dicunt) argumentando a dicto secundum quid ad dictum simpliciter, et quidem, meo judicio, non minus absurde, ac si quis ex eo, quod Dn. Tschirnhausius jam non Romae existit, inferre vellet illum plane non existere. Ex dictis sequitur frustra sperari rectificationem parabolae ex bonitate methodi meae, quia illam conditionem LKMN = FDGI, praeter necessitatem a Dno. T. adjectam, non supponit; sed contra potius supponit LKMN esse duplum FDGI, et generaliter LKMN esse totuplum ipsius FDGI, quotuplus arcus TV desideratur ipsius RS. Et simul ex methodo mea patet, cur haec sola suppositio apta sit ad praestandum quaesitum, haec enim sola facit, ut x, quam Dn. T. pro arcu RS assumit, in aequatione finali evanescat, atque adeo valor ipsius f seu quaesitae AK proveniet in meris lineis rectis, loco quod per omnem aliam suppositionem x in aequatione finali maneat adeoque sine rectificatione hujus arcus x valor f obtineri non possit.

Non abs re fore puto, si Dn. Tschirnhausio hanc meam ad ipsius paralogismum responsionem communicaveris, ut videat quanto magis e re ipsius fuerit, quam e mea, errorem suum non in lucem emissé, et quanto majori jure ego ipsi consulere potuissem suppressionem ejus, quam ille mihi consuluerit, ne methodum meam publicari paterer; atque ut discat, posthac modestius judicare de propriis, et aequius de alienis, nec statim manifestae falsitatis arguere, quae verissima sunt. Sed pergo ad reliqua objectionis illius respondere:

Misere itaque hallucinatur, quando ait: „Man multiplicire datum arcum wie man wihl, so kan niemahls das intentum Geometrice obtiniret werden", ostendi enim semper obtineri posse;

sed porro inquit: „ausser wan arcus aequales desideriret werden, welches wohl kein novum inventum zu nennen eo respectu, dass es nicht bisshero bekannt, aber doch novum ea ratione ist, wan man demonstriren kan, dass ohne die quadraturam hyperbolae dergleichen nicht zu erhalten, wie vorietzo gethan.“ Oh! elegans inventum, quo scimus, duos arcus in parabola sibi mutuo e regione oppositos esse inter se aequales, sed elegantius longe, quod demonstraverit (sc.) arcus in ratione inaequalitatis absque quadratura hyperbolae obtineri non posse. En duo inventa, mehercle cedro digna! Immediate subjungit: „Wiewohl einen gantz andern weg weiss, solam naturam curvae parabolicae considerando, ohne einzige reflexion auff die hyperbolam zu haben, da dan eben diess conclusum herausskombt.“ Qualisnam sit haec altera via, equidem scire non valde gestio; sufficit dixisse, idem per illam conclusum emergere, ut quanti sit aestimanda, licet nobis non visa, tuto tamen concludere possimus. Verba quae sequuntur, cum nulla constructione inter se cohaereant, ut Tu, ita nec ego, probe intelligere possum; videtur tamen D. T. innuere velle, se possidere universalem methodum non hujus vel alterius saltem curvae, sed omnium curvarum portiones inter se comparandi, quotiescunque possibile sit; sed vereor, ne universalis haec methodus cum superiori speciali pari passu ambulet. Ridiculum hic est, quod queritur sibi a me afflictum esse, quasi dixisset se habere methodum curvae cujusque portiones absolute comparandi, cum tamen ipse idem et ibidem persuadere conetur, se scilicet per suam methodum determinare posse, quousque illa comparatio sit possibilis necne („sondern nichts anderes anweiset, als wie weit es möglich oder unmöglich“). Quid? dicere habere methodum rem praestandi quotiescunque res possibilis est, et si impossibilis, impossibilitatem demonstrandi: quid hoc aliud est, quam dicere, se habere methodum absolutam et perfectam? Quis enim unquam aliquid impossibile exigit? Rideo, quae modo citatis subjungit: „Wie der Hr. Bernoulli ingleichen vorietzo in der parabola intendiret hatt zu thun, obschon infelici successu.“ Festucam in oculo meo quaerens, trabem in proprio non animadvertit. Porro dicit: „Ferner habe niemahls nirgendswo gesagt, dass secare curvam rectificationis ignotae et secare spatium curvilineum quadraturae ignotae, ejusdem difficultatis res sit; sehe also nicht, auss was vor ursache mir dergleichen affingirt wird.“ Miror profecto, quod dicat me hoc

sibi affinxisse, an non multa in discursu, quae incidenter obveniunt, memoramus, ea tamen non statim alteri, cum quo nobis res est, affricamus? fateor quidem me dixisse, illa duo non esse ejusdem difficultatis res, sed nego, quod dixerim D. T. contrarium affirmasse. Quod autem D. T. male habeat, quod vilipenderim ipsius methodum secandi spatia curvilinea, dum ostendi nihil esse omnino novi, sed esse rem perfacilem et Lippis et Tonsoribus notam, eamque infinitis modis absolvi posse; sibi imputet, si non pro merito de illa judicavi, ostendat enim, quomodo per illam simul quamvis quadraturam, si possibilis eruere, vel si impossibilis, impossibilitatem ejus exhibere possit; tunc pluris aestimabo; sin minus, meliori jure de ea dicere possum, E r u d i t i O r b i s c o n s p e c t u m n o n m e r e r i, quam ipse iisdem his verbis de curva mea potestates vel rectangula, inter segmenta rectarum e puncto communi eductarum faciente aequalia, contemtum suum manifestaverit in Actis m. Maj. 1697; quod tamen inventum et Tibi et aliis defaecatioris judicii non parvi momenti videbatur.

Tandem ait: „de Circulo habe dergleichen auch nirgendswo gesagt, dass solchen per lineas rectas in data ratione seciren kan“: neque ego dixi illum dixisse; sed hoc ipsi proposui, tanquam quod foret alicujus ponderis, si per suam methodum solvere posset; alias nihil novi facturus, si non per rectas, sed per curvas circuli segmentum secaret.

Claudunt objectionem haec verba: „Was die Cyloidem anlangt, ist demselben und mir lange bekandt gewesen, wie die singularis proprietas Hugenii gar leicht zu demonstriren, wie auch Pardies publice gethan und in Actis Anglicanis längst dergleichen etwass publiciret.“ Sed scire velim Dn. Tschirnhausium me meam demonstrationem non voluisse venditare tanquam quid singulare vel difficile, sed contra potius ut, cum facillima sit, ostenderem La Hirii lapsum in re facili tanto turpiorem esse. Interim, si volet meam demonstrationem comparare cum illa quam Pardies publicavit, pessime agit, nullam enim vidi obscuriorem, prolixiorem simul et taediosiorem demonstrationem, quam Pardiesianam, loco quod mea tribus quasi verbis absolvitur. Quid in Actis Anglicanis hac de re prodierit, nunquam vidi.

Dn. Marchio Hospitalius suspicatur utique novam nos possidere Calculi promotionem, idque suspicandi ansam habuit ex eo, quod ipsi dixerim non problemata illa, quae pronuper in Diario

Gallico proposui, etiam pro curvis dissimilibus et quidem generaliter solvere posse. Ex literis ejus satis colligo, quod haec ipsi salivam moverint, non tamen petere audet; ego vero dissimulo, quasi non perciperem quo collimaret.

Cum non suppetat tempus excerpendi, en ipsas Literas Varignonii cum adjunctis schedulis. Literas remittes, reliquis non indigeo. Penetrare non possum, qualem frater meus in solutionibus meis cavillandi causam sit daturus: video enim prout loquitur jamjam se praeparare ad cavillandum, ego quidem certitudine et evidentia solutionum mearum fretus, confirmor insuper quod illas consecutus fuerim diversissimis methodis, directa et indirecta; quemadmodum non dubito, quin Tu quoque illas pronuntiaturus sis legitimas, ubi methodos ipsas communicavero, quod hac vice fecissem, si illas jam conscriptas haberem, fiet autem proxima scribendi occasione. Varignonianorum communicationem differe nolim.

An relatio inter areas ejusdem curvae in Conicis coepta longius progrediatur in altioribus curvis, nondum mihi videre contigit. Interim modus meus comparandi arcus parabolicos etiam ad alias curvas extenditur, exempli gratia, ad parabolam cubico-biquadraticam, $ax^3 = y^4$. Notavi praeterea curiosam proprietatem circa hanc parabolam $ax^3 = y^4$, et parabolam communem $ax = yy$: nempe neutra quidem existente rectificabili, possunt tamen simul sumptae rectificari. Optarem, ut aliquis modum generalem traderet ad datam curvam algebraicam irrectificabilem inveniendi aliam curvam algebraicam, quae simul rectificari possent; habeo quidem talem modum, qui in plurimis curvis succedit, quemque si Dn. Tschirnhausius haberet, statim pro universali depraedicaret; ego vero nonnisi specialem illum agnosco. Denique habeo modum omnes Parabolas et Hyperbolas cujuscunque gradus, ut et innumeras alias curvas algebraicas, transformandi in alias alterius generis curvas algebraicas ejusdem cum ipsis longitudinis, nec non reducendi quamplurimas quadraturas impossibiles ad extensionem curvarum algebraicarum. Sed pro his aliisve similibus desiderarem methodum universalem. Vale etc.

Groningae d. 31 Maji 1698.

LXXV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Mirum est Dn. Tschirnhausium in talem paralogismum incidere potuisse, qualem indicas. Multi spernunt vulgarem Logicam, et tamen plerumque paralogismi committuntur peccando in praecepta Logicorum. Faxo ut de responsione tua certior fiat, tametsi ex schediasmate tuo novissimo (siquidem id Dn. Menckenius, ut spero, edet) ipse satis errorem suum sit percepturus. Vellem etiam agnosceret candide, necdum de eo despero.

Gratias ago pro communicatione Varignonianae Epistolae, quam statim remitto. Desiderem describi nonnihil distinctius, saltem verbis (si figura commode non potest) fundamentum machinulae, qua artifex quidem aestimare se posse putat, quantum ex dolio sit emissum*). Mihi haec scribenti modus aliquis in mentem venit, sed oportet ut instrumentum in dolium immittatur initio, cum liquorem suum accepit, et ab eo tempore ibi haereat. Nempe pondere liquoris instrumentum aut in eo contentus aër comprimetur; liquoris autem parte detracta, laxabit se rursus instrumentum. Quod si artificio tali constructum sit, ut tam progressus, quam regressus distinctim animadverti possit, ope forte dentium singulariter accommodatorum; non turbabitur aestimatio, etiam reimmissione, dicique poterit, quantum ablatum, quantum redditum ponderis. Gravitas tamen specifica liquoris hinc agnosci nequit, sed mutatio tantum ponderis columnarum. Hactenus ergo praestari desideratum potest, sed nescio an magno fructu, cum etiam in vasis amplioribus non sit notabilis variatio altitudinis, multo licet liquore exhausto. Alium usum habere posset talis machinula, fortasse pro barometro portatili, quale olim animo concepi; nam integra nostra athmosphaera dolii instar se habet. Volebam autem adhiberi folliculum clausum, qui et comprimeretur et dilataret sese pro pondere aëris aucto vel diminuto. Nomen etiam horologiarii illius Galli discere non ingratum erit.

---

*) J'oublois de vous dire qu'un horloger de cette ville a trouvé une machine pour voir si l'on a tiré du vin d'un tonneau et combien à peu près, quand même on l'auroit rempli. Aus dem Briefe Varignon's an Joh. Bernoulli, datirt Paris 27 May 1698.

Interroga, quaeso, Dominum Varignonium de progressu Astronomiae apud ipsos, et praesertim quousque producta sit methodus calculandi Eclipses, et an Dn. La Hirius suas Tabulas absolverit; et quid sentiatur de lineis, quas Dn. Cassinus voluit substituere Ellipsibus Keplerianis, quarum tamen novarum linearum causas Physico-Mechanicas dare difficile erit, quas nobis utique facilius praebent Ellipses.

Memini et Hugenium olim demonstrationem Tautochronismi Cycloïdis Pardiesianam non magnifacere. Ea quae in Transactionibus Anglicanis olim a me visa potius est quam examinata, Vice-Comitis Brounkeri erat, de qua judicat Hugenius, ob nimiam brevitatem supponi quaedam, nec satis absolvi demonstrationem, etsi insint argumenta, unde absolvi ipsa possit. Tua ratio demonstrandi mihi videtur perelegans et commendanda imprimis.

Quaeri etiam ex Dno. Varignonio utile erit, quo sit loco emendatio Geographiae, et annon aliquis responderit, aut responsurus sit Vallemontio (Autori libri de virgula divinatoria) qui nuper in Elementis Historiae agens de Geographia, Isaacique Vossii secutus sententias, impugnat novam Geographiam, et praesertim correctiones, quas dedit Academia Scientiarum Regia, male quidem, cum illo, improbans usum observationis Eclipsium Lunae aut Satellitum Jovis pro constituendis locorum longitudinibus, alia tamen fortasse monens notatu digna. Nam Vossius, quem sequitur, erat in Geographia valde versatus, habueratque in manu itineraria navigationum Societatis Indicae Batavae, et varia etiam Hodoeporica aut Diaria Itinerum Anglicana nondum edita, quemadmodum mihi Boylius olim confirmavit. Accepi etiam Samsonium, doctum apud Gallos Geographum, Tabulis ex Academiae Regiae sententia concinnatis contradicere. Ego non dubito praeferre judicium Academiae in rebus primariis; puto tamen inventorum Vossii et Samsonii aliquam fortasse rationem alicubi habendam. Cassinus alicubi dixit, Regem misisse Astronomos Alexandriam, ut observationes illic instituant comparandas cum observationibus Ptolemaei. Scire operae pretium esset, quid illi attulerint.

Dn. Abbas Bignonius collegium quoddam institui curavit, cujus membra occupantur descriptionibus variorum opificiorum, quod ego institutum perutile esse judico, et nosse velim, quem habuerit progressum. Vel sola descriptio manuficiorum ad rem vestia-

riam pertinentium rem mechanicam et mathematicam plurimum augeret.

Conscripserat olim Dn. Mariottus libellum mechanicum in usum Ingeniariorum, in quo proponebat experimenta ad praxin utilia, v. g. quantum pondus sustineant tigna, scalae, saxa, aliaque id genus. Libellus iste nunquam fuit editus, quod Autor morte praeventus esset; non dubito tamen, quin in nonnullorum versetur manibus. Si posset impetrari, ego libenter sumptus persolverem.

Optime facis et ex condicto, quod novam differentiandi rationem per summas differentiuncularum premis; quod si forte urgeat Dn. Marchio Hospitalius, poteris eum remittere ad me. Miror eum tam inaequali ratione cum amicis agere, ut nunc magni eos facere, nunc eorum oblivisci videatur. Dn. Fratrem Tuum praestat ad alia potius quaerenda adhuc flecti; nam si detegeret, fortasse statim in lucem protruderet, ut fecit in Methodo directa pro lineis maximum praestantibus, quam alias fortasse nondum nosset Dn. Hospitalius.

In Dno. Varignonio laudandum est, quod agnoscere videtur quantum Tibi debeat, officiisque id testari pergit: dispicies tamen, an non plurimum ad hoc conferat ipsa ejus in hac nova methodo mediocritas. Quod si tantum profecisset, quantum Dn. Marchio Hospitalius, fortasse et ipse minorem Tui curam gereret. Nolim hoc pro certo asseverare, ne Viro fortasse candido injuriam faciam; sed vereor tamen valde, ne sit caeteris plerisque similis, praesertim Gallis.

Agnosco ex ejus responsione, Te quaedam ad ipsum scripsisse profunda et ingeniosa de corporibus varie infinitis. Videor mihi intelligere mentem Tuam, saepeque de istis deliberavi, sed nondum tamen adhuc pronuntiare audeo. Fortasse infinita, quae concipimus, et infinite parva imaginaria sunt, sed apta ad determinanda realia, ut radices quoque imaginariae facere solent. Sunt ista in rationibus idealibus, quibus velut legibus res reguntur, etsi in materiae partibus non sint. Quod si statuimus lineas reales infinite parvas, consequitur etiam statuendas esse rectas utrimque terminatas, quae tamen sint ad nostras ordinarias, ut infinitum ad finitum; quo posito, sequitur esse punctum in spatio, ad quod hinc nullo unquam tempore assignabili per motum aequabilem perveniri possit; oportebitque similiter concipere tempus utrimque terminatum, quod tamen sit infinitum, atque adeo dari quoddam genus aeternitatis, ut sic dicam, terminatae; sive posse aliquem vivere, ita ut nullo unquam assignabili annorum numero moriatur, et tamen aliquando moriatur; quae omnia ego, nisi indubitatis demonstrationibus coactus, admittere non ausim. Reale infinitum fortasse est ipsum absolutum, quod non ex partibus conflatur, sed partes habentia, eminenti ratione et velut gradu perfectionis comprehendit. Si daretur aliquid perfecte rigidum, et perfecte aequabile, haberentur sane, quae nos concipimus in nostra Geometria; sed vereor ut natura haec patiatur. Interim laudo ingenii Tui vim ad abstrusissima eruenda promtam. Si quando colloqui dabitur, fortasse multa adhuc mira circa rerum summam et principia a me audies, quae habeo pro demonstratis. Nunc vale et fave. Dabam Hanoverae 7 Junii 1698.

LXXVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postremas Tuas accepi, cum nuper in Batavis essem, ad quos animi gratia trajeceram, ut ibi partem feriarum transigerem. Placet modus, quem excogitasti, parandi Vinometrum per elasticitatem aëris, sed nescio an in praxi tam utile esset, quam in theoria ingeniosum; quomodo enim dentes adaptares instrumento, ut laxationes et constrictiones aëris ostenderet? praeterquam quod, ut ipse animadvertis, multo liquore detracto, columnarum altitudo notabiliter non minuitur. Hoc cum legerem, statim mentem subiit, an non melius intentum obtinere liceret, ope phialarum liquore semiplenarum, quibus Boylaeus, ni fallor, primus ostendere solebat pressionem columnarum. Ita ergo phialae ex. gr. (fig. 125) quatuor A, B, C, D parari possent, ut, dolio existente pleno, omnes demersae haererent in fundo; detracto vero liquore, ex. gr. usque ad $\alpha\alpha$, tunc phiala prima A (aëre in illa, ob diminutum pondus columnae, sese expandente et liquorem per orificium apertum expellente) jam levior facta sursum peteret, reliquis B, C, D ob gravitatem adhucdum praepollentem in fundo manentibus. Sin autem porro liquor ex dolio emitteretur ad $\beta\beta$. tunc B ascenderet; sic subsidente ad $\gamma\gamma$, emergeret C, et tandem

ubi ad $\delta\delta$ perventum esset, eniteretur D. Redimpleto dolio phialae in superioribus natabunt, nec fundum repetent, nisi vi eo detrudantur. Pronunciaturus itaque, quantum liquoris ante redimpletionem fuerit exemtum, respicerem tantum ad numerum phialarum in summo natantium, ex. gr. trium A, B, C; unde concluderem tantum ad minimum fuisse exhaustum, quantum continetur in spatio $\gamma S \gamma$. Interim quo minores essent differentiae columnarum, cum quibus phialae sunt aequilibratae, et quo plures essent talium phialarum, eo accuratius detracti quantitatem explorare possemus. Postea alii modi complures idem praestandi, sine elasticitate aëris, mihi inciderunt, e quibus duos hic apponam, qui effectu faciles mihi videntur. Concipe (fig. 126) tubum recurvum A, ab utraque parte apertum et liquore plenum, ita immitti in dolium plenum, ut orificium cruris brevioris pertingat ex. gr. ad superficiem imaginariam $\alpha\alpha$. Jam finge detrahi aliquid liquoris ex dolio, patet utique, quod quamdiu orificium cruris brevioris intra liquorem latet, tamdiu totus tubus plenus manebit, sed statim ac liquoris superficies infra orificium seu infra superficiem imaginariam $\alpha\alpha$ subsiderit, tunc omnis liquor, qui in supereminenti parte tubi existit, per crus longius descendet, aëre in ejus locum per crus brevius succedente; qui aër, licet dolium postea omnem suum liquorem ad summitatem usque resumat, cum neutrorsum evadere possit, in tubo manere cogitur. Hinc si plures tales tubos recurvos A, B, C, D, quorum orificia crurum breviorum gradatim ascendant, in dolium immiseris, poteris iterum judicare ex numero tuborum aërem continentium, quousque dolium depletum fuerit; vel si malueris loco tot tuborum assumere unicum tubum rectum FE instructum pluribus ramulis inflexis a, b, c, d etc. per minima intervallula a se distantibus, eundem usum obtinebis. Illi enim ramuli, qui semel a liquore evacuati sunt, post redimpletionem dolii, retinebunt in flexuris suis ampullas aëreas. Infimus ergo ramulus, tali ampulla conspicuus, indicabit quousque dolium fuerit exhaustum.

Ecce jam alterum instrumentum, quod mihi in mentem venit. AB (fig. 127) tubus est utrinque apertus, multos habens varices seu tumores excavatos, aemulantes venarum valvulas, quem liquore plenum (poterit autem facile impleri, si primo invertatur, et obturato A, per B infundatur) immitto in dolium liquore pariter plenum. Jam si tantum liquoris ex dolio effluxerit, ut ejus superficies subsiderit ad $\alpha\alpha$, adeoque etiam omnis liquor, qui in parte tubi supereminente Abc extitit, descenderit, illamque totam cavitatem aër succedens impleverit, manifestum utique est, ob affusum deinde novum liquorem, quo dolium redimpletur, totum quidem tubum AB etiam redimpletum iri, relictis tamen aëre plenis omnibus illis varicibus, qui supra $\alpha\alpha$ existunt; cum enim varicum convexitas sursum spectet, aër qui semel in illos se recepit, a liquore amplius expelli nequit. Ergo et hoc modo infimi varices b, c, aërem continentes, monstrabunt quousque dolium fuerit evacuatum. Hujusmodi Tubus varicosus etiam alibi usum obtinere posset, ex. gr. ad Thermometra conficienda, quae non solum praesentem aëris temperiem, sed etiam praeteritam ostenderent et simul limites summi caloris et summi frigoris. Ut si observator medio Aprilis (quo tempore aëris temperies maxime variabilis) certo quodam die explorare vellet maximum et minimum gradum caloris aëris, seu quantum aër mutari potuerit intra 24 horas, certe continua observatio 24 horas durans, taediosissima esset; imo etiam inutilis, quia experientia docet praesentia hominum, eorum scilicet habitu et continua transpiratione insensibili, aërem ambientem alterari et calefieri hincque liquorem in Thermometris plus justo descendere. Huic igitur duplici incommodo remederi licet, si duo nobis comparemus thermometra, ordinariis similia, excepto quod habeant tubos varicosos, unius varicibus sursum (fig. 128), alterius varicibus deorsum (fig. 129) spectantibus. Illud enim (fig. 128) observatori, licet per totum diem absenti, et sub finem tantum diei observatum redeunti, ostendet maximum descensum liquoris, id est maximum gradum caloris, quem aër illo die habuit; id quod arguere poterit ex infimo varice a aërem includente: alterum vero (fig. 129) determinabit maximum ascensum liquoris seu maximum gradum frigoris, varice nempe summo b pauxillum liquoris retinente. Dum haec scribo, video non opus esse duobus thermometris, unum enim utrumque praestare poterit, si nempe constet tubo contrarios habente varices, ut hic delineatum vides (fig. 130). Caeterum hoc modo explorare possemus limites intensissimi frigoris et ferventissimi aestus totius anni; sed talis eligendus esset liquor, qui in varicibus b, b, b ob modicam quantitatem non exsiccaretur.

Quae me ex Dno. Varignonio quaerere jubes, curabo diligenter, ut ad notitiam perveniant Tuam. Ego etiam legi, quae Vallemon-

tius de Geographicis habet, videtur ideo imprimis impugnare correctiones Academiae Scientiarum, ut tanto liberius depectere possit suum popularem Du Fer, cujus Tabulas istis correctionibus fundatas (ut ait) turpiter traducit. Maximum argumentum quo nititur, est quod dicit, longitudinum differentias per Eclipses determinatas semper justo minores esse, teste experientia, quam refert de certamine Hispanorum et Portugallorum, quorum utrique Japoniam aliasque regiones circa lineam demarcationis a Papa assignatam sitas, in suum Hemisphaerium transtulerunt Eclipsibus nixi.

Gaudeo meam rationem demonstrandi Tautochronismum Hugenianum*) Tibi placere: scire vellem an lucem viderit, aut quid de ea fecerit Dn. Menckenius: si suppressit, per me licet, modo id non fecerit suasore Tschirnhausio: hunc enim pro Judice meo non agnosco. Miror sane Dnum. Menckenium tantum deferre huic Viro ad lapsum adeo proclivi, ut propterea aliorum inventa nihili habeat.

Si Dn. Hospitalium novam differentiandi rationem denuo forte postulantem ad Te remisero, quid quaeso ipsi responsurus es? Proposui**) Fratri meo, aut potius Nonnemini ficto, hujusmodi problemata, ut par pari referrem et ille videret, se non solum tam mirabilia et tam inaudita problemata proponere posse.

Ecce hic methodum meam tam directam quam indirectam***); examina quaeso utramque attente; nunquam enim desistam provocare ad Tuam sententiam. Videbis me uti ellipticula, prout initio conceperam: asserva, rogo, schediasma, ut si forte opus fuerit, Lipsiam id mittere possis, Actis inserendum. Divinare mehercle non possum, quid Frater in meis solutionibus sit cavillaturus, consensu duarum Methodorum tam egregie confirmatis; oportet sane lut ejus solutiones, si a meis abludunt, potius sint falsae; sed Tu ipse optime judicabis.

Prope satis accessisti ad mentem meam de varietate infinitorum; nec ego infinitos infinitorum gradus pro certo asserui, sed conjecturas tantum adduxi, quibus rem possibilem et probabilem esse statui. Et quidem rationem praecipuam hujus

*) Act. Erudit. 1698 p. 267.
**) Journal des Savans 1698 Avr.
***) Siehe die Beilage.

esse, quod nulla sit ratio, cur Deus hunc tantum infinitatis gradum seu hoc quantitatum genus, quae nostra faciunt objecta nostroque intellectui proportionata, voluisset existere cum tamen facile concipere possim, in minimo pulvisculo posse existere Mundum, in quo omnia proportionata sunt huic magno, et contra nostrum mundum nihil aliud esse, quam pulvisculum alius infinities majoris; atque hunc conceptum continuari posse ascendendo et descendendo sine fine: unde nostrum genus quantitatum unicum tantum ex infinitis gradibus efficere; nihil autem esse, quod mihi persuadeat, hunc potius debuisse existere quam alium; quicquid enim afferri potest, illud applicabile fore ad quemvis alium gradum. Ita si ex. gr. concipiam in globulo aëreo mundum formatum, partes habentem nostris hisce proportionatas, Solem, Stellas, Planetas, Terram cum suis incolis, omnesque caeteras quantitates eadem ratione, nempe quod nobis tempusculum unius secundi est, illis fore seriem multorum seculorum, et ita de aliis; interim hos homines iisdem argumentis uti posse ad probandum se solos esse, suum mundum infinitum esse, nihil extra se existere. Sed abrumpo, plures paginae mihi non sufficerent, si deliria mea, suavia quidem mihi, quibus interdum per infinitates illas velificor, hic omnia recensere vellem. Cavebo tamen mihi, ne talia tangam apud Theologos quosdam hujus Civitatis, omnium libere philosophantium osores; haud dubie me ad rogum ablegarent, si tantas haereses a me audirent: ut nuper fere mihi accidit in Disputatione Philosophica publice ventilata, ubi cum incidenter quaestio moveretur de statu corporum nostrorum post resurrectionem, et ego dicerem, eadem numero corpora non resurrectura, quia durante vita singulis momentis alterentur, ita ut forte Corpus nostrum minimam partem substantiae habeat ejus, quam ante annum habuit; unde impossibile esse nos resurrecturos cum omni illa substantia, quae olim successive nostrum corpus composuerit, nisi velimus statuere Giganteam molem tunc nos habituros. Quid autem fit? Ecce pastorculus quidam, cui vox est praeter eaque nihil, bruto zelo animatus, subito contra me insurgens me meamque sententiam vixdum auditam protinus criminari, exagitare, explodere, et ut orthodoxae fidei adversantem damnare et execrari; praeterea in Philosophos novatores (ut vocat) tam inepte, tam insulse instar furiosi debacchari, ut illum phraeneticum catenis ligandum dixisses, si vidisses. Nec hoc sufficit: Ur-

bem totam rumore implet, me esse Socinianum, me docere novam creationem novorum corporum in resurrectione, et nescio quot alias ineptias mihi imputat, quae nunquam in mentem mihi venerunt, reliquis interim Theologastris undique concurrentibus, seque mutuo fideliter succurrentibus. Subsequenti Dominica, suggestus omnes ad Populum resonabant, intonantes horribiliter contra Philosophos seductores studiosae Juventutis (ita nos traducunt) et subversores revelatae veritatis. Necdum quiescunt, aperte et clanculum contra me machinantur quidquid possunt; mugit adhuc surdus tonitrus, perderent me, si per illos staret. Sed vanae sine viribus irae; rideo eorum imbecilles conatus, mecumque rideant quicunque solidiori judicio pollent: sunt etiam Theologi sanioris mentis et profundioris' eruditionis, qui suorum Collegarum caecum impetum maxime ex puro, puto, odio in bonas scientias ortum improbant. Habeo etiam superiores ordinis Patronos, qui meas sustinent partes: unde nihil mihi timeo; interim magna cum confusione Theologastrorum,

Superi risere diuque
Haec fuit in toto notissima fabula caelo.

Cum nuper Leyda transirem, Volderum conveni saepius, isque me semel ad prandium invitavit, ubi etiam aliorum aliquorum Professorum Leydensium notitiam et familiaritatem nactus. Intererat convivio Nob. Dn. De Blyswick, Delphensium Consul et Academiae Leydensis Curator, Vir affabilis et generosus, bonorumque studiorum insignis amator et promotor, qui a Te subinde literas accipere et Tibi vicissim scribere mihi dixit: magni Te aestimat: sua quoque officia ultro mihi obtulit, si quondam occasio dabitur. Vidi praeterea illum aliquoties apud alios Professores; sensi illum summum esse Tui admiratorem. Volderus sub discessum meum proponebat mihi difficultatem contra Calculum infinitorum, quam sibi se eximere non posse neque à Nieuwentitio, cui dudum eamdem proposuerat, hactenus enodationem accepisse rebatur, rogans ut ego sibi hac super re satisfacerem, quod etiam libenter promisi, me scilicet satisfacturum, statim ac huc redux factus essem, et revera nudius tertius solutionem ipsi misi. Intellexi quoque, quod a Papini parte stet circa aestimationem virium, dicens a Te gratis supponi corporum elasticitatem; hanc enim corporibus tantum esse accidentalem: si corpora perfecte dura supponantur, Tua ratiocinia amplius locum non habere; duritie perfecta supposita, sequi ex. gr. quod duo corpora aequalia et aequali celeritate sibi mutuo centraliter concurrentia, non debeant reflecti, sed sisti in ipso momento occursus; et quod generaliter corpora duo perfecte dura cujuscunque molis et cujuscunque celeritatis post conflictum separari non debeant, quia separatio proveniat ab elasticitate, quam autem supponendam dicit. Ego vero, cum temporis angustia non permiserit illum ab opinione sua deflectere ore tenus, ipsi promisi copiam excerptorum ex literis Tuis meisque hac de materia agentibus, ut videat quid me impulerit ad amplectendum Tuas partes. Hagae-Comitum vidi Dn. Dierquens, Praesidem in Curia Brabantiae: etiam hic multa civilitate me affecit. Dn. Bellavallius mihi ostendit Logogryphum aliquod, sibi a Dno. Hugenio, dum viveret, depositum, suo tempore clavem missuro: morte autem occupatus id non praestitit. Dnus. Dierquens et ego ipsi consuluimus, ut tamen ederet, quale accepisset. Nactus sum Hagae Cosmotheoron Hugenii, recenter praelo enixum. Vale et fave etc.

Groningae d. 5 Julii 1698.

P. S. Dn. Varignonius a me rogatus de Vinometri artificis Parisiens. statu et pretio, sequentia reposuit in literis heri acceptis: „L'autheur du Vinometre nous dit en nous le montrant à „l'Academie, qu'il avoit ordre d'en faire deux mille à 5 liv. cha- „qu'un pour les fermiers generaux. Ainsy vous voyez qu'il sera „facile d'en avoir un désque vous voudrez; mais il ne le sera „pas de vous la faire tenir, sa longueur étant double du grand „diametre du tonneau ou elle doit servir: j'en feray faire un des- „sein que je vous envoyeray. Il y a aussy icy un autre Horloger „qui m'a dit avoir trouvé une machine pour tailler les fusées des „montres suivant les forces des ressorts qui doivent agir contre „elles: il m'en a promis une description avec un dessein, mais à „condition que je les feray mettre dans les Actes de Leipsic. Si „vous voulez, je vous les envoyeray etc."

Beilage.

Joh. Bernoullii Solutio Problematis Isoperimetrorum duplici methodo inventa.

Problema.

Ex omnibus curvis isoperimetris super axe determinato BN (fig. 131) descriptis quaeritur illa BFN, cujus applicatae FP ad

datam potestatem elevatae seu generaliter earum quaecunque functiones per alias applicatas PZ expressae faciant spatium BZN omnium, quae ita fieri possunt, maximum. Seu quod eodem recidit: Data curva BH super axe BG normali ad BN determinare curvam BFN, cujus applicatae FP productae ad Z, ita ut PZ = GH, faciant spatium BZN maximum omnium eorum, quae hoc modo fieri possent a quibuscunque aliis curvis super BN descriptis et ejusdem longitudinis cum BFN.

Solutio.

Sit BFφ (fig. 132) pars curvae quaesitae, BZζ pars curvae ex illa progenitae secundum applicatas curvae datae BH. Concipio FOφ elementum curvae BFφ tanquam compositum ex duabus lineolis rectis FO et Oφ, ut et huic respondens ZLζ elementum curvae BZζ tanquam compositum ex duabus lineolis rectis ZL et Lζ. Jam vero quoniam tota curva praestans aliquod maximum etiam ejusdem maximi leges servat in singulis suis partibus, sequitur quod si ex punctis F et φ inflectantur utcunque duae aliae lineolae Fω et $\omega\varphi$, quae simul sumtae sint aequales FO + Oφ, atque si ex illis eadem lege formentur Zλ, $\lambda\zeta$, qua ex FO, Oφ formatae sunt ZL, Lζ; sequitur, inquam, quod spatium ZP$\pi\zeta$L sit majus, quam omne aliud ZP$\pi\zeta\lambda$. Ut igitur requisitam dispositionem lineolarum FO, Oφ maximum praestantium inveniam et exinde naturam totius curvae BFφ, concipio focis F, φ et longitudine fili FOφ descriptam ellipticulam, et in ea duo puncta O et ω incomparabiliter sibi vicina seu quorum distantia Oω sit infinities minor quam distantia focorum F, φ, licet haec ipsa Fφ jam per se sit infinite parva, utpote subtensa elementi curvae BFφ: adeoque ex natura maximi erunt duo spatia ZP$\pi\zeta$L et Z$\pi\zeta\lambda$ inter se aequalia, unde ablato communi remanebit triangulum ZLY = triangulo $\zeta\lambda$Y, seu ducendo parallelos LO, $\lambda\omega$ (neglectis particulis infinities minoribus LYM et Y$\lambda\mu$) triangulum ZLM = triangulo $\zeta\lambda\mu$; id est ductis axi parallelis ZC, ζD, ut et FI, φK erit ZC$\times$LM = ζD$\times\lambda\mu$: quoniam vero LM est differentia linearum LR et MR, ut et $\lambda\mu$ differentia $\lambda\varrho$ et $\mu\varrho$ atque cum LR, MR; $\lambda\varrho$, $\mu\varrho$ sint functiones suarum respective RO, RT; $\varrho\omega$, $\varrho\Theta$; repraesentabit LM differentiam functionum inter RO et RT, atque $\lambda\mu$ differentiam functionum inter $\varrho\omega$ et $\varrho\Theta$) (NB. differentia autem functionum duarum linearum ut RO, RT quantitate infinities-infinite parva TO se excedentium reperitur differentiando simpliciter functionem RO et quod provenit, omissis differentialibus, multiplicando per TO. Ex. gr. si RL functio ipsius RO esset tantum ejusdem RO potestas n, in quo consistit casus fraternus, id est si curva data BH esset parabola gradus n, tunc LM seu $RO^n - RT^n$ foret $nRO^{n-1} \times TO$: ita etiam si curva BH esset circulus, cujus radius $= a$, tunc LM seu $\sqrt{2aRO - RO^2} - \sqrt{2aRT - RT^2}$ foret $\dfrac{a - RO}{\sqrt{2aRO - RO^2}} \times TO$; et ita de caeteris. Notetur autem generaliter differentia functionum RO, RT hoc signo $\bar{D}RO \times TO$) ideoque cum $ZC \times LM = \zeta D \times \lambda\mu$, erit $FI \times \bar{D}RO \times TO = \varphi K \times \bar{D}\varrho\omega \times \Theta\omega$. Jam centris F et φ concipiantur arculi minimi XO et $\xi\omega$, qui per naturam ellipseos sunt aequales inter se, adque TO ad $\Theta\omega$ ut secans ang. XOT seu IFO ad secant. ang. $\xi\omega\Theta$ seu $K\varphi\omega$; est vero etiam FI ad φK ut $FO \times \sin FOI$ ad $\varphi\omega \times \sin \varphi\omega K$; ergo si loco FI, φK et TO, $\Theta\omega$ sumantur eorum porportionalia, erit $FO \times \sin FOI \times \sec IFO \times \bar{D}RO = \varphi\omega \times \sin \varphi\omega \times K \times \sec K\varphi\omega \times D\varrho\omega$; sed quoniam, ut constat ex natura sin. sec. et tangentium, $\sin FOI \times \sec IFO =$ quadrato sinus totius $= \sin \varphi\omega K \times \sec K\varphi\omega$, erit $FO \times \bar{D}RO = \varphi\omega \times \bar{D}\varrho\omega$: seu si loco RO sumatur aequipollens PF (quae licet differat ab RO particula infinite parva IO, censetur tamen in speculatione curvarum non solum ut ipsi aequalis, sed prorsus tanquam eadem; quamdiu enim curvae particula infinite parva FO consideratur ut lineola recta, tunc singulae applicatae inter PF ex RO, cum legem mutationis curvaturae nondum subeant, haberi possunt pro una eademque applicata, quasi nempe singulae ipsi PF absolute essent aequales: eodem modo quia $\omega\varphi$ considero ut rectam lineolam, singulae applicatae inter $\varrho\omega$ et $\pi\varphi$ utpote legem mutationis curvaturae pariter non subeuntes possunt pro se invicem sumi adeoque eaedem poni cum $\pi\varphi$) si igitur, inquam, loco RO sumatur aequipollens PF et loco $\varrho\omega$ aequipollens $\pi\varphi$, habebitur $FO \times \bar{D}PF = \varphi\omega \times \bar{D}\pi\varphi$ adeoque DPF ad $D\pi\varphi$ ut $\varphi\omega$ (φO) ad FO ut $\sin OF\varphi$ ad $\sin O\varphi F$ et permutando $\bar{D}PF$ ad $\sin OF\varphi$ ut $D\pi\varphi$ ad $\sin O\varphi F$. Hinc cum $F\varphi$ sit subtensa arcus curvae infinite parvi $FO\varphi$, adeoque angulus $OF\varphi$ et $O\varphi F$ haberi possit pro semisse anguli curvedinis in F et φ, erit DPF ad sinum curvedinis in F ut $D\pi\varphi$ ad sinum curvedinis in φ, hoc est, in ratione constanti.

Problema itaque ad pure analyticum redactum huc redit, ut quaeratur curva $BF\varphi$ ejus naturae, ut sinus curvedinis in singulis punctis F sit ad functionem differentiatam (neglecta differentiali) suae respective applicatae PF in ratione constante. Hoc autem facile solvitur sic: Esto BF (fig. 133) curva quaesita, cujus elementum quod pro constanti assumo $Fl = dt$, $BP = y$, $PF = x$, $Pp = dy$, $Cl = dx$, concipiatur Fm tangens in $F = Fl$, adeoque lFm angulus curvedinis, cujus sinus lm: sit porro $mn = ddx$, et $nl = ddy$. Quia itaque (ob triangula similia) $lC \,.\, Fl :: nl \,.\, ml$, reperietur $ml = \dfrac{dt\, ddy}{dx}$; cum vero ex natura curvae requisita ml ad $\bar{D}FP$ se habeat in ratione constante, faciamus $\dfrac{dt\, ddy}{dx} \,.\, \bar{D}x :: dt \,.\, a$, quod hanc suppeditat aequationem $a\,ddy = \bar{D}x\,xdx$; jam autem $\bar{D}x\,x\,dx$ utpote ipsissima functio differentiata, si iterum summatur, dabit functionem ipsam seu GH; sit ergo haec $GH = X$ (compositae ex x et datis quomodocunque) sumtis itaque integralibus aequationis modo inventae, proveniet $a\,dy = X \pm C$, vel suppletis homogeneis per constantem dt, $a\,dy = X\,dt \pm C\,dt$ (NB. per C intelligo quantitatem constantem et arbitrariam, qua integrale cujusvis differentialis augere vel diminuere licet) sumto utrobique quadrato $aa\,dy^2 = dt^2 \times \square\overline{X \pm C} = \overline{dx^2 + dy^2} \times \square\overline{X \pm C}$, et reducta aequatione habebitur tandem $dy = \dfrac{dx \times \overline{X \pm C}}{\sqrt{aa - \square\overline{X \pm C}}}$. Ut vero simplicissima curva reperiatur (sufficit enim unam exhibuisse, quae satisfacit) ponatur $C = o$, et erit $dy = \dfrac{X\,dx}{\sqrt{aa - XX}}$ proindeque sumta integrali $y = \int \dfrac{X\,dx}{\sqrt{aa - XX}}$, dico curvam hac constructione descriptem quaesito esse satisfacturam. Coroll. Quoniam posito $C = o$, $a\,dy = X\,dt$, erit $dy \,.\, X :: dt \,.\, a$; est autem posita dt constante, dy sinus anguli BFP, adeoque sinus anguli BFP est ad X (GH) ut dt ad a, id est in ratione constante. Jam vero si BF est brachystochrona, et BH curva, cujus applicatae GH denotant celeritates in F, ostendi (Act. Lips. m. Maj. 1697) tunc sinum anguli BFP esse ad GH in ratione constante: unde discimus unam eandemque curvam BF duplici officio simul satisfacere posse, quippe quae $\int X\,dx$ maximum et simul $\int \frac{dt}{X}$ minimum facit; sed hoc non obtinet, si C non est = o; adeo ut si curva quaepiam faciat $\int \frac{dt}{X}$ minimum, necessario etiam factura sit $\int X\,dx$ maximum, sed non vice versa.

Problema II.

Iisdem positis, si PZ (fig. 131) jam sit ut functio data ipsius arcus BF, quaeritur determinatio curvae BFN.

Solutio.

Iisdem vestigiis insistendo res facile expedietur. Erit enim semper (fig. 132) triangulum ZLY = triangulo $\zeta\lambda$Y seu ZC$\times$LM = ζD $\times$ $\lambda\mu$; jam vero LM (LR — MR) est differentia functionum duorum arcuum BFO et BFT, ut et $\lambda\mu$ ($\lambda\varrho - \mu\varrho$) differentia functionum duorum arcuum BFω et BFOΘ. Atque hae functionum differentiae eodem modo reperiuntur, ut supra dictum, multiplicando scilicet differentiatam simpliciter functionem neglecta differentiali per differentiam duorum arcuum BFO, BFT, nempe per TX, adeoque loco ZC$\times$LM = ζD$\times\lambda\mu$ scribendum est FI$\times\dot{\mathrm{D}}$BFO$\times$TX = φK$\times\dot{\mathrm{D}}$BF$\omega\times\Theta\xi$. Quoniam nunc per naturam ellipseos OX et $\omega\xi$ sunt inter se aequales et proinde TX ad $\Theta\xi$ ut tangens ang. IFO ad tang. K$\varphi\omega$, est vero iterum FI ad φK ut FO$\times$sin FOI ad $\varphi\omega\times$sin $\varphi\omega$K; ergo si loco FI, φK et TX, $\Theta\xi$ sumantur eorum proportionalia, erit FO$\times$ sin FOI $\times$ tang. IFO $\times$ $\dot{\mathrm{D}}$BFO = $\varphi\omega$ $\times$ sin $\varphi\omega$K $\times$ tang. K$\varphi\omega\times\dot{\mathrm{D}}BF\omega$; sed quoniam, ut constat, ex natura sinuum, tang. et secant. sin FOI$\times$tang. IFO = rectangulo inter sinum totum et sin IFO, ita etiam sin $\varphi\omega$K $\times$ tang. K$\varphi\omega$ = sin. tot. $\times$ sin K$\varphi\omega$, erit ergo FO$\times$sin IFO$\times\dot{\mathrm{D}}$BFO = $\varphi\omega\times$sin K$\varphi\omega\times\dot{\mathrm{D}}BF\omega$, seu si loco BFO sumatur aequipollens BF, et loco BFω aequipollens BFφ, habebitur FO$\times$sin$\times$IFO DBF = $\varphi\omega\times$sin K$\varphi\omega\times\dot{\mathrm{D}}BF\varphi$; adeoque sin IFO$\times$DBF ad sin K$\varphi\omega\times\dot{\mathrm{D}}BF\varphi$ ut $\varphi\omega$ (φO) ad FO ut sin OFφ ad sin OφF, et permutando sin IFO $\times$ $\dot{\mathrm{D}}$BF ad sin OFφ ut sin K$\varphi\omega$ $\times\dot{\mathrm{D}}$BFω ad sin OφF in ratione constante. Problema itaque jam analyticum factum eo recidit, ut quaeratur curva BFφ hanc habens proprie-

tatem, ut sinus curvedinis in quovis puncto F sit ad sin IFO$\times\dot{\mathrm{D}}$BF in ratione constanti. Hoc ut solvatur, positis ut prius (fig. 133) BP = y, PF = x, BF = t, Pp = dy, Cl = dx, Fl vel Fm = dt; functio data arcus BF = v, erit ml = $\frac{dt\,ddy}{dx}$; faciamus itaque secundum proprietatem curvae modo inventam $\frac{dt\,ddy}{dx} . dx \times \dot{\mathrm{D}}v \left(\frac{dv}{dt}\right) :: dt . a$, unde haec aequatio $\frac{addy\,dt}{dx^2} = dv$ seu $\frac{adt\,ddy}{dt^2 - dy^2} = dv$, sumtisque integralibus $\int \frac{adt\,ddy}{dt^2 - dy^2} = v$, seu quia a et dt sunt constantes, potest simpliciter poni $v = \int \frac{ddy}{dt^2 - dy^2}$, quae itaque aequatio determinat naturam curvae quaesitae.

Scholium.

Haud majori difficultate hac methodo determinare possemus curvam BFφ, si desideraretur ut PZ (fig. 131) esset functio composita pro lubitu ex functionibus non arcus tantum BF vel applicatae PF, sed utriusque simul quomodocunque inter se complicatae. Eo enim tandem semper pervenitur, ut sinus curvedinis in quovis puncto F sit ad certam quandam quantitatem in ratione constante; unde problemate hoc modo ad pure analyticum redacto, facile deinde aequatio naturam curvae exprimens obtinetur. Hac eadem methodo solvi etiam possunt curvae catenariae, ut et brachystochronae, quarum omnium solutiones egregrie conspirant illis, quas olim diversis methodis inventas dedimus: id quod non parum hujus methodi bonitatem commendat.

Caeterum cum haec directa sit, placet adjungere indirectam, a natura pressionis liquorum desumtam, quae eandem omnino dabit solutionem; quo methodorum directae et indirectae tam mirabili consensu mirifice confirmabimus de illarum certitudine. Esto (fig. 131) BFN linteum a liquore stagnante uniformis sive non uniformis gravitatis expansum, evidens est illud eam induere curvaturam, quae liquori maximum concedat descensum. Hoc autem tunc contingit, quando omnium particularum totius liquoris gravitationes simul sumtae faciunt maximum (NB. non dico quando centrum gravitatis liquoris est in infimo loco, hic enim non potest considerari centrum gravitatis, siquidem variante curvatura BFN, licet isoperimetra, variat tamen etiam ipsa quantitas liquoris sub illa contenta, adeoque non esset centrum gravitatis unius ejusdemque liquoris) gravitatio autem particulae cujusvis aestimatur a pondere incumbente filamenti liquoris; per gravitationem itaque intelligo vim, qua superficies aliqua imaginaria in liquore horizonti parallela ab incumbentis pondere deorsum urgetur. Jam vero distinctum concipiatur spatium BFN in sua filamenta per applicatas verticales PF, pl etc. sitque linea BL, cujus applicatae GL denotent gravitationes liquoris in altitudine BG seu PF, id est cujus applicatae ex. gr. GL et ED ostendant rationem, in qua liquoris particula FC in profunditate PF magis gravitet seu magis prematur ab incumbente pondere filamenti PFCp, quam aequalis particula Mn in profunditate PM premitur ab incumbente pondere filamenti PMnp. Cum ergo LG denotet gravitationem particulae FC reliquarumque omnium, quae sunt in eadem profunditate seu quae sunt in recta GC prolongata: pariterque cum singulae reliquarum applicatarum DE denotent gravitationem particulae Mn caeterarumque, quae sunt in recta prolongata EM: omnes utique applicatae simul sumtae, hoc est spatia BLG, BDE designabunt omnes gravitationes (non dico gravitates) simul sumtas particularum, quae sunt in filamentis PFCp, PMnp. Ideoque si fiat alia curva BH, cujus applicatae GH sint ut respective spatia BLG, atque si ad P applicentur PZ = GH, habebitur nova curva BZN, cujus applicatae PZ exhibebunt summas gravitationum particularum in suis respective filamentis PFC; et proinde summa applicatarum PZ, id est totum spatium BZN repraesentabit gravitationes omnes omnium particularum totius liquoris linteo BFN contenti. Si quidem igitur linteum talem capiat figuram, ut gravitationes omnes simul sumtae, hoc est spatium BNZ faciat maximum, evidens utique est, si adhiberetur liquor gravitatis continue difformis hac lege, ut LG, DE seu gravitationes particularum in profunditate F, M essent in ratione differentialium applicatarum HG (quae scilicet in problemate fraterno designant functiones ipsarum PF) evidens, inquam, est, quod tunc curvatura lintei exhiberet eam ipsam curvam, quam Frater pro potestatibus tantum ipsarum PF mihi quaerendam proposuit, ego vero generaliter pro quavis functione per methodum directam resolvi. Ut igitur hujus methodi directae cum indirecta consensum demonstrem, placet indagare naturam

curvaturae lintei a liquore ea, qua dixi, ratione gravitationes variante onerati, quod si in eandem incidero aequationem supra inventam, quis, quaeso, de infallibilitate methodorum tunc dubitare audeat? Hic quidem statim occurrit casus facillimus, qui primo discutiendus est, nempe si liquor sit ordinarius seu gravitatis uniformis, hoc est si gravitationes LG, DE sint ut ipsae profunditates BG, BE, adeoque linea BL sit recta, et BH parabola communis, tunc BFN erit ordinaria curvatura lintei, quam etiam Frater suae elasticae tribuit quaeque exprimitur, ut jam olim reperi, conveniente Fratre per hanc aequationem $y = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$. Jam vero si in aequatione generali per directam methodum supra inventa $y = \int \frac{X\,da}{\sqrt{aa - XX}}$ ponatur loco generalis functionis X casus particularis xx, qui hic supponitur, provenit $y = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{aa - x^4}}$ seu suppletis homogeneis $y = \int \frac{xx\,dx}{\sqrt{a^4 - x^4}}$; ergo constat hac in parte methodorum consensus.

Sin autem pro generali lege gravitationis liquoris, hoc est existente curva BDL quacunque, invenire lubeat naturam curvaturae lintei BFN, id quidem praestari potest per methodum, qua olim usus sum ad indagandam curvam velariam, quae praecipue consistit in eo, ut directio pressionis liquoris, quae ubique normalis est, ad curvam consideretur tanquam composita ex duabus pressionibus collateralibus horizontali una et verticali altera, atque ex utraque separatim sumta quaeratur lintei tenacitas requisita in imo puncto seu vis, qua linteum in imo puncto secundum tangentem extenditur. Cum autem absoluta illa vis constans sit, in quocunque puncto curvaturae suae linteum suspendatur vel si mavis clavo figatur: hinc aequando, quod provenit, cum quantitate constante ad arbitrium assumta (eodem modo, ut olim pro funicularia feceram) obtinebitur eadem aequatio, quam supra per methodum directam erui. Iste autem modus procedendi quamvis legitimus, prolixior tamen est nec tam naturalis, quam alter ille, quem brevi abhinc excogitavi quemque proin hic fusius exponam. Quoniam quaelibet lintei particula FI urgetur secundum FI directionem normalem ad curvam a pondere filamenti incumbentis seu a gravitatione particulae liquoris FC, quae gravitatio exprimitur per LG: curva BFN erit utique eadem cum illa, quae fieret si conciperem (fig. 134) filum BRFST etc. distendi a potentiis in singulis punctis R, F, S, T etc. normaliter applicatis R_1, F_2, S_3, T_4 etc. et ipsis ED, GL, VK etc. proportionalibus. Hanc autem curvam adeoque et lintei curvaturam eandem esse cum illa supra per methodum directam inventa, ita facile ostendo: concipiatur curva ut polygonum infinitorum laterum BR, RF, FS, ST etc. quae producta faciunt angulos aRF, bFS, cST etc. designantes nempe curvae curvedines in punctis R, F, S, T etc. Jam vero ex Mechanicis constat, potentiam pellentem 1R esse ad potentiam sustinentem, seu quod idem est, ad vim tenacitatis requisitae fili in puncto quovis intermedio 1 inter R et F, ut sin aRF ad sinum FR1, id est ad sinum totum; et pariter potentiam sustinentem in 1 ad potentiam pellentem 2F, ut sin 2Fm seu sinus totus ad sin bFS, ergo ex aequo pot. 1R ad pot. 2F, ut sin aRF ad sin bFS. Eodem modo demonstratur pot. 2F, ad pot. 3S ut sin bFS ad sin cST, et ita porro: ergo iterum ex aequo pot. 1R ad pot. 3S ut sin aRF ad sin cST, et permutando sin cST ad pot. 3S (KV) ut sin aRF ad pot. 1R (DE): hoc est sinus anguli curvedinis in quovis puncto R se habet ad DE, quam diximus repraesentare functionem differentiatam ipsius BE, in ratione constante. Hanc vero proprietatem per methodum directam quoque supra invenimus. Ergo curvatura lintei et Isoperimetrorum est una eademque curva, hoc est, methodus directa et indirecta se mutuo confirmant. Q. E. D.

LXXVII.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

A deprecatione (quod mireris) cogor incipere literas. Infelicitate quadam singulari, non sine culpa tamen mea, Tuae novissimae periere. Cum acciperem, in eo eram ut Herrenhusam irem, ubi Aula nostra est extra urbem, quod altera die summo mane discessura esset Electrix Brandeburgica, Aulaque Cellensis. Tuas igitur obiter inspectas mecum sumo, lecturus in itinere.

Forte supervenere, quae alio verterent mentem; sub noctem reversus recordatusque requiro, et magna cum perturbatione nusquam reperio. Quaesivi anxie, praemium etiam reperturo spponderi jussi; hactenus frustra. Oportet sacculo excidisse, qui togae assutus est, forte dum egredior ingrediorve currum. Cum igitur nihil aliud relictum sit mihi, quam ut ad veniam a Te petendam recurram, pro gratiae factae indicio habebo, si denuo ad me redeant, quae amisi. Schediasma enim Tuum solutionem Fraterni Problematis complexum videram, non legeram, sed et quae de machinulis Barometris, occasione Oenometri Parisini meaeque designationis disserebas, inspecta magis fuere, quam lecta, quod figurarum consideratione esset opus.

Gaudeo innotuisse Tibi Dominum de Bleswyck, Consulem Delphensem et Curatorem Leidensis Academiae, Virum praeclarum eumque mei benevole meminisse. Quod Dnus. Volderus de Calculo differentiali dubitat, magis miror, quam quod de virium aestimatione a nobis dissentit. Ego ipse olim adolescens, cum de Legibus motus scriberem Libellum, in ea eram sententia, quae nunc est Dni. Volderi, duo Corpora aequalia et aequivelocia sua natura post concursum directum non debere reflecti, sed potius se sistere mutuo. Idque etiam sequitur ex vulgari notione materiae, cum nempe nihil aliud in ea concipitur, quam extensio et ἀντιτυπία seu impenetrabilitas. Sed ex his ipsis et similibus postea agnovi, longe aliam esse naturam materiae in systema mundi redactae, quam vulgo creditur, et vim elasticam omni corpori esse essentialem, non ita quasi ea vis sit aliqua qualitas inexplicabilis, sed ex eo quod omne corpus, utcumque parvum, est machina, ex cujus structura resilitionem, ubi opus ea est ad virium conservationem, oriri oportet. Haec autem mira videri non debent consideranti actualem cujusque materiae partis divisionem in partes omnem numerum excedentes. Haec an, cum multa a me salute, Dno. Voldero significare velis, in Tua est manu. De caetero rem gratam facies, si communicabis, quae Dno. Voldero scripsisti scribesve, aut ab illo recipies.

Mirum non est, Dnum. Nieuwentiit ipsi non satisfecisse circa Calculum differentialem, quem ab eo ipso non satis profunde penetratum constat. Cujus rei indicium fuit, quod nihil de suo potuit praestare; an nunc magis profecerit, res docebit.

Si Dnum. Marchionem Hospitalium novam Methodum differentiandi postulantem, ut aequum est, ad me remittas, isque (quod vix facturum credo) apud me pulset, deliberandi adhuc locus erit.

Ex actuali divisione sequitur, in quantulacunque parte materiae velut mundum esse quemdam constantem ex innumeris creaturis; sed illud adhuc quaeritur, an ulla usquam portio detur materiae, quae ad aliam portionem habeat rationem inassignabilem, seu an detur linea recta utrinque terminata, sed quae tamen ad aliam rectam habeat rationem infinitam vel infinite parvam. In Calculo haec utiliter assumimus; sed hinc non sequitur extare posse in natura. Res igitur altioris est indaginis.

Nihilne apud Batavos intellexisti de edendis Posthumis quibusdam elaborationibus Hugenianis, praesertim Cosmotheoro per sidera ambulante, quem absolutum aut pene absolutum acceperam, itemque de Dioptrica dudum promissa?

Gratissima aliquando erunt, quae, ut spero, ad Quaestiones meas, Te parario, respondebit Varignonius. Ego quidem Isaaco Vossio et Vallemontio longitudinum determinationem per Eclipsium observationes factam impugnantibus minime omnium assentior; fieri tamen potest, ut ab Observatoribus ad loca remota tendentibus errores graves subinde sint admissi, et memini, Anglos fidem derogare Observationibus quibusdam Jesuitarum Gallorum ad Siamense regnum ante annos aliquot tendentium. Talia ergo cum sint facti, diligentem merentur discussionem. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae $\frac{12}{22}$ Julii 1698.

LXXVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Groningae d. 23 Jul. st. v. 1698.

Doleo profecto jacturam literarum mearum novissimarum non ob rei pretium, sed ob ingratum redescribendi laborem mihi molestissimam. Vereor ne a quopiam reperiantur, qui Tibi reddituros non sit; nollem enim ab alio legi ea praesertim, quae Tibi narraveram de quibusdam Pastoribus nostris. Ecce repeto quae

disserueram de Vinometris construendis, eorum enim pro more meo descriptionem asservavi etc.*).

Haec Tibi scripseram circa Vinometra; caeterum simplicissime res confici posset ope tubi communis ab utraque parte aperti, qui in inferiore extremitate adaptatam haberet valvulum intus foras spectantem. Ex. gr. (fig. 135) AB esset tubus ab A et B apertus, c valvula exacte congruens orificio B; hunc tubum liquore plenum immitterem in dolium plenum, ex quo si emittatur liquor donec subsiderit ad $\alpha\alpha$, descendet liquor in tubo ad eundem terminum D, quia libere per B egredi potest: jam autem si iterum redimpleatur dolium (cavendum tamen ne aliquid per A ingrediatur) vulvula c obstabit regressui liquoris, ita ut post redimpletionem tota pars AD a liquore vacua mensura sit; visurus ergo quantum liquoris sit extractum, superinducto pollice orificio A tubum AB eximerem ex dolio et pars vacua AD mihi indicaret descensum liquoris in dolio.

Adjeci, quia petis, excerpta ex literis ad Volderum scriptis **); videbis an ad objectionem ipsius sufficienter responderim. Jam coram ipsi dixeram, quod mihi jam scribis ipsi significandum, Te scilicet praeter extensionen et impenetrabilitatem tertium quid requirere ad essentiam corporis, quod consistat in vi ingenita ad conservationem virium, unde necessario vim elasticam omnibus corporibus ex natura sua competere. Ille autem regessit, Te aliquid statuere, quod concipere non possis, an illud tertium sit substantia an modus? Si modus, nihil novi esse; sin substantia, an spiritus an corpus? aut forte tertium? hoc autem tertium explicari non posse, nisi cum veteribus ad formam substantialem diu explosam recurrere velis. Ego quidem ipsi respondi, sufficere experientiam nos docere, corpora quo duriora, tanto perfectiorem habere vim elasticam: hac autem posita facile posse demonstrari quantitatem virium conservari, non vero quantitatem motus Cartesianam, nisi in certis casibus. Illa autem vis elastica an corpori sit congenita, an a materia ambiente proveniat, mihi perinde esse; imo utrumque esse posse illud aeque ac hoc, facile enim me posse concipere Deum creasse materiam cum conatu quodam, id est ma-

---

*) Es folgt hier ein Auszug des Briefes n. LXXVI, den Leibniz später wieder auffand.

**) Siehe die Beilage.

teriam tunc cum quiescere videtur, habere tamen celeritatem infinite parvam, illamque semper in materia manere, quia semel a Deo fuerit impressa, atque hunc conatum esse seu motum infinite tardum, qui producat illam insitam vim elasticam, unde non opus esse illam deducere ab anima quadam corporea seu forma substantiali.

Miror Te quaerere, an ulla usquam portio detur materiae, quae ad aliam portionem habeat rationem inassignabilem, seu an detur linea recta utrinque terminata, sed quae tamen ad aliam rectam habeat rationem infinitam vel infinite parvam, cum tamen actualem materiae divisionem in partes numero infinitas admittas: nam si corpus finitum habet partes numero infinitas, credidi semper et etiamnum credo, minimam istarum partium debere habere ad totum rationem inassignabilem seu infinite parvam. Nec opus est actuali divisione, sufficit talem particulam in toto coexistere, quemadmodum linea mathematica coexistit cum superficie vel superficies cum corpore, vel quodlibet differentiale cum suo integrali, vel ut aptius loquar, quemadmodum secundum Harvaeum et alios, sed non secundum Leuwenhoeck in animali innumera sunt ovula, in quolibet ovulo animalculum vel plura, in quolibet animalculo iterum innumera ovula et ita in infinitum. Sed quidquid sit, cogitationes meas de infinitate mundorum non pro certis et demonstratis venditare volui, sed pro conjecturis tantum probabilibus, hoc principali fundamento nisus, quod existentia eorum nullam implicet contradictionem, quod cognitio nostra ut de finito, ita de infinito quanto sit, tantum relativa, quod nihil in se ut neque magnum neque parvum, ita nec infinitum nec finitum sit, quod tandem nullum sit argumentum contra infinitatem mundorum, quo non aeque uti possent alius mundi incolae ad demonstrandum se solos esse. Sed dabitur forsan occasio, qua haec fusius explicabo.

Jam in novissimis meis dixeram, ni fallor, me Hagae nactum esse Hugenii Cosmotheoron, etiam hic praeter probabilia nihil vel parum habet: de dioptrica ejus nihil intellexi. En habes hic secundam descriptionem methodorum mearum pro solutionibus problematum isoperimetrorum; examina, quaeso, accurate et asserva schediasma, ut si opus fuerit edere possis. Vale etc.

Beilage.

Excerpta ex literis ad Volderum datis d. 27 Juni. st. v. 1698.

Ecce mitto, ut promiseram, enodationem difficultatis paulo ante discessum meum a Te notae contra infinitorum methodum. Vix posueram pedem in scapham Hagam petens, cum missis distractionibus, quibus Tecum colloquens adhucdum detinebar, anguem in herba latentem detegerem, videremque in eo laborare objectionem Tuam, quod quantitatem aliquam, ad quam non attendisti, tanquam nihil neglexeris, cum tamen revera non modo sit aliquid finiti, sed ipsa prorsus infinita, ut jam patebit. „Sint „(fig. 136) AG, AM (ita circiter argumentabaris) asymtoti hyper„boles FCL, cujus natura (positis AB = x, BC = y) exprimitur „per hanc aequationem $xxy = a^3$; constat subtangentem BO esse „ = $\frac{1}{2}$AB; ergo si CN parallela ipsi AB producatur ad E, ita ut „NE sit = BO seu dimidiae AB, idemque si fiat ubique, gene„rabitur nova hyperbola IQE, cujus areae elementum En erit „aequale prioris elemento correspondenti Cb; unde elementis in „summam collectis erit area quaevis NRQE aequalis areae cor„respondenti SBCP.“ Optime! hoc omnes concedent. „Ast cum „AS sit arbitraria (porro inferebas) ubicunque sit punctum S, „semper erit SBCP = NRQE, poterimus ponere AS = 0, „unde sequitur totum spatium asymtoticum in infinitum extensum „GABCF aequale fore toti alteri spatio asymtotico pariter in in„finitum extenso GNEI; interim cum ubique NC, RP etc. sint „duplae ipsarum NE, RQ etc. adeoque et ipsum spatium GNCF „sit duplum spatii GNEI, erit potiori jure sp. GABCF saltem „duplum spatii GNEI, ac proinde haec duo spatia non possunt „esse aequalia, contra prius ratiocinium; quomodo igitur haec „concilianda?“

Hic, ni fallor, est sensus objectionis Tuae, ad quam ut breviter respondeam, velim consideres, AS nunquam posse assumi absolute = 0, nam punctum P semper existere debet in hyperbola, nunquam vero in asymptoto AG; et quamvis in infinitum intelligatur removeri a puncto C, ita ut ad asymtoton data quavis assignabili propius accedat, distantia tamen in ipso infinito non omnino evanescet, sed erit aliquid, licet infinite exigua. Hocque clarum est ex eo, quod solidum sub PS et AS^2 constanti cubo a^3 aequari debet; id vero fieri non posset, nisi utraque tam AS quam PS esset aliquid reale, etenim ex non-quanto seu ex absolute nihilo multiplicato per quantitatem, licet infinitam, non potest produci aliquid. His bene intellectis, nego jam sequi ex priori ratiocinio, spatium GABCF aequari spatio GNEI; quippe exinde concludi nihil potest aliud, quam quod assumta AK infinite parva et ducta KH asymtoto parallela, fieri debeat spatium GNEI aequale spatio HKBCF: id quod minime absurdum nullamque contradictionem implicat, quia potius probitatem calculi differentialis et integralis egregie confirmat; quoniam ex posteriori ratiocinio spatium GNCF seu GABCF duplum est spatii GNEI, hoc vero ut modo ostensum aequale spatio HKBCF, sequitur GABCF duplum esse ipsius HKBCF ideoque GAKH (id est rectangulum sub abscissa infinite parva AK et applicata infinita KH) = spatio HKBCF = (addita quantitate finita MBCL ad infinitam HKBCF) HKMLCF; at generaliter verum est (notantibus id etiam jam pridem Robervallio, Cavallerio, Pascalio, Fermatio, Wallisio aliisque, quod per calculum differentialem facillime invenitur) rectangulum scilicet sub abscissa AS et applicata PS aequari spatio hyperbolico MSPCL. Interim mirum Tibi videri non debet neve methodus differentialium ideo suspecta, quod rectangulum AKH latitudinis infinite exiguae AK reperiatur aequale spatio infinito AKMLCF, siquidem hoc rectangulum revera infinitum esse non obstante, quod habeat latitudinem infinite parvam, patet in ipsa aequatione ad hyperbolam $xxy = a^3$, quae resoluta in proportionem dat $x . a :: aa . xy$; unde si x seu AK sit infinite parva, id est infinities minor, quam determinata et finita a, erit pariter aa seu quadratum finitum infinities minus quam xy: proindeque xy seu rectangulum AKH revera est infinitum. Haud aliter judicandum de omni alia hyperbola $x^n y = a^{n+1}$; quotiescunque enim n unitate major est, difficultas Tua semper occurrit, nempe quia tunc semper rectangulum AKH evadit infinitum et comparabile cum spatio HKBCF, adeoque minime negligendum: sed contra quotiescunque n unitate minor vel eidem aequalis, tunc cessat objectio, quoniam scilicet rectangulum AKH tunc fit infinite parvum vel finitum et incomparabile spatio HKBCF, adeoque tuto negligi potest. Unde vides; et vel hoc nomine genuinam esse responsionem, quam hic dedi ad difficultatem Tuam; non dubito quin sit Tibi satisfactum.

LXXIX.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Doleo me causam Tibi fuisse innocentem laboris ingrati; sperabam ab alio describi posse, quod iterum mitteres. Cum nemo hic curiositates valde curet, credo ad me rediissent litterae, nisi fuissent conculcatae aut dilaceratae.

Ut Celeberrimo Voldero circa vim Elasticam satisfiat, non est opus recurri ad animas aut formas aut spiritus; nam his sepositis sufficit, uti jam in praecedente Epistola notavi, tale esse Systema rerum, ut materiae portio quantumvis exigua, ab alia adhuc subtiliore perlabente, mechanicam sese a flexu restituendi causam accipiat, quantum opus est ad observandas nostras motus leges; atque ita vis Elastica erit corpori omni essentialis, ex Systematis structura. Nec magis nos conservationem potentiae, quam Cartesianos conservationem producti ex mole in velocitatem statuentes, recurrere necesse est ad aliquid altius; neutra enim ex sola extensione et impenetrabilitate duci potest; ad Dei autem hic voluntatem nudam recurrere cum Cartesio parum philosophicum est. Et quocunque modo aestimemus eam, quae servatur, potentiam, concluditur ex eo, quod vis vel actio non perit, aliud esse in corpore, quam illa duo, extensionem scilicet et impenetrabilitatem; nam alias, ut in praecedente Epistola mea notavi, duo corpora aequalia directe sibi occurrentia se sisterent mutuo, aliaque multa contingerent prorsus et ab experimentis et a rationibus etiam aliena; quae scilicet ex simplici compositione conatuum Geometrica necessitate consequerentur, ut alicubi explicare memini in Diario Eruditorum Gallico, et jam olim in Theoria motus, quam juvenis publicavi.

Quod vero Dn. Volderus nobis objecit, nos ita cogi ad aliquid in corpore statuendum, quod concipere non possimus, bene a Te responsum est, sufficere quod experientia nos cogat ad admittendum aliquid praeter extensionem et impenetrabilitatem, sive id concipi a nobis possit, sive non. Porro ut ostendat, rem non posse concipi, quaerit, utrum id quod praeter extensionem et impenetrabilitatem admittimus, substantia sit an modus; additque, si modus sit, nihil futurum esse novi; si substantia, spiritum fore aut corpus aut tertium, et hoc tertium non posse explicari, nisi cum Veteribus ad formam substantialem dudum (ipsius judicio) explosam recurrere velimus. Sed quaerere vicissim liceret, quam assignet definitionem substantiae vel modo; praeterea dantur, quae nec substantiae sunt nec modi, ut attributa primitiva; sic certa magnitudo essentialis est datae materiae; et ita non est modus, ut sunt figura, vel motus; et tamen magnitudo non est substantia, sed attributum. Nec nostra refert, utrum id quod statuimus, sit novum, modo sit verum. Cum etiam quaeritur, an dari possit substantia, quae nec sit spiritus nec corpus, rursus definitione opus est, qua fortasse cum illo non convenimus; nam ipse corporis essentiam in extensione collocabit, ego aliquid aliud postulo. Si spiritum omnem cogitatione et intellectu praeditum censet, ego animas formasve existere putabo, quae spiritus non sint. Nec video, quid impediat varios esse Monadum gradus, ut aliae intellectu sint praeditae, aliae inferiore sensu. Itaque si formas substantiales ut res animabus analogas concipiamus, dubitare licebit, an jure sint explosae.

Rectissime etiam solvisse mihi videris Viri Clarissimi Objectionem, sane peringeniosam et elegantem, contra Calculum infinitesimalem; nempe revera infinite parvum longissime abest a nullo. Et cum aequatio ad Hyperbolam est $xxy = a^3$, patet, x posita infinite parva nempe primi gradus, esse y ad a ut aa ad xx, adeoque y esse infinitam non simplicis sive primi, sed proxime altioris, hoc est, secundi gradus; quod secus est in Hyperbola simplice, ubi y est ad a ordinariam, ut eadem ordinaria a ad infinite parvam primi gradus x. Cognatam objectionem ipse formavi olim mihi in Scholio Propositionis 22 Tractatus inediti, quem in Gallia de Tetragonismo meo Arithmetico, paulo post inventionem ejus conscripsi, ubi apparet, objectionem non tantum nostrum Calculum, sed et Geometriam jam antea receptam pari jure ferire. Nempe demonstraveram (Prop. 18) in figura Analytica simplice (sic vocabam eas, quarum aequatio relationem continens ordinariam inter ordinatam et abscissam, nonnisi duobus membris constat, quales sunt Paraboliformes et Hyperboliformes, seu ubi quaedam dignitates abscissarum sunt ut quaedam dignitates ordinatarum) (fig. 137) zonam $_1C_1B_2B_2C_1C$ esse ad zonam conjugatam $_1C_1G_2G_2C_1C$, ut exponens dignitatum ab ordinatis BC est ad exponentem dignitatum ipsis

proportionalium ab ordinatis conjugatis seu abscissis GC vel AB. Unde in Hyperbola Conica zonae sunt aequales; in ea vero Hyperboloide, quam Antiparabolam vocare possis, ubi ordinatae sunt reciproce ut quadratura abscissarum, erit zona ad zonam conjugatam ut 1 ad 2, et ita porro. Hinc talis nascitur difficultas, etiam in ipsa Conica Hyperbola: Zona $_3C_3C_2B_2C_3C$ aequalis est zonae conjugatae $_3C_3G_2G_2C_3C$ et zona $_2C_2B_1B_1C_2C$ ipsi conjugatae $_2C_2G_1G_1C_2C$, et ita porro, ponendo zonas illas semper lineis terminatis esse comprehensas. Et ita semper quodlibet tale spatium horizontale aequabitur respondenti verticali. Jam omnia quadrilinea horizontalia in infinitum usque ad A complent spatium infinitum quadrilineum $_3C_3BA$ etc.$_3C$, et omnia verticalia illis respective conjugata et aequalia in infinitum complent spatium infinitum trilineum $_3C_3G$ etc.$_3C$. Ergo haec duo spatia infinita sibi sunt aequalia, pars toti, quod est absurdum. Excessus enim prioris super posterius est rectangulum $A_3B_3C_3G$. Respondi multum abesse, uti indivisibile seu nullum in magnitudine, ab infinite parvo, ita interminatum ab infinite magno; neque sermonem hic fieri debere de spatio absolute interminato, velut $_3C_3BA$ etc.$_3C$, rectis finitis $_3C_3B$, $_3BA$, et Asymptota interminata A etc. et curva interminata $_3C$ etc. comprehenso, vel quasi; neque adeo ultimam abscissam A_0B accurate loquendo esse nullam, quasi O incideret in A, nec ultimam ordinatam $_0B_0C$ esse interminatam, quasi $_0B_0C$ incideret in Asymptotam; sed A_0B esse infinite parvam, et $_0B_0C$ esse infinite magnam, sed terminatam; inter quas media proportionalis sit ordinaria quantitas, latus scilicet quadrati constantis, quod aequatur rectangulo cuicunque ABCG, atque adeo et rectangulo $A_0B_0C_0G$, quod est longitudinis infinite magnae et altitudinis infinite parvae. Atque ita cessat objectio, neque enim duo spatia interminata supra dicta, quadrilineum nempe et trilineum, aut sibi aequantur aut a quadrilineis (unum ab horizontalibus, alterum a verticalibus) conflantur, sed spatia infinita ambo debent esse quadrilinea et terminata, nempe zona horizontalis totalis ex prioribus numero infinitis conflata $_3C_3B_0B_0C_3C$, et zona verticalis totalis itidem ex prioribus numero infinitis composita $_3C_3G_0G_0C_3C$, quae duae zonae infinitae quidem longitudine, sed tamen terminatae, inter se aequantur. Quod etiam in Hyperbola Conica per se patet, quemadmodum et in universum in ea constat, quod zona horizontalis respondenti verticali aequetur; nam si a duabus zonis detrahas commune trilineum ${}_3CE_0C_3C$, restabit in uno rectangulum $A_3B_3C_3G$, in altero $A_0G_0C_0B$, quae duo rectangula aequantur inter se, ut constat.

Atque haec quidem circa aestimationem virium naturamque corporis, pariter ac circa Calculum infinitesimalem, excerpta ex his pariter ac praecedentibus literis, Domino Voldero, si videbitur, communicari possent. Inter nos autem haec addo, quod et jam olim in dicto Tractatu inedito adscripsi, dubitari posse an lineae rectae infinitae longitudine et tamen terminatae revera dentur. Interim sufficere pro Calculo, ut fingantur, uti imaginariae radices in Algebra. Semper enim, quod per infinita ista et infinite parva concluditur, deductione ad absurdum, mea Incomparabilium methodo (cujus aliquando Lemmata dedi in Actis*)) evinci potest. Itaque mirari etiam non debes, quod dubito, an revera detur quantitas infinite parva, aut infinite magna utrinque terminata. Etsi enim concedam, nullam esse portionem materiae, quae non actu sit secta, non tamen ideo devenitur ad elementa insecabilia, aut ad minimas portiones, imo nec ad infinite parvas, sed tantum ad minores perpetuo, et tamen ordinarias; similiter ut ad majores perpetuo in augendo acceditur. Sic etiam semper animalcula in animalculis dari facile concedo; et tamen necesse non est dari animalcula infinite parva, nedum ultima. Si talia, de quibus inter nos agitur, infinita et infinite parva possibilia esse concederem, etiam crederem esse.

Sed ad reliqua literarum tuarum venio. Et quidem simplicissima est Oenometri ratio tua novissima per tubulum communem erectum et infra valvula foras spectante instructum; habet tamen illud imperfecti, quod dum reaffusionem non indicat, etiam indicare non potest, quantum post reaffusionem iterum detrahatur. Imo poterimus detrahere aliquid, ut nihil plane indicet tubulus, si nempe praecedat aquae tantae affusio, quantum mox vini detracturi simus. Quid ergo, si adjungamus adhuc alium tubulum, cujus valvula spectet introrsum? Is affusionem indicabit, detractionem non notabit; et machinamento effici posset in utroque tubulo, ut appareret, quantum quaque vice affusum aut detractum,

*) Act. Erudit. 1689. Febr.

et quis fuerit ordo affusionis aut detractionis; imo ratio posset excogitari definiendi specificam liquoris affusi gravitatem, si tanti ea res esset.

Pressionem columnae aqueae indicatam ope globuli aërem continentis et plus minusve aquam admittentis, atque adeo depressi aut emergentis, excogitavit quidam Italus, si bene memini, non Boylius. Tubi Tui varicosi inprimis placent ad usus, quos notas, ut non sit opus observatione Thermometri continua, et tamen sciri possit, quis medio tempore maximus fuerit ascensus vel descensus. Follem ex materia durabili maxime desiderarem pro Barometro portatili, aliisque usibus multis.

Cosmotheori Hugeniani praecedentes Tuae non meminerant: libenter intelligo prodiisse; nam in rebus pulchris et magnis etiam conjecturae ingeniosae pretium habent.

In Actis nuperrimis non sine admiratione mea vidi primum Tschirnhausianum*), deinde Tuam Parabolici arcus sectionem**). Vellem autem narratum fuisset, qua ratione ille a Te in rectam viam fuerit reductus; id fecissem ego, si mihi tale aliquid contigisset. Miraberis etiam expressionem dicentis, nihil Methodum suam fugere; credo, ex quo nostra intelligere coepit. Sed supersunt tamen adhuc fortasse, in quibus haereat.

Magna cum voluptate vidi methodum Maximi, quam ego ab initio statim, antequam etiam Problema Brachystochronae proponeres, maxime directam et generalem judicavi, et illi problemati adhibui, aliisque adhibendam, si bene meministi, suaseram, pulchre a Te in rem praesentem Isoperimetrarum usurpatam. Placet etiam, quod appellatione Functionum uteris more meo. Loco Isoperimetrarum liceret generalius adhibere figuras Isodynamas, secundum unam fungendi rationem, et ex iis reperire vel eligere eam, quae Maximum aut Minimum praestet alia fungendi ratione, v. gr. in simplicissimo eam, quae ex aeque capacibus est brevissimi ambitus, quae est Circulus, decussata, ut sic dicam, quaestione cum inquisitione capacissimae ex Isoperimetris. Saepe

*) De methodo arcus curvae parabolicae inter se comparandi. Act. Erudit. 1698. Jun.

**) Investigatio algebraica arcuum parabolicorum assignatam inter se rationem habentium etc. Ibidem.

etiam ego utor Functionibus differentiatis x, neglectis differentialibus; ut si z sit Functio ipsius x, tunc $\acute{d}z$ mihi est quantitas ordinaria, quae prodit dz dividendo per dx, seu $\acute{d}z = dz : dx$. Signa in cujusque arbitrio sunt, mihi tamen non placet, $\times$ multiplicationem significare, ob facilem confusionem cum x; malo adhibere τὸ in vel $\smile$ ut ZC in LM, vel $ZC \smile LM$. Imo saepe simpliciter duas quantitates puncto interposito conjungo, multiplicationemque designo, $ZC \,.\, LM$. Hinc in rationibus designandis non utor puncto, sed duobus punctis, quippe quae simul apud me signum sunt divisionis, itaque pro Tuo $dy \,.\, x :: dt \,.\, a$ scribo $dy : x = dt : a$; idem enim est dy esse ad x ut dt ad a, quod dy divisum per x aequari ipsi dt diviso per a. Ex qua aequatione etiam consequuntur omnes proportionum regulae.

Nondum satis attente examinare vacavit, an nihil referat ad maximum, quam sumas arbitrariam constantem C, in summando addendam vel subtrahendam; quo posito infinitae erunt curvae quaesitae praestantes idem seu aeque maximum; alioqui oporteret ex ipsis C rursus eam, quae maximum praestet, eligere.

Ad linteum haec noto, pro gravitatione (fig. 131) particulae FC clarius dici potuisse ejus gravationem; solet enim gravitatio sumi active, gravatio passive; sed haec minuta sunt. Illud putem, si liquor superstet linteo, ut contineatur et (fig. 138) linteo BFN et rectis RB, SN, ipsius quoque Centrum gravitatis (cum idem semper liquor maneat, utcunque mutata lintei figura) maxime descendere; sed res tamen eodem redibit.

Consensus duarum methodorum, directae et indirectae, egregius est, tum pro illis, qui haec altius non introspiciunt, tum pro nobis ipsis, ut calculi errores, aut ratiocinii paroramata melius vitemus. Dn. Menckenius tuae sectioni arcus parabolici adjecit tuam demonstrationem Tautochronismi Cycloidis, et censuram in La Hirium, nonnihil puto temperatam. Scribit mihi, in proximis Actis *) comparere debere Davidis Gregorii Catenariam ex Transactionibus. Rectius consuluisset nos prius, an aliquid afferat dignum referri. Sed ille exterorum benevolentiam captat, secus quam exteri faciunt nostris.

Pene oblitus eram dicere, quod tamen fortasse jam Tibi notum est, Dominum Fratrem Tuum specimina quaedam dedisse in

*) Act. Erudit. 1698 Jul.

Actis *) primi Problematis a Te in Diario Gallico propositi, et a Domino Marchione Hospitalio praeteriti, pro linea minima inter duo puncta ejusdem superficiei: sed non dicit, an possit generaliter. Memini me Tibi dudum scribere, quod mihi occurrerit Methodus generalis. Pono superficiem constare ex portionibus superficierum, in quibus minimae jam duci possunt, quales sunt planae aut sphaericae, tanquam elementis. Nam in plana minimae sunt rectae, in sphaera minimae sunt arcus magni. Jam quia ex Methodo mea generali directa formarum maximum minimumve praestantium, etiam linearum minimum praestantium portiones utcunque parvae minimum praestant, ita quoque ex puncto unius portionis seu hedrae (quod eligi potest maxime determinatum) ad punctum alterius proximae portionis quaerenda est via minima, composita ex minimis viis in utraque hedra ad punctum in communi hedrarum sectione ita sumtum, ut summa sit possibilium minima. Sint (fig. 139) hedrae (nempe portiones planorum vel sphaericarum superficierum datam superficiem tangentium, vel, si in sphaeris malis, osculantium) LMN et PMN haec plana, aut hae superficies sphaericae vel hedrae habeant communem in superficie data sectionem MN. Et sint duo puncta datae superficiei sibi indefinite vicina R et S, quae in hedris istis duabus determinatam maxime (ob facilitatem calculi) positionem habere intelligantur: quaerendum est sectionis hedrarum communis MN punctum tale T, ut minimarum ab R et S ad T, nempe ipsarum RT et ST (quae in hedris planis sunt rectae, in sphaericis arcus magni) summa $RT + ST$ sit omnium possibilium minima, et determinatio puncti T dabit naturam lineae in superficie data ducendae, inter puncta sua minimae, generalem. Et harum linearum eae deinde eligendae infinitae, quae transeunt per punctum datum, et ex his demum una (regulariter) quae a puncto dato tendit ad alterum punctum datum. Quod si Tibi alia occurrerit via, tanto erit gratior. Sin hanc ipsam excolueris, etiam sic jucundum erit intelligere Tuo studio eruta; materia enim pulchra est et Te digna. Vale etc.

Dabam Hanoverae 29 Julii 1698.

*) Solutio sex problematum Fraternorum etc. Act. Erudit. 1698 Mai.

LXXX.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Groningae $\frac{16}{26}$ Aug. 1698.

Hactenus a Dno. Voldero nullam accepi responsionem; an sit quod forte ipsi satisfecerim, nescio: percuperem saltem nosse, quid jam sentiat de sua objectione contra Calculum infinitesimalem, quam insolubilem credidit, nisi ad plurimum dicendo (hac enim responsione sibi ipsimet adblandiebatur) Axiomata pro finitis quantitatibus recepta non valere pro infinitis, ita ut sine contradictione duo infinita censeri possint simul aequalia et inaequalia, pars infiniti aequalis toti infinito, simplum duplo etc. Sed cum valeat ubique, Nihil simul esse et non esse potest, hanc responsionem nullam esse praevideram statim, et genuinam promiseram, quam misi. Etiam mihi quandoque occurrerunt objectiones similes Tuae, quam ipse Tibi in Gallia formasti (utilem et gratam rem faceres publico, si tractatum ederes, quem de hisce conscripsisti) etnon ita pridem Varignonius hujusmodi diluendam mihi proposuerat circa descensum gravium.

Instabit, scio, Volderus petere claram explicationem illius tertii, quod praeter extensionem et impenetrabilitatem requiris in corpore. Regeret forsan, si tales Monades statuas corporibus peculiares, sive illas nomines formas substantiales sive res animabus (intelligentibus an sentientibus, quod Voldero perinde est) analogas, monadem aut toti corpori aut parti attribuendam esse non toti corpori, quia potest dividi in partes a se mutuo independentes, non parti, quia pariter in plures partes independentes dividitur. Si vero corpus ex infinitis monadibus conflatum dicas, tunc quamlibet aut extenso aut non extenso fore affigendam: si extenso, licet infinite parvo, priorem recurrere difficultatem, nisi ad atomos refugere velis; si non extenso, ergo nihilo, quia ex non-extensis non componi potest extensum; ita ut forte cogaris dicere, quodlibet corporis punctum (dico punctum mathematicum indivisibile) peculiari monade seu tali anima donatum esse. Quantum ad vim elasticam, Tecum sentio, nec forma nec anima nec spiritu opus esse, ut illa corpori sit essentialis; rectissime, namque mihi dicere videris, eam ex mechanismo seu structura corporis dependere posse: quemadmodum non opus est anima, ut duo

magnetes se mutuo attrahant vel repellant. Et ego sane saepius cogitavi, annon quodlibet corpusculum, quantumvis exiguum, ita a Deo sit constructum, ut pro ratione molis suae, certam habeat copiam materiae longe subtilioris circa se et per se continuo perlabentis, ipsiusque quasi sphaeram activitatis constituentis. Tale quid etiam Newtonus statuisse videtur, quando illum dicere nemini, omnia et singula corpora totius universi in se mutuo gravitare seu se mutuo attrahere, adeo ut meum corpus, verbi gr., non magis versus centrum terrae trahatur, habita ratione vicinitatis, quam versus centrum Saturni, aliusve Planetae, praeterquam quod vacuum admittat, Hugenio approbante, ut ex Cosmotheoro vidi.

Nunquam me dixisse memini, in divisione materiae ad elementa insecabilia aut ad minimas portiones deveniri posse: sed hic non est quaestio, quousque ego divisione seu actuali seu mentali pervenire possim; quaeritur quousque jam perventum sit. Concedis materiae portionem finitam actu jam divisam esse in partes numero infinitas, et tamen negas aliquam istarum particularum posse esse infinite exiguam: 'quomodo haec cohaerent? Nam, si nulla est infinite exigua, ergo singulae sunt finitae; si singulae sunt finitae, ergo omnes simul sumtae constituent magnitudinem infinitam, contra hypothesin. Concipe aliquam magnitudinem determinatam dividi in partes geometrica hac progressione descendentes $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+$ etc. Quamdiu numerus terminorum finitus est, fateor singulos terminos fore etiam finitos; sed si omnes termini *actu* existunt, erit sane infinitesimus omnesque sequentes infinite parvae magnitudinis: atqui in quolibet corpore ob divisionem actualem jam factam, non faciendam, *revera* et *actu* omnes termini talis progressionis existunt. Ergo etc. Praeterea corpus, quod motu suo describit lineam, existit utique *actu* in singulis punctis, quae in illa linea concipere possum, ergo etiam in duobus, quae ego concipio infinite sibi vicina, adeoque actu intervallulum illud seu particulam infinite exiguam emensum est. Tandem licet talis particula infinite parva non existeret separatim, coexistit tamen cum toto; sed miror, quod dicas, quodsi talia, de quibus inter nos agitur, infinita et infinite parva, possibilia esse concederes, etiam crederes esse. Vellem ergo, ut mihi demonstrares impossibilitatem; nam quemadmodum non tantum mihi tribuo existentiam eorum probare me posse, ita e contrario persuasissimus sum impossibilitatem ejus nullis argumentis posse evinci.

Gaudeo Tibi placuisse Oenometri rationem meam; placet vicissim perfectio Tua pro reaffusione cognoscenda, de qua ego non sollicitus eram, quia nec Galli illius automatarii machinulam id praestare intellexi; forte praestat. Sed quid, si detractio vini et reaffusio aquae fiunt simul, ita ut quantitas liquoris in dolio nunquam mutetur? Uterque sane tubulus observatorem frustrabit, neque remedium video pro hoc. Ceterum valvulae etiam applicari possent Barometris et Thermometris communibus pro maximo ascensu et descensu explorando, unde tubis varicosis non esset opus; sed praevideo difficultatem applicationis valvularum intra tubos vitreos.

Mirabilia mihi narras de Tschirnhausii modo procedendi; expectabam ab ipso agnitionem sui erroris et revocationem absurdae suae refutationis, imo et gratiarum actionem, quod a me in rectam viam sit reductus. Quid? loco horum rependere ingratitudinem, mihi furari inventionis laudem, dicere nihil methodum suam fugere: talia profecto virum honestum non decent. Ubinam antiquus ille candor, quem Dn. Menkenius impense adeo in illo extulit, ut nullum unquam inter Eruditos Tschirnhausio candore parem vidisse gloriatus fuerit (ein ehrlicher Cavalier, dessen gleichen ich unter gelehrten an candore, höfligkeit und Dienstwilligkeit nie angetroffen); aut magnus Hypocrita Tschirnhausius, aut caecus adorator Menkenius. Quicquid sit, Dn. Menkenius non omnino est extra culpam, cur primum meum schediasma suppressit? cur secundum tam diu retinuit? cur Tschirnhausio communicavit, antequam imprimeret? cur Tschirnhausianum meo praeposuit? cur publicum non monuit, meum schediasma longe prius ad manus suas pervenisse et quidem jam tum, cum Tschirnhausius rem adhuc impossibilem crederet? cur non monuit, ut alibi fecit pro Tschirnhausio inventore, mihi deberi primam inventionem? Si haec fecisset, ex debito fecisset et prout nulli partium studio addictum deceret; sed video populari suo plus favere quam mihi, nec exterorum benevolentiam adeo captare, quia suorum plus ambiat. Interim gestio scire, an Tschirnhausio communicaveris meam responsionem ad futilem ejus refutationem, et quid Tibi rescripserit; optarem etiam ipsum admoneas, ut mihi justitiam faciat, primam inventionem mihi publice attribuendo; quodni fecerit intra hoc, quod restat anni tempus, sciat me vulgaturum (non quidem in Actis Lips. quia Dn. Menkenius non imprimeret, sed alibi) narrationem totius Hi-

storiae una cum priore meo schediasmate suppresso et ejus literis ad Te scriptis meaque ad illas responsione, ut publicum videat, quid inter nos privatim fuerit gestum et quantum ille hujus inventionis sit particeps. Quae omnia procul dubio non vergent in ejus laudem, sed sibi imputet, si dando mihi quod meum est, duriora praevenire noluerit.

Laetor admodum solutiones meas Problematis Isoperimetrorum duplici methodo inventas Tibi probari: animadvertisti, credo, me adhibuisse in methodo directa considerationem Ellipticulae, prout ego ab initio statim conceperam, absque qua forte non tam facile pervenissem ad cognitionem aequalitatis arculorum OX et $\omega\xi$, id quod palmarium est in hoc scrutinio. Elegans est conversio Tua quaestionis Isoperimetrarum in Isodynamarum, ubi scilicet ex omnibus figuris Isodynamis seu ejusdem capacitatis quaeritur illa, quae certa fungendi ratione producat aliam figuram brevissimi ambitus inter omnes illas, quae eadem functione ab aliis Isodynamis produci possent. Sed problema hoc modo consideratum difficilius mihi apparet. Ad denotandam Functionem alicujus quantitatis indeterminatae x, mallem uti litera majuscula cognomine X vel graeco ξ, ut simul appareat cujus, indeterminatae fit Functio; hoc levaret memoriam. Quantum vero ad signum Functionis differentiatae, facile adoptabo Tuum $\acute{d}$ loco mei D, quoniam simplicius est, ideoque in Tua est manu substituere illud in schediasmate meo. Reliqua, quae mones circa notationem signorum vulgarium, etiam ego approbabo; interim malui morem receptum sequi, quam novorum signorum definitionem praemittere, id quod commodius fieri potest conscribendo integrum Tractatum. Lubens credam Te nondum satis attente examinasse, an quid referat ad maximum, quam sumam constantem C in summando addendam vel subtrahendam. Si enim vel tantillum attendisses, vidisses facile, revera infinitas debere esse curvas, quae eadem functione maximum praestant, non tamen inde sequi, dari maximum maximorum; crescunt quippe illa maxima $a\,o$ in infinitum. Sumamus ex. gr. casum simplicissimum, existente numero potestatis $n = 1$, problematis Fraterni, ubi scilicet curva quaesita genitrix BFN (fig. 131) et genita BZN est eadem curva, utraque nempe circulus: patet utique non modo semicirculum BFN quaesito satisfacere, sed quodcunque aliud segmentum vel majus ut (fig. 140) BRN, vel minus ut BSN, ita ut BRN et BSN aeque faciant maximum inter suas respective Isoperimetras, quam BFN. Hic vero nullum est maximum maximorum, quandoquidem BSN in infinitum diminui et BRN in infinitum augeri potest. Hoc apprime convenit cum mea generali aequatione $dy = \frac{dx . \overline{X \pm C}}{\sqrt{aa - \Box\overline{X \pm C}}}$ in qua si, loco generalis Functionis X substituatur x, habebitur $dy = \frac{dx . \overline{x \pm c}}{\sqrt{aa - \Box\overline{x \pm c}}}$, seu summata aequatione $y \mp b = \sqrt{aa - \Box\overline{x \pm c}}$, quae aequatio est ad semicirculum BFN, si $c = o$; ad segmentum majus BRN, si adhibeatur $- c$; et ad segmentum minus BSN, si $+ c$. Et quidem in hoc solo casu, quando $X = x$, omnes tres curvae BSN, BFN, BRN, sunt cognomines, nempe omnes circuli; sed in reliquis omnibus casibus sunt diversi generis curvae; si ex. gr. $X = \sqrt{x}$, tunc assumta $c = o$, erit BFN Cycloïs, sed si sumatur $+$ vel $- c$, tunc BSN vel BRN cessat esse Cycloïs.

Gratum mihi esset videre Gregorii Catenariam et Tschirnhausii Schediasma. Si ea mihi mittere velles, remitterem ocyus; Acta enim non nisi tarde admodum ad me' perveniunt. Nondum vidi, quid Frater dederit in Actis pro linea brevissima inter duo puncta ejusdem superficiei: generaliter id posse dubito. Methodus Tua vel potius basis alicujus Methodi legitima est, eaque etiam primo se mihi obtulit, cum hoc Problema mihi incideret, et quidem porro facile videbam (fig. 139) lineam brevissimam in duabus haedris se secantibus, ab R ad S tendentem, eam esse quae faciat cum communi haedrarum sectione NM duos angulos ad verticem, ut ita dicam, oppositos RTM, STN aequales. Sed hoc hactenus nihil juvat pro constructione totius lineae quaesitae in superficie curva. Alium praeterea inveni solvendi modum, qui generalissimus est, quique in eo fundatur, quod planum transiens per tria quaelibet puncta proxima lineae quaesitae debeat esse rectum ad planum tangens superficiem curvam in aliquo istorum punctorum. Hinc enim generalem erui aequationem pro omnibus superficiebus, quae in nonnullis, ut in Conoidibus et Sphaeroidibus rectis cujusvis gradus facile construitur. Vale et fave etc.

P. S. Meis jam scriptis, accipio hasce a Dno. Varignonio cum descriptione Vinometri, quod valde compositum deprehendo vereor-

que, ne vel sola frictio denticulorum et virgulae ferreae liberum descensum et ascensum suberis multum impediat, praeterquam quod eundem defectum habet, quem nostrum, quod scilicet nihil indicet, si effusio et affusio simul fiant. Misit etiam longam, sed absurdissimam Fratris Epistolam in Diario editam *), ubi Frater singularem omnino refutandi viam init. Fingit enim sibi statim analysin quandam desumtam ex methodo indirecta (sed male et longe aliter, quam ego feci, adhibita, conjicit enim me supposuisse centrum gravitatis debere infimum locum sumere in liquoribus, ubi mutata figura non eadem copia manet, quod tamen scis me in primis praecavisse, nullamque me habere considerationem centri gravitatis, sed rem totam deducere a summa gravitationum seu gravationum, prout volueris nominare): illaque me usum fuisse conjecturat et tandem temere affirmat, quam igitur prolixe refutat, ostendendo quod multae absurditates exinde sequantur: quod quidem veritatem in multis invenerim: id autem factum esse ex accidenti, quod commiserim duos paralogismos feliciter adeo se mutuo corrigentes, ut fortuito verum exhibuerint. Vides miserum hominem cum umbra pugnare; quid, quaeso, ineptius quam refellere analysin, quae mea non est? si volueris, mittam foliola. Praeter Te asciscit adhuc in arbitros Dn. Hospitalium et Newtonum. Respondi **) ejus refutationem me non tangere, me meas Methodos et directam et indirectam cum Analysi apud Te diu deposuisse: etiam Fratrem debere suas Tibi summittere, quas utrasque simul publicaturus sis, ut Lectores reliquique inprimis arbitri cum se invicem tanto commodius conferre et de collatis judicare queant.

Hoc ipsissimo momento accipio Tuas postremas $\frac{9}{19}$ Aug. datas. Gaudeo quod mihi suadeas, quod jam antea facere constitueram: intra paucas hebdomades videbis meam responsionem in Diario prodituram. Simul etiam accipio Acta Lips. ad Junium inclusive; sed nihil adhuc in illis legi. Mittes ergo tantum si placet Gregorii Catenariam.

---

*) Journal des Savans Aout.

**) Journal des Savans Decemb.

LXXXI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Accipio Diarium Gallicum, in quo responsio Domini Fratris Tui. Omnino judicavit, ut divinasti, Te ope lintei pervenisse ad quaesitum, sed non praevidit, Te etiam via alia directiore usum esse. Suadeo ego, ne praecipites publicationem Tuam viae directae, ob rationes olim allegatas. Vix enim nisi paucissimi possunt esse judices, et hi possunt privatim intervenire; caeteris, quales Dnus. Tschirnhausius et Dnus. Nieuwentiit, qui nostris non ita uti mihi videntur, ut aequum erat, tantum suppeditamus, quibus alant suam ἀνθάδειαν beneficii accepti dissimulatricem.

Epistola Domini Fratris Tui ad Dominum Varignonium directa est, quod ex eo judico, quia ipsius Theorema mechanicum de sinubus laudat.

Uti se ait mea expressione per (:), commodo Typothetarum; poterat eodem modo etiam exprimere rationem, ut nuper scripsi.

Ad priores me referens nihil nunc addo, nisi ut valeas et me ames, qui sum perpetuo tuus etc.

Dabam Hanoverae $\frac{9}{19}$ Augusti 1698.

LXXXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratum mihi est intelligere, Oenometrum Gallicum nihil aliud esse, quam suberem, qui elevatur secundum virgulam ferream, denticulis adjunctis. Huic constructioni nostram utique praeferendam putem. In Thermometris et Barometris Tubos varicosos valvulis Tecum praetulerim.

Dno. Tschirnhausio ad literas ipsius responderam, me Tibi communicaturum vel communicasse, quae objicit; ab eo tempore mihi non scripsit. Velim inter bonos bene et candide agier, et suum cuique tribui. Dn. Tschirnhausius quanto magis simulat a se negligi gloriam, tanto eam affectat magis. Dn. Menkenius utilitatum suarum magis, quam aequitatis rationem habet. Dno. Tschirnhausio defert tanquam vicino, quicum saepe agendi occasio est; exteris remotioribus, ut Gregorio, Nieuwentiitio et similibus favet, ut eos benevolentiae significatione invitet; nos satis sibi astrictos putat. Gregorii Catenariam nondum vidi, sed tantum ex literis Menkenianis intellexi, Actis insertum iri*): ubi accepero, mittam statim. Respondi ipsi, videri mihi eam venturam post festum, nec Anglos nostra, nisi aliquid novi et digni habeant, referre.

Video, quia Problemata Isoperimetrorum solvuntur non pro uno dato ambitu, sed pro procunque, utique non unum maximum maximorum ibi haberi, sed variari in infinitum debere; interdum tamen in aliis casibus haec cautio erit utilis, ut determinatio assumtae inter summandum constantis adhibeatur.

Uti dato ambitu, Ellipticula, ita alio dato, alia curvula est opus; et licet de curvula non cogitetur, sufficit duobus punctis datis tertium manere indefinitum (utique in curva) ex lege maximi determinandum: unde jam proprietas lineae quaesitae. Idque revera et pro ducenda minima in data superficie contingit, ut adeo semper eadem sit methodus directa generalissima et ad aequationem (saltem differentialem) deveniatur. Nec pro minima superficiei abludit speciale, quod adhibes, Theorema elegans et utile; nam circulus maximus in sphaera superficiem datam tangente, transiens per tria puncta proxima lineae minimae quaesitae, est planum rectum ad planum superficiem datam illic tangens.

Uti Dn. Volderus, ita olim Gregorius a S. Vincentio alicubi dixit, in infinito non habere locum Axioma, quod Totum sit majus parte. Sed mihi videtur alterutrum dicendum, vel infinitum revera non esse unum totum, vel infinitum, si totum sit, et tamen non sit majus sua parte, esse aliquid absurdum. Sane ante multos annos demonstravi, numerum seu multitudinem omnium numerorum contradictionem implicare, si ut unum totum sumatur. Idem de numero maximo et numero minimo, seu fractione omnium infima. Et de his dicendum, quod de motu celerrimo, et similibus. Etiam Universum non est unum totum, nec concipi debet ut animal cujus anima Deus, uti Veteres faciebant. Quemadmodum autem non datur Elementum Nu-

---

*) Acta Erudit. 1698 Jul.

mericum seu minima pars unitatis, vel minimum in Numeris, ita nec datur linea minima,' seu elementum lineale; linea enim, ut Unitas, secari potest in partes vel fractiones. Interim fateor, cum aliud sit maximum ab infinito et minimum ab infinite parvo, non hinc statim refutari possibilitatem nostrorum infinite parvorum. Et saltem in calculo et ratiocinatione adhiberi possunt, quod de maximo interminatoque, itemque de minimo non licet, ut jam observavi. Cum dixi, si infinite parva et infinita possibilia crederem, me concessurum ea esse, non ideo dixi ea esse impossibilia; sed rem in medio adhuc reliqui. Cum negavi, ad minimas portiones deveniri, facile judicari poterat me non locutum de nostris divisionibus, sed etiam de illis, quae actu fiunt in natura. Etsi igitur pro certo habeam, quamlibet partem materiae esse rursus actu subdivisam, non ideo tamen hinc sequi puto, quod detur portio materiae infinite parva, et minus adhuc sequi concedo, quod ulla detur portio omnino minima. Si quis consecutionem in formam' redigere velit, sentiet difficultatem. At inquies: Si **nulla est infinite exigua, ergo singulae sunt finitae** (concedo); **si singulae sunt finitae, ergo omnes simul sumtae constituent magnitudinem infinitam.** Hanc consequentiam non concedo; concederem si aliqua daretur finita, quae minor esset caeteris omnibus, vel certe nulla alia major; tunc enim fateor talibus assumtis, pluribus quam est datus numerus quivis, oriri quantitatem majorem data quavis. Sed constat, quavis parte aliam minorem finitam dari. Uteris exemplo sane ad rem accommodato. Ponamus in linea actu dari, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$ etc. omnesque seriei hujus terminos actu existere; hinc infers dari et infinitesimum, sed ego nihil aliud hinc puto sequi, quam actu dari quamvis fractionem finitam assignabilem cujuscunque parvitatis. Similiter in motu, etsi per omnia puncta transeatur, non tamen sequitur duo puncta dari sibi infinite vicina, et multo minus dari sibi proxima. Et revera puncta concipio, non ut elementa lineae, sed ut limites seu negationes progressus ulterioris, sive ut lineae terminos.

Quod ad Corporis Naturam attinet, saepe dixi (quod videris non improbare) omnia phaenomena in corporibus explicari posse Mechanice, adeoque et vim Elasticam; interim ipsa principia Mechanismi seu Legum motus ex sola consideratione extensionis et impenetrabilitatis non posse derivari; itaque aliud quid in corpore

esse statuendum, cujus modificatione oriantur conatus et impetus, uti modificatione extensionis oriuntur figurae. Per Monadem intelligo substantiam vere unam, quae scilicet non sit aggregatum substantiarum. Materia ipsa per se, seu moles, quam materiam primam vocare possis, non est substantia; imo nec aggregatum substantiarum, sed aliquid incompletum. Materia secunda, seu Massa, non est substantia, sed substantiae; ita non grex, sed animal; non piscina, sed piscis, substantia una est. Etsi autem corpus animalis, vel meum organicum, rursus ex substantiis innumeris componatur, eae tamen partes animalis vel mei non sunt. Sed si nullae essent animae, vel his analoga, tunc nullum esset Ego, nullae monades, nullae reales unitates, nullaeque adeo multitudines substantiales forent; imo omnia in corporibus non nisi phasmata essent. Hinc facile judicatur, nullam esse materiae partem, in qua Monades non existant.

Miratus sum Hugenium atque Newtonum admittere vacuum, scilicet quod animum ultra Notiones Geometricas non sustulere. Magis adhuc mirum est, Newtonum statuisse attractionem, quae mechanice non fiat. Interim quod ait corpora in se gravitare (saltem ad sensibiles effectus in magnis corporibus nostri systematis) non videtur contemnendum, etsi Hugenio id minus arrideat. Et plane probo quod ais, corpus utcunque exiguum habere suam sphaeram activitatis; dicere soleo nullum esse corpusculum, quod non sit mundus quidam infinitarum creaturarum.

Optime facis, ut functionis nota designet, cujus literae sit functio, veluti ut ξ sit functio ipsius x. Si sint plures functiones ejusdem, possent distingui numeris. Soleo interdum adhibere notam relationis hoc modo $\overline{x}\lfloor\underline{1}\rfloor$, $\overline{x}\lfloor\underline{2}\rfloor$, etc. id est utcunque formatum ex x; ita si quod ex pluribus formatum, ut ex x et y scribo $\overline{x;y}\lfloor\underline{1}\rfloor$, $\overline{x;y}\lfloor\underline{2}\rfloor$. Et quando formatio' est rationalis adscribo r, veluti $\overline{x}\lfloor\underline{r,1}\rfloor$ et $\overline{x}\lfloor\underline{r,2}\rfloor$ vel $\overline{x;y}\lfloor\underline{r,1}\rfloor$, $\overline{x;y}\lfloor\underline{r,2}\rfloor$. Si formatio sit rationalis integra, scribo $\overline{x}\lfloor\underline{ri,1}\rfloor$, $\overline{x}\lfloor\underline{ri,2}\rfloor$. Sed ubi nonnisi una functio, aut paucae, sufficiunt literae graecae,' vel aliquid tale, ut soles.

Meus Tractatus Tetragonismi Arithmetici poterat applausum habere tunc, cum scriberetur; nunc tironibus nostrarum Methodorum magis placeret, quam Tibi. Cum Dn. Frater Tuus putet Te alicubi non dedisse verum responsum, oportet ut aliam sibi habere videatur solutionem generalem. Verba, quibus Hospitalium et Newtonum mihi adjungit, non vidi, et ut communices rogo. Ais in P. S: „Meis jam scriptis accipio hasce a Dno. Varignonio;" illud „hasce" significare videtur ac voluisse Te adjicere Varignonianas, et id facere oblitum esse.

P. S. His jam scriptis, allatus est ad me mensis Julius Actorum, unde haec Gregoriana de Catenaria mitto, quae legendi mihi spatium nondum fuit. Judicium igitur Tuum ubi remittes, plagulas istas accipere spero.

LXXXIII.
Joh. Bernoulli an Leibniz.

Remitto plagulas Actorum cum gratiarum actione. Nihil in his video praestitisse Gregorium, quod applicationem septennalem post nostras solutiones editas mereatur, quodve non a quovis Tyrone, qui calculum nostrum tantillum calleret, praestari potuisset. In eo enim totus est, ut quas olim invenimus catenariae constructiones et proprietates, ille nunc per analysin examinet et demonstret; quod quam facile sit a posteriori, id est, ex generali rei natura semel cognita et a nobis tradita, Tuo judicio relinquo. Fecisset aliquid, si nostris non visis, a priori problema solvisset. Ut vero ex mechanicis primariam catenae proprietatem eliceret, ex qua cetera omnia pendent, ex ejus ratiocinio clare patet, sibi non fuisse scopum eruendi quod incognitum supponitur, sed potius ut, qua data porta, ad nostram solutionem perveniret, modo speciem solutionis exhibuisse videretur. Suum adeo solvendi modum quaesito, quod jam cognitum habebat, accommodasse credo. Etenim Prop. 1. si non paralogizat, saltem maxima est inevidentia, dum nescio quo pacto confundit potentias. Sed tamen verum concludit, forte quod duos paralogismos se mutuo corrigentes (ut Fratris termino utar) admiserit, vel potius quaesiverit studio. Videtur enim, ut modo dixi, praemissas conclusioni, non vero conclusionem praemissis adaptasse. Miraberis innuentem statim, quasi etiam nos usi fuerimus methodo Newtoniana, quando illam Geometris familiarem depraedicat. Rem forte gratiorem multis fecisset Dn. Menkenius, si hanc cramben recoctam omisisset, prae-

sertim cum scateat tot vitiis typographicis, sensum non turbantibus, sed pervertentibus, ut qui nostra non antea intellexerit, frustra sit ea hinc ediscere velle. Notat Gregorius catenariam esse debitam curvaturam fornicibus conciliandam; sed diu est, quod idem et ego et alii annotavimus.

Oblitus fueram adjicere nuperis meis Varignoniana, ea nunc mitto. Legi et relegi quae Tschirnhausius de secandis arcubus parabolicis in Actis habet; at ne nunc quidem rem acu tetigit. Quam misere obscura sunt omnia! Nescio quid velit, quove tendat! Dicit se per suam methodum solvere posse sine prolixo calculo; cur ergo solutionem non dedit? cur finalem aequationem non exhibuit, si aliquam habet? Sed haec jactat in aëre, et mea attenuet, invidet quippe mihi primam inventi laudem, sed non impune; patefaciam publico, quam candide mecum egerit.

Legi etiam Fraternas solutiones Problematum meorum; sed eum longe abesse a generali solutione apparebit ex responsione, quam nuper ad Acta misi.*) Problema de ducenda linea minima solvit tantum pro Conoïdibus rectis et circularibus, non pro quavis superficie curva. Item reliqua Problemata in Diario Gallico proposita, pro curvis similibus, non pro quibusvis ordinatim positione datis soluta dedit. Trajectorias (datis ordinatim positione in angulo recto occurrentes) in paucissimis determinavit, non vero generaliter, multo minus pro angulo obliquo, et minime pro angulo data lege variante, quemadmodum ego solvi, si recordaris.

Hac ipsa hora extra urbem abiturus, nunc ad literarum Tuarum contenta prolixe, prout vellem, respondere non possum: id saltem dico, me etiam credere maximam et minimam quantitatem non dari; infinita et infinite parva non posse demonstrari existere, sed etiam non posse demonstrari non existere; probabile tamen esse existere. — Si omnes termini hujus progressionis $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}$ etc. actu existunt, ergo existit infinitesimus, et omnes qui eum sequuntur: mihi videor hoc jure posse inferre ex actuali existentia. Nec ego puncta concipio ut elementa lineae, sed ut limites tantum. Quid per materiam primam per se seu per molem di-

---

*) Annotata in solutiones Fraternas Problematum quorundam suorum, Acta Erudit. 1698 Octob.

stinctam a materia secunda seu massa intelligas, non satis capio; neque etiam quid Tibi sit incompletum. Si materia secunda seu massa non est substantia, sed substantiae; si bene comparas cum grege seu cum piscina; divide ergo mihi certam portionem materiae in suas substantias solitarias, singulares vel individuas, quemadmodum grex dividitur in animalia, exercitus in milites etc. et explica quaeso clare, in quo putes talem substantiam singularem consistere. Esto esse aliquod animae analogum: concedis portionem materiae nullam esse tam exiguam, in qua non infinitae existant tales animae, tales substantiae, tales monades, seu quocunque nomine velis notare: quousque ergo progrediendum, ut perveniam ad simplicem unitatem singularem et individuam, ut possim dicere hanc esse substantiam, non substantias? Sane materia non modo dividenda erit in partes infinite exiguas, sed in minimas, id est, in puncta seu non quanta, quae non dantur.

Hesterna luce accepi literas a Dno. Voldero. Is sibi satisfactum fatetur his verbis: „In literis tuis offendi solutam difficultatem quam tibi proposueram, non ut impugnarem indivisibilium methodum, de qua eram persuasissimus, sed quod mirum mihi videbatur eadem ratiocinandi via in una parte hyperbolae recte nos concludere, in altera secus, cum tamen omnia viderentur paria, eademque aequatio utrique parti conveniret etc." Hisce vale et fave etc.

P. S. Verba quibus Frater arbitros, Hospitalium et Newtonum, Tibi adjungit, haec sunt: „Je declare que bien loin de refuser dans tout ce different l'arbitrage de M. Leibnitz, je veux encore accepter de bon coeur celuy de M. le Marquis de l'Hôpital et de M. Newton, comme de tous les plus excellens Geometres de ce temps, pourvû qu'ils veuillent surseoir leur jugement jusqu'à ce que j'aye parlé à mon tour, et que j'aye achevé de repondre aux deux solutions que mon frere nous a données dans le Journal."

LXXXIV.
Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ante omnia nuntio, literas Tuas, quas in itinere inter Hanoveram et Herrenhusam, ubi aula est, perditas ex circumstantiis credideram, praeter spem comparuisse in massa schedarum, ubi prius quaesieram frustra; itaque Te metu solvo, quam Tibi incutere poterat lector incommodus eorum, quae de Pastoribus quibusdam vestris dicebas, quos ego nunc a prudentioribus edoctos rectius judicare arbitror.

Gregoriana de Catenaria adspexeram magis, quam legeram; sed dubitatione Tua admonitus, demonstrationem propositionis primae, qua fundamentalem quandam lineae proprietatem constituere conatur ex Mechanicis, non tantum legi, sed et examinavi: et (mirum dictu) Vir caetera ingeniosus ita paralogizare deprehensus est, ut vix tyro possit magis; sed perplexitate exprimendi se fortasse ipsum decepit successu apparente. Adjeci examen, rogoque ut consideres, mihique sententiam Tuam perscribas, deliberesque mecum, an e re sit mittere ad Acta. Satis apparet quidquid affectet, non satis ab ipso intelligi usum Calculi infinitesimalis, et induisse sese in spinas, fere ut olim Dnus. Sauveur Parisiis. Usum Catenariae ad fornices non satis concepisse animo vel explicuisse videtur. Et sane mereretur res exponi a Te distinctius.

Dni. Tschirnhausii processum Tecum admiror, vellemque actum fuisse apertius, et suum cuique tributum.

Venio nunc ad ea quae in Epistola Tua novissima sunt μεταφυσικώτερα. Colligis ita: Si omnes termini hujus progressionis $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$ etc. actu existunt, etiam existere infinitesimum, et qui eum sequuntur. Respondeo: Collectionem esse probam, si concedatur aliquem revera esse terminum infinitesimum, aut post-infinitesimum, id ipsum vero a me non concedi.

Quaeris 1°. quid per materiam per se, seu materiam primam sive molem, a secunda distinctam, intelligam. Respondeo: id quod est mere passivum, atque ab animabus vel formis sejunctum.

Quaeris 2°. quid mihi hic sit incompletum? Respondeo: passivum sine activo, et activum sine passivo.

3°. Petis, ut Tibi dividam portionem massae in substantias, ex quibus componitur. Respondeo, tot in ea esse substantias individuas, quot in ea sunt animalia sive viventia vel his analoga; itaque eodem modo divido, ut gregem sive piscinam, nisi quod liquidum interjectum inter animalia gregis aut inter pisces, itemque liquidum (imo et reliquam massam) in quolibet pisce vel animali contentam, rursus ut novam piscinam dividi debere arbitror, et sic infinitum.

4°. Monadem completam seu substantiam singularem voco non tam animam, quam ipsum animal aut analogum, anima vel forma et corpore organico praeditum.

5°. Quaeris, quousque progrediendum, ut habeamus aliquid, quod sit substantia, non substantiae. Respondeo, talia statim offerri etiam sine subdivisione, et unumquodque animal tale esse. Neque enim ego, Tu, ille componimur ex partibus corporis nostri.

6°. Vereris ne materia componatur ex non-quantis. Respondeo, non magis eam componi ex animabus, quam ex punctis.

Quanto plura quaeres, eo magis videbis connexionem firmitatemque sententiae, non levi consideratione, sed post diuturnam a longo tempore tractationem et retractationem tandem constitutae, et fortasse aliquando non minus probabis haec *μεταφυσικώτερα*, quam illa *δυνάμικα*.

Dnus. Bayle, auctor Dictionarii duobus in folio voluminibus editi, qui olim Novellis Reipublicae Literariae operam dederat, cum non in Philosophia minus, quam Historia valeat, lectis quibusdam meis Philosophicis in Diario Gallico et Batavo, objectiones quasdam humanissime propositas inseruit Dictionario suo, voce: Rorarius. Eas cum nuper legissem, responsionem modestam misi Dno. Basnagio, ut si videatur inserat suae Historiae Operum Eruditorum, modo Dnus. Bayle assentiatur. Hic responsionem meam secum communicatam sibi non tantum pulchram, sed et efficacem (fortem, ut Gallica vox habet) videri, significavit ipse Literis humanissimis ad me datis, editionemque ejus gratissimam sibi fore professus est. Quaeram, an adhuc aliquid ipsum moretur?

Pro Varignonianis notitiis, quae sane mihi valde placent, gratias ago. Oenometrum Langlosianum compositius est, quam ut facile homines id sint in ordinariam praxin deducturi.

Quoniam Historia Academiae Scientiarum Regiae typis paratur, rogo ut quaeras, sed tanquam per Te, an aliqua et qualis ibi mentio mei, cui reapse ibi datus fuit a Rege locus, etsi tunc cum introducendus eram, Johannes Fridericus, Dux Brunswicensis, me evocavit ad se; quod ipsum tanquam Tibi notum addere potes, quo minus Dnus. Varignonius quaestionem miretur.

Nosse etiam velim, quis Auctor Historiae, utrum Dnus. Abbas Gallois, an Dnus. Fontanella, qui nunc Secretarius est Academiae, auctor Dialogorum de Pluralitate Mundorum; et utrum Memoriae Physico-Mathematicae, quae coeptae erant, nomine Academiae continuentur.

Est quidam Machinista in Gallia, qui multa promittit, etiam in Mercurio Elegante (Mercure Galant) ejus nomen nunc non succurrit. Quantum intelligo nonnulla etiam executus est, sed aliorum spem facere voluit, quae mihi non videntur possibilia. Interim ipse peritia enchiresium et rei manuariae non contemnendus saltem videtur: promiserat inter alia currum non evertendum (un Carosse inversable). An et quid tum in hoc, tum in aliis reapse praestiterit, quod alicujus sit momenti, a Dno. Varignonio discere poteris, cui facile etiam erit judicare ex dictis, quis ille qui designatur, et quem nunc nominare non possum. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae $\frac{20}{30}$ Septemb. 1698.

P. S. Haec jamdudum scripseram, una cum Examine Gregoriano, sed descriptionem et expeditionem varia distulere. Interea nomen Mechanici in mentem venit, credo Garoust. Adjeci et P. S.*) separatum, quod, si ita videbitur, Dno. Voldero communicare possis.

P. S. Etsi contentus videatur Dn. Volderus Tua solutione, quae verissima est prorsusque ad mentem meam, fortasse tamen non inutile judicabis, Viro Clarissimo cum multa a me salute significare, similem observationi ejus in Hyperbola secunda, ubi absurditas non nisi ab una parte, meam observationem in Hyperbola prima seu simplissima vel Apolloniana, ubi aeque ab utraque parte incommodum nascitur, similisque Tuae solutio ad me olim adhibita est; quae etsi Tibi non innotuerit, facit tamen eorundem princi-

---

*) Dasselbe folgt unmittelbar.