

CCXVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Accipio hac ipsa hora literas Tuas cum chartis amici Tui mihi fasciculo inclusas. Antequam hoc scriptum typis manderet, necesse est ut primum totum perlegam: scire autem Te velim, finem deesse sive quod illud non miseris et forsitan per proximum curesorem sis misurus, ne fasciculus unus nimis gravaretur, sive quod in itinere aliquid fuerit detractum, quo casu vel fato nescio: animadvertere enim potui involuerum fuisse reseratum et ceræ gutta adjecta iterum conglutinatum. Quatuor accepi plagulas et dinidiam sibi mutuo succedentes, continentes scilicet typographi monitum et 26 articulos scripti ipsius et partem 27^{mæ} usque id hæc verba: „Mais il est surprenant que vous ne vous êtes point aperçu que ces crantes.“

Hic vicissim Tibi mitto quod nuperrime ex Gallia accepi, excerptum Litis inter Varignonium et Röllium: rogo ut mihi remittas. Rescripsi Varignonio et suggessi quasdam meas animadversiones, quibus Röllium facilius convictum iri spero.

Quod Du. Tschirnhausius plectat (jactantium enim esse pro more suo, non dubito) se invenisse modum universalem assignandi in data curva ad datum arcum alium arcum, ita ut eorum differentia sit absolute rectificabilis, id ego in speciali casu hyperbolæ communis (ut nosti) ut et postea in parabola cubicali primo $ax = y^3$ jam præstiti, quemadmodum in Actis extat. Du. Tschirnhausius forsitan iterum mea vitula arare voluit, sed verosimilitudine decipi et umbem pro Junone captare ipsi admodum est solemne: nihil omnium eorum quæ hactenus promisit, præstare potuit, aut si quid dedit, non valde arduum erit nec alicujus momenti.

Gaudeo quod frater mei epistolam typis editam ipse quoque acceperit, ut eam homo cum otio examinare queas. Si quid ad Acta ea de re concinnare voles, obstringes me valde, sed cito queas (sicuti et me Tibi promptum invenis) nec opus est ut circumstantiis parum ad rem facientibus, quæ neque mihi omnes occurrunt, immoveris: id unicum peto, ut pro conscientia quod notum est seceris: ideoque nolim Tibi suggerere, ne gravis Tibi sim. Meministi utique quando acceperis meas methodos, nimirum

CCXVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

quam proxime ante tres annos, meministi quod illas examinaveris, meministi quod illas bonas deprehenderis: hæc principaliora sunt, de quibus testimonium Tuum peterem. Si quæ alia adjungere voles, pro prudentia Tua id facies: modo meas literas requirere et relegere lubeat, invenies materiam responsionis sufficientem, earum autem omnium descriptionem non habeo.

Quæ de novo genere arithmeticæ habes, nondum attente consideravi: huic non absimile olim Weigelus excogitavit, cujus meminit Sturmius in sua Mathesi enucleata, hoc tantum discrimine, quod loco progressionis Tuæ dyadicæ ille assumat tetradicam. Verum quidem est, quod hoc modo numeri onerati sint paucis characteribus, sed vice versa etiam multo frequentius repetitis. Cogitabo de hac re: interim non bene intelligo quid intelligas per periodos 01, 0011, 00001111, 0000000011111111 etc, columnæ primæ, secundæ, tertiæ, quartæ etc. et quomodo hunc calculum transcendensibus applies.

Curobo ut quam primum antlia mea reparata fuerit, etiam pro Te phosphorus paretur: hactenus hisce rebus vacare non licuit.

Frater meus Parisiens non ibit: fuit stratagemata quo mihi terrorem incutere voluit, visurus num quid ego acturus essem, quo me proderem. Hermannus ille qui cum ipso iter iturus erat, in itinere est versus Belgium, etiam hac transiturus. Forsan secum afferet Responsionem suam ad Objectiones Nieuwenhütii. Vale etc.

Groningæ d. 11 Aprilis 1701.

Si repetitis literis et Tibi importunus sum, Tua est culpa, id enim non sine aliquo taedio facio. Hæc accepi simul postremas duas literulas, unas 8 Aprilis datas, alteras sine die et consule, quæ continebant plagulam defectus illius libelli, quæ nunc modo typographo tradidi, quamvis nondum omnia miseris. Accusas aliquam Tuam negligentiam, quod non statim totum transmiseras, interim nescio quid cogitare debeam, cum ne nunc quidem sit completum: deest enim finis Pacti matrimonialis, quod rogo ut

citissime suppleas, ne typothetae moram injicias ipse. Et mitte quæso omnia quæ mittenda habes, ut sumptibus superfluis et Tibi et mihi faciendis parcas. Multa sunt indicia, quæ de hujus scripti vero Auctore suspicionem mihi movent, et facile augur hanc partitam transmissionem studio fieri, ne forte integrum in alienas manus in itinere incideret. Sed gratum esset, si hæc ne non celares. Quamvis me hujusmodi rebus non libenter miscam, nihil tamen est quod non prompte exequar etiam incommo- do meo, si de desiderio Tuo explendo agitur. Nihil ego peto vicissim, quoniam ut Testimonium Tuum tam diu jam mihi promissum diutius differre ne velis, vides fratrem meum de innocentia mea triumphandum suis libellis, quos contra me in lucem protrudit. Proinde scribis, suæ Epistolæ alium titulum præfixit. Analysis problematis sub forma Disputationis Academicæ (ut mihi Basilea scriptum est) edidit et contra aliquos studiosos matheseos ignes publice defendit; ita facile ipsi fuit victoriam reportare, me per centum miliaria absente. Annon jam sub alio titulo illam pretruserit, nondum mihi constat, nam nondum vidi. Audio quod eam Tibi juxta et Hospitalio, Newtono et Fatio quos vos omnes incomparabiles et mathematicorum Principes salutari, dedicaverit. Spero autem palpius hoc nihil Tuæ sequituri derogaturum et nihil impediturum, quin ex animi sententia testimonium proferas, id quod impatienter expecto. Vale etc.

Groningæ d. 19 Aprilis 1701.

P. S. Mitte quæso citissime supplementum, nam urget typotheta, et verendum ne muletur rerum status, quo casu publico non valde acceptus foret libellus.

CXXVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nisi præjudicium a comparatione Tetractos (cujus Auctor scopum diversum a meo diversissimasque hic cogitationes habebat) fecisset, ut dyadicam progressionem tantum obiter considerares, mirarer Te, tam acri ingenio Virum, non statim animadvertisse, quid mihi vellem periodis 01, 0011, 00001111 etc. quæ

reperies convenire respective columnis primæ, secundæ, tertiæ e.c. numerorum naturali ordine dispositum et dyadice expressum. Sed illud palmarium est, quod periodi summorum et summi-summorum (in infinitum) a naturalibus vel aliis arithmetice, et potentiarum quorumcumque altarum, et summorum vel summi-summorum utcumque altarum a quavis potentia, itidem habent periodos tales, et quidem non longiores, quam ipsi naturales. Exempli gratia, pro cubis prima columna etiam periodos non est nisi 2 notarum, in in secunda non nisi 4 notarum, in tertia non nisi 8 notarum, et ita porro, ita ut reperta lege periodi tam facile sit Tabulam numerorum altissimæ potentie, vel summa altissimæ ab altissima potentia condere, quam Tabulam numerorum naturalium. Unde vides, quanta consequantur. Sunt periodi tales etiam in aliis progressionibus, sed in decadica ob multitudinem notarum sunt intractabiles; in tetractica essent quidem tractabiliores, sed præterquam quod Auctor Tetractos de his non cogitavit, nec huc tetendit, incomparabiliter certe facilius est Calculus dyadicus, qui et alios viros dedit usus pro transcendentibus definitis, si quantitates hujusmodi dyadice exprimantur. Nolitis hoc sum ante multos annos, etiam antequam quicquam constaret de Tetracti illa nuper resuscitata, sed semper otium speravi pro dignitate tractandi: nunc veritus ne hæc cogitatio, ut multa alia, intercidat, misi eam Parisiis ad Dominum Secretarium Regiæ Academicæ, quia ille mihi aliquando scripserat, si quæ proponere vellem, quæ utilia viderentur, cogitaturam Academicam de juvenanda executione. Serenissimo Duci Rudolpho Augusto ante aliquot annos quoniam monstrarem, adeo placuerat hæc, ut ipsi videbatur imago creationis seu originis omnium rerum ex nihilo per Deum, ut numerorum ex 1 et 0, ut etiam gemmæ cuidam insculpi curaret 0 et 1, quæ sigillatas literas mihi mittere solet. Periodorum leges hactenus non habeo, nisi pro numeris Arithmetice progressionis velut naturalibus et eorum multipli, sed vellem detegi eos etiam pro potentibus et summis earum. Videbimus an aliquis Parisiis qui hæc sit præstiturus aliquid. Certe hæc est numerorum optima Analysis, quippe in simplicissima Elementa 0 et 1; unde omnes magnitudines numeris exprimendæ optime hæc ratione exprimentur.

III, 2, 36

Remitto quae scripsit Tibi Dnus. Varignonius, qui mihi per-
pulchre respondere videtur Dno. Rollio; quoniam tamen mihi ejus
discussione accuratissime adjuncto facile fuit in objectiones pene-
trare, venire quaedam in mentem ad rem illustrandam, quae Tibi
mitto, ipsi (sed si probas ea) communicanda, cum multa a me salutē,

Quod superest, vale et fave etc.

Daham Hanoverae 29 Aprilis 1701.

Beilage.

M. Rolle avoit fait des objections contre le calcul des diffé-
rences, M. Varignon m'a fait communiquer ses réponses, on j'a
annoté ce qui suit Avril 1701.

Voyant que les objections qu'on a faites à M. de Varignon,
ne demandent pas une grande attention après la peine que M. de
Varignon a prise de les si bien résoudre, je me suis laissé aller
à les considérer et à ajouter quelques petites remarques.

Il est étonnant qu'une personne qui paroît versée dans la
Geometrie et dans l'Analyse, reprenne une méthode, qu'elle n'a pas
assez pénétrée, comme il est aisé de voir par les objections
mêmes. Car quant à l'objection première prise de l'équation
 $a[y - b] = [x](xx - 2ax + aa - bb)$ pour trouver la plus
grande (ou la plus petite) ordonnée, on objecte que le calcul
des différences qui fait $dy = 4dx(x - a) : 3\sqrt[3]{a} [x - a] - bb$
mettant $dy = 0$, ne donne qu'une seule valeur de la grande x
qui convient à y qu'on cherche, sçavoir $x = a$, au lieu que le
calcul de M. Hudde donne $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 - bxx + abb = 0$,
dont les racines sont $x = a$, $x = a + b$ et $x = a - b$. Ainsi
il croit que chacune donne un cas de la plus grande x . Mais cela
ne suit point de cette équation, qui est résolue lorsqu'une seule
racine satisfait, comme fait $x = a = 0$. Car en divisant l'équation
 $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 - bxx + abb = 0$ par la formule
 $xx - 2ax + aa - bb$ (qui n'a point besoin d'être égale à rien,
pour être un diviseur) il provient $x - a = 0$. Il est vrai que les
deux autres racines sont justement celles qui viennent quand on
cherche x la plus grande ou la plus petite, ou pour le dire en
un mot, la monadique ou les „geminatae“ se réduisent en une.

*) Siehe die Beilage.

Mais c'est par accident par ce que lorsque $dx = 0$, il vient
 $y - b = 0$ ce qui fait $xx - 2ax + aa - bb = 0$, car si l'équa-
tion avoit été $a[y - b] = [x](xx - 2ax + aa - bb) + b^4$,
on trouvera selon la méthode de Mons. Hudde que cette équation
formée expressément $x^4 - 4ax^3 + 2aaxx - 4a^2x + a^4$

$$\begin{aligned} & - 2bxxx + 4abxx - 2abb \\ & + 4aaxx + 2b^4 \end{aligned}$$

et multipliée par 4, 3, 2, 1, 0, donne la même équation
 $x^4 - 3aaxx + 3aax - a^3 = 0$ et cependant au cas de $dx = 0$ les
 $-bxx + abb$

deux racines $x = a + b$ et $x = a - b$ ne servent point et par
conséquent l'équation faite par leur multiplication, sçavoir $xx -$
 $2ax + aa - bb$, sert point non plus. Car dans ce cas il y a
aussi $y - b = 0$, mais cela donne icy non pas $xx - 2ax + aa -$
 $bb = 0$, c'est à dire $x - a = 0$ ou $x - a - b\sqrt[3]{2} = 0$. Cepen-
dant revenant à la première courbe dont il s'agit et dont l'équa-
tion est $a[y - b] = [x](xx - 2ax + aa - bb)$ ou bien faisant
 $x - a = x$ et $y - b = y$, $ax^3 = [x](xz - bb)$ ou $y\sqrt[3]{a} =$
 $[x](xz - bb)$ et $dy = 4xdz : 3\sqrt[3]{a}xz - abb$, on peut satisfaire

à dy (ou $dy = 0$), non seulement en faisant $z = 0$ (ou $x = a$),
mais encor dans nostre cas, en faisant $dz = 0$, comme en effet
cela se peut prendre ainsi dans nostre courbe (fig. 146) où DP
sont minimae, comme (D) (P) maxima, puisqu'il se trouve
que les y , qui sont désignées par DP, DP, sont les plus petites
quand $dz = 0$, et (D) (P) est la plus grande quand $z = 0$; car
des racines d'une équation on emploie celles qui servent, et icy
des deux racines de l'équation $zdz = 0$, sçavoir de z ou dz , l'une
et l'autre sert, et en quelque sens il est vrai que la droite pa-
rallèle à l'axe AP, qui passe par D, touche la courbe. Aussi
peut on concevoir la sinuosité de la recourbure (qui enferme une
touchante parallèle à l'axe) réduite au cas où elle étoit nulle. Mais
dans les méthodes qui en cherchant y la plus grande ou la plus
petite, suppriment dx ou dz comme celle où on multiplie l'équa-
tion selon x par des nombres de progression arithmétique, il y a
cette imperfection que le cas de $dz = 0$ est supprimé aussi. Car
j'ay dit déjà que c'est par accident qu'il vient icy.

La seconde objection n'est qu'une méprise, et la troisième
n'est pas une objection, car ce qu'on prend pour un inconvénient

n'en est point et quoique la grandeur x réelle ne montre point d'impossibilité, il faut considérer que le calcul n'est pas encor fini et que pour s'en servir, il faut la substituer dans l'équation locale de la courbe. Quant à l'équation $y = 2 + \sqrt{4+2x} + \sqrt[4]{4x}$, elle est doublement ambiguë, car les racines quarrées sont toujours ambiguës et on peut dire ainsi qu'il y a 4 courbes différentes de position, selon qu'on varie les signes sans qu'il soit nécessaire de dire à mon avis, qu'elles composent de differens rameaux d'une même courbe. De l'équation ad maximam aut minimam selon laquelle on trouve icy $y = \sqrt{4+2x} - \frac{1}{2}$ resulte $\sqrt{4+2x} + \sqrt[4]{4x} = \sqrt[4]{2x} - \frac{1}{2}$, la quelle se trouve impossible. Mais quand on cherche $dx = 0$, on trouve $4\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt{2+x} = 0$, c'est à dire $x=0$, car $x = -2$ qu'on pourroit tacher d'en tirer, aussi se trouve exclue, car x negative donne l'impossible. Ainsi il est manifeste que le seul cas qui sert, est $x=0$, se qui s'accorde avec la figure que M. Varignon a tracée.

CXXIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Praehum evasis libellus; mitto ecce duo exemplaria, plura missurus si desideras: impressa sunt 500, quorum 400 mittuntur in Hollandiam et bona pars ibit in Angliam, reliqua hic distribuuntur. Correcturam ipse suscepit et a vitiiis typographicis castigari quantum potui; remanserunt tamen nonnulla, non tam mea quam typographi culpa. Nuper simile scriptum mihi incidit in manus ex Anglico in Belgicum versum; reperi in eo dicta quicquid dici potuit in hac materia, sed displicuit mihi, quod nonnihil liberius quam rerum status postulat adversus Papam ratiocinetur Auctor.

Notas Tuas in objectiones Rollii nondum dimisi; videntur enim aliquantulum a scopo aberrare, quod nimiae Tuae festinationi ascribo. Ideo e re Tuae esse putavi, si mentem meam de iis Tibi prius aperirem, quam mitterem: eoque magis, quod jam antea etiam meas notas Varignoni transmiseram, quibus nunc Tuae aliquo modo adversari videntur; id quod Rollii novam cavillandi arsam praeberet, si utrasque visurus esset.

Quantum ad aequationem $a[x](y-b) = [x](xx-2ax+aa-bb)$, cujus maxima vel minima ordinata y invenienda sit, calculus differentialis dat unicum valorem ipsius x , nempe $x-a=0$; sed Methodus Huddeniana dat, pro x , hanc aequationem $x^3-3axx+3aax-a^3-bbx+abb=0$, cujus radices sunt $x-a$, $x-a+b$, et $x-a-b$. Jam recte dicis (quod et ego dixeram) non sequi ideo omnes tres dare casum maximam, id est talis maximam quod respondeat tangenti parallelæ axi; nam sufficit, ut una radix sit aequalis nihilo, quae jam aequationem resolvit. Quando vero addis ex accidenti tantum esse, quod reliquae duae radices sint praecise illae, quae inveniuntur pro determinandis punctis reversionis (points de rebroussement) nempe $xx-2ax+aa-bb=0$, quod provenit faciendis $dx=0$: ut pace Tua dixerim, dico id non fieri ex accidenti, sed necessarium esse: fuit id enim ex essentia et indole Methodi Huddenianae, ut nimirum, per eam quaerendo maximum vel minimum, semper proveniat aequatio quae simul complectetur et determinationem maximam vel minimam et determinationem puncti reversionis, imo et determinationem puncti decussationis (quod voco, in quo curva se ipsam secat, ut Lemniscata, vel etiam cujus rami non continui se mutuo secant, ut ultima Rollii curva a Varignoni delineata $y = 2 + \sqrt{4+2x} + \sqrt[4]{4x}$). Haec tria puncta, si dentur in curva quadam proposita, nunquam non simul determinabuntur per unam solam aequationem, si methodus Huddeni adhibeatur. Cujus rei rationem facile perspicies, modo attendere velis ad naturam hujus Methodi: ea enim pro maximis et minimis non est specifica, neque pro iis determinandis inservit, nisi quatenus involvunt concursum duarum radicum, pro quo illa Methodus proprie est accommodata. Jam vero potest fieri concursus radicum, ubi non statim est maximum vel minimum ad tangentem parallelam: nam talis concursus fit etiam in punctis reversionis et decussationis: adeo ut Methodus Huddeniana proprie non maximorum et minimorum, sed potius concursuum radicum sit nominanda. Quemadmodum hic vides triplicem casum, quo talis concursus fieri possit, concurrentibus AP, AP' in fig. 147. fit A(P) quae determinat (P)(D) maximum vel minimum proprie sic dictum ad tangentem parallelam axi; in fig. 148. fit A(P) determinans punctum reversionis (D) et in fig. 149. fit A(P) determinans punctum decussationis (D). Vides igitur quod si quadam curva proposita gaudeat punctis duorum, vel omnium trium casuum,

Methodus Huddeniana illa omnia una aequatione determinare debeat, idque necessario, non ex accidente. Atque hoc est, propter quod Varignonius scripseram, hanc Methodum magno defectu laborare, cum per eam non certi simus quid invenimus, et facile punctum reversionis vel decassationis pro puncto maximae vel minimae distantiae sumere possimus (quemadmodum reapse Rollius accidit, qui punctum decassationis in curva $y = 2 + \sqrt{4 + 2x} + \sqrt{4x}$ sumpsit pro puncto maximae distantiae) Calculo interim differentiali omnia haec puncta distinctim et separatim exhibente. Quod vero tandem spectat ad Tuam exceptionem a (2) $(y - h) = [2] (xx - 2ax + aa - bb) - h^4$, per quam putas Te posse ostendere ex accidente tantum fuisse factum, ut in curva priore duae radices (praeter tertiam illam utilem) forte fortuna determinarent puncta reversionis; id Te fefellit, quod huius alterius Tuae curvae veram figuram non conceperis, eam procul dubio priori fig. 146 similem imaginando, loco quod toto coelo ab eo differat, adeoque quod sumseris pro punctis reversionis, quae talia non sunt. Nam delata ejus figura est, ut eam hic fig. 150. delineatam vides:

$$\begin{aligned} AP &= x \\ PD &= y \\ A(P) &= a \\ (P)P &= (P)(D) = \pi A = b \\ (P)\pi &= h\sqrt{2} \\ PD &= h - 2\sqrt{\frac{h^4}{a}} \end{aligned}$$

Ubi nunc unicum est punctum reversionis (D) et duo puncta minimae distantiae D, D, et quidem in iisdem illis locis, in quibus in priori curva fuerant, permutata tantum natura punctorum: non igitur est accidentale, quod per Methodum Huddenianum semel quoque proveniat aequatio, quae prius $x^3 - 3axx + 3aax - a^3 - b^2 - b^2x + abb = 0$: nec duae radices $x - a + b$ et $x - a - b$ sunt inutiles, quemadmodum putas; designant enim puncta D, D minimarum ab axe distantiarum: sumxisti autem puncta D, A pro punctis reversionis, cum tamen nihil aliud sint, quam puncta maximae inclinationis, id est in quibus tangens coincidit cum applicata $A\pi$, et revera faciendo $dx = 0$, invenitur non tantum $x - a = 0$ pro A(P), sed et $x - a = h\sqrt{2}$ vel $x - a + h\sqrt{2}$ pro $A\pi$, imo habetur quoque $x = \text{infinito}$, sit ut curva haec quinquae debeat habere puncta maximae inclinationis, duo in A, A,

duo in infinito, et unum in (D), quod quidem simul etiam est reversionis: sequitur hinc diversas in ea esse convexitates, quarum flexus contrarii sunt in A, A, extra quas duo adhuc alii sunt, qui reperiuntur faciendo $x = a \pm b\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2}}}$. Mirum itaque non est, quod puncta A, A per Methodum Huddenianum non inveniuntur, siquidem non involvunt concursum aliquem duarum radicum aequalium. Ceterum putarem ego omnes illas quatuor curvas expressas per $y = 2 + \sqrt{4 + 2x} + \sqrt{4x}$, propter ipsam signorum ambiguitatem debere haberi pro una curva, licet rami illius sibi mutuo non sunt continui: nam si aequationis irrationalitas tollatur, quatuor istae curvae sub una aequatione rationali comprehenduntur, quae ideo etiam pro una tantum curva haberi debent, non secus ac duae hyperbolae oppositae pro una curva habentur, utpote una aequatione expressae $xx - aa = yy$. Hoc si ita concipiamus, vides utique facile rationem, cur Rollius putaverit curvam illam $y = 2 + \sqrt{4x}$ etc. habere punctum maximae distantiae vel reversionis: nam methodus Huddeniana ipsi dedit punctum decassationis, in quo duo rami sese secant, quod sumsit perperam pro puncto maximae distantiae vel reversionis: jam vero si 4 istae curvae reputandae essent pro diversis, nullum reperiretur punctum decassationis.

Haec Tibi consideranda submitto; quod si tamen me ipsum errasse animadverteris, libenter corrigam: faxit ut id cito sciam: mittam enim tunc sine mora Parisios animadversiones Tuas.

Nunc demum intelligo periodos numerorum Tuorum dyadicorum, initio non satis mihi festinatum consideratas. Earum quidem leges pro numeris arithmeticae progressionis et eorum multiplici, vel ex ipsa oculari inspectione oppido patent; sed dubito an pro potentis et summis eorum detegi possint: videntur enim valde abstrusae. Observavi numeros decadicos seu ordinarios posse distribui in potentias binari, unitates, et cyphas quae secundum columnas dispositae vident omnino periodis gaudere.

0	0
1	1'
2	2 ¹ + 0
3	2 ¹ + 1
4	2 ² + 0 + 0
5	2 ² + 0 + 1
6	2 ² + 2 ¹ + 0

$$\begin{aligned}
7 & 2^3 + 2^1 + 1 \\
8 & 2^3 + 0 + 0 + 0 \\
9 & 2^3 + 0 + 0 + 1 \\
10 & 2^3 + 0 + 2^1 + 0 \\
11 & 2^3 + 0 + 2^1 + 1 \\
12 & 2^3 + 2^1 + 0 + 0 \\
13 & 2^3 + 2^1 + 0 + 1 \\
14 & 2^3 + 2^2 + 2^1 + 0 \\
15 & 2^3 + 2^2 + 2^1 + 1 \\
16 & 2^4 + 0 + 0 + 0 + 0
\end{aligned}$$

Forsan hinc eadem etiam quae ex dyadicis utilitas emerget: nam si periodorum leges innoscerent, vides utique facillimum fore Tabulam condere numerorum altissimae potentiae vel summae altissimae etc. Porro vides hinc facile esse numerum decadicum seu ordinarium, quantumvis magnum, exprimere dyadice, et vicissim. Sit ex. gr. numerus anni 1701 dyadice exprimendus, sumatur potentia binarii, quae numero proposito proxime accedat, et alia quae residuo, et tertia quae residui residuo proxime accedat, et ita porro, donec totus numerus exhaustiatur: atque sic reperitur $1701 = 2^{10} + 2^9 + 2^1 + 2^0 + 2^2 + 1$, quod si igitur loco 2^1 , 2^2 etc. ponatur 100, 100000 etc. habebitur expressio dyadica 11010100101 = 1701. Vice versa haud difficilis datus numerus dyadicus in decadicum convertitur.

Convenit me nuper in itinere suo Dn. Hermannus, et attulit mihi Responsionem suam ad Considerationes secundas Nieuventiitii, ut et Fratris mei analysis Isoperimetricorum. Expectabam certe aliquid singulare et artificium quoddam inauditum et mysterii plenum, prae quo mea analysis non auderet aspicere lucem, ut enim verum fateor, nihil magis timebam, quam ne forte Frater meus extraordinarium et tam facilem solvendi modum haberet, ut meus, quamvis legitimus, sed tamen nonnihil prolixus (ut mihi videbatur) ne quidem in comparationem cum eo venire dignus esset: ad vero eo nunc viso, non modo praconcepta opinio cessat, sed et placere mihi incipit mea analysis, quam nonnisi mediocriter aestimabam. Vix credideris, quam operosa et obscura, quam intricata et proluxa sint omnia in calculo fraterno, ita ut singula examinare patientiae opus esset haud exiguum. Meministi, quam perplexus fuerit calculus Fatiatus pro solido minimae resistentiae; meministi, quanta facilitate

illud problema expedierim: scias autem tantam differentiam ibi non fuisse, quantum nunc deprehendes, si fratris mei analysis cum mea conferre placuerit. Sed quod palmarium est, credit meus frater idque magna confidentia asseverat, problema isoperimetricorum circa differentiales tertii gradus solvi non posse propter considerationem (ut putat necessariam) trium particularum curvae inter se relatarum, loco quod per meam methodum, quae duarum tantum curvae particularum in elliptica (si meministi) terminatarum considerationem requirit, statim etiam et immediate ad secundi tantum gradus differentialium aequationem pervenio. Non minus igitur frater in bonae methodi leges peccasse censendus est, qui per tertias differentias solvit (si solvit) quod per secundas statim solvi potest, quam peccavit Fatio, qui solvit brachystochoram per secundas, cum tamen solubilis sit per primas. Quod superest, non debito quia frater suam analysis propediem in Actis fit publicaturus, sed meam cogor adhucdum suppressere, donec frater se arbitris submissurum sponderit inque eorum manus praemium promissum deposuerit. Ne interim Lectores de hac retardatione aliquid sinistri concipiant, neve omnino arbitrentur me victum ex palaestra decessisse, me obstringas valde, si in Tuo testimonio huius morae causam indicaveris, vel saltem (si Tuis verbis id facere nolis) si meorum harum literarum excerpta ad Acta miseris, partim ut omnis suspensio ansa Lectori tollatur, partim ut Frater sui officii debique moneatur. Vale etc.

Groningae 7 Maji 1701.

CXXX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Fecisti pro prudentia Tuae, quod extemporaneas notationes meas ad Rollii considerationes Tecum retinisti, facile enim fieri potest, ut lapsus sit admissus. Interim nondum satis video, quae necessitate oporteat aequationem Calculo Huddeiano vel simili inventam continere maximo-minimum non tantum ordinatam, sed et coordinatam. Ecce enim in rationalibus. Sit $y = x^3 + 11xx + 12x + 13$, $\therefore xx + 21x + 22$, constat nostra methodo fieri $dy : dx = (x^2 +$

$11xx + 12x + 13$ $(2x + 21) - (xx + 21x + 22)$ $(3xx + 2 \cdot 11x + 12) : [2](xx + 21x + 22)$, et pro $dy = 0$ prodire numeratorem nihilo aequalem, at pro $dx = 0$ denominatorem; et prius quidem ita facile apparet, sive Huddeniano sive differentiali calculo rem instituas. Nam Huddeniano more erit aequatio $x^3 + 11x^2 + 12x + 13 = yxx + 21yx + 22y$, ponendo y esse maximum-minimum. Ita jam multiplicando per numeros progressionis Arithmeticae 3, 2, 1, 0, fiet $y = 3xx + 2 \cdot 11x + 12$, $2 \cdot 11x + 21$, quem valorem aequando priori, habebitur his ambagibus aequatio eadem, quam statim dabat noster numerator factus nihilo aequalis. At vero vides non esse necesse, ut in fractione valorem ipsius $dy : dx$ explicante, numerator et denominator habeant communem divisorem, quod necesse esset, si oporteret radices aequationis $xx + 21x + 22 = 0$ (quae valet pro $dx = 0$) esse in radicibus aequationis Huddenianae, quae est pro $dy = 0$; aliqui necesse esset $2x + 21$ vel $x^3 + 11xx + 12x + 13$ habere communem divisorem cum $xx + 21x + 22$. Haec ut per otium consideres, peto.

Difficultas pro legibus periodorum inveniendis in decadis incomparabiliter major est, quam in dyadicis, cum illis sunt decem notae tractandae, hic tantum duae. Et periodi in columna prima, secunda, tertia, quarta etc. sunt in dyadicis locorum 2, 4, 8, 16 etc. in decadis locorum 10, 100, 1000, 10000; unde etiam hic periodos nemo consideravit, inductioque aequae ac ratiocinatio immensa varietate obruuntur.

Cogitabam hac vice scribere ad Dn. Volderum nostrum; sed iterum veniunt impedimenta ex transverso, itaque rogo ut moram adhuc excores et viri egregii benevolentiam mihi serves. Interea vale et fave etc.

Dabam Guelphbyti 16 Maji 1701.

CXXXI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Video Te non satis percepisse mentem meam, cum notationibus quasdam super notationes Tuas facerem, quod quidem mirarer, Te virum tam perspicacem earum vim non statim perspe-

xisse, nisi compertem haberem, Te non semper magna attentione animi legere, quae levia putas. Non dixi, aequationem Calculo Huddeniano inventam continere debere maximum-minimum non tantum ordinatam, sed et coordinatam; sed e contrario dixi, methodum Huddenianum plane non esse methodum maximo-minimi, nisi indirecte tantum, quatenus scilicet maximo-minimum involvit concursum duarum radicum. Nam si placet ad genesin hujus methodi attendere (prout illa habetur in Geometria Cartesiana a Schootenio edita) videbis eam consistere in inventione concursus radicum. Possant autem, quemadmodum in postremis meis ostendi, quas peto ut attente relegas, radices concurrere quae non statim maximo-minimum designent ad tangentem parallelam axi, sed etiam quae designant punctum reversionis, imo etiam punctum decussationis; ne igitur confundas, dico aequationem calculo Huddeniano inventam necessario continere debere praeter maximo-minimum ordinatam, etiam eas ordinatas, quae transeunt per puncta reversionis et decussationis. Jam si punctum reversionis vel decussationis tale sit, ut in eo curva habeat inclinationem perpendicularem ad axem, id est, ut sit maximo-minima coordinata, qualis erat Rolliano, dico tunc calculum Huddenianum necessario utramque maximo-minimum et ordinatam et coordinatam exhibere, adeoque necesse esse ut in fractione $dy : dx$ explicante, numerator et denominator habeant communem divisorem. Secus vero erit si in puncto reversionis vel decussationis curva non inclinat perpendiculariter ad axem, vel si punctum, in quo curva perpendiculariter ad axem inclinat, non est punctum reversionis vel decussationis, sane minime necesse est aequae etiam id dixi, in fractione $dy : dx$ numeratorem et denominatorem debere habere communem divisorem, nam calculus Huddenianus tunc non dabit maximo-minimum coordinatam, quia non fit per concursum radicum. Atque hoc est, quod in posterioribus meis literis intendebam, scilicet in curvis quas Rollius Dn. Varignonio proposuit, non ex accidenti factum fuisse, ut per calculum Huddenianum punctum reversionis et decussationis in aequatione determinaretur, interim non quatenus erat ad minimum coordinatam, sed quatenus erat in concursu duarum radicum. Haec denuo attente consideres quaeso.

Pro insigni testimonio *) quod mihi perhibes, gratias ago. Tri

*) Siehe die Beilage zu diesem Schreiben.

buis mihi quaedam ultra meritum: quantum autem dicis, Te meas methodos non ea attentione animi legisse, qua opus esset ad controversiam nostram dijudicandam, vereor ne frater id accipiat pro retractatione quadam, quasi initio tantum meas methodos probaveris propter apparentem speciem, nunc vero re attentius examinata eas improbes. Optassem, haec omnia mansissent, nosti enim quam suspicax sit frater meus. Optassem etiam ut rationem addidisses (ut in postrenis meis rogavi) cur analysis meam nondum publicare velim, donec scilicet frater se arbitris subicere promittat et praemium promissum deponat. Miror Te dicentem, nos ambos in causa non gravi imperare affectibus non potuisse, cum tamen scias, id de solo fratre meo dici posse, non de me qui multoties laceratus sibi diu.

Mitto heic rursus bina exemplaria libelli, quem nosti: habeo adhuc nonnulla, quae partitis vicibus Tibi transmittam, si ita visum fuerit. Vale etc.

Groningae d. 31 Maji 1701.

Beilage.

Misit mihi Dn. Jacobus Bernoullius, Basileensis Professor, Epistolam suam ad Fratrem, Dn. Johannem Bernoullium, Professorem Groninganae, qua sane non obscure mihi necessitatem aliquam interloquendi imponere voluisse videtur. Ego ambos in tantum aestimo, in quantum aestimari profundissimum in Mathematicis ingenium potest. Debeo utrique plurimum, sed Respublica magis, quod eorum potissimum tum occasionibus, tum inventis, sparsa semina Methodi meae tantum bonae frogis dedere. Itaque ambos mihi peramicos habeo vobis, et licet crebrius mihi cum juniore literarum commercium sit, plusque adeo ille ea ratione me joverit, non ideo vel ille postulat, vel ego praestatur, ut cum de veritate et iustitia agitur, detrimento earum videar alterutri vel minimum favisce. Neque ego iudicis personam aut in me recepi unquam, aut recipiam solus. Interea dissimulare diutius nec possum, nec debeo, Dn. Johannem Bernoullium maturime, ut ipse publice significavit, ad me misisse solutiones fraterum problematum, atque etiam analysis ipsam eamque duplicem, directam et indirectam. Legi tunc statim et probavi, non tam legi ea attentione animi, qua opus esset ad controversiam inter duos egregios viros dijudicandam, quod addo, ne quis me ideo iudicis personam sumere

putet. Addam in fidem excerpta verba ex literis tunc a me Groningam datis; nempe 26 Maji 1697 ita Groningam scripseram: „Mitto, quae in Actis Maji de Curva Brachystochrona variorum solutiones editae sunt. Volui ut statim acciperes, quia Dn. Frater Tuus Tibi potissimum nova problemata proponit, termino et praemio statuto“; et 15 Jun.: „Primo cursore Tuas Dn. Menkenio misi, ut mature publicetur, Te solutiones fraterum problematum brevissimo tempore dedisses“; et 29 Jul.: „Magna cum voluptate vidi methodum maximi pulchre a Te in rem praesentem isoperimetrorum usurpatam.“ Haec olim scripta repeto, ne nunc videar aliquid alterutri dare. Analysis nuperrime edita Basileae (ut ex Catalogo Francofurtano didici) nondum ad me pervenit. De caetero valde opto atque etiam rogo, ut nobile par fratrum aemulationem interioribus matheseos studiis quantumvis utilem ita moderetur, ne sequius homines iudicent de scientiis, si videant ingenio tanto tamque profundo viros et quod caput est, fratres in causa non gravi imperare affectibus non potuisse.

CXXXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Reversus Hannoveram inveni literas 31 Maji ad me datas. Facile credo de Calculo Haddeniano Te recte iudicare: mihi ea qua par est attentione priora relegere non licet. Inveni redux 26 literas, quibus respondendum est, ultra eas quas Guelfebyti et Cellis recepi, non multo pauciores. His adde agenda atque elaboranda diversissimi generis, et iudica, quantum mihi temporis ad meditationes analyticas sit relictum.

Facile intelliges re considerata, non potuisse me acquiescere de lite vestra, quam feci. Dixi, quod res est, me solutionem Tuam et tempestive recepisse et probasse; non potui tamen non adicere quod etiam verum est, non me adhibuisse eam attentionem, quae iudici fuisset imposita, ne scilicet Dn. Frater Tuus me iudicem hac declaratione agere velle dicat. Retractationem nullis fiduculis inde exculpet. Quod si faciet, habebit me publice contradicentem. Non dico etiam vos in causa non gravi affectibus

imperare non potuisse, sed hoc tantum, vos curaturos pro prudentia vestra, me quis hoc vobis imputare possit. Quod monitum profecto necessarium erat, ne litem inter fratres (quae quantum displiceat omnibus, dici satis nequit) fovere velle viderer. Certe Du. Menkenius omnem pene mentionem ejus horret. Sic etiam Du. Marchio Hospitalius nuper post multam intermissionem dati ad me literis eadem animi sensa ostendit. Declarationem Tuam, quod nolis publicare Analysin Tuam, donec Du. Frater se arbitris subiciat et praemium deponat, a me proferri profecto indecens erat, quia non necessarium. Quidni enim hoc rectius facias ipse? Quae ipsi commode non possumus, merito imponimus amicis. Quod si aliquid ultra debitum fecissem et egissem, ut hic dicam, procuratorem Tuum, profecto personam mutavissem, et ridicule pro Te ad epistolam Tibi a fratre missam responderissem.

In Societate Regia Prutenica magno applausu receptum est pulcherrimum phosphori Tui inventum, et mihi id negotii datum, ut Tibi gratias agam nomine Societatis, honorificentissimaeque de Te ejus sensu exponam. Optaremus Te nobis viciniorem, sed nulla nobis hactenus occurrit ratio, ea emolumenta, quae habes, non dicam aequandi, sed utique ex intervallo assequendi.

In fasciculo ex Nundinis Lipsiensibus allato, tandem etiam reperi redux Analysin Domini fratris Tui et video etiam ad tertias usque differentias ab eo iri, nulla, ut mihi videtur, necessitate. Dnus. Marchio Hospitalius scribit, sese etiam accepisse eandem analysin, et avide percurrisse directamque et bonam reperisse. Mihi tamen Tua olim melior visa est: potest aliquid bonum esse, etsi optimum non sit. Vale etc.

Daham Hanoverae 24 Junii 1701.

CXXXII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quatuor misi exemplaria libelli gallici ad Legatos Imperiales, bina videlicet ad singulos, prout in penultimis desiderasti. Superant mihi adhuc 5 vel 6, quae pro jussu Tuo parata habes.

Facile crediderim, non sat otii Tibi suppetere pro examinandis, quae dixi de calculo Huddeniano: videbis interim, Du. Varignonium non mihi tantum assentiri, sed et ante acceptas meas idem circa eam rem observasse, quod saltem apud Te pro aequitate Tui loco argumenti valebit, me nos crepitare. Mitto, ut soleo, quae novissime accepi Varignoniana, mihi si placeat remittenda. Varignonius in sua tertia difficultate festinas nimirum fallitur in eo, quod potentias ipsius x per arithmeticae progressionem multiplicat, loco quod id fieri debeat cum potentis ipsius y , non attendens quod pro applicatis haberi debeant eae, quarum maxima minime quaeritur. Ad haec et reliqua Varignonius jam respondi et quaedam nova ad confutandum Rollum suggessi.

Si methodos meas pro isoperimetris nondum legisti omni qua par est attentione, optarem ut eas attentissime relegeres, huc si quis Tibi vacat ad id negotii impensa; horam enim, non plus, requirunt, sed fratris, mensem fere. Non petebam, ut Declarationem meam, quod nolum publicare analysin meam, donec frater meus se arbitris subiciat et praemium promissum deponat, Tuis verbis conceptam ad Acta mittere, sed tantum ut ipsa mea verba excerpta ex literis meis communicares; id sane minime Tibi imposuissim, si ipse ego commode praestare potuissem, sed nosti utique Du. Menkenium nihil hac de re amplius velle imprimere, quod vel a fratre meo vel a me immediate mittatur. Nescio itaque, qua ratione id foret agere procuratorem meum, vel pro me ad epistolam mihi a fratre missam respondere, si nihil aliud quam mea publicare fecisses: sed nolum Tibi molestus esse.

Quod in Societate Prutenica (quam florere incipere gaudeo, credebam enim, quod nihil de ea vel viderem vel audirem, jam ante instantem calamitatem temporis iterum esse extinctam) cum aliquo applausu sit receptum phosphori mei inventum, factus intellexi. In Academia Parisina iterata sunt mea experimenta, sed non cum optato successu, id quod ego miror. Du. Varignonius ad me misit scriptum Dni. Hombergii, qui id negotii in mandatis habuit, sed facile ex eo colligo, non omnem quam debuit adhibuisse cautelem, immo nec ejus machinam pneumaticam accuratam satis esse. Rescripsi longam epistolam et respondi ad objectiones, communicando simul varias quasdam observationes et artificia nova, quibus phosphori constructionem nram in modum facilitavi, ipsamque perfectiorem clarioremque reddidi. Mirum esse dixi, Du. Homber-

gium adeo infelicem esse, ut nullo hactenus mercurio assecutus fuerit scopum desideratum; me vero felicem adeo, ut inter 5 vel 6 mercurios diversis locis et tempore mihi allatos nullus fuerit, qui me frustraverit: ideo me dubitare, annon gratulandi mihi potius quam dolendi causam habeam, dum me solum videam phosphori inventorem non tantum, sed et artificem solum. Rogavi praeterea Academiam, ut mihi transmittat eundem illum mercurium, quo Hombergius infeliciter usus, spe freto, rem cum eo non minus quam cum aliis mihi successuram ob meam sive dexteritatem (si quam habeo) sive artium mese pneumaticae miram exactitudinem, me postea phosphorum ex mercurio Hombergiano factum ad Academiam cum authenticis testimoniis remissurum, ut ita appareat, non mercurii, sed Hombergii culpa, lucem illius fuisse eclipsatam. Habeo nunc in parato aliquot phosphoros, Tibi unum destinavi qui missu facilis est; non enim cum toto apparatu excelsi trium unciarum pondus; mittam eum si volupe est Tibi per censeorem publicum, commodior occasio non datur.

Quod Societas Prutenica honorifice de me sentiat, est de quo mihi gratuler, imprimis vero quod illa et Tu me viciniorum optetis. Vestro utique desiderio facile morem geram, si quendam ratio occurrit meam conditionem non dicam ampliandi, sed tantum aequandi, adeo Tibi et amicis sum deditus. Interim vale et fave etc.

Groningae d. 9 Julii 1701.

CXXXIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Analysis Dni. Fratris Tui, quam peculiari scripto comprehensam acceperam, nuper etiam reperi in Eruditorum Actis. Dn. Reyherus et Dn. Tidius, Auctores novi cycli sane peringeniosi, qui Tibi etiam si bene memini visus est, sollicitant, ut a corpore Evangelico recipiatur, asseverantque per plurima secula nullum discrimen repertum oriri notabile inter cyclum et veritatem Astronomicam: sed suadent, ut mutetur intercalatio in aliam paulo per-

plexierem, quod obtinere difficile erit. Vellem tamen, ut fuissent audita eorum consilia ante Decretum, sed Ratisbonae item est paulo festinantius, quam rei difficultas postulabat, non nisi tribus mathematicis consultis. Ego Tuam et Dni. Volderi sententiam de Reyherianis consiliis intelligere optarem. Inclusas ad Du, de Volder literas rogo ut transmittas et pro me intercedas, quo facilis veniam morae impetrem, quam mihi promitterem certius, si satis praesumerem de considerationibus, quas affero ad naturam substantiae melius intelligendam. Sub finem aliqua ab eo quaero de Novellis rerum mathematicarum vestrae orae, in quibus et similibus etiam a Te instrui gratissimum erit. Nihilne amplius audire de Nieuwentitio? Quid facit Hermannus vestras?

Iis scriptis, Tuas accepi cum Varignonianis, quas remitto cum gratiarum actione. Recte notasti festinantem summisisse x pro y : quaeritur enim recta ipsis y et parallela, quae curvam tangat; itaque multiplicatio per numeros progressionis Arithmeticae facienda erat secundum y . Nescio an Rollii intentio sit, eandem aequationem more Huddeiano inventam simul dare maximo-minimum tam x quam y : si hoc vult, errat. Nam si esset v. g. aequatio $x^2 + y^2 = bx + by + c$, tunc y posita maximo-minima foret $3xx - b = 0$; sed si x maximo-minima, fiet $3yy - b = 0$, cujus

ope tollendo y ex prima aequatione prodiret $x^2 - bx - \frac{2}{3}b\sqrt{\frac{b}{3}} - c = 0$, quae cum priore $3xx - b = 0$ deberet habere radicem communem, si vera esset talis assertio, quod utique non procedit. Verum est radices tam secundum y , quam secundum x aequales fieri, cum y determinetur per x et per binas x his et per binas x aequales aequaliter; non tamen ideo x fit maximo-minima coordinatarum (ut est y maximo-minima coordinatarum) etsi fiat $\mu\alpha\alpha\alpha\alpha\alpha$, seu pro geminis unica, dum fit tangens.

Gratissimum mihi erit Tuum phosphori exemplum, ut sic dicam, quod acceptum Societati novae Regiae transmittam: optarem adderes, quae in hoc negotio Parisiis scripseras, praesertim pro tutiore elaboratione. Interim amicus meus, experimento tumultuariae sumto, in obvio mercurio etiam lucem in vacuo deprehendit, sed quod compendi causa tantum vesica usus esset loco epistomii, non fuit durabilis Phosphorus. Id, si fallor, intermodum superest in hoc Phosphore, quod clauso licet vase alterationem recipere

et cuticulam contrahere potest per calorem ambientem externum. Sed hoc cautione vitari potest.

Optarem nancisci librum Dni. Fatii *), cui per modum appendicis adjeceat, quae contra nos scripsit. Aiunt in eo tractari meliorationem rei hortensis per radios solares efficacius dispensatos. Quod quidem scimus valde profuturum esse, et licet non ignoretur, tamen vulgo negligi. An aliquid singulare suggerat ipse, ex ipsis Libri inspectione patebit. Si vidisti, fac quaeso ut sciam.

Memini doctum quendam Batavum aliquando Tecum commutare literas; an ille ex eo tempore progressus non ponendus in interiore Analysisi fecit?

Aiunt Gregorium Oxoniensem Professore quoddam Opus mathematicum editione parare, et in hunc usum corrigere subscriptiones, more Anglicano. Quod argumentum tractet, non comperi. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 14 Julii 1701.

P. S. Si cui meditationi Mathematicae ad Acta missae adjungas aliquid, quo declares sine omni verborum aculeo, cur Tibi non videatur aequum, ut publices Analysisi Tuam, donec inter Te et Dn. Fratrem Tuum controversia rite terminari possit, simulque adjicias paucis, quid de edita Dni. Fratris Analysisi sentias, crede Dn. Menkenium in edendo difficilem non fore. Relegissem ego dudum Analysisi Tuam et cum fraterna comparassem, si antiquas illas schedas, nescio ubi latentes, reperissem, nam ut recuperem, multos fasciculos aperire opus est. Faciam tamen, quam primum commode fieri poterit, quando id desideras.

CXXXV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Puto novissimas meas Tibi redditas cum scriptis ad Dn. Volderum: nunc notas pro utroque vestrum recipis, et Volderum rationem in ipsis leges, atque ut spero ignores, quod non

*) Fruit walls improved etc. London. 1700. 4.

ipsas tantum, sed et binas adjectas ad Te dirigo. Tibi autem scribendi propria ratio est, ut memoriam Phosphori Tui pulcherrimi refricem, cujus specimen a Te per cursorem publicum aut potius per publicam veturam expecto, eoque nomine Tibi non mediocriter ero obstrictus. De sumtu satisfacere meum est. Interim testimonio amici mei certi esse possumus, lucem non esse privilegium mercurii Tui, nam, ut nuper scripsi, facili experimento eam vidit. Anglus doctus, qui huc advenit, me certorem reddit, Newtoni Librum de motu lunae mox editum iri. Rem insignem praestabit, si hoc aenigma solvat. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 5 Augusti 1701.

P. S. Dominus Hermannus ubi est, et quando exurret ad has oras? Spero me aut hic inventurum, aut Brunswicke sive Guelphytii, aut Berolini. Has literas putabam me dudum transmississe, cum ecce in angulo cum inclusis reperio; id quaeso excusa, et excusatum habe.

CXXXVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Mitto ecce, ut promisi, exemplar Phosphori mei perpetui, pro exiguitate sua satis lucidum. Latet id in hac capsula chartacea, quam poteris reserare ope scalpelli incidendo commissuras. Ubi exemeris lagenulam vitream, perlustra quaeso statim, an in itinere nullum damnum acceperit, an non fracta, an non fissuram egerit; an orificium adhuc probe obturatum et munitum sit, ut securus sis nihil aeris irrepsisse. Videas, rogo, an vitrum ipsum manserit purum et undique pellucidum; hoc non gratis quaero, nam cum nuper ad aliquot leucas curru excurrerem, necum gestavi talem lagenulam, ut experiret nunc longinquam transportationem facile ferre posset; quod quidem factum est, sine jactura luminis, sed observavi parietibus lagenulae internis quasdam maculas adhaesisse, veluti ex fuligine quadam contractas, mercurio interim ipso nihil omnino alterationis perpassa. Mirabar id, nam a crebris et vehementibus concussionibus jam per annum et ultra singulis fere noctibus phosphorum talem agitare soleo, talem inde

adhaerentem fuliginem in vitris nunquam observavi; conicio igitur a tremulo motu curvus etiam occultum aliquem tremorem mercurio fuisse impressum, et intimam aliquam particularum collisionem, cujus vi particulae metallicae aliaeque heterogeneae melius separari a mercurio et vitro adhaerere poterunt, quam per motum simplicis agitationis, licet vehementissimae. Scire itaque perciperem, an in hoc exemplari idem observaveris; forte motus equitationis, utpote non tremulus, non adeo est incommodus. Collo, ut vides, lagenulae circumligavi frustum vesicae, majoris tantum cautelae gratia, alioquin non opus esset; poteris adinere rursum, si libuerit; praestat tamen ut sinas; nam abundans cautela non nocet. Intra vesicam est operculum stanneum cum cochleae foemella alteri cochleae mari pariter stannae superinductum, sed intra operculum ipsum, colli orificium obturatum est accuratissime subere, caemento quodam undiquaque probe munito, ut hoc modo nihil nec aëris ingredi nec mercurii egredi, vel ad operculum stanneum, quod corroderet, pervenire possit. Certe praeter inventionem Phosphori, ipsa ejus elaboratio non prostremae est artis: nemo enim facile exhauriet aërem ad decimam usque millesimam partem, eoque extracto cito, adeo obturat, ut nihil in lagenulam subrepat aëris, nihilque imposterum sit subrepturum. Hoc primum esse puto, quod Parisiensibus adhuc desse credo, et cujus defectu haec nomen non ad optatum successum potuerunt pervenire. Caeterum, si habet experimentum facere cum hoc Phosphoro, non sufficit ut id fiat in loco obscuro interdum; nam loculi nimia adhuc diu luce percusi, non facile percipiunt lumen debilius: necesse ipsam igitur expectes, et quo obscuriorem, eo melius; tunc aprehenso lagenulae collo, eam agites sursum deorsum, quasi velles eluere vitrum, tota lagenula vitri ignea apparebit, cujus splendor non nimis vividus erit, quam Phosphori kraftiani chymice parati. Rogo nihil oculis perscribas, quo in statu omnia deprehenderis: unum est, quod caveas, ne scilicet lagenula nimium incalescat, unde caementum, obturaculum subereum praecuniens, liquescere et ab aëre forinsecus jugiter urgente per foraminulum in subere relictum, per quod aër eductus fuerat, in vitri cavitatem premi possit. Alias nihil est, quod metuas; poteris Tecum gestare et quavis in loco experimentum instituire, sine fractionis periculo, etiamsi non adeo caute contrectetur. Vitrum enim, ob notabilem spissitudinem, satis robustum est, modo non in corpus aliquod durum

nimis ruditer impignat, aliamve externam et violentam injuriam patiatur. Et ita habes Phosphorum in perpetuum durabilem, qualis nullus hactenus inventus fuit. Quando vero dicis amicum Tuum in obvio mercurio etiam lucem observasse, sed non durabilem, recte addis, quod disparuerit ideo, quod compendii causa tantum vesica (quamvis non recte capiam, quomodo vesica loco epistomii inservire possit) usus esset loco epistomii: nam quam facile peccetur in circumstantiis, et quam facile extrinsecus noxia quaedam mutatio accidere possit, satis arguit infelix Parisiensium successus. Interim tamen, quod saltem aliqualem observaverit in obvio quodam mercurio, id meam sententiam, quemvis scilicet mercurium, si rite paratur, in vacuo luminosum esse, mirifice confirmat. Vanus est metus Tuus, cum putas incommodum superesse in hoc Phosphoro quasi clauso licet vase alterationem recipere et cuticulam contrahere posset per calorem ambientem externum; horum enim nihil omnino expertus sum in Phosphoro diu in pera mea, ubi satis calefiebat, gestato: quidquid licet periculi subest, id non de mercurio, sed de obturaculi caemento, ut jam dixi, metuenum est.

Misi literas ad Volderum, quas ad eum scripseras, sed hactenus nihil responsi accepi. De Nieuwentitio nihil a longo tempore audivi. Hermannus nostras transfretavit in Angliam, visurus ibi Wallisium, Newtonum, alios. Fatii Librum de melioratione rei hortensis nunquam vidi; inquiram an Amstelodami proestet. Per doctum Batavum, qui necum literas commutat, intelligis forte Du Dierpiens, Praesidem in Curia Brabantiae, quae Hagae est. Is sane nostra non mediocriter intelligit, sed habet filium, qui majores longe progressus fecit. Cum nuper ipsi scripsem, Cissoidis quadraturam diu redactam esse ad quadraturam Circuli, sed ejus rectificationem, quam ego inveniui, dependere a quadratura hyperbolae, adeoque per descriptionem logarithmicam haberi posse, neminem adhuc dedisse: ille protinus mihi transmisit solutionem elegantem et constructionem concinnam curvae cissoidalis in rectam extensae, duplici modo et per descriptionem logarithmicam et per extensionem curvae parabolicae, utrumque beneficio nostri calculi; unde conjeci in eo non parum esse versatam.

Consilium Tuum secutus mitto hic etiam meam declarationem de analysi fraterna, cui praemissi responseionem ad excerpta ex literis Fatianis. Videbis me omnia serio pertractasse sine omni ver-

horum aculeo, ita ut etiam fratris mei nomini pepercerim. Justum sane et aequum est, ut Dn. Menkenius modestam meam defensionem edat, si vel ullomodo meae existimationi consultum velit, cum ipse praesertim dicat in exordio ad excerpta literarum Fatii, se defensionis gratia provocatis praesto esse, atque ego maxime fui provocatus. Quocirca hoc scriptum Tibi submittere velui, ut prius examines, et deinde Lipsiam sine mora transmittas et inprimis Dno. Menkenio commendes; non sum enim nescius, quantum is Auctoritati Tuae deferat. Vale et fave etc.

Groningae d. 13 Aug. 1701.

CXXXVII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Absenti allatum est vasculum Phosphoreum; redux statim aperui, visum est sine labe, lucemque emisit agitatum: spero et durabile fore, nec aërem se paulatim insinuatorem per caementum. Haec, ubi primum potui, scribo, multasque Tibi interim gratias ago. Tanto melius se res habet, si calor externus superficiem non immutat, adeoque nec lucem obstruit. Distincte Tibi rescribam tumultuarium illud modum quaecumque lucis specimen obtinendi per vesicam sine epistomio; nunc vix ad scribendum temporis satis est; nam ego advenio et tabellarius abit. Vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 23 August. 1701.

P. S. Quod commendasti Actis inserendum, statim Lipsiam ad Dn. Menkenium mittam.

CXXXVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non dubito, quin literas meas acceperis, quibus significavi phloem Tuam Phosphoream recte ad me pervenisse, neque et jactatione itineris detrimentum accepisse. Si tantillum commoveas

lucet, etsi non sit lux admodum vivida. Ego mecum Berolinum Ieram Societati nostrae Regiae, tanquam egregium a Te munus: absolutus enim ab Anglis, qui nunc hinc discessere pene omnes, iter diu dilatum nunc illud intendam. Interea ecce Tibi Diploma Societatis, quo in numerum Sociorum cooptaris. Nempe eo res deducta est, ut Concilio habito aliquot egregii Viri Collegae ac Socii appellarentur, inter quos tuum relatum est nomen jure merito, mihique id negotii datum, ut ad Te Diploma perferri curarem, quod nunc mitto. Deumque rogo, faxit ut Tibi id decus, nobis vero ac Reipublicae, homisque literis emolumentum inde sit diuturnum. E re autem putam, datis ad Societatem literis, gratam Tibi nominationem Tuam fuisse testis, et spem facias subinde nobiscum utiliter communicandi.

Spero etiam redditas Tibi meas, quibus incluseram secundas ad Dn. Volderum.

Cogitabamus aliquando Berolini de novo genere Durii, ut publicanda magis in nostra sint Societate. Videbis, an Tute aliquid suppeditare velis.

Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 13 Septembris 1701.

P. S. Si quid velis vel ad me vel ad Societatem, poterit, dum absens, recta mitti Berolinum ad Dn. Jablonsky, Secretarium Regium et Regiae Societatis Berolinensis. Idque ut facias accurato puto, literasque ad Societatem includas, quibus gratiae agantur.

CXXXIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Societatis diploma missu Tuo accepti rectissime: quam gratum mihi fuerit, videbis ex responsione ad Societatem. Non dubito, quia Tua ex commendatione iste bonus mihi contigerit; gratias itaque etiam hoc nomine permagnas Tibi debeo et ago. Si quid novi subinde detexero, quod cum Societate communicari dignum putem, id libenter facturum ero. In physicis et experimentalibus non spernenda pollicer, modo necessariis omnibus

instructus essem. Adveni nuper novam barometri construendi rationem facilem, quod variationes pro lubitu multiplicatas exhibet. Nosti Hugenium olim dedisse ideam barometri altius, quod quidem variationes multo sensibiles redderet, quam vulgaria; sed praeterquam quod illas non omnino quatuor decies multiplicet, quoties scilicet mercurius gravior est aqua, etiam hoc incommodum habet, inter alia plura, quod propter difficilem tuborum suorum structuram ad praxin deduci non possit, nemoque quantum scio hactenus deduxerit. Meum vero caret hoc incommodo, constat enim tubis ordinariis, et tamen effectus quantumvis augeri poterit. Muschenbroeckius, artifex Leydensis magnae peritiae et singulari dexteritate pollens in conficiendis instrumentis, qui etiam ea quibus utor confecit, postquam ipsi meam inventionem aperuissent de novo hoc barometro, rescripsit mihi se superatis nonnullis exiguis difficultatibus unum ad mentem meam feliciter parasse, monstrans variationes sexdecuplo majores ordinariis, ita ut si mercurius in ordinariis ex. gr. uno pollice ascendat descendatve, in hoc jam motus fiat per 16 pollices.

Penultimus Tutas quas ad Volderum scripsisti, diu est quod curavi, sed nihil adhuc responsi accepi. Postremae vero cum adjunctis ad Oudinium et Baylium, quas nuperime tantum accepi, postredie etiam dimisi. Pro opera Tua ad Du. Menkenium utut infelice, debitas tamen ago gratias. Vir iste se fratri meo sine ulla causa magis favere, quam mihi, manifeste nimis monstrat: interim cur permisit, ut in suis Actis tam contentum provocarer, si jam noluit, ut in isdem ad provocationem respondeam et responsum ad finem perducam? Si non partium studio teneretur, mihi quod aequum est non negaret. Fui primus provocatus, ergo etiam concedi mihi deberet, ut ultimus responderem: nisi enim respondeam, publicum ignorum, quod Du. Menkenius meam responsem suppresserit, id mihi pro defecta responseis et pro tacita solutionum mearum quasi nullitatis agnitione interpretabitur. Vides ergo quod meae existimationis intersit non tacere, quam si Du. Menkenius non laedere volet, non potest non ultimum scribendi locum mihi concedere; quod si non faciet, ego de injuria mihi facta publice protestabor. Optarem ut id illi oblique insinuares, quando ad eum rescribis, et quid postea factum mihi statim significares.

Ad me nuper pervenit Groningii Bibliotheca Universalis, con-

tinens inter alia Historiam Cycloidis, quam Tibi lectam etiam non dubito: meo quidem judicio fecisset melius abstinuisse a rebus, quas non satis perspectas habere ipse monstrat; ut enim nihil dicam de solecismis grammaticis, haec historiola ita scripta apparebit cuilibet legenti et materiae hujus gnaro, ut facile colligere possit scriptorem non insignem fuisse Mathematicum; multa sunt allata praeter ordinem, multa omisit non omitteunda, et multa omitteunda non omisit, ita rerum bonarum ne quidem delectum novit. Sed et nonnulla falsa retulit. Ex. gr. quando pag. 50. Epistolam in Pascaliu aliosque Gallos acerbè scriptam tribuit Hugenio, cum tamen ejus auctor sit Wallisius. Item quando postremorum circa cycloidem inventorum, quae mihi soli debentur, tamen Fratrem meum participem facit, dum inventionem quadraturae zonarum cycloidalium pag. 99 ipsi adscribere videtur, quam tamen me primum invenisse constat ex Schediasmate de segmentis immensis quadrabilibus cycloidis a me publicato, ubi simul nonnullarum zonarum quadraturam exhibui, ex quibus jam totum mysterium jam satis patebat, ut parum vel nihil sit quod postea a Fratre meo fuit publicatum. Id vero imprimis me male habet, quod Groningius repetat, quae Frater ex invidia in meorum inventorum extimationem debilerat, omnia scilicet quae circa quadraturas spatiorum cycloidalium inveniri possunt, una cycloidis proprietate dudum detecta mihi, et ex ea tam aperte fluere, ut viri celeb. Hugenius et Leibnizius, qui duo ejus segmenta quadrarunt, non potuissent non pari facilitate caetera omnia segmenta et sectores quadrabiles reperire, si animum intendere voluissent. Vide quæso an livor ipse tam virulentè eructare potuisset in meum inventum, quod circa cycloidem omnium præstantissimum sine jactantia dixerim, non propter inventionis difficultatem, sed e contrariis propter nimiam facilitatem rei aliquam nobilissimam et tamen per integrum seculum latitantis. At quam inepte dicit me nihil reperisse, quod Tu pariter et Hugenius, qui duo cycloidis segmenta quadrastis, non pari facilitate potuisset reperire, si animum intendere voluisset: videtur utique Thraso immere velle, quod omnia quae hactenus in lucem ipse emisit, tantae nobis fuissent caliginis, tantae difficultatis, ut non quemadmodum mea reperire potuisset, etiamsi vel maxime animam intendisset. Mihi certe nunquam talia tribui, nam si ea

tantum communicare deberemus, quae aliorum aciem licet valde intentam effugerent, credo nec alium quempiam aliquid scripturum fuisse, cum utique semper aliquis sit, qui tantae esset sagacitatis, ut idem praestare potuisset, si voluisset se applicare. Tandem considera, annon infinita mea cycloidis segmenta quadrabilia extenuando simul et Tuum obliquum contemnat, eadem scilicet ratione argumentando, quod Hugeniano jam ante invento, Tuum longo post tempore demum inveneris, adeoque quod nihil inveneris, quod Hugenius qui cycloidis segmentum rectum quadravit, non potuisset non pari facilitate alterum Tuum segmentum reperire, si animum intendere voluisset. Sed quis ferret has cavillas, quae ex invido animo unice proveniunt? Interim Groningius non dubitavit eas in libellum suum transferre, quod utique non fecisset, si de inventi mei pretio debite judicare potuisset. Quae de cycloidibus protractis et contractis protulit, nullius fere sunt momenti; eos vero gaudere pariter segmentis et spatiis innumeris quadrabilibus, quod ante me nemo animadvertit et quod in tua Historia alienius ponderis fuisset, alto tamen silentio praeteriit, ut et quando eandem illam proprietatem demonstravi haberi in Trochoidis seu in Cycloidis socia, ille ne *per* quidem ea de re, ut ut satis eleganti, memoravit. Et quidem haec ad Te scribere volui, ut Groningium, quem Tecum literas commutare scio, moneas, si ita libet, ut secundam partem hujus historiae, quam meditari dici, paulo curatorem edat, aut quod satius esset, penitus supprimat.

Ex Tuis laetus intellexi, quod lagenula Phosphorea ad Te incolumis pervenerit; mihi autem non scripsisti, annon fuliginis aliquam speciem observaveris lateribus vitri internis adhaerescenstem, prout mihi in aliquo accidisse, ab agitatione currus, in postremis meis significavi: nam si idem etiam in tua lagenula accidisset (quod tamen non credo, ob aliam jactationis speciem ab equo, quam a curru) mirum non esset, si vitrum a fuligine turbulentum lucis viracitatem inmisit. Quod autem scribis, si tantillum moveatur lucere, etsi lux non sit admodum vivida, indicium utique est in itinere nihil aeris in phialam irrepisse; alias enim, si vel tantillum irrepisset, lux vel omnino suffocata foret vel nonnisi vehementissimis agitationibus appareret, et quidem scintillam tantum. velut ex silice excussa, loco quod si phiala ab aere bene vacuata

est, lux, quae apparet facile, etiam continua est, instar flammae et replet totam vitri cavitatem. Sed velim ut etiam scias in tam parvis vasculis, quale Tibi unum nisi, lucem tam vividam non esse quam in majoribus; quid enim tam exigua copia argenti vivi efficere posset? Sunt mihi vasa grandiora, quorum lucis favore in tenebris commode digitos et literas majusculas distinguere possim. Caeterum, quod hi mei Phosphori longum iter perferre possunt, hoc meam hujus lucis generationis explicationem mirifice confirmat; si enim illa proveniret a peculiaribus quibusdam particulis igneis, in mercurio uno potius quam in alio natantibus, ut volunt nonnulli Parisienses, qui fit quod illae a violenta itineris jactatione non statim dissipentur, siquidem per poros vitri facilius utique elabi possent, quam ex poris mercurii, utpote longe angustioribus: adeo ut vel hinc pateat, lucem mei phosphori dependere non a particulis quibusdam permanentibus, sed ab universali quadam materia, per poros mercurii tanquam per cribrum continuo fluente. Hisce vale et fave etc.

Groningae d. 8 Octobr. 1701.

P. S. Vidi in Diplomate meo mentionem fieri privilegiorum et praerogativarum Sociis Societatis Brandeburgicae concessarum; gratum esset intelligere, quid sint et in quo consistant: item, qualia habeat Societas statuta et leges. Optarem etiam nomina omnium Sociorum hactenus conscriptorum.

CXL.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nuperis meis jam dimissis, quas Tibi acceptas spero, ad me pervenerunt Cl. Volderi literae, quibus reseratis inveni hoc, quod vides responsum ad Te datum una cum adjectis responsoriis Oudini et Baylii, quae omnia ocyus Tibi transmittenda censui, et quidem ut jussisti, iterum sub involcro inscripto Dno. Jablonski, Secretario Societatis. Quod superest, me refero ad novissimas meas, ad quas responsum expecto. Interim vale et fave etc.

Groningae d. 15 Octobr. 1701.

CXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ex quo accepi Tuas cum Volderianis, fere semper haesi in Regia Berolinensi, ita volente Regina et a Fratre Electore impetrante. Equidem hoc modo ordinariae occupationes meae non parum interruptuntur. Interim fortasse Reipublicae literariae veſtigare nomihil potui. Nam obtinui, ut per ditiones Regis mandata dari debeat Medicis, annuas observationes conferendi ad Historiam anni Physico-Medicam, cujus egregium pro anno 1700 specimen dedit Medicus Hallensis clarissimus, Fridericus Hofmannus. Sed et quidam nobilis Polonus in graphica arte excellens, auspiciis Regis, a Societate ablegabitur in Russiam observationibus Astronomicis et Physicis instituendis. Cumque pingat egregie, commendabitur Tzari, ut quemadmodum Regis, Reginae et Regii Principis affert iconas, ita Tzaricae Familiae Regi referat.

Tuum Phosphorum vero, ut auguror, perpetuum, Regi et Reginae ipse ostendi, habuitque plausum spectantis Aulae. Puto me effecturum, ut Rex gratum sibi inventum aliquo honorario testetur. Id enim jam proſavit primus Aulae administrator, cumque in finem nomen Tuum jussit annotari.

Libens intelligo novum barometri genus a Te excogitatum, quod variationes pro lubitu multiplicet. Puto id a Te fieri in tubo ipso, nec machinulis, sed liquoribus; alioqui enim non ignorabis Hookium et alios (tunc jam ipsum Gerikium) ope rotularum aut cylindrorum pro lubitu multiplicare sensibilitatem divisionum. In Hugeniana constructione est aliquid difficultatis. Interim cum neges Tibi constare in praxin fuisse tractatam, non possum non significare, Hubinum Lutetiae Parisiorum barometrum Hugenianum aliquoties elaborasse successumque non defuisse. Sed verum est multiplicationem esse limitatam et dependere a proportione aquae ad hydrargyrum.

Groningana Cycloidis Historia, ut a Viro scripta, qui argumentum ipsum non satis profunde excessit, movere Te admodum non debet. Suppeditaveram ipsi notitiam nonnullorum novissimorum, sine quibus adhuc magis manca foret; sed quaedam tamen omisit, vel non satis intellexit. Non dissimulaveram totum ipsius institutum mihi parum prodari; neque enim tanti est is inter Ba-

lum et Gallum, ut Germanus ejus historiam scribat, cum praesertim multo majoris momenti sint postea detecta. Sed voluit ille Bibliothecam universalem edere, vel Codicem (haec enim nomina placebant) in quo esset de omnibus aliquid. Quae de Jure Gentium minatur, vel in Libro vel in suis ad me literis, mihi non valde satisfaciunt; plerique hodie volunt libros scribere, nullo in eos tempore aut labore impenso; sed ita Reipublicae parum prosunt, plerumque etiam sibi. Diu nihil a Groningio vidi: occasione data monacho, quae mones.

Dn. Menkenius noster, vir cetera optimus, hoc habet, quod scrupulosus est, quoties aliquid inserendum Actis, quod displicere possit aliquibus. Id ipse circa Fatium expertus sum. Sed distinguere debebat inter defensionem et aggressionem. Ad Tuam mentem ei iterato scripsi, sed hactenus frustra, denno tamen. Ajunt nescio quid innovatum esse ab amnis pauculis in Hydracontisteris Batavis per Tubos flexiles vim exercentibus contra incendia. De eo peto ut inquiras; et quid hoc rei sit mihi significes.

Inter praecipua acutissimi Volderi nostri non minimum est, quod Extensionem concipit ut quiddam primum, quod faciat corporis essentiam, cum Extensio nihil aliud menti ingerat, quam diffusionem quandam (seu continuum repetitionem) alicujus communis naturae per plura coexistentia; quanam autem sit illa natura, non exprimit, sed praesupponat: unde extensio relativum quiddam est, non absolutum; et ipsa natura substantiae corporeae, quae scilicet diffundi intelligitur, est quiddam extensione anterior. Hoc ei, ni fallar, jam in superioribus indicavi, ita tamen ut non satis eo animum attenderet: nunc autem non repetivi, sed confirmavi. Quod si Tibi ea in re satisfacio, commode ipsi quoque auxilio eris in hoc melius intelligendo. Vale in annum novum aliosque multos, et me ama.

Dabam Berolini 27 Decembris 1701.

CXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum nesciverim, an literas meas sub inscriptione ad Dn. Jablonski certe acceperis, scripta haec Varignoniano, jam ab ali-

quot hebdomadis mihi accepta, nolui dimittere, antequam de traditione mearum securus essem. Quod cum factum sit per novissimas Tuas 27 Decembris datas, ecce nunc scriptorum variorum fasciculum, quae vel una vel partitis vicibus mihi remittes; adjectae sunt iis, ut vides, literae, quas Dn. Varignonius ad Te scripsit: cui si ipse respondere volueris, poteris ad me dirigere literas; promptus ero in curando.

In quo consistat novi mei barometri inventio, disceres ex literis Muschenbroeckii, Artificis Leydensis, ad me datis. Videbis structuram laud valde esse compositam, duobus quippe tubis, verticali uno et ampliori, horizontali altero et graciliori, totum negotium absolventibus. Quod Gerikins, Hookius, alii multiplicatis barometri variationes tentaverint per rotulas, cylindros aliasque machinulas, non equidem ignoro, sed ignoro an in praxi ullum effectum habuerint; huiusmodi enim machinulae ob frictionem aliquae materiae incommoda, non prima statim aëris mutatione moveri possunt, sed collectis demum successive pluribus mutatis aëris gradibus, machinulae una vice et quasi per saltum, superata frictione, moventur, adeo ut tantum absit, ut huiusmodi barometra per machinulas insensibiles variationes indicare possint, ut potius sensibiliores etiam dissimulent. Meum vero barometrum, cum per liquorem ipsum variationes ostendat, huic incommodo non est obnoxium. Cum Lutetiae essem, nunquam audiivi Habinum elaborasse barometrum Huguenianum; sed concedes, puto, quod praeter limitatum effectus multiplicationem et difficilem tuborum structuram eorumque adimpletionem, non facile etiam contractari, nullo minus transportari possit, id quod pretium ejus multum imminuat.

Quod Phosphorus meus spectantis Aulae plausum habuerit, valde laetus intellexi. Quod vero dignus fuerit aestimatus, qui ipsius Regis et Reginae oculos in se converteret, id quidem magno honori mihi duco, praesertim si gratum sibi fuisse inventum meum aliquo signo Rex testabitur, quemadmodum polliceris Te effecturum. Sed non possum non delere simul, quod Phosphorus, quem Tibi misi, ille sit quem inter plures quos in parato habeo, selegi propter parvitatem molis, ut commodè per cursorem publicum posset transmitti, adeoque, ut verum fatear, inter omnes reliquos minimus splendet ob modicam nimis mercurii inclusi quantitatem. Quis autem cogitasset Te levissime illud Phosphori vasculum, quod Tibi soli misi, ut inventi veritatem videres, postea coram Regi,

Regina et Aula producturum? Id si mihi praedixisses, parasset Tibi Phosphori exemplar in majori et elegantiori forma.

In literis Tuis ad Cl. Volderum, dicis Tschirnhausium moliri etiam vitra Telescopiorum longe porrigentium, qualia Hartsoekerus elaborat: id ego nesciveram; putabam enim illum versari tantum in vitris causticis conficiendis, quorum credro mentionem facit in Act. Erud. et alibi. Hac occasione dicam (quod nondum fecissem) me moliri novam aliquam speciem speculi caustici, levi pretio et labore parabilis, etiam sub forma ingenui, a quo non minorem effectum mihi polliceor, quam ab ordinariis ex chalybe aliove metallo factis. Perscribam successum quam primum paravero.

Miror valde, quod Dn. Menkenius etiamnum haesitet in edenda mea declaratione. Iniquum est, mihi defensionem denegare contra aggressionem. Quod si alium praetextum non habet, quam quod forte quaeratur de acerbitate defensionis meae, per me licet ut corrigat, debeat, mutet, moderetur pro lubitu, modo rei substantia maneat, quantum modestissime omnia scripserim. Si vero nec hoc flectere poterit Dn. Menkenium, dubitabo, an posthac unquam aliquid ad Acta ipsius missurus sim, habeboque occasione de ipsius partium studio publice conquerendi.

Machinae illae hydraulicae contra incendia, quas dicis in usu esse apud Batavos, et instructas tubis flexilibus, forte nihil singulare habent. Nam huiusmodi jam vidi olim Genavae: erat autem illa uti ordinaria, scilicet constabat magno receptaculo, quod in anteriore parte habebat duos cylindros, in quibus emboli alternatim ascendebant et descendebant, ut hoc modo aqua radio continuo exprimeretur, et quidem per longum aliquem tubum coriaceum instar intestini, quem homo aliquis, apprehendens in anteriore parte, secum ferebat in summa aedium vel tectorum, et orificium ejus aquam continuo evomens versus angulos et recessus dirigebat, ut hoc pacto succurreret, ubicunque necessitas postularet. Inquiram interim an syringae Batavorum aliquid singularius habeant, quod perscribi mereatur, quo casu delineationem fieri curabo, quam mittam.

Dimittam hodie literas, quas dedisti ad Volderum una cum adjectis ad Dn. Oudinium et Bayium. Meo utique non indiges consilio, ad mentem Tuam Cl. Voldero intelligibiliorum reddendam, nisi velis me facem Soli accendere. Video ipsum notitiam habere substantiae a Tua multum diversam; verum etiam est, quod ex-

tensionem habeat per primitivam corporis essentiam: Tu vero dicis eam esse tantum relativum quid, et praesupponere communem aliquam naturam per plura coexistentia. In quoniam autem illa communis natura corporis consistat, dicit ille se non posse concipere, et a Te procul dubio desiderat claram et distinctam ideam, ut et Tuam nunc definitionem substantiae, quam, ni fallor, promiseras, si suam prius dederit. Quod superest Tibi vicissim in novum hunc annum et in longam sequentium seriem omnia fausta et felicia ex animo apprecor. Vale et fave etc.

Groningae 14 Jan. 1702.

P. S. Rogo ut Varignoniana quantocumque mihi remittas, quoniam ad eo respondere debeo; nam nondum respondi.

CXLIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Litterae, quas ad me dedisti, cum inclusis Varignonianis et Muschenbrockianis, Berolini me non invenerunt: jam enim discesseram cum Regina: itaque illuc ad me huc missae et heri denum redditae. Nobis itaque differre responsum, etsi brevitatis temporis et distractionis per absentiam diuturnam accumulatae non potantur, ut rimari possim attentius, quae C. J. Varignonianis noster Adversario respondet, et quae Tibi perpensa non dubito. Litteris ejus respondeo, ut vides, nec video qua alia commodiore ratione possim, ne tritis metaphysicis frustra implicemur. In Tua tamen atque illius potestate (quod ipsi significare potes) utrum velis communicari aliis quae scripsi; nam si quid inesse putatis, quibus abuti possint alii, suffererit notationes vestras mihi communicari, ut, quousque salva veritate videbor posse, locutiones meas accommodare sensui vestro.

Peringeniosa est Tua barometri constructio nec inutilis: cogitavi aliquando de barometro portatili, quod includi thecae in horologii forma posset, sed mercurio caret et ejus officio fungitur follis, quem pondus aeris comprimere conatur, elastico aliquo chalybeo resistente. Hugensium ipse in Hugenii museo vidi.

Pro speculis causticis aliisque majoribus ad urendum, aliove usus comparatis, quidam Scribanius artifex Dresdae non male ad-

hibuit lignum folio auri obductum et politum. Eo coquit ova, atque id genus praestat. Pro vitris ingentibus puteum commodum adhaeri cavas tabulas vitreas conjungendas, medium replendo liquore. Ea enim longius, quam ulla alia ratione iri potest.

Intellexi non sine dolore, Du. Menkenium, Symptomate aliquo gravi nervosum genus invadente, paralytico nescio an apoplectico laborasse, sed restitutum spero, et malum fuisse minus grave quam ferebatur.

Cum Phosphorum a Te acciperem, neuter nostrum de demonstratione Berolinensi cogitabat. Praestat aliquid monstrare ipsa re, quam multa explicare verbis. Sed brevitatis temporis nunc abrumperé jubet. Vale etc.

Dabam Hanoverae 3 Februarii 1702.

CXLIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Cum non habuerim scriptu valde digna, differendam esse responsum censebam, donec aliquid acciperem a Voldero et Varignonis. Opportune vero contigit, ut eodem fere tempore ab utroque ad me pervenerint litterae; mitto itaque cum Volderianis ad Te datis etiam Varignonianas, quippe quae etiam Te tangunt, hasce si placet remittas.

Gaudeo Tibi probari novam meam Barometri constructionem. Alterum illud Tuum ope elastici chalybei, folii alicui inclusi et aeris compressioni resistentis, meo quidem iudicio non prorsus facti impossibile esset, modo fieri possit follis, ex quo aer perfectissime extrahi queat et nihil postea aeris tractu temporis redintegratur; hoc enim absolute requireretur, alias si quid aeris in folle remaneret, confunderetur barometrum cum thermometro. Specula caustica lignea et auri foliis obducta et polita etiam hic et alibi jam sunt nota; ante aliquot annos ejusmodi unum fieri curavit meo suasu Senator aliquis hujus urbis, quo non tantum ova coqui, sed etiam plumbum liquefieri potest. Sed nova mea ratio specula caustica parandi in hoc consistit, ut adhuc levisiori opera et pretio viliori nec tamen minoris efficaciae curari possint. Quamvis haec nunc nondum vacaverit ejus rei experimentum facere, aperiam tamen

cogitata mea. Bonam partem plumbaginis contererem in pollinem subtilissimum, quo superficiem ligni torno accurate sphaerice excavatam aspergerem, postquam prius pulvis cum albumine ovi in massam mediocris consistentiae est subactus; dein cum adhuc madet lacinia panni probe et sedulo fricare, tandem vero perpolirem ope vitri politorii (gall. polissoir) et nisi hoc modo satis expoliri posset lignum, obducerem potius superficiem concavam foliis chartae optinae hancque postea plumbagine cum albumine ovi sulcata obduci et ratione modo dicta detergerem et polirem. Duci enim non potest, quam eleganter charta hoc modo laevigari possit; tentavi illud in parvo quodam frustra, quod tantam levitatem accepit, ut instar chalybis politii (cujus etiam colorem prae se ferebat) objectorum imagines distinctissime repraesentaret.

Accepi nuper posteriores menses Actorum Lips. anni proxime elapsi; sed ibi non reperi Declarationem meam ad solutionem problematis isoperimetri. Miror sane Du. Menkenium nihil adeo pensi habentem meae existimationis; scit utique me citra ipsius laesionem non posse hic subsistere; fui enim provocatus, meum nunc est partium provocationi satisfacere, vel potius satisfactionem jam datam salvare. Passus autem est Du. Menkenius, ut in Actis suis provocarer; quo jure ergo meae defensionis locum denegat in iisdem? nisi aperte velit fratris partibus studere. Aequitas postulat, ut mihi comedat ultimam positionem. Rogo ut Tua apud illum Auctoritate utaris denuo et serio moneas, imo conjures, ut diutius non differat scripti mei publicationem, sed ut quantumvis faciat quod ex iustitia facere tenetur; quod si vero oborto collo pergat reluctari, ut schediasma meum mihi remittat, et tunc videbimus quid porro agendum. Vale etc.

Groningae d. 11. Aprilis 1702.

CXIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Varignonianas ad Te missas et a Te mihi communicatas cum gratiarum actione remitto, et cum eae occasionem mihi dedissent relegendi mearum ad Du. Varignonium literarum Gallicae scripturarum

exemplum, animadverti me alicubi non satis emendate in illis locutum. Itaque hinc loca correxi, idque ipsi epistola altera Lutetiam recta missa significavi mature, ut si nondum edita est prior, corrigatur: ad edendum enim scripta non erat.

Fallis qui aërem sufficienter excludat, fieri credo poterit ope vesicae. Ita commodè credo habebimus barometrum portatile instar horologii. Corium nondum ita munire potui, ut aëri pervium non sit, quamquam id multas ob utilitates velle. Et credo esse artifices, qui possideant hanc artem; nam passim memorantur culcitae nonnisi aëre suffertae, etsi videre eas nondum mihi contigerit. Caeterum etsi corium pro barometro non facile sufficere posse putem, ubi nimirum perpetua aëris coercionem opus est, vellem id saltem consequi posse, ut in 24 horas inflata ex corio culcita nova sufflamine non indigeret. Cogitavi aliquando, an non pelles animalium marinorum vicem corii terrestrium in hunc usum praestarent.

Specula lignea primus, quod constat, invenit faber quidam lignarius an tornator Dresdensis, sed Tua ratio pro foliis metallicis plumbagine obducendis nova est et elegans. Vidi ipse libros compactos, ita ut plumbago pro auro argentoque foliorum chartarum terminationes, sive quod vulgo sectionem vocant, ornaret non minus splendide atque eleganter. Librum Guillelmi Penni, Tremulorum Angliae Coryphaeus, miserat, apparebatque frugalitatem cum elegantia conciliare voluisse

Ex Novellis Reipublicae Literariae nuperis, quas Tibi quoque lectas puto didici, quaedam a Dno. Tschirnhausio Lutetiae acta, quorum ipse me participem non fecit, nescio an aliquid de ea re ad Te Du. Varignonius? Quod si est quoque siliit, miror ego nimias et frustaneas cautiones. Cur enim apud amicos dissimulat, quae max loquatur Diarium? Mentionem id facit duarum Propositionum Academiae Regiae exhibitarum, quarum una sit de perfectione lentium, alterius nescio an sensum satis assequar, qui eo videtur tendere, ut in data curva duo exhibeantur arcus, quorum differentia sit mensurabilis. Id si assecutus esset, rem praestiterit non contemnendam; sed vereretur ut sit possibilis. Ni fallor enim, etsi curva parabolica non sit proportionalis Logarithmis vel arvis Hyperbolicis eae experimentibus, exhibui tamen olim curvam ordinariam arcus habentem Logarithmis proportionales. An ergo

spes est duarum arcarum hyperbolicarum Logarithmis proportionabili haberi posse differentiam? Mihi id sane perdifficile videtur. Differentia enim Logarithmorum est Logarithmus rationis numerorum.

Cum nuper hac transiret Rex Prussiae, Consiliarium ejus Libellorum supplicum Magistrum hortatus sum, ut Phosphori Tus, quem Regi ostenderam, data occasione meminisse vellet, quod etiam se facturum promissit. Cogitavi posse aliquando ope ejus ex vitro cavo confici aliquid instar sceptri aut coronae, quod a machinamento quodam oblecto continue agitatum semper luceat.

Quenam, quaeso, illa est multisectio angulorum pro numeris irrationabilibus, cujus demonstrationem Du. Varignonius a Te peti?

Pene est, cur idem faciam quod Varignonius, id est querat, quod tandem me Tuas praeclearas cogitationes (quarum multas domus Tuas nasci in dies non dubito) vis ignorare, ita ut plerumque quae facis, demum ex Diariis vel aliunde discam. Quorsum evasit Du. Hermannus? Diu nihil de Nieuventitio audivimus.

Nova Reipublicae Literariae ibidem de speculo loquuntur vitreo, quod Du. Tschirnhausius Academiae Regiae venderit. Sed ego puto, pro speculo potius vitrum causticum esse intelligendum. Diu enim est, quod ipse dixit, sese haec vitra speculis praefere et fateor ope vitrorum commodius experimenta fieri posse. Interim tamen nec specula sunt contemnenda, praesertim si magna, admodum commodius quam lentes parari possint.

Exige quaeso a Dno. Varignonio, ut subinde ad Te scribat Nova literaria, praesertim ad Physicam et Mathematicam pertinentia, et inter alia explicet, quid a Dno. Tschirnhausio sit actum. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 20 Aprilis 1702.

CXLVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quae nuper ad Te pariter et eximium virum Volderum nostrum scripsi, reddita Tibi esse non dubito.

Accepi novissime Dictionarii Bayliani alteram editionem, in

qua est replicatio quaedam ad ea, quae prioribus respondi, sed plena officii et humanitatis. In eo sum, ut vicissim aliquid reponeam, nam et ipse autor ad haec invitavit. Id Tibi et per Te Voldero mittam, ut per vos ad Cl. Baylium perveniat. Renovat etiam (in v. Zeno) quae Goussy Jesuita in Treviriensi Diario Dno. Marchioni Hospitalio objecit. Nam autor Dictionarii inclinat, ut scis, ad Pyrrhonismum, facileque arripit argumenta dubitandi.

Cl. Groningius, quem nosti, novas quasdam recensiones literarias dare aggressus est, partemque speciminis mihi inscripsit. Respondi et hortatus sum, ut ne superficiem tantum lambat scriptorum, sed in corpus ipsum penetret. Memini Te mihi aliquando scribere, esse aliqua suppleenda in Historia Cycloidis, quam dederat; ea si scribas, quod esse velis, mittam ad ipsum; commodè enim inserere poterit, suo illi fasciculo, qui per intervalla prodire debet. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 29 Maji 1702.

CXLVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Litteras Tuas ad Cl. Volderum rite curavi, sed haecenus nihil respondi ad eas accepi. Ursi etiam suasu Tuo Du. Varignonium, ut nova literaria communicet et inter alia explicet, quid a Nobil. Tschirnhausio sit actum. Responsionem ejus huc adjece. Ex ea vidi quod etiam Tibi miserit exemplar Diarii, continentis futilè aliquid specimen Rollii contra calculum differentialem, una cum Responsione quam ipse Varignonius contra illud paravit et meo iudicio solide satis refutavit nugis Rollianas. Non igitur male actum foret nec Varignonio ingratum, si responsionem istam in latinum verti et Actis Lipsiensibus inseri curares.

De vesica pro folle Tuo barometrico etiam ego cogitarem ante acceptas Tuas, et ejus ope varias alias barometri species sine folle perlici posse vidi; sed etiamsi suppeteret modus aërem sufficienter excludendi, id tamen incommodi restaret, quod omnes vesicae, coria et pelles quamvis marinae extensioni et contractioni sint obnoxiae propter aëris humiditatem, quam facile imbibunt,

unde fieret, ut cum barometro etiam hygrometrum confunderetur. Hoc ut praecaverem, qualesvis modum ampliandi spatium vacuum remanente aëre externo, sine dilatatione alicujus vesicae vel corii; querenti venit in mentem, id praestari posse ope syringae, in qua embolus a fundo clauso syringae separatur adhibita potentia aequali ponderi columnae aëris embolo incumbentis, quo pondere mutato et ipsa potentia mutari debet, id quod praebuit occasionem sequenti speculationi. AB (fig. 151.) est syringa sive tubus a parte B clausus, in cujus cavitate embolus E sine ulla frictione liberrime fluere possit, accurate tamen adeo impleat cavitatem tubi, ut arceat aëris ingressum, proinde pauxillum olei embolo superaffundi debet, ut ita embolum ab aëris contactu liberum reddat, partim etiam ut superficiem tubi internam lubricam faciat. V est uncus firmus, ex quo emboli virga est suspensa, P pondus appensum fundo tubi, quod una cum pondere tubi paulo minus sit, quam pondus columnae aëreae embolo incumbentis. CC est catena ex, gr. ferrea ponderi P appensa, cujus pars una recumbit in basin horizontalem H, adeoque pondus P non auget, altera pars catenae pendet adeoque auget pondus P.

Concipe igitur embolum E a fundo B retractum esse per intervallum BE, pondus vero P, pondus syringae et pondus catenae partis pendens simul tantum esse praecise, quantum est pondus columnae aëreae, manifestum est, ita omnia in aequilibrio mansura; quod si nunc aëris gravitas augeatur, assurgit syringa cum pondere P et secum trahet catenam et ita pars pendens fiet longior, donec aequilibrium iterum restituatur; si aer fit levior, patet contrarium evenire debere. Est ergo catena, quae ascensus et descensus moderatur; hinc quo tenuior est, tanto erunt majores, adeo ut pro lubitu sensibiles lujas barometri effectus reddere liceat.

Potest hoc barometrum portatile fieri, si loco ponderis P et catenae C applicetur inter A et E elastum aliquod, quod sese contrahere conatur, nam contrahetur diminuta aëris gravitate, extendetur aucta eadem. Vel etiam loco elastri poterit appendi pondus P illudque augeri vel immui per uncias, drachmas, grana, addendo vel demendo, donec embolus incipiat a fundo syringae separari, et ita non tantum habebitur barometrum indicans alterationes gravitatis aëris, sed et simul statera exhibens quovis momento pondus ipsum columnae aëreae. Vidi ejusmodi stateras, quibus merces ponderantur, consistunt nempe in cylindro ferreo

habente in sua cavitate virgulam latentem, qua contracto vel extenso quodam elastico ab appensis mercibus sese exserit et per divisiones notat pondus quaesitum. Liceret hoc barometrum alia modis construere, multos enim excogitavi, quibus vero exponendis nunc supersedo.

Quando Du. Tschirnhausius putat, se invenisse modum assignandi duos arcus in data curva, quorum differentia sit mensurabilis, non dubito quia more suo se ipsum fallat. Si enim hoc generaliter praestare posset, haberet utique rectificationem arcus circularis adeoque et circuli quadraturam, nam differentiae duorum arcuum circularium potest utique facile fieri tertius arcus aequalis.

Non certe difficile erit ex phosphoro meo parare, quaecunque velis, nam inveni modum aërem extrahendi ex vitris cavis, quascunque sint figurae, quod forsitan ab aliis non facile adeo praestaretur.

Miror Te mihi nunc dicam scribere, quod qualiumcunque mearum meditationum Te non participem reddam, cum tamen Te nihil celaverim hactenus; quantum vero ad meditationes mathematicas, nolui iis Tibi esse molestus, memini enim quod me aliquando moneris, ut Tibi parcerem, dimissis, uti dicebas, ob alia negotia speculationibus mathematicis. Ne vero putes, me Tibi invidisse (quod absit!) en *) quae de multisectione angularum ad Varignonium scripsi una cum quibusdam problematibus ipsi propositis, sed dubito an iis satisfactorius sit. Si ex hisce aliisve, quae ad Te subinde scribo scripsisse, nonnulla digna censeas, quae cum Societate Berolin. communicentur, in Tua est potestate, me hic semel pro semper consentientem habes. Vale etc.

Groningae 10 Jun. 1702.

Beilage.

Demonstratio

Multisectionis Angularis in ratione data sive surda sive numerica insertae Act. Erud. Lips. 1701 m. April. **)

Lemma I.

Rectangulum sub diagonalibus trapezii cujuscunque circulo inscripti est aequale summae rectangulorum sub lateribus oppositis.

*) Siehe die Beilage.

**) Vergl. Joh. Bernoulli. op. om. Tom. I. p. 356.

Demonstratio hujus satis nota est, et passim habetur in Trigonometricis.

Lemma II.

Si (fig. 152.) in semicirculo ADB duo habeantur arcus aequales AC, DE, quorum ille diametro sit contiguus, alter ubique sumtus, ducanturque subtensae CB, DE, EB ut et CA, DA, EA; dico rectang. sub DB et CB minus rectang. sub AE et AD fore aequale rectangulo sub AB et EB.

Demonstratio. Ob similia Triang. ACF, BDA erit AC: CF = BD: AD et AC in AD = BD in CF: iterumque ob similia Triang. BDA, BEF erit AB: BD = BF: BE, et AB in BE = BD in BF = BD in BC = BD in CF = BD in BC = AC in AD. Q. E. D.

Lemma III.

Positis iisdem, dico fore rectang. sub BD et AC plus rectang. sub BC et AD aequale rectang. sub AB und AE.

Demonstratio. Coniungantur puncta C, D per rectam CD, quae parallela erit ipsi AE, et ducatur DG parallela ipsi AC, quae etiam ipsi AC vel DE erit aequalis, adeoque ducto radio OD, erit Triang. OBD simile Triangulo GDE, ob angulos OBD et DEG eadem arcui insistentes aequales. Hinc OB: DB = DG: GE, et OB in GE = DB in DG, et sumendo utrumque duplum, AB in GE = DB in AC, addendo utrique AB in AG vel CD, erit AB in AE = DB in AC + DB in AC + AB in CD. Est autem per Lem. I. DB in AC + AB in CD = BC in AD. Ergo AB in AE = DB in AC + BC in AD. Q. E. D.

Demonstratio

Formulae Sectionis angularis.

Hisce praemissis, res ita peragitur. Esto diameter AB = 1, subtensa AE = x, adeoque BC = $\sqrt{1 - x^2}$ (brev. gr.) y, subtensa AC = a, adeoque BE = $\sqrt{1 - a^2}$ (brev. gr.) b.

Ponantur primo arcus AC, DE contigui, evanescentes intermedio CD, ita ut arcus AE sit duplus ipsius AC; quo casu rectae AD, AC, ut et BD, BC coincidunt, adeoque, per Lem. II. erit $yy - xx = b$, et per Lem. III. $2xy = a$. Ponatur nunc arcus intermedius aequalis ipsi AC vel DE, ita ut arcus AE sit triplus arcus AC: ergo, per praeced. cas. erit $yy - xx = BD$

et $2xy = AD$. Hinc, per Lem. II. $y^3 - 3xyy = b$, et per Lem. III. $3xyy - x^3 = a$. Si nunc ponatur arcus intermedius CD aequalis duobus arcibus AC, ita ut arcus AE fiat quadruplus ipsius AC: ergo, per secundum casum erit $y^3 - 3xyy = BD$, et $3xyy - x^3 = AD$. Hinc per Lem. II. $y^4 - 6xyy + x^4 = b$, et per Lem. III. $4xy^3 - 4x^3y = a$. Porro, si arcus intermedius CD aequalis statuat triplici arcui AC, ita ut arcus AE evadat quintuplus ipsius AC: ergo per tertium casum erit $y^5 - 6xyy + x^4 = BD$ et $4xy^3 - 4x^3y = AD$. Hinc per Lem. II. $y^5 - 10xy^3 + 5x^4y = b$, et per Lem. III. $5xy^4 - 10x^3yy + x^5 = a$, et ita quousque libet facile continetur. Ubi haec elegans progressionis generatio conspiciatur: scilicet sumta potestate binomii $y + x$, cujus exponents sit numerus, quo arcus AE continet arcum AC, erit illius potestatis terminus primus, minus tertio, plus quinto, minus septimo, plus nono etc. = b, et terminus secundus, minus quarto, plus sexto, minus octavo, plus decimo etc. = a. Quandoquidem igitur sumto numero potestatis indefinito n, sive fracto sive integro, sive surdo sive rationali, erit, ut olim ostendimus, et nunc satis notum

$$\frac{y+x}{1} = y^n + \frac{n}{1} y^{n-1}x + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} y^{n-2}x^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{n-3}x^3 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y^{n-4}x^4 + \text{etc.}$$

Ergo patet, si AE sit ad AC ut n ad 1 haberi pro indefinita sectione angulari hanc progressionem universalissimam, $b = y^n - \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 3} y^{n-2}x^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} y^{n-4}x^4 - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4 \cdot n-5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} y^{n-6}x^6 + \text{etc.}$ vel etiam $a = \frac{n}{1} y^{n-1}x - \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} y^{n-3}x^3 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot n-3 \cdot n-4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} y^{n-5}x^5 + \text{etc.}$

quae duae progressionis omnes aequationes finitas possibiles complectuntur pro quovis numero n integro, sive pari sive impari; hisce enim in casibus abruptuntur semper progressionibus; in reliquis autem abeunt in infinitum. Hinc patent, quae in Actis diximus de hac materia.

Problemes.

1. Trouver une courbe algebrique avec laquelle un arc de cercle donné pris ensemble soit rectifiable.

2. Trouver une courbe algebrique, dont les arcs soient proportionnels aux segments de cercle.

3. Les courbes paraboliques et hyperboliques de quelques degrez qu'elles soient transformer en d'autres courbes algebriques, en sorte que les arcs des unes soient egaux aux arcs des autres.

4. Ayant donné un polynome élevé à la vingtième puissance $a + b + c^{20}$, on demande son plus grand terme.

5. Ayant donné une progression des nombres naturels élevés à quelque puissance que ce soit, par ex. $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 \dots 100^3$, qui est la progression de $1 + 2 + 3 + 4 \dots + 100$ continuée jusques au centième terme, et dont chaque terme est élevé à la septième puissance, on en demande la somme sans beaucoup de calcul.

6. Ayant donné une quantité différentielle $\frac{pdx}{q}$ (j'entends par p et q des grandeurs rationnelles formées de x et de constantes de quelque manière qu'on puisse concevoir) il en faut trouver l'intégrale, ou du moins les réduire à la quadrature du cercle ou de l'hyperbole, car l'un ou l'autre se peut toujours. C'est là dedans que consiste le grand mystère des quadratures et des rectifications, et des réductions aux espaces circulaires et hyperboliques, c'est ce qui a été désiré de tout temps.

J'ay résolu tous ces problèmes-là, mais en voyez un qui paroît léger, qui fait pourtant de la peine.

7. Deux nombres étant donnés m et n , trouver un carré xx qui fasse avec chacun un carré parfait, savoir $m + xx = a$ un carré, et $n + xx = b$ un autre carré.

CXLVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratias ago, quod literas Varignonianae mecum communicasti, quas statim remitto. Vellem et ipsae refutationem Rollii latine inseri Actis Lipsiensibus.

Etsi Dn. Tschirnhausius nullas demonstrationes communicavit Academiae Scientiarum Regiae, vellem tamen saltem discere possemus propositiones, quas se invenisse dixit. Nam invenies in

Novis Reipublicae Literariae a Bernardo editis (ubi de vitro ejus caustico in Gallia vendito mentio est) quae mihi ad id, quod nuper scripsi, redire videbatur.

Barometri portatilis causa follem clausum petius, quam embolum ideo adhibui, quia frictione continua mox corium, vel quod ejus loco est, atteritur, ita ut variet resistentiae motusque facilitas, donec tandem aër plane intercalatur; et cum reparatur clausura (quam reparationem in antiis artifices vocant Liederung) initio semper major est difficultas, quae diminuitur temporis tractu. Follem autem vellem adhiberi metallicum, in quo plique a chalybeis laminis suppedientur. Ita cessabunt, quae metuis. Interea tentamenta fieri possunt in foliibus coriaceis vel membranaceis.

Gratum est, quod Dno. Varigonio communicata etiam ad me pervenire jam poteris. An unquam, ut innuis, significavi mihi molestas esse has communicationes? Si veniam aliquando petivi, quod vel otio vel pristina animi alacritate destitutus. Tibi comode satisfacere aut vacare pro dignitate novis meditationibus non potui, an ideo sequitur, eas a me sperni, aut non libenter cognosci? Interim etsi in novis sim tardior, tamen puto me ex olim mihi repertis posse satisfacere plerique Tuis sane egregius problematibus et aliis non paulo adhuc generalioribus.

Primum, secundum, tertium in potestate habeo. Quartum non satis intelligo; quid scilicet voces maximum terminum? Puto in ipso et in quinto compendii quaedam pulchra succurrisse Tibi, qualia magnificere soleo, etiam cum aliter (sed prolixius) res haberi potest. Itaque pergrata erit solutio.

Sextum problema non tantum habeo, sed etiam ita habeo, ut jam a primis meae Geometriae altioris annis mihi fuerit constitutum, tanquam Scientiae infiniti meae analyseosque adeo summatoriae pars non parva. Et sperabam prosequi satis, inque id tempus editionem distuleram, ut aliquid meae Scientiae infiniti servarem; sed cum videam, quam multa alia mihi supersint agenda, et quam non debeam a me sperare, in quibus prolixiusculi calculi desiderantur, non ita pridem decreveram publicare haec quae artificum, inque id expedieram breve schediasma aliis excitandis. Unde haec accipe, cum nemo melius uti possit.

Nempe dudum inveni Analysin omnium Quadraturarum rationalium (uti appellare soleo) quae, ut verbo dicam, nititur divisoribus formulae ejusque rationalis unicam indeterminatam continentis,

Qua ratione fractio omnis denominatoris compositi potest resolvi in aliquot fractiones rationales nominatorum simpliciorum. Esto fractio

$$\frac{1}{xx + \dots x + \dots} \text{ vel } \frac{1}{x^2 + \dots xx + \dots x + \dots} \text{ vel } \frac{1}{x^3 + \dots x^2 + \dots xx + \dots x + \dots}$$

talis denominatoris radices vel divisores sunt l, m , vel l, m, n , vel l, m, n, p , et ita porro. Posito $l = x + b$, $m = x + c$, $n = x + d$, $p = x + e$ etc. ubi nihil refert, determinatae b, c, d, e etc. sint rationales an irrationales; analysis enim nostra superior inferiorem, nempe resolutionem formularum in divisores, quae eadem est cum resolutione aequationum in radices, supponit. His positis hanc reperi regulam: $\frac{1}{lm} = \frac{1}{c-b, l} + \frac{1}{b-c, m}$, $\frac{1}{lmn} = \frac{1}{c-b, d-b, l} + \frac{1}{b-c, d-c, m} + \frac{1}{b-d, c-d, n}$, et $\frac{1}{lmnp} = \frac{1}{c-b, d-b, e-b, l} + \frac{1}{b-c, d-c, e-c, m} + \frac{1}{b-d, c-d, e-d, n} + \frac{1}{b-e, c-e, d-e, p}$, et ita porro. Fractiones autem, quarum numerator non est unitas vel constans, sed aliqua formula rationalis ex potentiis ipsius x conflata, veluti $\frac{\alpha + \beta x + \gamma xx}{lmnp}$, resolvi poterit

in tot fractiones, quot membra habet numerator, ut $\frac{\alpha}{lmnp} + \frac{\beta x}{lmnp} + \frac{\gamma xx}{lmnp}$, et harum quaelibet rursus resolvi potest in frac-

tiones simplicis denominatoris hoc modo: $\frac{\alpha}{lmnp}$ jam est resoluta.

$$\frac{x}{lmnp} = \frac{1}{mnpq} - \frac{b}{lmnpq}, \text{ et } \frac{xx}{lmnpq} = \frac{1}{npq} - \frac{b+c}{mnpq} + \frac{bb}{lmnpq}, \text{ et } \frac{x^3}{lmnpq} = \frac{1}{npq} - \frac{b+c+d}{mnpq} + \frac{bc+bb+cc}{lmnpq} - \frac{b^3}{lmnpq}, \text{ et } \frac{x^4}{lmnpq} = \frac{1}{npq} - \frac{b+c+d+e}{mnpq} + \frac{bc+bd+bb+cc+dd}{lmnpq} - \frac{bhc+bcc+bb^2+c^2}{lmnpq} + \frac{b^4}{lmnpq}, \text{ et ita porro, quae omnes frac-}$$

tiones in valoribus, cum numeratores habeant constantes, rursus ut jam ostensum, in fractiones simplices resolvi possunt. Habemus ergo omnium fractionum rationalium reductiones ad has: $\frac{1}{x+b}$,

$\frac{1}{x+c}$, $\frac{1}{x+d}$ etc. seu $\frac{1}{l}$, $\frac{1}{m}$, $\frac{1}{n}$ etc.; sed quia interdum radices formularum sunt imaginariae, hinc pro divisore assumi potest factum ex ipsis reale, v. g. si inter divisores simplices sint duo

$$\frac{1}{x+\sqrt{-1}} \text{ et } \frac{1}{x-\sqrt{-1}}, \text{ adhiberi potest factum ex ipsis } \frac{1}{xx+1}, \text{ et si addeset } \frac{1}{xx+\sqrt{-1}} \text{ et } \frac{1}{xx-\sqrt{-1}} \text{ adhiberi potest } \frac{1}{x^4+1}.$$

Itaque licet, cum divisor est $\frac{1}{xx+1}$, non possit reduci res ad quadraturam hyperbolae, quia hujus formulae $xx+1$ radices sunt imaginariae, res tamen reduci potest ad aliam simplicem quadraturam, nam, ut olim inveni primus, cum meam quadraturam arithmetican darem, $\frac{1}{xx+1}$ summatur per quadraturam circuli, aut vice versa.

Sed laet in his arcanum adhuc majus. Quoniam, ut olim etiam inveni in aequationibus et calculo singulari comprobavi, possunt imaginariae non minus quam reales in Analysis aequationum recte et utiliter adhiberi; ideo idem feci etiam in Analysisi Tetragonistica et quadraturis rationales reduxi ad logarithmos vel veros vel imaginarios, ipsaque adeo circuli quadraturam, non una ratione. Eaque ratione expressiones transcendentes summatorias seu quadraturas transfero ad exponentialiales, quae maxima est perfectio Analyseos Transcendentis. Nam quae in calculo summatorio vel differentiali vel infinitesimali incognitae exhibentur, non possunt ex eo tolli, licet enim incognitam quaesitam determinet curvarum Transcendentium, vel Transcendentis et ordinariae intersectio, non tamen ideo analytice descendi potest ad valores specia-

lium incognitarum. Ex. gr. sit $\int \sqrt{aa+xx} dx = ax + yy$, et

$$\int \sqrt{aa+yy} dy = \int \sqrt{aa+zz} dz + ab \text{ et } \int \sqrt{ab+zz} dz = ax,$$

patet nullam incognitarum posse tolli. Licet enim $x = \int \sqrt{ab+zz} dz : a$

posset substitui in $\sqrt{aa+xx}$ et in ax , tamen non potest substitui in dx , Id enim succedit tantum, cum loca se tangunt, non vero cum se secant. At Analysis exponentialialis, cum nos liberet ab ipsis dx ,

rem eo reducit, ut possimus tollere incognitas, velut in Algebra; et licet logarithmi vel exponentiales fiant imaginarii, id tamen pro analysi non nocet. Et imaginariae valorem realem ingredientiens virtualiter destruntur compensatione, atque inde etiam duci possunt construtiones imaginariis carentes.

Superset ergo ad perficiendam Analysis quadratorum, ut quadratae irrationales reducantur ad rationales. Quod sane jam desiderari animadverti, ex quo meam inveni Quadraturam Arithmeticeam. Et hinc primo aspectu statim vidi, quid Tibi velis, quam quæris xx talem, ut $am + xx$ et $an + xx$ sint quadrati, seu cum quæris quadratum, quod datis duobus numeris additum, cum unoquoque faciat quadratum. Ita enim habetur reductio curvæ Ellipseos et Hyperbolæ, similiumque Problematum Tetragonisticorum ad quadraturam circuli aut hyperbolæ. Et sane cum mihi olim videretur reductionem ad rationales, saltem quoad ipsas indeterminatas (nam constantium irrationalitas non curatur) ad hoc ipsum semper posse præstari, nec rem ipsam fuisse aggressus, spondebam dimensionem curvæ hyperbolæ æquilatæ, idque scripseram in Epistola antiqua, quam edidit Wallisius, quod in ex nescio quæ facilitas peculiaris rem occurrere visa esset, postea in Actis Eruditorum, cum quadraturam ejusdem curvæ, quæ est $\sqrt{a^2 + x^2}$, ni fallor, quæverit et Dominus Frater Tuus, inmeum me eam habere in potestate. Sed cum tandem rem esse aggressus, difficultatem opinionem majorem deprehendi. Itaque cum jam idem tentes, convocandæ sunt copiae nostræ in unum, ut quantum licet progrediamur. Sane hoc problema, ut $am + xx$ et $an + xx$ sint quadrati, habeo cur credam, non posse indolite solvi: multisque aliis tentatis, reductio dimensionum curvæ ellipticæ aut hyperbolæ ad quadraturas rationales hactenus non successit, ne interveniat quidem imaginariarum. Itaque nondum constat, an hoc semper sit possibile. Quodsi rem ex voto promoveris, aliquid insigne præstabis. Aliquam ego promotionem dedidi adhibui summam ordinatas, quarum partes sunt ad rationales summandas revocabiles; ita enim erit et totum, v. g. si sit $fy: a = \sqrt{ab + cx + xx} + \sqrt{al + mx + xx}$; subtrahit enim irrationalitate habetur æquatio, in qua $yyxx, yxx, xx, x, y^2, yy$. Unde habetur summatio ipsarum x seu $\int x dy$, qui habetur summatio

ipsarum y (seu $\int y dx$), quæ y sunt dupliciter exprimibiles, tum per partes duas irrationales, ut factum, tum etiam per radicem universalem, quæ cum per se summam sit intractabilis, reductur hoc modo ad duas partes in summam tractabiles. Unde utile nobis considerare etiam diversos modos exprimiendi eandem radicem. Reperi etiam etsi $x^2 \sqrt{xx + ab}$, $\therefore xx + ac$ nondum possit reduci ad rationales quadraturas seu summandas, tamen eo reduci posse $x^2 \sqrt{\frac{xx + ab}{xx + ac}}$ seu summi posse ratio-

naliter $\int x dx \sqrt{\frac{xx + ab}{xx + ac}}$ posito e esse imparem. Nam v. g. ponendo $xx = ay$, fiet $\frac{1}{2} \int a dy \sqrt{\frac{y + b}{y + c}}$. Taliæque multa inveni,

sed nondum mihi generaliter satisfacere. Plurimum autem mihi spondeo ab ingenio Tuo, præsertim cum ipse rem sponte aggressus sis; nam si mea tantum commendatione fecisses (de quo sæpe cogitaveram) fortasse minus alacriter institisses.

Unum interim Tibi considerandum commendo, a quo nondum spero. Quæritur $vv + ab$ et $vv + ac$, ita ut prius æquetur vel potius identificeatur ipsi $\odot \odot \sqrt{a}$; a, posterius ipsi $\odot \odot \sqrt{a}$; patet productum eorum invicem æquari quadrato, quod sufficit, etsi singula quadratis non æquantur. Hoc ut præstetur, sumo $l = x + f$, $m = x + g$, $n = x + h$ et $v = 112 \sqrt{l}m + 113 \sqrt{l}n + 123 \sqrt{m}n + 100a$, et $\odot = 210 \sqrt{a}l + 220 \sqrt{a}m + 230 \sqrt{a}n$ et $\odot = 310 \sqrt{a}l + 320 \sqrt{a}m + 330 \sqrt{a}n$, et $\sqrt{a} = 412 \sqrt{l}m + 423 \sqrt{m}n + 400a$. Hoc modo explicando et valorem $avv + aab$ comparando cum valore $\odot \odot \sqrt{a}$, et valorem $avv + aac$ cum valore $\odot \odot \sqrt{a}$, habebitur desideratum, ubi in calculo compendia dabunt homoeoptota, ut sic dicam, et coefficientes numeris fictitiis relationes indicantibus expressi. Pro comparatione autem seu identificatione poterunt inveniri valores l et m per n , ut ita inveniantur n per constantes, sed in ultima æquatione, ubi fietur v. g. $\lambda n + \beta a = 0$ positus λ, β, a constantibus, oportet facere $\lambda = 0$ et $\beta = 0$, ut n maneat indeterminata, quod continget his. Reliquæ æquationes comparatiivæ seu identificatoriæ præstabuntur ope constantium seu coefficientium assumarum 112, 113 etc. His obtentis habebitur $d \sqrt{vv + ab, vv + ac}$ per formulam constantem

ex ... $\sqrt[n]{m} + \dots \sqrt[n]{n} + \dots \sqrt[n]{m} + \dots$ quae revocari potest ad quadraturas rationales, cum quaevis pars eo revocari possit. Calculum autem absolvere non licuit. Absolvisses, si olim venisses in mentem, sed ab aliquot annis imparem me sentio calculi prolixioris. Sed tempus, ut finiam.

Habui et ego olim singulare aliquid et utile circa Sectiones angulares. Praecedentibus scripsi Du. Varignonio. Prima aequatio Rolliana expediti potest methodo tangentium vulgarissima. Parens Liber merito examinaretur; dudum animadverti affectare eum, ut multa et magna invenisse credatur. At Liber ejus dudum cognitis innotuit, quibus an recte sua inaedificarit, dicere non habes. Vale et me ama etc.

Luzemburgi prope Berolinum in Palatio Regiae 24 Junii 1702
P. S. Quae me voles, Hanoveram rogo mittas more solito.

CXLIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ecce hic literas a Volbero. Tuas priores 24 Maji datas per amicum illum accepi recte, sed nonnihil sero. Bayliani Dictionari alteram editionem nondum vidi; quae ad replicationem Auctoris Tibi factam esse repositurus et ad me missurus, curabo pro mta promptissime.

Penitus sum ignarus eorum, quae Gouius Jesuita in Trevrens Diario, Marchioni Hospitalio obicit; ea quidem scire desiderarem, nam diarium illud, ut multa alia quae nunc passim eduntur, huc non perveniunt. Nunquam et nusquam tanta novorum literariorum penuria laboravi, quam hic Groningae; etiam ut videretur cessat Du. Menkenius Acta Lips. mihi transmittere, tota enim hoc corrente anno nihil eorum vidi; an gratia ipsius exiderim, quod forte meo nomine nonnihil vehementius increpaveris recusant animadversiones meas in fratris methodum isoperimetricum et in Fatio responsum Actis suis inserere; an vero alia causa subit, me prorsus latet.

Quae desideravi in Groningii Historia Cycloidis, perscripsi in literis ad Te datis die 8 Octobr. 1701, cum Tibi simul transmi-

terem literas gratiarum actionis ad Societatem Brandebourg. Si ea in altera suae historiae parte, quam meditatur, supplere velit, faciet quod aequitas postulat, ut summi cuique tribuatur; alias praestat ut in recensitionibus suis literariis nihil amplius de cycloide dicat, quam ut male recensitoris officium adimpleret, ut in priori parte fere factum est.

Haec ad priores Tuas sufficiunt; quantum ad alteras 24 Jun. datas, si refutationem Rollii laime inseri Actis Lips. cupis, id Tibi curandum incumbit, vereor enim ne meum cum Menkenio commercium sit jam plane abruptum. Ursi Varignonium, ut nos compotes reddat propositionum Tschirnhausianarum cum Academia Scientiarum quavis sine demonstratione communicatarum. Gaudeo quod problemata mea, quae jam ante complures annos solvi, Tibi non displicerint. Per maximum terminum polynomiis alicujus ad datam potentiam elevati intelligo illum, qui in actuali elevatione ad potentiam datam caeteris major deprehenditur, ex. gr. si binomium $a + b$ elevetur actualiter ad 4^{100} potentiam, provenient hi quinque termini $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$; si nunc a ad b sit ut 1 ad 1, maximus eorum terminus erit medius $6a^2b^2$; si a ad b ut 2 ad 1, maximus erit secundus $4a^3b$, ut et si a ad b sit ut 3 ad 1; si vero a ad b sit ut 4 ad 1, duo erunt maximi termini, nempe primus et secundus, a^4 et $4a^3b$; si vero a ad b sit in alia quacunque majore ratione, maximus terminus erit semper primus a^4 . Quaeritur itaque modus maximum terminum determinandi in polynomiis ad quantavis aliam potentiam elevandis, ex. gr. sit trinomium elevandum ad 20 potestatem $a + b + c^2$, et sint a, b, c ut 3, 2, 1, exhibendus est terminus, qui inter omnes maximus est. Non dubito quin nunc facile sis soluturus, praesertim cum Tibi jam innotescat, quomodo dati termini sit coefficientiens determinandus. Quantum ad sextum problema, credebam me primum fuisse, qui id exegitaverim et solverim, ideoque illud jam per tres fere annos tanquam mysterium abscondidi, puto et Te eodem modo animatum fuisse. Cum vero Tuam methodum publicare decreveris, absurdum foret, si meam datas suppressere vellem; mitto igitur illam excerptam ex adversariis meis, prout olim in chartam conjeceram, rogo ut illa cum Tua in lucem comparet, et si forte Tua jam sit edita, testimonio Tuo confirmabis, quod meam invenerim sponte et nec Tuo nec alius hortatu interveniente, ut et illa antequam quicquam de Tua publicanda cogitasses. Me-

mini Wallisium alicubi dicere, quod invenisse sit ingenii, sed primum invenisse fortunae: fortunae igitur, si non actui ascribendum, quod non primus inciderim in hoc inventum. Si memi schediasma, ad Acta Lips. miseris, optarem ut id fiat quasi Tu motu et me inscio, ne Du. Menenius putet, me sibi invito aliquid velle obtrudere, nollem enim novam repulsam ferre. Caeterum quavis nostrae methodi in fundamentis conveniant, scilicet in resolutione fractionum compositarum in simplices, agnosces tamen, ut spero, meam ad praxin commodiorem, eo quod fractionem non tantum denominatoris, sed etiam numeratoris compositi citra aliam resolutionem vel praeparationem, statim in simplices resolvo, ad quas per Tuam non pervenis, nisi dualibus tribusve resolutionibus generalibus et postea pluribus aliis particularibus factis, quod mihi laborem in inensum adeo producere videtur, ut non videam, qui via quaeve patientia se quis ex calculo extricare possit. Ita acquisitionem $\frac{dy}{y} = \frac{-2xz - xz}{x^2 + z^2 - 1} dz$ pro trajectory hyperbolarum resolu equidem in simplices, quavis opereose satis, sed si Tuam regulam sequi vellem, immergerer in calculum, unde forte nunquam redirem. Fortassis autem sunt Tibi quaedam compendia pro calculi abbreviatione, quae ego nondum perspicio.

Rectissime conjecti, quod per problema, quo quadratum quaero, quod datis duobus numeris adjectum cum unoquoque faciat quadratum, nihil aliud intenderim, quam reductionem curvae ellipticae, hyperbolae et similium problematum tetragonisticorum. Verissimum est primo aspectu videri rem facilem esse, sed tamen jam olim ea in re magnam difficultatem inveni; hinc, si meministi. Te monui in Actis 1693 pag. 64. ut dares demonstrationem ejus.

quod dixisti in Actis anni praeced. pag. 370 $\int dx \sqrt{a^2 + x^2}$ dependere ab extensione curvae hyperbolicae, cum ego ab extensione curvae parabolicae cubicalis primae dependere ostenderim. Quasdo vero de aliis hujusmodi quadraturis loquens dicis loco citato „quomodo autem hae duae quadraturae conicis dimensionibus respondeant, alias ostendam“ credo Te tunc respexisse ad modum reduciendi indeterminatas irrationales ad racionales, quas tunc ostendimus per conicas dimensiones construi posse. Tecum omnino sentio, hoc problema, ut $am + xx$ et $an + xx$ sint quadrati, indefinite non posse solvi, sed hujus de-

monstrationem optarem. Non putem ego aliquid praestari posse ponendo $vv + ab = \odot \odot \sqrt{a}$, et $vv + ac = \odot \odot \sqrt{a}$, et sumtis $l = x + f$, $m = x + g$, $n = x + h$, faciendo $v = 112\sqrt{lm} + 113\sqrt{ln} + 123\sqrt{mn} + 100a$ et $\odot = 210\sqrt{al} + 220\sqrt{am} + 230\sqrt{an}$ et $\odot = 310\sqrt{al} + 320\sqrt{am} + 330\sqrt{an}$ et $\sqrt{a} = 412\sqrt{lm} + 413\sqrt{ln} + 423\sqrt{mn} + 400a$. Praeterquam enim quod calculus esset inmensae prolixitatis, miror quod dicas, cal-

culo peracto haberi $\int dv \sqrt{\frac{vv + ab}{vv + ac}}$ per formulam constantem ex $.. \sqrt{lm} + .. \sqrt{ln} + .. \sqrt{mn} + ..$ cum tamen manifestum sit formulam illam fore aliam fractionem constantem ex $\frac{.. \sqrt{lm} + .. \sqrt{ln} + .. \sqrt{mn} + ..}{.. \sqrt{lm} + .. \sqrt{ln} + .. \sqrt{mn} + ..}$

quae priore longe difficilior erit. Tandem etiam in hujusmodi suppositionibus plerumque accidit, ut plures proveniant aequationes comparativae seu identicatoriae, quam habentur coefficientes assumatae, ita ut res abeat in plusquam determinatam seu impossibilem. Ille in aliis occasionibus saepius mihi contigit. Verissimum est et facile patet, quod dicis $\int x^c dx \sqrt{\frac{xx + ab}{xx + ac}}$ (posito e numero

impare) posse reduci ad quadraturas racionales; hoc artificium aliaque multa huic affinia jam diu inveni. Sic eadem arte determinavi in Actis 1693 pag. 53, quibus casibus $\int dx \frac{x^n}{\sqrt{x^2 - x^2a}}$ sit algebraicum, et quibus ad circuli quadraturam reducibile.

Per Amicos illos reduces ex Batavis (qui literas Tuas mihi tradiderant) misi Tibi ante duas hebdomadas, si bene memini, fasciculum continentem Iconem syringae illius tuborum flexum, qua utuntur hic ad restringenda incendia; internam structuram facile imaginatione supplebis, nihil enim singulare habet. Adjeci quaedam scripta mea adversarii meis opposita, ut videas quid agam vel potius quid patiar; miraberis forsitan acerbissimum styli, sed scias hoc fere unicum remedium esse, quod omnium ultimum arripui, quo inimicorum furorem nonnihil compescere potui. Vix credo fuisse aliquem ab Apostolorum tempore in hunc usque diem, qui a fra-tribus suis majorem persecutionem perpassus fuerit, quam mihi toleranda est ab imperiis Osoribus et pessimis Hypocritis. Quod dixi, animae operationem in corpus non consistere in influxu quo-

dam, sed tantum in consensu et concursu actionum utriusque suae propria principia sequentes, quam etiam Tuam esse sententiam scio, ex ea faciant nescio quam haeresin et Beckerianismum; ut et quod dixerim, corpus non posse peccare, voluerunt me ad regnum domnare; dicunt philosophiam et mathesin nostram eterne theologiae. Ita vides, quo pacto me oporteat tempus terere. Vale etc.

Groningae d. 12 Aug. 1702.

CL.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non dubito, quin nuperas meas cum meditationibus quibusdam meis circa Analysis Tetragonisticam acceperis. Nunc ad Te mitto adjunctis pro clarissimis Viris Voldero et Baylo, rogoque ut illi mittas tam suas, tam quas alteri destinae literas, cum replicatione ad ea, quae in iterata Dictionarii sui editione reposuit me; rogoque mecum Volderum, ut Baylo literas suas cum scripto meo lecto et expenso transmittere mihi queque iudicium suum aperire velit, quemadmodum et Tuum flagito.

Interea vale et me ama etc.

Dabam Berolini 19 Augusti 1702.

CLL.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Intellexi iussisse Regem Prussiae, ut Tibi Nummus aureus mittatur pondere circiter 40 Ducatorum. Dabo igitur operam, ut urgeatur executio, et Nummum, ubi nactus fuero, ut recipias fasso. Hoc volui ne nescires, quanquam sciam Te magis honorem in munere Regio, quam pretium pecuniarium aestimare.

Spero scriptum meum ad Te pervenisse, quo Bayliis objectionibus respondes. Rogoque ut sententiam Tuam mihi indices, saltemque significes quamprimum, utrum Tibi sit redditum, quo

sim eo nomine extra metum. Spero et Du. Volderum mentem suam aperiturum.

Nempe notus est Tibi Du. Pitcarnius, Scotus, Medicus Lugduni-Batavorum docens ac Medicinam faciens. Hunc aiant insipientem esse etiam in re mathematica. Nuper Libellum medicum edidisse dicitur.

Davidis Gregorii Astronomicum Opus prodidisse puto. Credo velut commentarium esse in Hypotheses et ratiocinationes Newtoni circa Systema Corporum Coelestium. De caetero ad priores me refero. Vale etc.

Dabam Luxemburgi prope Berolinum 2 Septembris 1702.

CLL.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ut Te a metu liberem, promississimus sum in respondendo ad novissimas Tuas, mihi terius acceptas. Significo itaque rectissime ad me pervenisse scriptum Tuum, quo Bayliis objectionibus respondes, quod postquam a me summa attentione perlectum fuisset, statim misi ad Cl. Volderum et rogavi, ut sibi pariter lectum porro cum literis ad Baylium ipsum transmitteret; neque dubito quin omnia ex voto Tuo jam sint curata. Quae in scripto illo reperi, profundam meditationem spirant etiam sane pertinacem, ut merito mirer, qui ingenium diu multumque adeo in abditis istis macerare nec tamen defatigari poteris. Delectabar valde inter legendum, cum multa reperirem meis quondam speculationibus consona: quae enim habes de unione animae et corporis, his omnino assentior, imo hic in Disputationibus publice defensi, quamvis hinc gravissimae lites cum nonnullis Theologis ortae mihi fuerint, quae tanto cum fervore grassabantur, ut me tanquam Haereticum in scriptis et concionibus publice traducerent, sed ad suam propriam ignominiam, nam praeterquam quod ipsis non peperci, ut videbis ex scriptis quibusdam meis, quae nuper ad Te misi, etiam ipsi Provinciae Ordines meae secundarunt partes et Persecutoribus meis silentium imperarunt. Explicavi illam unionem animae et corporis per modum Harmoniae, plane ut Tu facis, et in-

tellexi postea ex quibusdam Cartesianis, neque se rem aliter considerare, adeo ut illorum via assistentiae, ut vocas, prout congruat cum via Harmoniae; volunt enim Deum creasse animam cum omnibus suis ideis, quae successive se mutuo producant vel, ut Tu vocas, evolvendo praecise concurrant cum ceteris quibusdam modis, qui successive pariter in corporibus producantur, ita ut necesse non sit, animam movere corpus vel vicinissimum corpus transmittere perceptiones ad animam. Usus sum similitudine (ni fallor) Tua duorum horologiorum, quae horas indicando perfectissime conspirare possunt, absque tamen eo ut in unum moventur, sed hoc ipsum est, quod Adversarii mei dixerunt esse detestandum Beckerianissimum. Ex nostra igitur sententia anima suas habet perceptiones ac si nullum esset corpus, et corpora ita moventur ac si nulla esset anima; non est proinde realis dependentia inter corpus et animam, sed relativa tantum. Haec per se sunt clara. Sed hinc sequi videtur, propter id ipsum nullo quo esse principio activo vel entelechia, cum enim nihil sit in universo, quod agat aliquid extra se, nisi velimus admittere rerum influentiam, quam Tu ipse rejicis. Non satis concipere possum verba Tua, quando dicis, punctum aliquod massae tendentium habere secundum tangentem curvae praestabilitae, sed entelechiam esse, quae punctum hoc dirigat secundum curvam praestabilitam: agit ergo entelechia in punctum, sed quomodo? An per influxum? non, hunc enim negas; an per harmoniam? si hoc, erit relatio tantum, quae in re nihil mutat. Adeoque punctum illud massae secundum praestabilitam curvam moveretur, etiamsi nulla adesset entelechia, quae praestabilitam curvam meditatur. Dico: meditatur, videtur enim ei cogitationem ascribere, dum deis massae punctum per se et sine entelechia non habere memoriam. Vellem etiam scire, cur anima nostra non eandem habeat praerogativam, quam quaevis entelechia, quae juxta Te (si mentem Tuam bene capio) aliud nihil est, quam anima minus perfecta, cum entelechia sit principium rerum et potest realiter agere in massam, uti statuis; anima vero extra se nihil valet, imo ne minimum quidem punctum massae movere. Ceterum elegantia sunt, quae habes de speculo vel imagine universi, in qualibet anima vel entelechia existente, ita ut in toto universo nihil peragatur, cujus nos non habemus perceptionem; nam propter divisionem et continuitatem materiae minimum motus in remotissimo loco ad corpus nostrum propagatur, unde

in mente propter eorum harmoniam praestabilitam quaedam perceptio oritur.

Pitcairius Scotus mihi notus est de fama, sed Medicinam Lugduni non docet. Erat quidem invitatus ad docendum et acceptavit Lugdunumque se contulit, sed viduum aggressus erat Professionem, cum venia impetrata repeteret Scotiam, se brevi rediturum promittens; sed postea ducta uxore in patria et ab ea retentus fidem liberare non potuit. De libello, quem edidit, nihil audivi. Quod sit mathematicus, discere potui ex Dedicatione Bellini, Medici Itali, Pitcairio inscripta.

In responsione Tua ad Baylium vidi Te agentem de ludo alearum et concertationibus, et variorum, qui de ea re scripserunt, mentionem inieceris. Sed miror, quod nihil dixeris de Caramuele, qui copiose et erudite hanc materiam pertractavit, quamvis nonnullos paralogismos subtiles in eo animadverterim. Non enim dubito quin ejus Mathesis Biceps Tibi sit visa. Scripsit post Hugenium, nam hujus dissertationis de ratiocinio in ludo alearum meministi.

De Davidis Gregorii Astronomico opere haud valde magnam opinionem concipio, postquam ejus crassa sophismata circa Catenarum videre mihi contigit.

Gratias Tibi ago, quanto possum opere, pro opera Tua, quam sollicite adeo impendis ad procurandum mihi munus Regium (uti inuis) valde pretiosum, quod non minus honorificum mihi erit. Colligo hinc Tuum in me singularem benevolentiae affectum, quem quovis tempore et modo demereri conabor.

Miror quod novissimas meas, quas Hanoveram (uti in praecedentibus me jusseras) inscripsi, nondum acceperis. Continuebant inventa mea circa analysin tetragonisticam, quae cum Tuis in lucem edi rogabam, aut si Tua jam essent publicata, ut mea tamen ederes adjecto Tuo testimonio, quod proprio meo Marte in hanc speculationem incidirem, de Tuis nihil adhuc nec viso nec audito. Significa quaeso an literae illae ad Te pervenerint, et judicium Tuum perscribere. Vale et fave etc.

Groningae d. 16 Septem. 1702.

Hoc ipso momento rumor (utinam verus!) ad nos pervenit de capto Landauo.

CLIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Serenissimus ac Potentissimus Prussorum Rex fundatæ a se Scientiarum Societati jura daret, in se recepit præmia illis nonnulla persolvere, qui insigni aliquo invento thesaurum humanæ cognitionis locupletassent. Id cum a Te novo Phosphori genere, quem parare in potestate esset, et in multa, ut apparet, secula proferre saluum liceret, factum esse constaret, ego, cui Societatis cura a Rege commissa est, Regio verbo insistens, facile obtinui, ut Nummus aureus quadraginta circiter Ducatorum, quos vocant, pretium æquans, pro Te mihi traderetur, quem nunc transmitto.

Rex, in quo moderatio animi par est generositati, non putat æquari muneribus posse inventarum rerum dignitatem, sed sum erga egregios Viros ostendi propensionem. Quod superest, vale, et Societatis nostræ, unde salutaris, præclara consilia Tibi necum commendata habet.

Dabam Berolini 24 Augusti*) 1702.

P. S. Consultum erit, ut literis datis Regi gratias agas, acceptumque Tibi munus testetur.

Rogo etiam, ut significes an Tibi redditæ sint meæ, quibus inerat responsio ad Cl. Baylium in nova Dictionarii sui editione quædam iterum meo systemati philosophico objicientem, quam petebam et Cl. Voldero communicari, ejusque ope ad Du. Baylium dirigi.

CLIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Dubius hæcebam per aliquot hebdomadas, an adjectas hæcæ Baylanas et Volderianas dimitterem, metuens quippe ne non ad Te rite perveniant literæ meæ, binas cum Tibi scripserim, ad qua-

*) Nuss 24 Septemb. heissen.

rum neutras responsionem accepi hæcenus. Interim ne forte officii erga Te neglecti reus videar, distius cunctandum non censui, Retineo tamen Tuam illud scriptum, quo Baylio ad objectiones respondes et quod una cum literis suis remisit, donec ex Te rescivero, quid de eo factum velis. Rescribere ergo quantocyus, rogo, ut de voluntate Tua mihi constet, simul et ut securus sim de hisce et præcedentibus meis, ut spero, non perditis, ad quas me nunc refero, plura non addens, nisi quod jussa Tua avide expectem, qui cum ad quodvis officii genus paratissimus etc.

Groningæ d. 28 Octobr. 1702.

Volderus concedit corporum entelectionem, si per eam aliud nihil intelligendum est, quam vis primitus impressa, sed negat eam corpori esse essentialem, et vel ideo quoniam si impressa fuit, iterum ex eo possit tolli et destrui. Alia quædam habet a meis, quæ nuper monui, hæc multum abundantia.

CLV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum Tibi et Duo, de Volder ample respondere sperarem, impeditus nunc quidem et distractus respondeo tantum, omnia bene reddita esse, et me mox amplius responsurum. Interea significo Numisma Aureum Regis, de quo distinctius Tibi dudum scribere memini, missum esse Amstelredamum, ad Du. Rahnam, Bibliopodam celeberrimam, a quo nomenis Tuo peti potest. Hæc festinus.

Dabam Berolini 14 Novembris 1702.

P. S. Scriptum a Duo. Baylio remissum rogo ut inter me servet.

CLVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Accepi cum literis Tuis datis 24 Augusti (nisi forte 7^{mo}) elegantissimam illam Nummam Auream, quem Potentissimus Rex Prussiæ mihi, in Phosphori inventi memoriam mihi jusserrat. Ex

dono hoc pretioso colligere licet, quanta propensione affectus sit erga rerum pulchrarum inventores, quavis inventum meum tanti non sit, ut in eorum numero habear, in id tamen incumbam ut aliquando favore Regio me dignum reddam. Rogavi Nob. Jablonsky, ut per occasionem Regi gratum meum animum aperire velit. Tibi quoque me devinctum sentio, quippe qui scio, quod ex Tua potissima commendatione hoc honoris mihi contigerit. Non est quod multis mihi commendes Societatis nostrae consilia; nam si quid in me est, quod valeat ad ejus commodum curandum, ex officio contribuere teneo, etsi non rogatus. Spero me communicatrum nova experimenta, occasione Phosphori mei perpetui instituta, quibus rationes meae de causa hujus luminis, a Gallis quibusdam etiamnum negata, mirifice confirmantur. Ab aliquo tempore tribus vicibus trinas ad Te dedi literas, sed nihil hactenus responsi accepi. Direxi illas omnes Hanoveram, ut me jusseras; haud dubie ibi haerent, nisi (quod non sperem) interciderint. Ex postremis earum, quibus adjectae sunt Responsiones Cl. Volderi et Baylii, videbis me non tantum scriptum Tuum ad Baylium rite curasse, sed etiam idem illud ab eo et per Volderum mihi remissum esse, quod nunc retineo, donec quid de eo factum velis mihi constiterit; quod ubi rescivero, nulla in me mora erit, sed ad nutum Tuum omnia diligentissime curabo. Vale etc.

Groningae 18 Novembris 1702.

CLVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Cum non dubitem, postremas meas, quibus munum aureum ad me perlatum significabam et eo nomine gratias agebam, Tibi rite fuisse traditas curante Nob. Jablonsky, ad quem eas direxeram, et cum interim nihil ab eo tempore responsi nec ad istas nec ad aliquot praecedentes meas literas hactenus a Te acceperim, distans cunctari non potui, quin in hujus silentii causam inquirerem, veritus ne quid Tibi inspectati acciderit, sed incertus, quo in loco Te invenirem, scribere citius nequivi, usque dum ante aliquot dies aliquis hac transiens, qui se dicebat Tubingensem et in Patria sua Professorem Math. designatum, se Berolium ante tres quatuorve heb-

domadas Te incolumem salvumque vidisse et allocutum esse mihi retulit, quod cum magna voluptate intellexi. Idcirco hasce Berolium mitto, scribendi causam fere non aliam habens, quam ut responsionis ad me dandae, quam avidè expecto, Te commonefaciam.

Prodiit nunc volumen opusculorum nonnullorum posthumorum Hugonii editoribus Voltero et Fullenio. Cl. Volderus ejus exemplar unum mihi dono misit, quod heri accepi cum ipsis literis, in quibus significat se aliud quoque per Bibliopolum, cum commodiorem viam ignoraret, misisse Lipsiam, ut inde porro ad Te mitteretur. Quod ut Tibi per occasionem scribam, me rogat, quo si forte inorentur Lipsienses, inde illud petere queas. Commodum ergo accidit, quod hac ipsa vice, qua Tibi scribere decrevi, eadem opera id exequi poterim. Voluminis hujus Titulus ita habet: Christiani Hugonii Zelemii, dum viveret, Toparchae Opuscula postuma, quae continent Dioptricam, Commentarios de Vitris figurandis, Dissertationem de corona et parheliis, Tractatum de motu, de vi centrifuga, Descriptionem Automati planetarii. Sed nihil horum adhuc perstruere licuit; ut ex figuris, quarum bene multae sunt, collige, pleaque curiosa sunt. In Tractatu de motu video agere Auctorem de ejus quantitate et communicatione. Quam primum vacabit, legum visurus 'an nobiscum ea in re consentiat, an in diversum abeat.

Accepi imper literas a Dno. Varignonio, in quibus communitat quaedam a Dno. Tschirhausio Academiae oblata, sed imposuit mihi legem arcani, quomvis omnia sint facillima et vix Tyrone digna; inter alia spatii alicujus quadraturam sine ejus demonstratione, sed quae tam facilis est et obvia, ut facilitate non multum cedat demonstrationi Euclidea, quae demonstratur aequalitas triangulorum super eadem basi et in iisdem parallelis existentium, procedit enim tantum per additionem et deductionem spatorum quorundem communium: hujusmodi quadraturarum centum novas quotidie exhibere liceret. Aliarum vero inventionum mentionem fecit, quas Dn. Tschirhausius possidere se pectaverit, non autem aperuerit, quas autem ego more ejus solito mere paralogisticas puto, praesertim si ea sit quae memoratur in Novellis Reip. literariae 1702. m. April. quam falsissimam esse demonstrare facile possum. E contrario problema magni momenti mihi a quodam mathematico in vicinia nostra propositum est et postea in Diario Paris. his

verbis: Une courbe algebratique (vulgairement appelee geometrique) étant donnée, la transformer en une infinité d'autres aussy geometriques, mais d'especes différentes, lesquelles soient chacune de meme longueur que la proposée, quod olim pro una altera tantum curva, nunc generaliter pro quavis data solvi. Usum habere potest ingentem reducendis curvis et una per alteram metiendis; ita possum exhibere curvas algebraicas innumeras valde compositas et graduum seu dimensionum perquam altarum, quae tamen singulae sint aequales curvae valde simplici, ex. gr. ellipsi vel hyperbolae. Quid de hoc sentias, gratum erit intelligere. Interim vale et fave etc.

Groningae d. 5 Mai. 1703.

P. S. Memineris sine dubio, quod adhuc responsum debeas Cl. Voldero. Misi Tibi ante plures menses per duos peregrinantes, qui salutem et literas 'a Te mihi afferbant, scripta quaedam mea et iconem illius machinae hydraulicae, qua his in oris utuntur ad incendia restinguenda. Velim mihi significes an acceperis.

CLVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Multi menses sunt, quod ad Te pariter et praeclarum Virum B. de Volder dedi literas. Voldero destinatas reperi in Schedis meis, iterumque descriptas nunc mitto, et ad eum curari prelo. Videbis ex illis, quid ad difficultates ejus reponam, quibus et Tuus, si fallor, satisfieri potest.

Cum in corpore pene nihil aliud sit quam Eentelechia, non video quomodo ea spoliari possit. Certe substantia sine Eentelechia esse non potest. Cum corpori initio vim impressam dico, nihil aliud intelligo, quam non prius existentiam, quam vim habuisse; addo nec habere potuisse. Vires derivativae et mutabiles sunt modificationes rei substantialis et remanentis; nec quicquam rei a Deo imprimitur, quod non fluat ex ejus natura, neque ab alio impressio facta intelligi potest.

Schediasma Tuum de quadraturis per resolutiones fractionum insertum est Actis Eruditorum *).

Ego cum diu adversa valetudine Berolini laborassem, nunc Divino munere restitutus huc appuli, et commercia pariter literaria aliisque labores utcumque resumio. Quod superest, vale et me ama etc.

Daliam Hanoverae 20 Junii 1703.

CLIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum nuper eximio nostro Voldero, literis Tibi missis, scriperim nondum me accepisse Hugeniama Posthuma, eaque nunc deum ad me pervenerint, subnataque sint aliae ad Te scribendi causae, simul id significare petereque volui, ut quando crebris Du. Voldero scribis, hoc quoque cum docere, et meo nomine gratias repetere velis.

Pecurri obiter et puto consentire nostris, quae de motuum Legibus habet Hugeniis, sed non ea constituisse principia, quae omnibus definiendis sufficiant; itaque nec de concursu nisi centrico et corporis unius cum uno sibi immediato agit.

Du. Tschirnhausius sperat in Microscopiis et Telescopiis multo plura praestare, quam possibile putat Hugeniis. Consilium mihi est, aliquando rem expendere diligentius. Quod si Tibi interim vacabit facere, plurimum deferam iudicio Tuo. Quae memoras de Problemate inserto in Parisino Diario, curvas infinitas specie diversas inveniendi datae aequales, non vidi. Problema tamen ipsum putem non difficile solvi infinitis modis, et alia etiam praestari majora. Ni fallor, aliquando et Du. Tschirnhausius aliquid tale promissit. Mentionem aliquando nonnullorum ad me Problematum a Te solutorum feceras, ex quibus quaedam me habere, quaedam non habere putabam; et in his lucem a Te petebam, idque repeto, cum Tibi vacabit.

Non satis scio, utrum Deventriae, an alibi habitet Du. Cu-

*) Act. Erudit. 1703 p. 26.

perus. Vir etiam in literis egregius. Itaque cum vobis vicinis id ignotum esse non possit, volui a Te petere, ut si alibi agit, corrigas inscriptionem et literas ad ipsum mitti cures; ego vicissim, qua potero, officia praestare studebo. Nunc vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 3 Julii 1703.

CLX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Binas ad Te literas me dedisse puto, quibus cum nihil sit responsum, suspicabar Te domo abfuisse; sed nuper juvenis Ductus Gothanus, qui Te in transitu salutavit, certiorum me reddidit, esse Te domi. Itaque has volui ad Te dare, saltem ut scirem an hinc priores essent redditae, praesertim cum novissimis (si bene memini) inclusae fuerint repetitae literae ad Cl. Volderum, quas redditas olim negabas.

Dn. Cluverius promittit nobis novum Microscopii genus, quod magnitudinem, nescio an et salva claritate, multiplicet in infinitum. Hugenius hic limites esse putat in Opere posthumo. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 8 Septembris 1703.

CLXI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Binas Tuas literas, quas ante aliquod tempus ad me delicti, cum novissimis Tuis accepi, atque inclusas ad Cl. Volderum, ut et alteras ad Ampliss. Cuperum rite curavi, neque dubito quin ad illos recte pervenerint. Sed cum nihil hactenus responsi mihi dederit Cl. Volderus nihilque et ego scripto valde dignum habuerim, distuli responsionem meam lucusque et distularem forte diutius, donec a Cl. Voldero aliquid accepturus fuissim, nisi ex postremis Tuis Te de literis Tuis prioribus sollicitum intellexissem.

Quae ad Hugenianam posthuma notas circa motum leges, jam perscrpsi Cl. Voldero cum meis ad eandem materiam animad-

versionibus bene multis, ubi ostendi, quod si Hugenius nostrapropria secutus fuisset, clarius et facilius nec non concinniori ordine regulas motuum constituere et demonstrare potuisset.

Dicis problema Diario Parisino insertum, curvas infinitas specie diversas invenendi datae aequales, non difficulter solvi posse infinitis modis; equidem libenter aliquem ex istis modis Tuis viderem, ut cum meis, quorum etiam infinitos habeo, conferrem. Fateor per curvas transcendentes facillime satisfieri posse questionem, sed si data sit algebraica, sensus questionis est, ut et quaesitae sint algebraicae, et hoc adeo obvium esse non video; ideoque tanto libentius Tuos modos viderem, et puto me aliquid hic praestitisse non minimi momenti. Dn. Tschirnhaus promisit quidem aliquod tale, imo longe plura, sed nihil praestitit pro more suo.

Eorum problematum, quorum ante biennium vel circiter ad Te mentionem feci, quaedam Te habere mihi dicebas, quoniam autem illa sint, mihi non succurrit. Si ea, quorum a me lucrum petis, in memoriam mihi revocare lubet, comhor petitioni tuae satisfacere. Poterat in Schediasmate meo Actis Lipsiensibus impetro Januario inserto nomen fratris mei omitti, ita ut ideo exemplum totum, quo methodum meam illustrare volui, eliminari non opus fuisset; sed video Lipsienses sibi reservare jus meum pro lubitu mutilandi vel omnino supprimendi, si vel minimam refutationis umbram habeat, aliorum vero contra me aggressuras iniquissimas nulla mei ratione habita statim protrudendi, ita ut aliis me aggredi liceat, mihi vero me defendere non liceat. Unde cautius posthac agam neque festinabo amplius multa ad Acta mittere, nisi deposuerint partium studium, quod palam nimis ostenderunt in libris mihi intercedentibus cum Tschirnhausio, postea cum fratre, et tandem cum Fatio Duillerio, a quibus omnibus, ut nosti et ipse fassus es, summam passus sum injuriam.

Attulit mihi nuper Scotus quidam libellum aliquem hoc anno editum a Georgio Cheyneae, etiam Scoto, cui hic titulus: Fluxionum methodus inversa sive quantitatum fluentium Leges generales ad Celeberrimum Virum Archibaldum Pitarnium, Medicum Edinburgensem. Petit a me Latur, ut examinarem et iudicium meum scriptis darem, quod feci, et ille ad Autorem jam transmissit, sed nullam adhuc responsionem ab eo obtinuit. Est sane, fateor, libellus peregre, multis sagacissimis inventis plenus; neminem ex Britannis novi post New-

tonum, qui profunde adeo penetraverit in interiorem hanc Geometriam. Sequitur Auctor Newtonianum notandi modum, multos tamen praecipuos notari paradoxismos. Nostris quoque (multis in locis) utitur inventis, quamvis id nunquam fere agnoscere veli; Britannis tribuit nimum. Exteris parum vel nihil reliquit; si ipsi credimus, sedes Geometriae in Britannia tantum reperitur et in aliis regionibus peregrina fere circumvagatur. Newtonum extollit in coelum et merito, nisi id in aliorum omnium extenuationis quandam speciem facere videretur. Ecce enim, uti finit: Quae, inquit, ipsius Magni Newtoni reperta cum mecum animo perpendo, non possum abstinere me, quin dicam, omnia in hisce vel per hasce (aut non absimiles methodos) ab aliis (intra hosce viginti quatuor annos proxime elapsos) edita, esse solum eorundem ab ipso diu antea cum Amicis vel publico communicatorum Repetitiones, aut non difficilia corollaria. Ergo nos reliqui nihil aliud sumus, quam Newtoni simiae, mutiliter scilicet repentes quod ille jam diu ante nos fecit. Auctor nullus exteri mentionem facit, praeterquam Tui et mei, et semel quidem tantum, ita inter omnes Exteros nos solos hoc honore dignos aestimat. De Te ita loquitur: Haec methodus coincidit cum ea publicata a Cl. Leibnitio Actis Lipsiae Aprilis 1693 (hoc est, ad minimum 17 annis postquam erat a Newtono reperta, uti constat ex pag. 634 tertii Vol. Oper. Math. Cl. Wallisii). Eam igitur (utpote facillimam et abunde a Leibnitio, Viro ob multiplicem Eruditionem per Totum Orbem terrarum Celeberrimo, illustratam) prolixius exponere necessarium non ducere exemplo uno et altero conficiam.

Ceterum ingenium mihi nunc non situm est ad mathematicas subtilitates, ab aliquo tempore dubius valde et ambigens haesi, et huius adhuc auxilium teneo, ut fere nihil aliud, quam de statu meo vel mutando vel non mutando cogitem. Ultrajecti Magistratus nuper me ad Professionem Matheseos et Philosophiae in sua Academia exercendam invitaverunt laudissimis conditionibus, et etiamnum contenti lapidem movent, ut me obtineant. Scribi curant Consulatus ad Sacerem meum, Senatorem et Curatorem Academiae Basiliensis, ut consentire velint in vocationem Trajectinam, blandissimis verbis et omni qua possunt humanitate me ad se allicere conantur, dicunt

me solum et unum esse, quem expectem, quoniam alium, quem mihi sufficiant, non norint; tantum nempe ipsis in me situm est. Interim etiam Ordines hujus Provinciae me carere nolunt et ut suscipior, offerent salarii augmentum aliquid, ut me retineant. Sed ad magis me turbandum et incertum reddendum accedit occasio remigrandi in Patriam, eodem tempore subnata, quam amplectendum mihi suadent Parentes. Qualis mihi sit exitus futurus ex hac labyrintho, tempus docebit; certo nescio adhuc quid de me fiet. Interim deliberandi spatium, quod ab Ultrajectinis obtinui, ad finem vergit. Si Tu mihi mature satis consulere potes, gratum erit consilium Tuum intelligere. Quod superest, vale et fave etc.

Groningae d. 29 Septembr. 1703.

CLXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratum est intellexisse, quod literae meae, quibus Cl. Voldero respondi, tandem secunda vice recte sunt ad Te perlatas: verbarum enim profecto ex silentio, ne forte, ut prima vice, perissent.

Aula nostra extra urbem in vicinia est. Ego ibi plerumque agere jussus sum, assignatis etiam in Palatio cameris. Ita rarius conversor cum Analysti, ad inspicio veteras chartas meas. Faciam tamen, tam ut Tibi explicem, qua ratione, sane amplissima, datae curvae aequales exhibeam curvas algebraicas algebraicas, infinitis modis, quod a multis annis habeo; tum ut Tibi perscribam, quid in Problematis Tuis solum habere expectam.

Cheyneus Scotus Librum suum etiam ad me misit, sed, ut verum fatear, pene Tyroneis opus esse videtur in his studiis; adeo nihil reperio, quod non facillime ducas ex pervulgata jam dudum methodo seriemur. Nec ullum aggreditur problema aliquis momenti. Quod si vel aliquam Seriem novam elegantem exhibuisset, saltem ex labore ejus proficeremus, et tamen supercilium sumit. Talis libri quotidie multi scribi possunt non magno operae pretio, itaque nisi meliora proferat, hominem sibi relinquendum vel potius ad medicinam bene faciendam hortandum censeo. Interim mihi gratum erit, quae ipsi scripisti videre; tum quae Voldero circa ea, quae Hugenius de motu reliquit, egregia pro illo tempore, sed

opinor nostris non conferenda. Vellem et Dioptricen ejus examinasses.

Difficile fuerit Tibi consilium dare, inter Basileam, Ultrajectum et Groningam fluctuanti, nisi omnibus circumstantiis perspicias. Si omnia aequalia essent, credo ad praefendam Patriam impelleret conjux; sed si alibi meliores condiciones offeruntur, Patria esse videbitur, ubi optime erit. Groningam tamen non putem, nisi insigni emolumentorum augmento descendam; modo calculi conveniat aer. Valetudinis enim super omnia habenda ratio est.

Aliquando quorundam Posthumorum Cartesii editio promittebatur in Batavis. An prodierint nescio. Ego ex iis nonnulla indidem habeo. Talia sunt: Regulae veritatis inquirendae (quae mihi non admodum singulares videntur) illustratae exemplis non male, Fragmentum Dialogi Gallici, Primae cogitationes de animalium generatione etc., quod si non ederent qui promissere, possem ego librariorum editurum submittere, et addere quaedam inedita Gallici et Valeriani Magni et Pascalii; et meas notas, quas vidisti in Cartesii partem Principiorum generalem, aliaque id genus. Neque aliud poscerem a librario, quam magnam numerum exemplarium, et tot amicos per orbem. Si edita sunt Cartesiana, forte tamen caetera placebant, praesertim cum addi possint quaedam inedita Campanellae, aliaque id genus.

Gratulor Tibi honorem certaminis praedarum Urbium de Te. Opto mature discernere, an Te in vicinia porro sim habiturus. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Herrenhausaee prope Hanoveram 2 Octobris 1703 *).

CLXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Laudo consilium Tuum, quod maluisti manere Groningae, nec praeter rationem locum mutasti. Vellem haberes quem posses

*) Joh. Bernoulli's Antwort auf dieses Schreiben war nicht anzufinden.

commendare Ultrajectinis. Sed vide sterilesce hoc aetum in omni pene genere doctrinae, et quanto majora habent subsidia studiosi, eo magis ignaviam invalescere.

Saepe iis, qui Mathesin *πρός τὰ ἀλλεῖα* inservire negant, Tuum aliorumque paucorum exemplum ingessi, quos lutiis conditionibus invitant Principes et Respublicae, dum medicos illi atque intra vulgata haerentes merito tenuiori fortunae relinquuntur.

Methodus illa mea multo plus praestat, quam problema illud Tuum, curvas algebraicas innumeras datae algebraicae aequales; imo habet aliquid inexpectatum, de quo, ubi otium nactus fuero.

Cheyneus mihi vix problemata aggressus videtur, alioqui sensisset, quam non facile sit problematibus per finita solvendis viam monstrare per Series infinitas, et Serierum abruptio tam variis modis contingere potest, ut nonnisi multa arte eligi possit, quae ad rem faciat. Talium autem artium nulla apud eum vestigia deprehendo.

Inpete Newtono vindicare vult Methodum Seriei per arbitrariorum coefficientes assumptos et comparisonem terminorum determinandos investigandas; nam ego cum publicavi *), cum nec mihi nec cuicquam alteri, saltem publice, constaret tale quid habere et Newtonum. Nec ipse jam magis sibi tribuit, quam mihi. Uter prior labuerit, non dicim. Ego jam adhibui in antiquo tractatu de Quadratura Arithmetica, quam Hugenius et Tschirnhausius Parisiis legere.

Esto; sit Cheyneus paulo supra Tyronem, certe facile dare potuit, quae dedit. Quicumque semel intellexit nostra, talem librum facile componet. Certe nullam novam Seriem pulchram, nullum Theoremata elegans affert, Praeterea non syntheses illae Serierum aliorumque Theorematum, sed Problemata sunt lapsi lydiis Methodorum.

Significa, quaeso, titulum libri posthumi Cartesiani, et apud quem sit impressus, ut possim petere ex Batavis. Ita video, quid addi possit. Polyandri cujusdam in meis fragmentis latinis mentionem fieri non recorder.

Nuper denum Berolini apud Du. Cinnamum vidi Librum quemdam Rollii in 4^{to}. Apparet ingenio non carere, sed nunc esse per-

*) Art. Erudit. 1693 pag. 178. G. G. L. Supplementum Geometriae practicae sese ad problema transcendentia extendens etc.

plexum, et ex musca elephantem facere, et inventa Serierum frage-
vesci glandibus stuarum intricatissimarum appropinquationum. Plura
committit, quae non vidi. Est autem promissis ditissimus, et alie-
rum quorundam exemplo in abstracto sibi fingit miras Methodos.
Sed ubi Problema solvi debet,

ubi arma Dei ad Vulcania ventum est,

Mortalis mucro, glacies ceu futilis, ictu
Dissilit.

Placent valde quae notas ad Hugonii Phoronica, praeser-
tim quod calculo subiectioni incrementa velocitatum per interposi-
tionem corporum. Totum caeteroqui opus Hugonii nititur hypo-
thesi, vera quidem et successu confirmata, et a me quoque adhi-
bita, sed quam a priori non facile monstrabit aliquis, aut Geo-
metricae vel Metaphysicae necessitatis esse ostendet: nempe quid-
quid verum est de motu certa duorum motuum compositione facto,
id verum etiam esse de motu ejusdem directionis et velocitatis li-
bero aut alia compositione facto; atque ita qui corporum in natu-
rata concurrentium motu apparenti ex ripa oritur effectus appa-
rens in eadem ripa, hunc oriturum etiam, si navi et alveo aquae
sublato vel in ipsi ripa idem concurrentium motus cerneretur, ille
principium erroneum male putavit Honoratus Fabius, cum Kep-
leri et Cartesii modum demonstrandi aequalitatem incidentiae et
reflexionis oppugnet. Interim, eventu magis, quam demonstratione
necessaria, hoc principium varie compositi motus idem efficientis
stabiliri latendum est, neque causam quaerentibus aliam occurrere,
quam harmoniam sive perfectionem rerum, a qua in universum ve-
rum est pendere leges motus, tanquam effectus supremae Mentis,
non a surda quadam necessitate, qualis geometrica est. Verum qui-
dem est eadem esse Conicae Sectionis proprietates (ut exemplo
stare) sive motu in plano, sive sectione solidi construat; sed ibi
certe pronuntiari potest, unam lineam ab altera non differre, quoniam,
causa remota, subsistunt; aut duos motus, qui diverso modo
prodeuntur, cum post causam remotam minime subsistant, non
acque eodem pronuntiare licet, nec causam physicam vel geomet-
ricam reperias, cur corpus, navi forte impedita, aperto in prora
exitu, in stabile planum exitiens easdem leges sequi, et ut sic di-
cam, meminisse debeat eorum, quae in navi fieliunt, quae nullum
sui vestigium reliquerit. Idem est in omnibus demonstrandi Me-
thodis, quibus hic utimur, ex. gr. quod corpora concurrentia id

observare debent, ut vim nullam vel accipiant vel tribuant, per
quam vel nimis parum vel nimium assurgere possint, ne scilicet
relabendo effectus potius aut inferior causa oriatur; neque enim
est in illis cavendi intellectus. Est et aliud principium, ex quo
semel admissio leges motuum ostendi possunt, nempe quod idem
sit ictus, idemque a se invicem recedendi conatus, modo eadem
sit celeritas appropinquationis concurrentium, ita ut non referat,
quis in alterutro sit motus. Sed hoc quoque principium magis
assumitur ex fundamento harmoniae, quam perfecte demonstratur;
assumitur, inquam, materiam motui resistere, seu corpus quiescens
non pati se loco dimoveri, nisi refracta vi incurrentis, cum tamen
in materia nihil aliud concipiendi quam extensionem et impenetra-
bilitatem nihil tale inferri queat, et sequi potius debeat quantum-
cunque quiescens a quantalocunque sine resistencia loco pelli de-
bere; sed ita omnis harmonia Legum naturae tolleretur, et muta-
tiones fierent per saltus. Itaque postremo recurrendum est ad
principium Harmoniae sive Sapientiae, atque id ipsum pulchre eve-
nit, ut de Supremo Autore in ipsis Legibus suis generalibus Na-
tura testetur, quod cessaret, si Geometriae demonstrationi loc-
cus foret.

Ex his vides, etiam non esse cur putes, uno tantum me
usum principio, nempe reductionis ad motum perpetuum tanquam
absurdum; quoniam adhuc in Actis, ut rem intellectui omnium
accommodarem. Caeterum vix ulla excogitabitur methodus, qua
non sim usus ad idem efficiendum, nempe non tantum ope gra-
vium, sed et elasticorum deprimentorum, aequalitatis effectus et
causae; aequalitatis inter actionem et reactionem concurrentium,
indiscernibilitatis hypothesim, evitandi saltus et interventus virium
mortuorum, compositionis motuum, et speciatim concursus obliqui.
Inprimis vero delectatus sum considera tione metaphysica virium
et actionum, quoniam positis definitionibus rei maxime consen-
taneis, inde geometrica necessitate effluo, vires esse in ratione com-
posita ex simplice corporum et duplicata celeritatum. Usus quoque
sum aequalitatem, quas pene amo abhinc ad Dn. Fratrem Tamm
interrogantem perscripsi; nempe, posito motum ipsis a ante con-
cursum esse x , post x , et motum ipsis b ante concursum esse y ,
post esse z , fore $y - x = z - x$, seu, $x + x = y + z$ et $av + by =$
 $ax + bz$, et denique $avv + byy = axx + bzz$, ita tamen ut signa
harum literarum mutantur, cum directio contraria est praevalet.

Ex duabus autem aequationibus quibuscunque hic sequitur tertia, et sunt adhuc aliqua profundiora. Caeterum Dn. Hugenius, supposito principio compositi motus, non habebat opus principio de assurgente centro gravitatis, quod coincidebat cum aequalitate effectus et causae; nam quae reciprocis molis celeritatibus sibi occurrunt elastica, ea sibi mutuo motum adimere debere, geometrica necessitate constat ex natura aequalitatis et virium mortuorum.

Litteras adjunctas ad eximium nostrum Volderum curari peto, cui et haec puto non ingrata erunt de legibus Naturae, non ex geometrica necessitate, sed Sapientiae et Harmoniae principio plene derivandis. Oblitus sum dicere, Hugenium videri non cogitasse de elastico concurrentium, unde coactus est recurrere ad principium centri gravitatis. Propositionem primam separatim demonstravi a secunda, quia nondum satis tunc in usu erat ratiocinatio ex lege continuitatis, quam etiam in Geometria Elementari prodesse memini. Nam cum Euclides assumat potius quam demonstret, duas rectas acquiescentes esse in eodem plano, res statim conducitur, ut sub convergentibus comprehendantur, ubi punctum infinite abest, seu cum ratio datae ad ejus elongationem evanescit.

Quoniam Dn. Frater Tuus et alii mirantur, quod duo corpora inaequalium virium se mutuo sistant (quod etiam magno ingenio fraudi fuisse videtur, ne naturam virium plene perspiceret) ideo soleo eos admonere, ut distinguant inter vires vivas absolutas, quibus effectus aliquis violentus produci potest (ut ascensio gravis, tensio elastici corporis, motus quiescentis) et ut sic dicam, impeditivas, quae necessario leges virium mortuorum, vel si navis embryonatarum, sequuntur in destruendo se mutuo, quia destructio non fit per saltum, sed continuo, seu per insignificabilia decrementa, id est, per vires embryonatas. Sed vires impeditivae toto genere distant ab absolutis, ut angulus contingentiae a recto.

Quod superest, vale et fave etc.

Daham Hannoverae 22 Novembris 1703.

CLXIV.

Jon. Bernoulli au Leibnitz.

Superrimas meas cum adjunctis Volderianis et excerptis quibusdam meis de Motu, Tibi jam redditas esse non dubito. Puncula haec nunc scribo, ut Tibi meliori modo commendem Latores, Nobilem Anglum, qui in mathematicis principis mea manu ductione per aliquot menses est usus, ejusque Ephorum, Virum potissimum et eruditissimum, Robertum Falconerum, qui familiariter novit Cheynaem, cujus Librum de Fluxionibus mihi attulit. Respondi nuper Cheynaeco, et veritatem nequaquam dissimulavi, monstrando ei quod Tecum aliisque exteris non ex merito egerit, dum eos non nisi extenuandi et eorum inventis derogandi studio citasse videatur. Quo animo haec sit accepturus, ex ejus responsione docebor. Dn. Craigius non eandem, quam Tu, fert sententiam de Libro Cheynaici; hunc enim in epistola quadam edita in Transactionibus ita alloquitur: „Facile credas, Vir Eruditissime, mihi non parum aridire, quod methodus, quae usus sum in determinandis figurarum quadraturis, tantopere a D. Leibnitio et Te probata fuerit, ut ille alteri cuidam a se inventae non nihil similem agnosceret. Tu vero ut conjecturam feceris ei non multo absurdum esse illum, quia utitur D. Newtonus, cumdemque ipse tanto cum successu sequaris, ut methodus calculi differentialis inversa incredibili incremento jam a Te promota sit in Libro „Tuo, quem D. Archibaldus Pitcairnis, Patricae nostrae et saeculi huius ornameto, inscripsisti etc.“ Vides quanta laude hic Liber extollitur, quamquam id non adeo miror, cum sint Populares et alter alterum certatim laudando nihil omittit, quod in se redimere possit. Scripsit mihi Cheynaeco Newtonum Cogitata et Experimenta sua de Natura lucis et colorum nunc sub praelo habere, sed vernacula sua lingua edenda; item Moiraeum quendam (sed quae aut qualia, se plane nescire) publico minari, et Gregorium mundum et correctissimam omnium operum Euclidis Graece et Latine Oxonii Editionem curare. Cum hic mentio incidit de Gregorio, etiam hoc Te scire volo, quod ejus demonstrationem Curvae Catenariae Cheynaeco proposuerim examinandum, et rogaverim, ut sum ut et Newtoni (quorum quotidie conservandi copiam habet) de ea iudicium perscribat. Scripsi enim Te et me et omnes externos Ma-

thematicus, qui nec fungi nec stipites sunt, eam demonstrationem pro paralogistica habere, prout bene monitum sit ab Anonymo in Actis Lipsiensibus, quicquid postea Gregorius contra respondere nitatur. Itaque rogavi, ut mihi libere et candide dicat, quid Angli et inprimis Newtonus sentiant, ut nimirum hac arte Newtoni sententiam elicerem, quam si cum nostra conveniret, postea in publicum edere possemus loco Replicationis Anonymi utpote nondum datae. Caeterum me refero ad meas novissimas. Vale et ama etc.

Groningae d. 29 Novembris. 1703.

CLXV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ex quo meae ad Te Volderumque nostrum literae perire, quas, ut memini, iterum mittere coactus sum, idem mihi, cum quas, ad utrumque scribo, ad Te pervenisse non intelligo. Scio enim esse quosdam curiosiores quam par est rerum alienarum, quos epistolas nonnullas a me aut ad me aperuisse aliquando et suppressisse comperi.

Anglus quidam hac transiens, qui aliquandiu Groningae egreditur, narravit esse Tibi compositionem nescio quam non metallicam, speculis aptam, quam et ipsi communicaveris. Occasio in eam inquirendi apud eum non fuit, et malui a Te quaerere, quidum id rei esset.

Quidam Tornator Dresdae, vixit Tschirhanusii speculis metallicis, alia ex ligno fabricavit, quae auro foliato obdixit, nec contemnendus est effectus, etsi ut credi potest, metallicorum vim non aequat. Alii pro ligno non male gluten aut massam glutinosa adhibuere, quae ipsa deinde inaurata fuit. Haec enim massa nimis mutationibus obnoxia est.

Cum imper forte epistolas digerens in Tuam incidissem, quae mentionem facis problematis inserti, ut scribis, Parisino Diario, nempe curvas invenire Algebraicas specie differentes datae curvae Algebraicae aequales, volui nonnulli experiri methodum, quam animo conceperam, et paulum meditatus, statim incidi in viam ge-

neralissimam et facillimam. Esto (fig. 153. 154) linea data B(B); assumatur pro arbitrio (specifice tamen determinata debite et collocata, ut mox dicam) linea F(F), quae praestet speculi vicem, et radius BF, ipsam B(B) tangentes repercutiat angulo incidentiae et reflexionis aequali. Horum radiorum reflexorum FL concursu formata linea L(L) habebit differentiam cognitam a data B(B). Sunt enim lineae BB, LL coevolutae eodem circumplicato filo, et sic stylo filum tendente describitur F(F). Jam cum $BFL + L...L$ sit $= B...B + (B)(F)(L)$, patet fore $B...B - L...L = cognita BFL - (B)(F)(L)$ differentiae filorum. Sunt autem lineae B(B), F(F), L(L) algebraicae, ergo et differentiae filorum habentur algebraicae. Et quis de casu tantum speciali (etsi ad quendam applicabili) seu arcu dato B(B) in calculo agitur, idem species infinae (sive aliquae parametrorum) vel situs etiam speculi F(F) sic assumi potest, ut in casu proposito haec filorum differentia sit nulla, imo data. Effici etiam potest, ut summa curvae datae et quaesitae sit data, uti arcum B(B) et L(L), si fila BF, FL simul crescant vel decrescant. Quod si pro reflexione adhibeas refractionem, vel pro reflexione ordinaria fictitiam, quam adhaebuit Cartesius, poterit fieri ut curva prodeat, quae sit in ratione data ad datam; itidem infinitis modis, ut prodeant specie differentes, quamquam etiam obtineri possit per ordinariam reflexionem Curva, quae sit ad datam in ratione data, si nempe datae similes in ratione data facias, et hinc aequalem, modo explicato. Poterit etiam (generalissime in terminis simplicibus) Curva alia fieri, ut unus arcum sit aequalis summae vel differentiae inter rectam datam et magnitudinem, quae sit in ratione data ad alterum arcum, ut si curva data sit x, quaesita y, et postuletur $y = c + \frac{b}{a}x$. Et plura huiusmodi confici possent, si utilitas appareret.

Si speculum reflectendo radius reddat convergentes, ut in figuris adiectis, speculum est figura, quae omnes ellipses tangit, quarum foci sunt in punctis B et L, respondentibus, filoque BFC; sed in casu, quo radii reflexi divergentes sunt, seu trans speculum convergunt, patet hoc speculum esse lineam ad omnes ellipses perpendiculararem: idem est si pro reflectionibus refractiones adhibeamus, concursusque sit non trans litem, sed citra; quae consideratio et alias connexionem subinde inter tangentem et perpendicularem iisdem curvis curvam dabit. Sed talia omnia a Te re-

ctius et peritius discutientur; ego quae abstrusiora nunc aegre attingo. Vale.

Balsam Hanoverae 3 Januarii 1704.

Beilage.

Es scheint, als wenn Leibniz die vollständige Behandlung des schon mehrfach erwähnten Problems, von der er in dem vorhergehenden Schreiben einen Auszug giebt, für die Öffentlichkeit bestimmt hatte. Sie mag deshalb hier folgen:

Solution du problème qu'on avoit proposé dans le Journal des Savans: Une courbe ordinaire (c'est à dire qu'on appelle vulgairement Geometrique) estant donnée, en trouver une infinité d'autres de differente espee, toutes Geometriques, dont chacune soit egale à la donnée, ou (ce qu'on veut bien ajouter) en telle raison qu'on voudra. Par Mons. D. L.

Soit la Courbe ordinaire donnée (fig. 135) B(B), on demande une autre aussi ordinaire L(L) egale à B(B), et cela d'une infinité de façons. Prenés à discretion la ligne F(F) aussi ordinaire ou Algebraïque telle qu'il vous plaira pour servir de miroir, en sorte que les rayons BF venans de la courbe B(B) en la touchant, soient reflectis par ce miroir en FL et y forment par leur concours la courbe L(L) les FL croissant quand les BF décroissent, ou vice versa, et la ligne L(L) sera la demandée egale à B(B), et comme le miroir F(F) peut estre varié d'une infinité de manieres, on aura autant de lignes egales à la donnée.

J'appelle ces deux lignes B(B) et L(L) Synacampytes, l'une à l'égard de l'autre; car j'appellais Acampyte (voyez les Actes de Leipzig Janvier 1689) c'est à dire sans inflexion des rayons, une courbe L(L) par rapport à des rayons donnés de position par ordre, savoir FL, qui la rencontrent sans en estre alterés, c'est à dire sans en souffrir ny reflexion ny refraction, par ce qu'ils la touchent; comme j'appelle une ligne Aclaste par rapport à des rayons qui la rencontrent et la percent sans refraction, par ce qu'ils luy sont perpendiculaires. Et j'appelle Synacampyte la ligne L(L) par rapport à la ligne B(B) par ce qu'elles sont toutes deux acampytes par rapport aux memes rayons continués BFL. Elles sont aussi du genre des coëvolues, le même fil ABFLH estant appliqué à toutes les deux, et son evolution décrivant la courbe F(F) par le moyen du style F, qui tient le fil tendu. Et

ces deux lignes B(B) et L(L) peuvent estre appellées particulièrement contrevolues, l'une à l'égard de l'autre, par ce que le fil BF croissant en (B) (F), il arrive qu'à l'encontre le fil FL diminue ou devient moindre en (F) (L), et comme c'est toujours la même longueur ABFLH, il est manifeste que ce qui est evolu de l'arc B(B), est involu ou appliqué à l'arc L(L) et que par consequent ces deux arcs sont égaux. On suppose toujours que tout est dans le même plan.

Où comme le fil ou l'evolution sert à demonstrier l'egalité de ces deux Lignes, les rayons avec le miroir servent à trouver l'une par l'autre. Car la ligne B(B) estant donnée et le miroir F(F) pris à discretion, et par consequent donné aussi, il est manifeste que les tangentes FL sont aussi données de position ordinatim, car BF donnée est reflectie du miroir selon la loy des angles de reflexion egaux à ceux d'incidence. Et j'ay montré dans les Actes de Leipzig Avril 1692, comment des lignes (droites ou courbes données de position ordinatim (ou par ordre)) formant une ligne par leur concours, qui est toujours leur tangente commune, on peut déterminer cette ligne par mon calcul des differences, et cela algebraiquement, si ces lignes soient algebraiques comme icy ou les lignes FL ne sont que droites. D'où il est manifeste que le problème en question est resolu. Mais la ligne F(F) est celle qui se forme par le concours de toutes les Ellipses dont les deux foyers sont les points B et L, qui se repoussent, et le fil BFL donne toujours le même. Et par cette consideration j'ay montré que tous les problemes se peuvent résoudre, ou il s'agit de trouver la figure d'un miroir ou d'un verre, qui doit rendre paralleles, ou envoyer vers un point, ou dresser comme venons d'un point tous les rayons venans d'un point du soleil ou d'un autre lumineux soit directement, ou apres autant de reflexions ou refractions qu'on voudra. Comme j'en avois donné l'essay du dit mois de Janvier de l'an 1689, ou je publyai cet usage que les coevolutions ou des foyers lineaires ont dans la science catoptrique ou dioptrique dont on ne s'estoit point auparavant. Et ce fut la premiere ouverture de la doctrine des caustiques demandées, qui a esté si bien cultivée depuis par Messieurs Bernoulli, et particulièrement par M. le Marquis de l'Hospital dans son Analyse des infinitesimales. Il se pourroit que les deux courbes B(B) et L(L) fussent parties d'une même courbe, en sorte que une courbe BL fut sa propre contrevolue. Et on

peut trouver le miroir en supposant la dimension de la courbe, car prenant T comme concours des deux tangentes quelconques de la courbe, on peut s'imaginer le fil ABF (L) H et le stile tendant toujours ce fil dessinera le miroir demandé. On peut faire aussi que la courbe LL ne soit pas une continuation de la courbe BB, mais congruente ou la trace de la même posée autrement. Mais dans ces cas les miroirs ne seront pas toujours des courbes Algebriques, comme on demande icy. Car leur construction suppose la dimension de la courbe donnée.

On pourra faire sur le même fondement que la courbe L (L) soit en raison donnée à la courbe donnée B (B), en employant un verre ou autre matière transparente au lieu d'un miroir et que la matière soit de telle densité que les rayons BF rompus après F de telle sorte que le sinus de l'angle de la refraction soit en raison donnée au sinus de l'angle d'incidence, car alors la partie de la courbe, savoir L (L) qui se forme par les rayons compris entre F et (F) sera aussi en la même raison donnée à B (B). Et il n'importe, si le concours se fait au delà du verre ou en dedans comme dans notre figure, ou la refraction les rend divergens. Outre qu'on se pourroit imaginer avec M. des Cartes une matière réfléchissante qui détournât de même les rayons par un angle différent de celui d'incidence, en sorte qu'il fit, mais en arrière l'effet de la refraction, comme au contraire on se peut imaginer une matière faisant refraction qui fît l'effet de la réflexion, mais en avant tellement que les angles d'incidence et de refraction seront égaux; mais comme il ne s'agit icy que de la détermination géométrique, les réflexions et réfractions ordinaires suffisent. Il est vrai qu'on peut venir à tout encore d'une autre manière, en faisant une courbe semblable et en raison donnée à la courbe donnée, ce qui est aisé par les droites homologues et trouvant depuis une courbe égale à cette courbe homologue.

Il ne me reste que de remarquer icy, comme j'ay fait encor ailleurs, la différence qu'il y a entre les manières d'inventer: il y en a de plus analytiques, où il faut penser profondément, mais il y en a où il ne s'agit que de penser ou de s'aviser de penser à quelque chose et de faire une combinaison ou synthèse aisée, comme icy où tout Geometre assés avancé, qui pensera en même temps aux coëvolues et à notre problème, ne manquera pas d'en trouver la solution.

CLXVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

EX responsione Volderi hic adjuncta videbis vixisse metum Tuum de literis ad illum datis: illas me recte accepisse, illud jam Tibi significaveram per duos Anglos eodem quo acceperam die mihi valdecentes Hanoveram petitors et a me literas commendatitias ad Te delaturos: sed ut ex Tuis conjicio, quod Ves nondum appulerunt, quod forte Hamburgi nonnulli moventur, forte tandem appulerunt. Intelliges ex literis illis, quid Cheynes summum scripserim: misissem hac vice descriptionem animadversionum mearum in ipsius librum, si otium describendi habuissem.

Ut ad Tuas priores respondeam paucis, quas jussu Tuo cum Cl. Voldero communicavi, commendavi Ultrajectinis Doct. Hermannus, qui si offerretur Professio, eam non recusaret: spero successum. Etiam ego notavi contra Cheynaeum, quod non bene faciat, si quidem Newtono vindicare velit methodum seriei per arithmeticas coefficientes assumtas, ideo tantum quod Newtonus eam habuerit, antequam Tu publicasses: monui Te eam habere potuisse etiam prius multo, quam publicandam statuisses.

Titulus libri posthumi Cartesiani ita habet: R. Des Cartes Opuscula posthuma physica et mathematica. Ampli ego recensio habetur in Actis Lips. anni 1701 m. Decemb.; miror quod non videris. Quod natalae meae ad Hugueni Phisomica Tibi plauerint, multum gaudeo; putavi Cl. Volderus me errasse una cum Huguenio in calculo incrementorum velocitatum per interpolationem vera summent. Metaphysicas quas addis speculationes jam olim, ni fallor, maximam partem mecum communicasti. Quod autem subiectis, Huguenium ideo propositionem primam separatim demonstrasse a secunda, quia nondum satis tunc in usu fuerit ratiocinatio ex Tua lege continuitatis, putem ego, quicquid potuisse deducere primam ex secunda, etiamsi non attenderit ad legem istam continuitatis, et quantum ad ipsam hanc legem, credo neminem esse qui eam ignoret, licet non semper de ea cogitet,ectura ipsa enim eam quasi dicat; Tibi autem debetur, quod peculiari nomine continuitatis illis cognitionem ejus non tam facere, quam refricare vel excitare volueris.

Ut nunc ad posteriores (Tuas literas aliquid reponam, mihi Tibi tam facile excidisse, quae Tecum jam diu communicavi, neque cogitata mea de conficiendis speculis causticis sine magno et labore et sumtu; lignea enim illa auro foliato causticis sine magno et labore et sumtu; lignea enim illa auro foliato obducta jam diu mihi erant cognita, sed sumtibus non satis vires respondere videbantur. Iuxta Tibi, inventum meum consistere in eo, quod opus plumbaginis avi albumine subactae lignum tam eleganter poliri possit, ut etiam politissimum chalybem et colore et politura mentiatur, unde lupusmodi speculum ad radius reflectendos multo aptius censui, quam inauratum, praeterquam quod etiam viliori pretio et labore minori parari possit. Hoc Tu probasti et simul mihi respondisti, Te accepisse librum ex Anglia a nescio quo anabaptista, cujus foliorum margines (vulgo sectionem vocant) plumbagine erant obductae et exquisitissime politae.

Legi cum voluptate methodum Tuam, quae confici posse putas problema Parisino Diario insertum, quae consistit in convolutione curvarum (fig. 153) AB(B) et L(L), quarum illa est data, haec quaesita, quae determinatur per oppositionem curvae alicujus algebraicae F(F) tanquam speculum consideratae, in quam incidunt tangentes BF, (B)(F) et per reflexionem formant curvam alteram algebraicam L(L), quae cum priore B(B) facit vel differentiam vel summam algebraice rectificabilem. Quamvis haec methodus per se sit elegans, quippe per quam ad datam curvam possum invenire infinitas alias curvas algebraicas, quae omnes cum proposita faciant aliquid rectificabile, duo tamen sunt, quae in ea pro nostro problemate desiderantur. I. Fateor quidem differentiam inter B(B) et L(L) esse algebraice cognitam, sed non ostendis modum construendi curvam F(F) algebraicam et quae faciat, ut illa differentia sit nulla; forte hoc ipsum non est minoris operis. Dicis aliquam parametrorum vel situm etiam speculi FF sic assumi posse, ut in casu proposito haec filorum differentia sit nulla, imo data; sed quomodo hoc algebraice fieri possit, velle ostendisses. Est posito hoc Te praestitisse, demonstrandum est 2. curvam L(L) non fore eandem nec ejusdem speciei cum proposita B(B). Subverto enim, ne, quemadmodum plerumque accidere solet, in identicam incidas. Ceterum velle haec omnia exemplo aliquo illustrares, si vis in Ellipsi, cui aliam algebraicam aequalem assignes ejusque naturam per aequationem more solito exprimas. Mea atque methodus id facile potest, et alia multa praeterea habet in

potestate, ex. gr. duas pluresve curvas algebraicas in unam algebraicam mutare, id est, construere curvam algebraicam, quae pluribus algebraicis datis et simul sumtis sit aequalis, idque modo perfacili, neque enim indiget consideratione oculi in curvis, ut Tuam video indigere. Verbo, methodus mea perficitur differentitis tantum primis. Vale etc.

Groningae d. 15. Jan. 1704.

CLXVII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum literae Tuae, quas duo Angli attulere, jamdudum scriptae sint, spero ex eo Tibi redditas meas cum inclusis ad Voluerum. Nuper Tibi iterum scripsi, ut inquirerem de earum fato.

Si Du. Craigius Librum Dni. Cheynaei habuit, non miror; laudatus ab ipso et Scotus loquens de Scoto.

Ceterum non video quomodo Du. Craigius dicat methodum, qui in Quadraturis utitur, etiam a Cheynaeco adhiberi, ita ut methodus calculi differentialis inversa inde incredibili cum incremento sit promota. Nam, si fallor, diversa est methodus Craigii et Cheynaei, et non memini videre in Cheynaeco soluta problemata aliqua difficultate conversae Tangentium. Ego vero non puto, Te aliquid dulcissime ex libro Cheynaei. Sin erro, rogo Te ut Tui luminis me quoque participem facias.

Si Du. Gregorius satis Graece scit, poterit utilis esse Republicae literariae edendis et recensendis Mathematicis Graecis, in quo sane operae pretium faciet. De cetero non memini aliquid ab ipso videre magni momenti. Opus ejus Astronomicum, si qua nova habebit, erunt paraphrastica Newtonianorum. Mensuratio figurarum erat exigui momenti. In Dioptrica sua meam doctrinam de Circulis osculantibus curvarum osculatarum succedantur extendit in Librum, ne mentionem quidem mei facta; quod ne reprehendi posset, praecaveo Lectorem voluit, dicendo se multis ante annis haec praeclegisse. Cheynaecus ipsius popularis vix eo se adduci potest, ut aliquid contra ipsum Tibi communicet, et sententiam Newtoni vel eficiat vel perscribat Gregorianae Demonstratio-

tioni Catenariae adversam. Interim tentatum id a Te non nocet, vel ideo ut intelligat ipse Gregorius, nihil aliud se lucratum demonstratione sua ejusque Apologia, quam intelligentiam grave ipsi iudicium, tanto magis quod monitus non respicit et errores pertinaciter defendit. Gratum mihi est, quod Newtoniana colorum Theoria prodit. Vellem etiam ut daret Newtonus novam suam Theoriam Lunae, quam apud me laudavit Halleus, in Angliam nunc, ut mihi scribatur, ab Adriatico mari reversus, et ut ipse mihi narravit, mox in mare pacificum navigaturus, ut perficiat Theoriam declinationis magneticæ. Laudandum est indefessum liti studium javandæ scientiæ. Vale.

Dabam Hanoveræ 15 Januarii 1704.

CLXVIII.

Leibnitz an Joh. Bernoulli.

Paulo post scriptas meas literas penultimas Angli duo ad me venire cum Tua epistola proxima, cui statim respondi. Novissimam a Te veniens Brunswigæ me deprehendit. Hic iterum respondo statim, quia in eo sum, ut excurram Halberstadium aliasque vicinas ad loca, venatum Historica Manuscripta, ubi otium ad nostra non erit, ubique enim amicorum numerus non exiguus me obsideat. Non vane, sed iustus fuit de literarum amissione metus.

iterum potest accidere, quod semel potest.

Hermanum quod Ultrajectinis commendas, recte facis.

Non recideram in mentem, quæ de apta Speculis plumbagine scriperas. Unde aestimare potes, quam avocer a studiis, quibus maxime delector et quibus potissimum operam darem, si mei essem juris. Liber plumbagine perpolitus in superficie communi paginarum terminatiter transmissus fuerat a celebri illo Wilhelmo Penn. qui Pensilvaniæ nomen dedit, et nunc quique esse puto in scripitis Serenissimæ Electricis.

Habet refractione suas ad comburendum commoditates, quibus motus Tschirnhausius specula deseruit, et verum est, in majora objecta commodè speculo non agi, nam radios intercepti, nisi specula multiplices. Cogitavi olim annuo loco ingentium Vi-

trorum, quæ et difficulter parantur et non commodè moventur, posset adhiberi compositum ex duobus vitris concavis, concavitate sibi obvertentibus, si modo haberetur liquor interfundendus bene perspicuus, qui magnam satis refractionem daret, et refractioni vitri multo viciniorum, quam est refractione aquæ. Sane refractione spiritus vini major quam aquæ est, et nemini notare olim ex aliorum observatis, quanta sit, sed nunc non occurrit. Tui non ignotum puto; quod si meministi aut facile reperire potes, perscribere quaeso, cogitare an alius liquor aptior sit. Pro microscopiis exiguis iidem plus solito præstari posse cogitavi, si pro vitro adhibeatur frustulum adamantis, cujus maxima refractione est.

Placet quod methodus mea curvæ datæ æquales infinitas exhibendi a Tua (quam non explicas) diversa est, ita enim angulorum scientia. Puteum et pluribus curvis datis mea methodo æqualem dari posse per plurimum coevolutionem. Miror autem, quod non perspexisti id, quod æquale est differentiatæ (fig. 133. 134) curvarum B(B) et L(L) datum, vel nullum fieri posse in casu speciali seu dati certi arcus B(B). Nam generaliter est + arc. B(B) \mp arc. L(L) multipl. per $r = + BF \mp FL . r - (B)(F) \mp (F)(L) . r$. posito r esse rationem refractionis vel mutatae reflectionis, quæ in casu vulgaris reflexionis est ratio æqualitatis, uti in casu differentiatæ \mp est $-$. Jam assumpta pro arbitrio curva FF seu æquatione ejus locali sitique, inde calculo derivabis curvam L(L) mere noto, simulque ipsas extremas BF, FL, (B)(F), (F)(L), speciatim ob puncta extrema B, (B), F, (F), L, (L) data vel inventa; calculo habebis ergo et valores ipsius $+ BF \mp FL . r - (B)(F) \pm (F)(L) . r$, in terminis mere algebraicis; ubi præter simpliciter datæ ex datis B et (B) calculo adline insunt constantes pro arbitrio sumendæ, eæ scilicet quæ determinant curvam F(F) specie infima magnitudine aut positione, nempe longitudine parametrorum aut distantia verticis, aliorumque punctorum fixorum curvæ FF a recta data, pro arbitrio assumtis. Hæc facillime fiet hic valor in casu posito speciali certi arcus dati, æqualis quantitati datæ vel nulli, cum ita habeatur æquatio algebraica, in qua sunt arbitrariæ, quarum una quævis pro incognita assumi potest, cæteris pro arbitrio explicatis. Vides etiam, cum curva F(F) possit eligi speciei cupiscenque v. g. Ellipsis, Parabola, Conchoidalis, Cissoidalis etc. (cujus deinde situs et parametrum arbitrio aut calculo determinantur) impossibile esse, ut ex sola hac deter-

minatione ad casum specialem unicuique, nempe certae portionis datae curvae inter data puncta B et (B) fiat curva L(L) eadem specie ipsi B(B) similisque in omnibus punctis; idque ut aliquando obtineatur, raro et vix magna arte praestabis, possetque in id provocari confidenter maximus quisque Geometrarum. Sed si vellem ego efficere per unam eandemque lineam F(F) specie et magnitudine et positione eandem, ut non tantum in casu datorum punctorum B et (B), sed et aliorum ejusdem curvae BB quorumcumque, fieret quantitas paulo ante posita algebraica aequalis nihilo vel dato semper eadem, nimium e Republica Geometrica peterem; atque hoc modo rem a Te acceptam atque ita Te deceptum pulo. Nunc vero nihil aliud postulo, quata ut in uno casu certi arcus formula aliqua algebraica, quam ingreditur recta arbitraria, fiat dato vel nihilo aequalis. Quod si alia puncta quam B, (B) in curva data assumas, vel saltem manente B aliud pro (B), tunc etiam vel speculum F(F) aliud orietur specie infima, alia assumta parametro (ut si pro Ellipsi, ubi $2ax - (a:b)xx = yy$, fieret $2ax - (a:2b)xx = yy$), vel saltem manente speculo, erit alia novitudo positio ejus (ut si Ellipseos prioris vertices, contra vel foci aliam a coaxis datae curvae BB distantiam acciperent). Curva igitur tota FF, ut et LL, pro variatis partibus ejusdem curvae BB, ordinatum variatur natura vel positione. Ut in exemplis rem tentes (vel refutandi animo si velis, quamquam eum, si quid iudico, nunc retinere non facile potes) ego potius a Te petere audeo, quam ut ipse aggredi amsim; adeo nunc sum calculis omnibus etiam levissimis inceptis. Ceterum vides me proprie loquendo nec osculis indigere, quia nec dx nec d^2x in calculo occurrunt.

Metaphysicas de motu cogitationes meas Tibi bonam partem notas puto, Duo Voldero non aequè: itaque rogarem, ut ei communicares, quod et factum literae ipsius indicant.

Lex continuitatis, quam voco, omnibus, si animum advertissent, facile nota esse poterat, sed non fuit etiam praestantibus Viris. Vides enim Cartesium et Malebranchium et alios complices, praesertim extra Geometriam, in eam peccasse. Et si qui animal-vertere, vix satis tutam putavere, ut uterentur. Et ad summum nota fuit olim haec Lex, ut regula consequentiarum hominibus, antequam Logica conderetur, et plebi nunc quoque. Hugenius, ut scio, etsi eam observasset, non fuisset ea usus in demonstrando

alia demonstratione ad vulgarem magis formam suppetente: quod nec ego improbo.

Cum Duo Voldero, ut vides et fortasse miraris, confabulari pergo, quia id mihi iucundum et utile etiam ad res aliquando diligeret recognoscendas. Vale etc.

Datum Hanoverae 20 Januarii 1704.

CLIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Linus Tuas postremas uno die accepit, et quas dedisti ad Cl. Volderum, expediti statim. Responsionem ampliozem in aliam occasionem differo; nunc ut promissa mea solvam, mitto excerpta ex literis meis ad Cheynaem et annotationes meas in ejus librum *). Rogo ut aliquantulum curatius perpendas, quae obiecti, praesertim ubi illum paradoxismi postulo aliquot in locis commissi, ut pag. 11, pag. 63, pag. 81, pag. 103 etc. Et haec quidem perfunctorie tantum legenti mihi occurrerunt; forte si studiosè inquisivissem, multo plura annotare potuissem. Ex meis vero ad illum literis videbis, me non nullum ipsi blanditium esse, sed aperte potius indignatum, quod meritum Tuorum non debitam habuerit rationem. Hactenus nondum respondit, num quia offensus an quod forte literae meae fretum trajicientes, quod hoc belli tempore saepius accidit, interierint, id equidem nescio: si per occasionem fieret, percontari posset ea de re Anglos illos duos, qui Tibi penultimas meas literas tradiderunt, alter enim corum, qui alterius Ephoras est, frequentius commercium habet cum Cheynaeco.

Dulci ex relationibus publicis, Wallisio defuncto successisse Halbeum, qui proinde iter, quod meditabatur in mare pacificum, exequi non poterit.

Ad reliqua Tuarum linearum epistolarum, ut ante dixi, proxima occasione respondebo; hac vice non licuit esse prolixior, omnia quippe quae mitto describendi onus mihi incubuit, cum

*) Diese Anmerkungen sind gedruckt in Joh. Bernoulli, op. omni. Tom. IV.

amanuensi imperito talia confidi ob analyticorum multitudinem non possint. Hoc tantum addo, methodum meam curvae datae aequales infinitas exhibendi, a Tua non tantum esse diversam, sed ab eodem toto coelo differre; mentem Tuam non satis intellectam antea, nunc melius capio. Sed de his plura proxime. Vale etc.

Groningae d. 9 Febr. 1704.

P. S. Lator harum est Filius Hottingeri. Professoris Tigurini, et Nepos Hottingeri, Theologi inter nostros non incelebs. Eum Tibi commendo.

CLXX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Super mihi gratissimas Tuas attulit pereruditus juvenis Helvetius Dn. Hottingerus. Doleo quod laborem describendi, quae Cheynaeco miseras. Tibi accessivi imprudens; sperabam enim esse inter discipulos Tuos, qui posset. Mea certe habeo qui describat, homo in Analyticis plane ἀρχηγός, id est, qui plane non movit, quid a et b sibi velit.

Rectissime mones Dn. Cheynaecum, posse fieri ut, quemadmodum quaedam Dn. Newtonus reperit ante me, ita etiam quodam ego repererim ante ipsum. Certe ipsum Calculum Differentialium vel aequivalentem ei ante me fuisse notum nullo indico comperi.

Verissime etiam mihi notare videris, quae Cheynaeco habet p. 15 et aliquot seqq. ex Tuis promissae, quidquid dissimulant; idem dicendum ad pag. 52. Et quod, quemadmodum ad pag. 37 observas, ex Newtonianis apud Wallisium etiam valculi et Typographica excerptis, industriam ipsius non valde commendat. Ad pag. 50 observo methodum Tuam Seriei infinitae per differentias diversorum graduum reductam ad differentialium notos ex problematibus valores, non dare Seriem magis implicitam, quam alias Serierum methodos, sed regulariter eandem. Elevationem ad potestates indeterminatas (de qua pag. 56) etiam mihi dudum cognitum fuisse non ignoras, et in iis, quae Dno. Fatio opposui, extractionem valoris ex aequatione duarum incognitarum, factam per Seriem, generalius opinor, complexum sum quam antea quisquam.

Errores ab Autore admissi pag. 10, 67, 68, ex defectu ani-

malversionis noti videntur. Sed gravis est ille, in quem incidit pag. 63, inque ipsa impignit principia, ostenditque Auctorem magis in Serierum computo, quam in Geometria nostra infinitesimali versatum esse.

Erravit etiam, dum suo Canone pag. 71 determinare voluit, utrum summatrix algebraica sit possibilis, ut optime ostendis in exemplo. Fateor possibile esse, ut per Methodum Serierum infinitarum determinetur, utrum curva quaesita sit possibilis in Algebraicis. Sed nisi prius Serierum tractatio reddatur facilius, quod ab Autore non est factum, imo nec tentatum, res immensi plerumque laboris foret. Atque hinc etiam est, quod mihi Liber ejus parvi momenti visus erat, quia rem Serierum, cui totus innititur, non promovet, nec reddit elaboratorem.

Generalia certe dudum novimus, sed in praxi multis sunt obnoxia difficultatibus, ob profixitatem imprimis. Quoties res ipsi successit, apparet non quaesita aut aliunde proposita Problemata solvisse, sed jam cognita suae Methodo applicuisse, quod parvi momenti est. Eisi ipse in caucandis suis Canonibus studium posuisset, quod Tu in examinandis, saltem dixisset aliquid utile. Sed apparet tamam exiguo studio sibi parare voluisse, quod aequum non est. Speravit etiam neminem facile suae excussurum ea qua factum a Te est diligentem.

Certe praefatae sunt Annotationes Tuae, et optarem ut aliquando inspiceres atque examinares Librum Dni. Parent Galli, quem inscripsit: Elements de Mechanique et de Physique, sed in quo tantum leges motus ex Hugeniano Principio (Axis scilicet) deduxit; sed subinde problemata attingit Canonisque, in quibus veror ne semper recte processerit. Quantum autem ex Varignonii literis observavi, scribit *parà πολλῆς γαργαλίας*.

Vellem ut viveret adhuc Wallisius, nec morte sua Hallaei iter in mare Pacificum non parvo rei magneticae cognoscendae adjuvamento futurum abruptisset. Quod superest, vale et fave etc.

Babam Hanoverae 25 Martii 1704.

P. S. Scotus, Governor juvenis Angli Dno. Cheynaeco amicus, qui Tuas ipsi misit, redditas ex ipsis Cheynaeci ad se literis indicat, et putabat ipsum Tibi jam respondisse. Id enim fuisse pollicitum, nisi forte ei his scripsisti, ut fere ex exemplo Tuum suspicor. Anglus ille cum suo Governatore mox Berolinum ibat, ibique per aliquot septimanas morabitur.

CLXXI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Manu adhuc tremente ad Te primum do literas, nondum plane restitutus a gravi morbo, quo laboravi. Febris continua primo me corripuit per sex septemve dies durans tanta cum violentia, ut Medici desperare de vita mea inciperent et per urbem jam dicerer mortuus; postea remisit nonnihil febris et degeneravit in duplicem tertianam, quae tandem in tertianam simplicem mutata post aliquot hebdomadas me reliquit, sed ita tamen, ut nunc quotidie adhuc lentas quasdam febriculas et intercurrentes phlogoses incertis horis sentiam; quibus adde vigilias continuas mihi valde molestas, nam saepe mihi accidit, ut aliquot dies metesque successive insonnes transigam. Quibus omnibus vires mirum in modum absuntur mihi. Nihil hactenus efficere potui, quo sensum naturalem mihi conciliarem, quoniam jam longo tempore ante morbum de hac sonni carentia conquestus fuerim. Si quid consilii mecum communicare posses, gratissimum id foret. Ex praescripto medicorum abstineo a studiis interioribus et imprimis meditationibus mathematicis, donec vires reviguerint et ad perfectionem sanitatis statum me perduxerint. Hac de causa uxor mea mihi non tradidit, nisi ante paucos dies, literas Tuas postremas, quae appulerunt, cum maximis flagrantem febrilibus ardoribus. Impense gaudeo, quod observationes meae ad Cheynaei librum Tibi adeo placerint, quoniam non tanta cura et diligentia, ac Tibi videtur, cum examinaverim, aliquam plura adhuc et graviora haud dubie animadvertissem; nescio vero an acceperit Cheynaes annotationes meas, saltem hactenus mihi nondum respondit. Ipsi non his scripsi, sed adieci literas eas, ex quibus excerpta nonnulla Tibi transmissi, adeoque nescio, unde suspiceris me ei his scripsisse, nisi forte putes alteram illam epistolam, quam non Cheynaes, sed Scoto illi Trajectum scripseram, continentem iudicium meum de libro Cheynaes in generalioribus, quam epistolam postea cum Cheynaes communicavit et hic ad me ejus mentionem fecit. Quicquid sit, si Cheynaes animadversiones meas sibi non acceptas affectat, quod forte ad eas responsionem non habeat in promptu, Tum est judicare an non censuram publicam mereatur ejus liber, ut videat et se et Anglos suos aliquando caecutare.

Nosti forte quod intra hoc primum hujus anni quadrimestre respublica literaria magnam mathematicorum insignium stragem passa fuerit. Occubuit primo Wallisus Anglus, hunc secutus est Marchio noster Hospitalis Gallus et sub idem tempus Viviani Italus, atque tandem nuperime abreptus est Amplius, Haddenus Batavus, Consul Amstelod. Ego vero, qui jam pedem unum in cymba Charontis habui, cum non nullum in me situm sit, superstes evasi. Prout audio, Marchio Hospitalis simili fere morbo, quo ego, conflictabatur; per aliquot tempus febre cum laborasset, quoniam non adeo periculosa uti videbatur, conjuncta tamen etiam cum nimis vigiliis, tandem die 2. Febr. apoplexia correptus eodem die sub vesperam animam reddidit.

Librum Du. Parent Galli, quem inscripsit: Elements de mechanique et de physique, quem mihi examinandum commendas, nondum vidi neque Amstelodami reperire est; mentum enim me cum ibi quaerere. Vale etc.

Groningae d. 29 April. 1704.

P. S. In Viviani locum in Acad. Regis Scient. ejus membrum fuit, surrogatus est Chymicus aliquis Romanus, sed ejus nomen mihi non scribitur. Nihil hactenus literarum accepi a Voldero Nostro; quae sit hujus silentii datorum causa, somnare non possum. Forte Tibi separatim scripsi.

CLXXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

O factum bene, quod Te intelligi periculo exemptum, antequam scivi aegrotum. Ita molestia metumque carui, et gaudium sentio, mihi quae et Respublicae literariae gratulor. Idus interim hoc Tibi et nobis, ut Tui curam geras et a meditationibus abstinere, donec sentias nullum amplius ab illis incommodum metendum esse. Restitutus sane suadeo ut, horis subsecris, curam cogitationisque ad rem Medicam convertas, non ut Medicum Clinicum agas praeiungere exerces, quae cura (ut nunc se res habent) cum diligenti naturae inquisitione parum consistit, sed ut in scientia tanti momenti promovenda labores, ejus ignorantia,

ut Clarissimus Varignonius ad me scribit, praeclarissimum Virum Marchionem Hospitalium miserabiliter amisimus, quem Medici occidisse creduntur. Quonquam temperamentum Tuum mihi notum nondum sit, cavendum tamen Hecticam puto, inque id curam dirigendam: non quod adstet, sed sequi posset, praesertim cum vigilae adsint pertinaces. Balneum aquae dulcis memini et contra Hecticam et pro somno conciliando laudari, ita duobus indicationibus satisfacere. Pedum lotiones peculiariter ad somnum commendant, capitisque inunctiones. Novi vigilis laborantem, quem odor acetii juvit: et sane odor hac loco multum potest, et minus periculi habet, quam per os assumpta. Victus maximam rationem habendam putem, qui refrigerans et humectans esse debet, itaque primum laudarem, et subinde acidum citri succum cibis aptis mistum non dissuaderem: sed noscenda de Te multa essent recte iudicaturum, ubique Tute poteris facere rectissime, etiam cum alios in consilium adhibebis.

Objectiones Tuas Cheynaens recte accepit, quod ipse significavit amico, sed ad respondendum videtur spatium summissee non quidem male.

Mirarer Tibi ignotum librum Du. Parent, Academiae Regiae Gallicae Socii, inscriptum: *Elemens de Mathématique et de Physique*, Parisiis 1700 editum, ubi tamen nominis de motus Legibus agit ex Hugueniano plane principio quod suspicor ipsi immisuisse ex istis, quae Huguenius forte Parisiis olim communicavit Academiae et Parentis reperire potuit in Academiae Schedis, aut ex relatu habere. Mihi valde iactantiae se suspectum reddit Praefatio sua, idemque apud me olim tum Hospitalii, tum Varignonii literae confirmarunt. Varignonius etiam significabat, vanitatis ei plurimum inesse, et apparet inquisitionem in nostra visum. In Diario Parisiensi 4 Maii 1699, legem quandam motus generalem tradiderat, quae ita habet: In omni concursu in linea recta, corpora conservant legem aequilibrii, respectu puncti immensitatis, quod post ictum eadem procedit celeritate, qua Centrum commune massae ante ictum. Sed quid opus est illo nescio quo Centro immensitatis, cum ipsum centrum gravitatis ante et post ictum feratur. Sed ista non sunt iam tempestiva Tibi, itaque Parentem illum in alia tempora commoda differamus.

Dn. Vollerius fortasse suboffensus est quibusdam a me dic-

tis liberius, quod animo non satis adhibito scripsisse, nec satis se docilem praestitisse videtur, quae vereri mihi fecerant, ne frustra litigarem.

Sed si quid in eo genere offendimus, id alii melius nobis ipsis perspicere solent. Itaque cum novissimam meam responsionem legeris, Tuum velim iudicium intelligere, an talem fuisse putares, quae potuerit offendere Virum aut a continuanda disputatione abstergere. Mihi facilis me inieunda doctis cum Viris, ingenio iudicioque praeditis, concertatio esse solet. Cum enim rationes bene subductas in his dudum habeam, vix quicquam mihi facile occurrat, in quo sit haerendum.

Quod superest, cura ut valeas, et me ama etc.

Habam Hannoverae 2 Maii 1704.

CLXXIII.

Joh. Bernoulli an Leibnitz.

Quod valetudo mea adversa animum Tuum tantopere tetigerit, non sine summa voluptate ex literis Tuis gratissimis intellexi, unde nunc denum recte percipio, quam carus et quam in pretio Tibi sim. Laetaberis mecum, si sciveris quod nunc frui incipiam secundiore valetudine, quae de die in diem (per Dei gratiam) magis magisque corroboratur, ita ut intra breve me penitus restitutum iri sperem. Incipio etiam suavitatem somni degustare, quod vires meas mirum in modum reficit, quae antea per continuas quibus cruciabor vigilas adeo erant prostratae, ut non parum anxius essem de imminente Hectica, quam cavendam probe moneo, eo quod magis quod per lentas istas febribus, quae post fugatum morbum remanserant, carnes meae jam sensim depasci et consumi videntur: nunc vero cum ad meliora vergant omnia, modo recidiva emaneat, nihil restat nisi ut reliquias morbosas ex corpore expellam, quod per lenem diaphoresin, quae mihi singulis noctibus supervenit, sponte peragetur, quamvis ut video longiusculo tempore opus sit. Maximam gratias ago pro suppeditatis Tuis consiliis medicis, quaedam non sine fructu adhibui. Temperamentum meum nec minime ipsi satis adline notum est propter variationem, quam subisse videtur: eram olim plethoricus et pancreaticus et ut videri-

batur calidae constitutionis, cum adhuc in patria agerem, nunc vero me phlegmaticum putant medici, constitutionis satis temperatae, et corporis potius incipienti, quam olesi. Si aer patris magis ad firmandam meam sanitatem conducere, quam Groningamus, sique ad scirem, facile animum mihi subire posset, ut in patriam remigrarem, hac praesertim occasione, qua proceres ad academiam aliquam stationem me invitarent, quam autem cum tanta laude non possum adimplere, quanta sedem mathematicam; hactenus nondum acceptavi vocationem.

Nuper scripsi iterum ad Dn. Valderum, quem serio exhortatus sum, ut Tibi mihiq. respondeat, sed ne nunc quidem adhuc rescripsit, adeo ut ne aegrotet valde verear, praesertim cum sciam, eum fere quotannis ictero laborare. Nisi forsitan nunc gravis decumbat, icterus enim eum a scribendo non impediret. In novissimis Tuis ad eum datis literis nihil omnino legere me memini, quo jure ille potuisset offendi, adeoque hinc saltem causam non habebit abstinendi a continuanda disputatione. Cur enim et mihi scribere desinere?

Nondum etiam mihi respondit Cheynaeus, nisi forte nixis, quae responsionem vehabat, ex Anglia in Belgium per piratas hostes, quod frequenter accidit, fuerit intercepta.

Parentei liber non quidem mihi erat ignotus, sed tamen cum nondum vidi, quoniam in Belgio non reperitur. Quod quae scripsit de legibus motus ex Hugenianis hauserit, facile mihi persuadere possum, nam Hugenius cum Parisiis degeret, multa non tantum in Academia Regia, sed et apud amicos deposuit, quemadmodum ipse testatur in opusculis posthumis nuper editis. Parenteum esse hominem valde vanum, partim ex literis Varignonii, partim ex propriis scriptis colligere potui, ut et quod sit in nostra iniquior, non quod displiceant, sed quod ea ipse non invenit primus. Quod habet de lege aequilibrii et de centro immensitatis, idem legi in Diario Parisiensi, et memini me jam tum risisse centri immensitatis appellationem loco centri gravitatis, unde statim vidi, Parenteum oportere esse hominem valde novituriensem et molientem multa, sed parum efficientem; ibidem legi, quod voluerit refutare Hugenium circa oscillationes pendulorum, sed infelicitur, quod statim observavi in literis ad Hospitalium nunc defunctum rogavique ut morderet Parenteum ad polinodiam publice cantandam, sin minus, me ineptam suam refutationem et crasses

parabismos in honorem beati Hugenii propalaturum. Id nunc factum est a Cl. Valdere in praefatione opusculis Hugenianis posthumis praefixa, ubi Parenteo nimis quidem civiler, sed tamen solide respondet et asserta Hugenii impugnat defendit.

Nescio an videris Nova literaria Helvetica collecta a Joh. Jacobo Scheuchzero; non est res magis momenti, quia nullum ibi delectum video, et maxime fivola colligit aequae ac ea quae nonnullius pretii sunt. Inter haec inveni Jac. Hermannii Animadversiones quaedam circa Novissimam regulam ducendi perpendiculares ad Curvas ex focis descriptas, in secunda Medicinae mentis Editione Lipsiae facta publicatam, ubi Tschirnhausio novos errores ostendit, quos in correctae suae Medicinae mentis denuo commisit, et quidem pag. 100 et 101, ubi agit de curvis ex focis descriptis et de earum normalibus ducendis. Evidens neutrum adhuc examinavi, nec Tschirnhausii regulam nec Hermannii refutationem, sed tamen de errore Tschirnhausii non dubito, quem toties errantem comperi. Nolui, credo, Hermannus suum scholium communicare ad Acta Lipsiensia, quoniam scilicet Cl. Menkenium nimis parvis Tschirnhausii addictum, prout meo exemplo expertus est. Quod superest, vale et favere perge etc.

Groningae d. 31 Maji 1704.

CLXIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum silentio Tuo metum aliquem mihi injiceres, ne valeat primum ex sententia procederet, responsione tandem ea me cura liberasti. Gaudeo igitur naturam malo superiorem paulatim ad pristinum vigorem reducere, quod praestat lente ac tuto fieri, quam, morbificis reliquis per medicamenta pulsas, novas turbas cieri. Si a Plethorica constitutione ad eam transisti, quae magis ad maxiem inclinat, non putem id aeri Friso adscribi posse, qui in fallor crassus potius, quam tenuis habetur. Nec somni defectus et febiles ardores phlegmatici, sed potius bilis praedominium testari videntur, ut adeo ipsa bilis exaltatione a statu plethorico ad praec-

sentem venisse videaris; atque opponenda malo sit diæta, quæq; hinc temperare possit.

Etiã Icterus a bilis prædominio est, et credo a ductis fellei opilatione quadam. Itaque duo indicari videntur, tum quæ bilis vim et ærimoniam, aut etiã lentorem in sanguine minuunt, tum quæ obstructions dispellant. Sed non dubito Valderum nostrum, Virum meliore valetudine dignissimum, habere ad manum præclaros Medicos, quos consulat. Interim id mihi observo in plerisque Medicis, quod in morbis chronicis, quibus annuero *decidit* ad morbum, habuit medicamentis, id est, per vim tentare curam, quam diæta, id est naturali modo. Ad diætã autem refero etiã illa medicamenta, quæ lente atque insensibiliter operantur.

Optem Tibi licere per otium cogitare diligentius de tota praxi medica, in qua licet certas eorum, quæ sunt, rationes non assequamur, putem tamen eum, qui accuratis ratiociniis sit assuetus, inspectis is quæ crebra experientia sint constituta, multa præclara et in publicum profutura colligere. Mihi ab aliquot annis prodra videtur minari, etsi enim nondum se totam ostenderit, nunc tamen in genibus, nunc in pedibus præcursores quosdam suos, dolores scilicet, parum quidem acres et parum durabiles, nonnullos tamen misit. Quo in statu putem malo adhuc caveri posse, si quis rectam procedendi rationem teneret; quæ de re iudicium tum mihi gratum foret. Constitui vinum in posterum magis, quam hactenus aqua temperare, et rarius ad convivium ire, in quibus amicis præter æquum obsequi necesse est.

De Parentio plane ex re iudicis. Hospitalio defuncto res Mathematica in Gallia retro sublapsa feretur. Nam Varignonus, unus contra cæteros omnes, ægre meliores methodos tuebatur.

Nova literaria Helvetiæ nondum vidi. Sed laudo tamen institutum. Ignoscendum est is, qui talia colligentes etiã quæ minoris sunt momenti inferunt, ne quem offendat et ut diversi generis Lectoribus satisfaciant, modo ne meliora omittant. Facile credo Du. Tschirnhausium non satis accurate constituisse perpendicularares ex foris, et Du. Hermannum, quod deprehenderet, invenisse. Sane jam ante meum Italicum iter, puto circa annum 1688, significaveram ipsi habere aut modum ex foris generalem, quem postea publicavit Fatius. Mihi quidem non ex calculo, sed ex tendentiarum compositione in tendentiam centri gravitatis in

mentem venerat, quem publicavi olim in Diario Parisino *). Sed tunc Du. Tschirnhausium hæc frustra monui: videbatur enim sibi habere multa meliora et generalia, quorum spes facit, ut ne animam quidem adhiberet monitis meis.

Si quid adhuc circa Parabolicorum accuram relativam mensurationes post Tschirnhausianam monendum haberes, eadem via Novorum Literariorum Helveticorum uti posses. Nam verissimum est quod ais, Du. Menkenium ægre talia admittere, quamquam si in veritatis explicatione aut vindicatione nulla consistent, nec quicquam habeant, quod offendere merito possit, nemini æquo iudici displicere debeant. Itaque nunquam mihi ingratum fuit refulgari, quoties rationibus nihil admittum fuit, quod in personam ipsam iniquum videri posset. Vale ex sententia et fave etc.

Babam Hanoveræ 6 Junii 1704.

CLXXV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

En hic tandem responsionem Valderi jam diutius scriptam, mihi tamen nuperime acceptam. Videtur Valderus, uti verelaris, nonnulli offensus, idque in verbis expressius ostendit quam in Tuis: ita enim ad me habet: „Queris cur silerim tam diu? quia hæsitavi admodum, cum Illustri Leibnitio responderem. Habent enim ægus posteriores literæ quædam, quæ mihi persuadent, illum magnorum Virorum more, non æque anime ferre contradicentem. Nec velim quidpiam agere, quod ipsi ingratum sit, præsertim cum ex hac concertatione nostra fructum non adeo magnam sperem. Totã enim res hac redibit, ut pro demonstratione substantiæ naturæ suæ activæ accipiam nomen *investigatio*, unitatis, virium primitivarum, quæ omnem in se continent mutationem, de quibus tamen nihil intelligam, nisi in quantum vires derivatæ, sive quantitatem et velocitatem perspectas habeant. Unica ratio, propter quam tantopere desideravi, scire omnem substantiam naturæ esse activam, ex fuit, quod in causis actionum quidpiam in-

*) 1693 Septembris.

„veniebam non satis perspectum, nec illud per *irritabilitatem* notius fieri apparet. Descripti tamen utcumque, ut vides, quia ita velle videbatur; absque tuis enim literis haereo, an tam cito ex hoc dubio, rescribendumne, an non foret, emerissem, praesertim cum ab aliquot hebdomadis languor me invaserit, qui omnem soliti animi vigorem. Nec aegroto nec bene valeo, qui status eo „pejus habet incommodi, quo nimis in eo prospicere licet finem.“ Et haec quidem Volderus; sed rogo cures, ne ex responsione Tua suspicari possit, quod ea Tibi transcripserim. Vereor ne languor, de quo ille queritur, morbum aliquem graviorem minetur, etenim et nihil diu ante mortem membra tristi quodam languore gravantur. Non tam prompte nihil redeunt vires, quam ante aliquot hebdomadas sperabam, saepius atque per intervalla nonnullas adhuc turbas in corpore meo persentisco, et vigilarum contumacia nondum omnino cessat; unde etiam Tecum putarem letum habere praedominium in corpore meo, nisi phlegmatis abundantia contrarium indicare videretur. Consultaverunt mihi quidam usum acicularum Pyramontanarum, quas ipsi similibus affectibus laborantes mirae utilitatis se expertos esse depraeedicabant; haud dubie earum virtus Tibi notior erit, quam ulli alii, utpote qui ipsis vicinior es, ideoque quid de his sentias et an mihi convenire putes, gratum erit intelligere, quamvis hoc anni tempore aciculae usurpari non soleant, nisi forte etiam inente autumno.

Non magna mihi spes affulget de promovenda praxi medica, quemadmodum enim fere semper abhorruí ab his, quae certis rationibus stabiliri nequeunt et meris conjecturis nituntur, ita tanto magis fui alienus ab excolenda medicina practica, quod non tantum crederem experientiam et proprias multas observationes, sed etiam felicem memoriam (quibus omnibus ego destitutor) requirere, et interim ratiocinando nihil vel parum efficatur.

Podagram pro bonam diacutam et abstinentiam ab acrioribus et calidioribus praecaveri posse certum est. Novi hic virum, qui postquam per complures annos intensissimis doloribus podagricis singulis fere bimestribus recurrentibus cruciatus esset, ab his liberatus est soli vini abstinentia vel potius moderatiore ejus usu; nam non adeo ab eo abstinet, quin inter epulandum bis vel ter, sed modice bibat; laudavit etiam aristotelem longam et usum saporis Veneti, cupis circiter drachmam unam singulis mense cum potu calce absorbet; nunc a tribus jam annis in tantum podagra

eum deseruit, ut toto hoc tempore propter eam nunquam decubuerit, et vix bis vel ter nonnulli doloris senserit, loco quod antea perpetuo fere lecto fuerit affixus. Dolores illi obtusiores, quos modo in genibus, modo in pedibus persentis, possunt provenire ab arthritide vaga, sed quae facile in podagram aldre queat, nisi convenientibus remediis illi obviam eatur; quae vero ex diaceticis petuntur, haud dubie meliora sit transiit et tutiora, quam quae ex pharmacuticis. Lihora imprimis sit suscipiatur inersibilis, et juvetur potius ad enlurem usque quam ullo modo impediatur, tum ab hac impedita phrosque morbos chronicos originem suam trahere putem.

Quid nunc defuncto Hospitalio in re mathematica peragatur in Gallia, non equidem scio; certe hoc tempore nomen illi novi, qui in profundioribus excellat, si unum excipias Varignonum, a quo ipso tamen haud adeo magni progressus expectandi sunt: intelligit inventa aliena et excoit, sed ipse ad inveniendum non videtur factus; diceret esse cum bonum commentatorem, non vero Auctorem.

Examinavi quae habet Tschirhanusius de ducentis perpendicularibus ad curvas ex facis descriptis, sed pro more ejus omnia faba deprehendi, excepto solo canone pro ellipsi ordinaria. Observo tamen Hermannum non satis percipisse mentem Tschirhanusii, hic enim errat, sed ille tanquam aliter errantem corrigit. Non e re esse iudico, veterem camarinam movere circa parabolorum arcuum relativis mensurationis, nisi simul totam ejus historiam una cum literis, quae Te inter Tschirhanusium, Menkenium et me hanc materiam spectantes volutarunt, in lucem edere velim, ut qua fide mecum actum sit, culibet innotescat; quod an consulum sit facere, ex Te libenter audire velim. Vale et fave etc.

Groningae d. 21 Junii 1704.

CXXVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non injustam plane fuisse querelam meam, Du. Volderus boster, pro excellenti suo ingenio et animi acuitate, ipse credo

sibi dicit, ubi mea haec novissima, quae nunc transmitto, cum animi attentione legerit. Et mirum est sane, quam saepe Vinctum egregium, dum aliud agunt aut in mente habent, in conferendo in diversum abeant ab eo, de quo agitur. Tria quatuorve argumenta plus semel adhiberi, quibus nunquam directe respondit, ut quod omnis realitas aggregatorum in simplicibus consistat; quod extensio sit relativum quoddam, seu alienigena extensio sive diffusio; quod vis aut actio non possint esse modificationes rei per se mere passivae. Et nunc ipse aliis verbis sub fundamenti virium nomine agnoscit, quod toties inculcavi. Quid ergo a me demonstrari postulat? An unde sit in rebus hoc fundamentum? Sed ita perfectio novo fundamento indigeret. Et perinde id mihi videtur ac si quis numeri, spatii, temporis altiores origines quaereret, quam quae insunt notioni ipsorum. Ut ergo spatii et temporis ultimas rationes explicari, ex ordine nimirum existendi aut simul aut successive, ita et fundamentum illud virium explicari per analogiam ejus agendi principii, quod experimur in nobis, ut scilicet nihil aliud continent, quam perceptionem et appetitum. Uteriora in rerum natura nec evinci nec cognosci possunt, praeter Rationem Supremam et communem omnium percipientium substantiam, harmonicaeque inter ipsas, quam Deum appellamus, et ejus hinc nova et clarissima demonstratione cunct. Non ergo rursus nomina ingessi pro rebus, quemadmodum ipse in suis ad me literis his insinuat. Certe illa mea argumenta, quae dixi, nec facile alibi inveniunt, nec facile irrita reddet. Et nescio an his conferenda alia possim sint obvia, et quae magis penetrent in interiora rerum. Entelechiaae quoque et Virium derivatarum, et Ne-nadis nomina convenire rationibus, quibus significata nominum eruntur, res ipsa, ni fallor, ostendit.

Haec quae lucusque scripsi, communica, quaeso, Du. Voldero, si placeat, tanquam id faceres sponte Tua, quo melius intellegat non omnino intempestivam fuisse admonitionem meam.

Scriptis ad me Du. Witsen, Consul Amstelodamensis, Indidemum Schedas suas Mathematicas Testamento reliquisse nepoti ex sorore, puto Domino Dedée (sic enim lego) unde credibile est hunc eo esse ingenio, ut uti is possit. Forte Tibi aliquid de eo notum. Eras aliquando in Commercio cum quodam Batavo in numero judiciali, si bene memini, posito, qui aliquid praestiterat

in Mathematicis. Dominus Nieuwentijtius silet; et puto recte facit, donec aliquid melius praestet quam hactenus.

Amico cuidam meo Germano, qui apud Dominum Legatum nostrum Londini agit, quaerenti Dominus Cheynarus misit schedam, quae accepta Tua refert et responsum pollicetur.

Non miror vires nondum plane reflectas, post tantum morbum. Pyromontanae acidulae purgant satis valide. Itaque hoc anno Tibi eas convenire vix putem. Tempus is utendi sunt aestivi menses; autumnales potius calidis aquis apti habentur.

Gratias ago pro monitis circa arthritidem. Ut bellum Domino Tschirhausio denuntias, auctor esse nolum. Abiit cursor. Vale et fave etc.

Baham 1 Julii 1704.

CLXXVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Paucula haec in eum tantum finem Tibi exarata volo, ut commendem Nobiliori hunc Juvenum Anglum ejusque Ephorum Gallum eruditum et moribus suavissimis praeditum, quod aliquum in Gallis rarum est. Erat mihi jam olim familiaris, cum hic aliquandiu ageret et postea Ultrajecti de me bene meruit in vacationis illius negotio, adeo ut de eo vicissim bene merendi munus captem occasione; quapropter quicquid favoris in eos contuleris, id tantum in me collatum accipiam.

Accepi superprime postremas Tuas cum adjuncta responsione ad Cl. Volderum, ad quem etiam cum jam dimisi, una cum eo, quod ad me habes et quod cum Voldero communicandum petis. Quam primum rescripserit, curabo ut quantocyus ad Te perveniat. Quis ille sit, cui Huddeus scripta sua mathematica per testamentum reliquerit, ego non novi, sed rogavi Volderum, ut quid de ea re sit, nobis perscribere dignetur. Gaudes, quod certa habes indicia, Cheynarum meas observationes in librum suum accepisse; sed nullam hactenus responsum ab illo accepi. Audivi Moiraeum turpi et infando morbo laborasse periculose. Vir iste Batavi in judiciali munere positus, cum quo per aliquot annos mihi commercium interesset, cujusque nomen erat Bierquensis, ante semestre

circiter diem suum obiit; reliquit autem filium in nostris studiis se ipso versantem, sed qui mecum non permutat literas. Vale et fave etc.

Groningae d. 14 Julii 1704.

CLXXVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Miror tam diuturnam Tuam in respondendo moram; jam plures elapsi sunt menses, quod per Latreillum Gallum, Angli cupissem nobilis Ephorum, Hanoveram petiturum, literas meas ultimas ad Te miserim, ad quas tamen nihil responsi in hunc usque dies accepi. Ne sola iret Cl. Volderi epistola, paucula haec adgere volui; multa enim quae scribam non habeo. Respondit mihi Cheynaens simulque transmisit schedam suam, quam post acceptas meas animadversiones in librum suum typis divulgavit; sed non quae deest candore mecum egit. Nam praeterquam quod multa, quae ipsum monueram ut corrigeret, in nos iniquis dicta, plene intacta dissimulavit in schedam suam, et multa etiam, quae paralogismos ejus indicabant, ita pervertit, ut lectori persuadeat, eos nihil nisi vel calculi vel praeci errata fuisse; hoc insuper male fidei commisit, ut in praefatione Schedae isti praefixa diceret, se non scripsisse librum suum pro tyronibus, quibus relinquere curam et diligentiam expiscandi errores calculi et praeci, si minutias non attendere, se tamen post jam impressum suum librum multa de novo animadvertisse et nunc adjectis notatu digna, una cum calculi et praeci erratis, quorum quaedam secum essent communicata ab amicis suis, inter quos me nominat: ut verbo dicam, postquam aeruginem suam effudit in nescio quos tyrones, qui minutias et leviora sphalmata tantum carpunt, rem totam eo dirigit, ut persuadeat quicquid in ea Addendorum et Annotandorum, ut vocat, scheda continetur, alicujus momenti et notatu dignum, id sibi ipsi, reliqua vero nullius momenti, deleri amicis suis, quibus speciatim sphalmata tantum calculi et praeci observata tribuit, quae ipse tanquam attentione sua indigna neglexit, cum tamen omnes illius schedae Additiones et Observationes

cujuscunque momenti sint, paucissimis exceptis, ex Animadversionibus meis verbotenus fere excerptis; de suo vero nihil vel parum addiderit, ut Tibi facile constabit, eas cum Addendis illis conferendi quandam occasionem habituro. Ergo tandem hoc me honore nactavit Cheynaens, ut me, sub titulo amici, traduceret pro tyrone, suum vero plagium in me commissum celaret. Ne tamen popularem suum Craignum, quem inter amicos suos mecum nominat, mecum etiam in tyronum classem referre videretur, eo humanitatis erga ipsum descendit, ut ipsi tribueret certam aliquam regulam integrandi differentialem binomialem, quae tamen etiam ex integro mihi debetur, utpote de verbo ad verbum ex Animadversionibus meis desumpta. Credo Cheynaenum fuisse mente captum, cum schediasma suum, in quo multis adeo modis me offendit, ad me mittere in animum sibi induceret. Ei nuper respondi: quo stylo usus fuerim facile conjecturabis: certe non habebat, quo multum de epistola mea gloriaretur, uti fortassis de praecedentibus meis fecit. Jam procul dubio nosti, quod Cl. Moiraeus singulari libello refutaverit Cheynaem: refutationem uterque ad me misit, hic ut ex me intelligeret meam de ea sententiam, sed quam rotunde denegavi meis tam male utenti, ille ut amicitiam, ut ait, mecum iniret et rationes suas refutandi exponeret. Animadverto Moiraei libellum nonnulli acerbè scriptum, in quo tamen multa solide et docte objicit Cheynaeco: interim ut verum fatear, quaedam etiam incaute carpsit, et multis in locis erravit ipse, id quod in impera mea responsione non dissimulavi, ut videret me cuique suum tribuere. Captavi tunc occasionem narrandi ipsi, quibus artibus erga me usus sit Cheynaens. Quid nunc uterque ad responsiones meas replicaturus sit, tempus docebit. Accepi quoque Newtoni opus recens editum, continens tres partes: 1. Opticam de coloribus, Anglice scriptam; 2. Enumerationem linearum tertii ordinis, Latine; 3. Quadraturas Curvarum Geometricarum, etiam Latine. Nondum mihi vacavit ea perlegere. Vale etc.

Groningae d. 6 Decembris 1704.

CLXXIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Litterae, quas cujusdam juvenis Angli Ephoro Gallo credidisti, accepi paulo serius, quod absens essem domo. Puto me tamen respondisse. Cheynaenum vides esse qualem praedixeram, laureolam quaerentem in mustaceo. Moiraei Scriptum nondum vidi, sed puto esse multo peritiorem. An aliquis attulit novum aut scitu dignum? Id significa quaeso, aut potius librum, cum his habeas, mitte. Erit enim credo perbrevis, aut certe poterit dividi in partes. Craigius, Cheynaesi popularis, longe alterius animae doctrinaeque est. Theorema quoddam pro quadraturis ordinariis Actis Lipsiensibus *) inseruit, quod dignum esset accurata consideratione.

Ego de analyticis vix cogitare soleo, nisi cum Tuis literis excitor, per quas fere solas disco, quae in hoc studio gerantur.

Doleo Dominum Marchionem Hospitalium nihil aliud, quam Conica reliquisse, cum posset certe dare alia majoris momenti. Interim fortasse tractaverit Sectiones conicas universaliori more, quam hactenus factum.

Ex Anglia mihi scribitur, Flamstedii observationes 30 minorum editum tri. Hinc fortasse facilius aliquando pervenimus ad Theoriam Lunae absolutiorem; Newtonianam quidam in ipsa Anglia Phaenomenis satisfacere negant, sed ipse Newtonus quaedam adhuc determinanda reliquit.

Vidi nuper, quae David Gregorius contra meam sententiam de vorticibus scripsit. Certe, si quid iudico, licet forte vortices Planetam deferentes negare possimus, non poterimus negare gravificos. Neque quisquam evertet, quod pro fundamento sumsi, nihil movere nisi a contiguo et moto, attractionemque adeo Solarem, sine motu materiae circumsolaris, in qua sunt Planetae, intelligi non posse.

Opus Newtoni de coloribus profundum videtur; sed nondum satis examinare licuit, an ejus ope spes sit explicandi colores fixos, quos vocant. In Tractu de Quadraturis Curvarum ordinariarum.

*) Specimen Methodi generalis determinandi Figurarum quadratarum. Act. Erudit. 1704. Jul.

nihil puto esse, quod nobis sit valde novum aut arduum. Determinatio numeri Linearum tertii gradus et, ut credo, recta est, et habenda est pro incremento non contemnendo Geometriae; et placet imprimis quod de diametro observat ordinatae curvae altioris servante in plures quam duas partes, servata utrimque aequalitate.

Adjunctas rogo, ut ad Dominum Cuperum et Dominum de Volder, insignes in suo quonque genere Vires, mittas, et priorem, si videtur, lectam cundas.

Batum Berolini 25 Januarii 1705.

CLXXX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Litteras Tuas ad Cuperum et Volderum curavi recte; hic nihil adhuc responsionis ad me misit. Scriptum Moiraei contra Cheynaenum nihil peculiare continet, praeter Theoremata quaedam pro comparatione et reductione arearum, quae ipse quidem magni facit, nobis tamen jam diu familiaria, imo latius extensa, quam a Moiraeo factum. Libellus commodè mitti non potest per tabellarum publicum, continens (praeter praefationem) 129 paginas; mittam tamen Tibi per Gallum aliquem, quem olim jam vidisti, cujus nomen Magnavilius, qui cum nobili Anglo ex Boylbei familia, cujus Ephorus est, fortasse brevi hinc proficiet, adum vestram visitaturus. Cheynaenus respondit ad objectiones Moiraei, uti hic mihi scribit, sed responsionem ipsam nondum vidi. Ea a Moiraeo ita describitur: „Figurez vous, imput, un homme qui est dans des accès continuels de folie et de rage, qui me charge d'injures grossières et ridicules à chaque ligne, voyla l'image de Cheynés dans la réponse qu'il me fait. Figurez vous d'un autre côté toute la foiblesse de raisonnement, toute l'impuissance, toute la mauvaise foy, et vous aurez une juste idée de son livre. On dit que Craige y a grand part, je le croirois bien; il est digne de Cheynés et de Craige, ces deux grandes lumières de l'Ecosse" etc. Moiraeus parat replicationem, et forte serra dum reciprocabitur.

Non legi opus Astronomicum Davidis Gregorii; habui id per biduum tantum in aedibus meis, perlostrando tamen obiter vid,

omnia fere ex Newtono et nihil ex se præter superflua habere. Mihi etiam displicuit, quod vortices absolute negare velit, qui licet se non habeant ex mente Cartesii, putem tamen eos eleganter satisfacere phaenomenis, prout concipiuntur a Chr. Hugenio in suo Cosmotheoro, vel fere similiter diu ante a Keplero. Tecum enim sentio absurdum esse, in physicis statuere attractionem solarem extra motum aliquem materiae circumsolaris, qui causa sit planetarum gravitatis solem versus. Moyraeus crassum paralogismum observavit in Gregorio asserente Ellipsin Cassini habentem rectangula linearum ex focus ad puncta circumferentiae ducturum aequalia, esse eandem cum illa altera ellipsi, quae ductis lineis ex focus faceret angulos circa unum proportionales arcibus circa alterum. Hoc si dixit Gregorius, fateor magnam in eo fuisse inadvertentiam: Ellipsin enim Cassinianam algebraicam esse, per se patet, alteram autem non tantum transcendentem, sed ne quidem construibilem suspicor. Sed Gregorium paralogizare non est novum; audio interim quod monitus jam errorem recantaverit in Transactionibus Philos.

Newtoni liber de Coloribus latine versus propediem lucem videbit. Verum est, nihil me vidisse in ejus tractatu de Quadraturis, quod nobis valde arduum vel novum esset. Curiosa magis est determinatio numeri linearum tertii gradus; sed optassem demonstrationes; veror enim ne quae de diametro ordinatim applicatas secante asserit, conjecturae sint potius, quam demonstratae veritates, eoque magis, quod talia affirmet de omnibus superioribus linearum gradibus, quae interim si vera essent, fateor, elegantissima forent, sed simul, ut praevideo, difficillimae et abstrusissimae demonstrationis.

Porro scribit Moyraeus, Hallaeum habere sub praelo versionem suam Latinam omnino novam manuscripti aliquis Arabici ex Bibliotheca Oxoniensi, continentis tractatum aliquem Apollonii De Sectione Rationis; item Hallaeum sperare se resoluturum tractatum Apollonii De Sectione Spatii; item eundem detexisse celebre Guldmann theorema de circumferentia descripta per centrum gravitatis etc. in praefatione Pappi ad 7. librum; eum nactum esse manuscriptum graecum antiquum, in quo hoc theorema clare sit expositum; item Cheynaem edidisse in vernacula sua lingua Principia philosophica Religionis naturalis, sed nihil aliud esse quam rapsodiam ex aliis compilatam.

Nostine, quæso, an liber hic extet: Eberhardi Schilz Topographia Romæ 1589 dedic. Duci Brunswigo-Luneburgensi, aut an forte reperiat in Bibliotheca vestri Principis. Aliquis amicus habet hunc librum manuscriptum, scire autem vellet, utrum non typis sit excusus. Legi nuper in relationibus nostris publicis, Regem Prussiae fundaturum Berolini novam Academiam pro Principibus et Nobilibus tantum, et jamjam Professores ad eam invitari; hand dubio, quin Tumum hac in re consilium fuerit expeditum. Scire itaque gestirem, quoniam pro professore Matheseos commendaveris aut adhuc commendaturus sis. Vale etc.

Groningae d. 18 Aprilis 1705.

P. S. Meus Collega Cl. Brannius commentarium suum in Epistolam ad Hebraeos nuper in lucem emisit, cujus exemplar unum etiam Tibi mitti curavit, ut scilicet judicium Tumum de hoc opere, ut et de unione facienda inter Reformatos et Lutheranos pro cujus successu multa in dedicatione disserit, ex Te expiscetur

CXXXI

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ex literis maxime Reverendi Viri Johannis Brannii intellexi Te doctissimum parare, et in Patriam redire constituisse. Haec ut Tibi feliciter eveniant, ex animo opto. Caeterum cum penes Te sint, ut fallor, responsiones meae ad objectiones clarissimi Bayli in novissima Dictionarii editione contentas ab ipso remissae, rogo ut eas obsignatas nulloque inscriptas relinquant apud amicum, ut, data occasione, ad me transmitti possint.

Plura nunc non addo, incertus an has Te Groningae sint inesturae; tum veritus ne occupationes domicilium transferre morientis aliis cogitationibus locum relinquant. Certe occupatissimum Te esse, vel ex ipso silentio Tuo judico; alias enim nunquam consili Tui a Te ipso expectassem. Vale et me ama etc.

Dobam Hanoverae 22 Junii 1705.

CLXXXII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quod consilium meum de remigratione in Patriam, ad quam me jam paro, nondum Tibi aperuerim, non tam occupationibus in causa sunt, quam quod abste ipso prius expectaverim responsum. Ut enim verum fatear, verebar fere, ne quid humanitus acciderit Tibi, diu adeo silenti. Nunc vero Te vivere et valere, ex novissimis Tuis intelligo quidem et gaudeo, sed nihil in iis reperi quod responsionis loco esse posset, ad quaedam quae Te in postremis meis rogabam, ut vel eas ad Te non pervenisse vel potius Te earum oblitum esse credam. Quaecebam aliquid de nova illa Academia Berolini fundata; quisnam ibi fungatur Professione Mathematicae, aut forte num adhuc vacua sit, et an non consilium Tuum de vocando idoneo Viro sit expetitum. Quaecebam etiam rogare aliquos amicos, an Tibi innotescat liber aliquis, cujus titulus: Eberhardi Schellii Topographia urbis Romae; amicus ille habet hunc librum manuscriptum, quem aestimat, et si sciret nondum editum fuisse, forte eederet. Iter quod in Patriam melior, aggrediar homo cum Deo intra quinque vel sex hebdomadas, ita ut sufficiens tempus respondendi Tibi suppetat, si qua responsio ante discessum me dignari volueris. Responsiones Tuae ad Objectiones Baylii (uti petis) apud Amicum obsequat Tibique inscriptas relinquam, data occasione ad Te transmittendas, nisi ea forsitan ante discessum meum se offerat. Misi Tibi nuper per Du. Massonum, Eruditum Gallum, Moyraei Animadversiones in librum Cheynaei: illas recte traditas spero. Per postremum curesorem accepi literas a Du. Cheynaeco, nihil nisi continuum invectivam continentes, atque me objurantibus, contumeliosis et omnis generis injuriis tam horrendum in modum obruentes tam barbare tam ruditer afficientes, ut certe legendo nescire, utrum somnare an vigilare. Nihil enim minus ab isto homine, quam tam indigne tractari expectabam. Quantum conicere possum, suspicari me suum adversarium ex eo, quod Cl. Moyraeco perscripserim, qua ratione et qua fide erga me usus sit in edendis suis Addendis et Adnotandis, et quod postea Moyraeco meam epistolam circumgestaverit multisque suis amicis monstraverit: neque etiam satis conquirere potuit, quod apud se de suo modo agendi conpessus

fuero, verbis non affectatis, id est rotunde scapham vocando, quam meam sinceritatem vocat ille stylium modestis viris insolitum. Ut verbo dicam, irit illum, quod suae impudentiae, arrogantiae et stolidae vanitatis applaudere nolo. Constitui inepto huic homini non respondere, sed hoc ipso die mittam ad Du. Moyraeum descriptionem rerum praecipuarum, quae Cheynaeco inter et me peractae sunt, ut si optus ille censuerit, meas ipse (tanquam me inscio) partes tuas possit.

Accepi literas a Cl. Varignonio, quibus intelligo Du. Saurinum aegre ferre, quod Regulam illam de determinando valore fractionis utramque summam terminum certo casu evanescentem habentis, mihi arrogaverim in Actis Lipsiensibus superioris anni: quam tamen ipse in aliquo Diario Paris, attribuerit Marchioni Hospitalio. Sed miror lupus Galli audaciam, tam iniqua a me exigentis, quasi quae mea sunt, mea esse desinerent, ex quo Hospitalius ea suo libro inseruit. Dicit Saurinus, se quidem credere, Regulam illam a me esse inventam, non tamen honeste factum esse, quod demum post fata Hospitalii eam mihi vindicare velim. Equidem non verius fuisset, eam mihi vindicare, vivente Hospitalio, si scissem, ut postea scivi, Saurinum eam Regulam tanto cum elegio Du. Hospitalio adscripsisse: nam ut verum fatear, pati non potui, ut quae mea sunt, tam proterve mihi eriperentur et ad alium derivarentur. Est igitur ipse Saurinus, qui vindicias illas a me extorsit: si sibiisset, et ego sibiissem. Quod si vero putet, falso a me arrogari, et vel parum me irritare pergat, habeo literas Hospitalii ad me scriptas, quas si edidero, docebunt non hoc tantum, sed alia plerumque a me habuisse Hospitalium. Cl. Varignonis etiam Tecum, ut mihi scripsit, communicavit suam meditationem de vi centrifuga, quam putat a Nob. Hugonis aliusque duplo justo minorem fieri. Sed ostendi Varignonio, quod erraverit ipse, et quod recte sit aestimata vis a Du. Hugonio: meae tamen demonstrationi quantumvis geometricae nondum omnino acquiescit. Vale etc.

Groningae d. 11 Julii 1705.

CLXXXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non memini videri epistolam, qua de Professore Berolinensi quaesiveris. Non est haec prima epistola, quae mihi intercedit; itaque cum praeter morem sileo, ubi ratio est respondendi, acquiesco, ut me vivum potius quam mortuum, et literis potius fraudatum, quam Tui negligentem credas.

Fundata est Berolini Equestris Academia, in qua adolescentes etiam Elementa Mathematicos docentur. Sed quantum hactenus intellego neminem aliunde accessiverunt huic muneri obsequendo, utunturque Domino Naudaeo, Viro docto, qui dudum illic tum in collegio literario, tum in Pictorum sculptorumque Academia docet. Nam Director Academiae huius iussus est sumptibus parcere, quantum ejus fieri potest, dareque operam, ut quamminime res Aulae constet.

Eberhardum Schellium ignoro; Radhodi Schelli quaedam vidi olim politica et militaria.

Gymnasium doleo eo processisse; malo inter Eruditos exemplo, in quibus vellem plus quam in aliis humanitatis. Nam nisi scientia meliores nos reddat, proderimus aliis potius, quam nobis. Crederem nonnullos urere, quod in quadam mentrura in Batavis edita relatione de rebus literariis, de Tuis in Hospitalitatum opus meritis dictum est. Ipse utique vir modestissimus plurimum se Tibi debere professus est, cui aditum ad Methodos nostras suum in solidum transcripsit, cum Parisiis Tui consuetudine uteretur.

Dixi apud me fuit Dni. Varignonii meditatio de vi centrifuga, sed per alia omnia distracto satis expendere non vacabat. Tuam censuram videre gratissimum erit.

Moiraei libellum accepi, Tibique ago gratias. Video non esse spernendum ingenium Viri, expectoque ab ipso aliquid ad Scientiae augmentum, quemadmodum et a Juvene illo, cujus aliquam meditationem inseruit circa Series infinitas.

Sed vellem ego Viro in Anglia ad Lunden in his studiis aspirantem Problematia aggredi: is demum lapis est Methodorum Lydius. Dnus. Fatius hoc praecavit in Libro suo, denuntians se ad universum molle se vexari Problematibus: istud quidem sapere est.

Nisi maxime Reverendus Brannius significasset mihi abitum Tuum imminenti, elapsus eras mihi nihil minus cogitanti. Responsinunculam ad Baylum meum relinque, quaeso, obsequatam apud maxime Reverendum Brannium; nolo enim mihi miti, quia forte ad Batavos remittenda erit. Antequam prorsus abeas, aliquas adhuc literas a Te expecto. Dominus Frater Tuus valde desiderat Schediasma olim a Pensionario De Witte typis editum circa reditus ad vitam. Habeo, sed in modo chartarum invenire non possum. Tibi ex Batavis nunciis eique asserere facile erit. Haque rego hanc mihi gratiam facias. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 14 Julii 1763.

CLXXXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Doleo penultimam meam Epistolam ad Te scriptam interdisse; memini unum alterumve novum continere. Miror saepe contingere, ut literae Tibi inscriptae non tradantur, cum illud malum vix semel mihi contigerit. Spero me hinc profecturum medio circiter Augusti, ita ut saltem semel adhuc hic a Te literas expectem, si quid mihi perscribendum habeas. Responsionem ad Bayhem, uti petis, obsequatam deponam apud Rev. Brannium, qui ad ipsum Tuum de ea disponet. Occupato nunc mihi et aliis cogitationibus distracto non vacat explicare hic ad longum meam censuram in Varignonii meditationem de vi centrifuga: ubi ad quietiorem statum pervenero (utinam!) omnia fuisse exponam. Hoc equidem dicere possum, quod Varignonius non recte consideret vim centrifugam, sumendo ejus particulam infinitesimam pro integra, elementum pro toto: error ex eo habuit originem, quod curvas tanquam polygona rectilinea consideraverit, id quod in hoc negotio non procedit. Sunt enim curvae considerandae tanquam curbae ex arcibus parabolicis osculantibus, ita ut (Fig. 136) vis centrifuga non sit aestimanda per lineolam BC, recessum momentaneum a tangente AF, sumta scilicet AC tanquam lineola recta, ut Varignonius facit, sed aestimari debeat per DE recessum momentaneum a tangente, sumpta scilicet AE tanquam arcuola parabolica

osculante curvam AEH in AE; neque obstat, quod et ipse arcus AE, licet infinite parvus respectu curvae AH, sit tamen ex rectis lineolis infinitis minoribus compositus; nam et hoc ipsum ostendit, quod BC sit nomen elementum verae vis centrifugae; plane enim iudico, rem se habere ut in gravitate, quae non ita, sed infinitis ictibus, quamvis tempusculo infinite parvo producit; alias enim vires centrifugae non forent in duplicata ratione velocitatum, sed in simplici, quod est contra experientiam. Haec tamen et alia non poterant satisfacere Varignonis pertinaciter inhaerenti suo errori, et quod magis mireris, cum ipsi adducerent demonstrationem more Veterum adornatam, in quam scilicet nuda infinite parva ingrediuntur, et qua apodictice demonstrabam communem sententiam, quod grave agitatum in circumferentia circuli horizontalis celeritate aequali illi, quam acquireret cadendo ex altitudine semiradii illius circuli, habiturum sit vim centrifugam aequalem suae gravitati; et cum in illa demonstratione supponeret, tanquam axioma, quod mobile aliquid agitatum super curva aliqua in quolibet ejus puncto eam habiturum sit vim centrifugam, quam haberet si agitaretur aequali velocitate super circumferentia circuli curvam in eo puncto osculantis, Varignonis suppositum hoc, praeter omnem expectationem, mihi negavit, asseruitque vim centrifugam super circulo osculante duplicem esse ejus, quam mobile habet super curva in puncto osculi; cuius rei falsitatem ego protinus refulabam (quod factu facile mihi erat) alia nova demonstratione, qua apagogice ostendi manifestam sequi contradictionem, si dicatur vires illas duas centrifugas, super curva et super circulo osculante, esse inaequales, per consequens unam non posse esse duplicem alterius; ad hanc demonstrationem novam nihil aliud respondit Varignonius, quam se multa dicenda videre, se vero velle ea reservare in reditum meum in Patriam. Quid vero habeat, ne vel dicenda assequi possim: sunt enim demonstrationes meae ejus robore, ut vel Euclidæ vel Archimedæi cedere non ausint. Id quidem effecerunt, quod Varignonius suam meditationem, quam jam ad praeum parabat, in scrinia recondiderit, forte omnino suppressendam, ubi fascinum ab oculis absterserit. Quando vacabit, et jam dixi, communicabo Tecum binas illas demonstrationes, quarum prior praeferenda videtur Hugénianae alisque, quod cum hoc omnes per infinite parva procedant, quae etiam is, aliquot infinitesimalibus satis assueverunt, tamen negotium facessunt.

ut Varignonio contigit, mea nihil nisi ordinarias quantitates continet.

Schediasma Pensionarii de Witt circa reditus ad vitam viviputen reperire posse. Agnatus aliquis meus, qui nuper ex Batavia venit, se illud ibi reperire non potuisse mihi retulit. Inquiram tamen et ego, ubi ex transivero.

Ultrajectini, de futuro meo alitu certiores facti, me de novo in suam Academiam pellicere conantur, oblati conditionibus non spernendis, neque prior a me lata repulsa in tantum eos absteruit, quin ad me Legatum mitterent ex ipsis Professoribus unum, qui sua suada, si fieri posset (est enim Eloquentiae Professor) impetrato meo assensu abiret Exorator, qui venit orator; sed nec dedi manus, nec rejeci omnino oblatum, omnia deliberationem cum Parentibus reservans, atque me statim post reditum in patriam responsum daturum promittens. Miror quid in me viderent homines Viri, quod sibi adeo placeat, et vereor ubi aliquando me possederint, ut tum de me dici possit: minuit praesentia famam: sed sibi imputent, si expectationi, quam de me foveant, non satisfecero, utpote qui me non obtrusi illis.

Ad Acta*) nuper communicavi Methodum meam transformandi curvas in alias longitudine aequales, occasione mihi data per schediasma Dn. Craigii, quod in iisdem Actis reperi continens solutionem hujus Problematis, quam vero mere paralogisticam censeo, quippe quae supponit aliquid, quod ipsa quaestione difficilis est. Ut cuicunque interim suum tributum, feci mentionem modi Tui Problema solvendi per corvolutionem curvarum, addito tempore, quo illum accepi; quem etiam breviter recenseo, ut si forte Tibi non vacaverit, Lector illum perficere possit. Quid Tibi visum fuerit de novo illo motu meo reprobatorio, qui multa non spernenda mihi suggessit circa proprietates curvarum, sane libenter intellexerim. Vale et mihi favere perge etc.

Groningae d. 25 Julii 1705.

*) Act. Erudit. 1705 August.

CLXXXV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non raro quidem mihi aliquot centenas literas annuatim scribenti et accipienti contingit, ut aliquae pereant, idque hac vice eo facilius suspicabar, quod nuper aliquis ex famulis postae abiectus est, quo deprehensus est fasciculum literarum, quas reddere neglexerat, in flumen projecisse. Nunc tamen cum Tuis se res alter habuit, nam dum alias evolvo schedas atque suis locis dispono, ecce Tuas apparent, apertae quidem, sed nondum lectae, quod forte interruptus de manibus posuissen recens acceptas, nec occasio aliqua statim memoriam earum refricuisset. Ibi ergo legi Schidium an Schehum, quem memoras, Duci Brunswicensi cuidam, an Julio, dedicasse opus summi; sed meminisse quod sciam ea de re apud nos quicquam compertum, ut adeo prodixisse unquam non poteram.

Hodie mane literas Tuas accepi, cum in Aulam irem, quae in proxima urbi villa est: legi in itinere, reversus domum, quod alia negotia inchoare serum esset, expendi naturam vis centrifugae, seu conatus recedendi a centro circulationis. Usus autem sum (fig. 157) lineis rectis EA, AG, latera polygoni circularis infinitarum constitutibus, et motu uniformi in tali latere ejusque continuatione AF; quin et usus sum motu uniformi per rectam FG, cuius velocitas est infinita parva, quam pono ab attractione impressam, quovis momento temporis elementum incipiente, et durare per totum hoc elementum, quo peraguntur motus simplices AF et AH et compositus ex iis AG. Ita, licet per motu gravi tam continue crescente introducantur infiniti motus uniformes, idem tamen prodit in ipsis assignabilibus effectus, qui motus continue mutati suppositione, idemque conatus recedendi a centro; et revera reperio, si aequales sint, conatus qui imprimitur a gravitate, et conatus recedendi a centro, altitudinem, quae gravi dei velocitatem circulationis, esse radii circulationis dimidiam.

Licet autem in Dni Varignonis meditatione multa sint pulchra et ingemiosa, veritatique optime consentientia, in eo tamen ivit in diversum, meo iudicio, quod motum in lineola infinites infinitae parva FG (in ipsius figura dicitur LP) sumit ut acceleratum. quod etiam Tu facis, et sane in potestate est, quoniam attractio centralis velut gravitas quaedam concipi potest; verum enimvero,

hoc posito, lineola FG vel LP, non repraesentat conatum centripetum (vel contrarium ejus attractorium ad centrum, quo ipse destruitur) quin in motu accelerato velocitates non sunt ut altitudines. Conatus autem iste paracentricus ut velocitas quaedam consideratur. Mihi vero, motum per FG ut uniformem spectanti, eam lineam pro conatu paracentrico assumere licet, brevique ratiocinatione omnia constant, ita ut opus non sit ad arcus Parabolarum osculantium confugere: quamvis facile intelligam earum quoque ad eandem conclusionem debere perveniri. Interim gradiae Dni. Varignonio agenda sunt, quod rem hanc discutienti occasionem dederit, quae non inutiles considerationes praebet. Et fieri potest, ut nonnulli alii inter ratiocinandum rem tetigerint, uno errore alterum corrigente. Haec igitur ipsi Dno. Varignonio prima occasione significabo: nolui enim Virum egregium in suspensio numerare. Gratum aliquando erit accipere considerationes Tuas, et inter alia demonstrationem more Veterum adornatam.

Gregorini Operis Astronomici pauca legi, quod appareat, quae bona habet fere ab aliis esse descripta. Ex quo vidi cum noluisse agnoscere errorem manifestum, quod ingenium erat (de quo non dubito, quin aliquid ad Moiraeum scribens tetigeris) valde apud me inanimata est ejus existimatio. Nescio an videris Libellum ejus optumum. Totus nititur meo principio in Artis inditum, quod circuli osculantes in pravi pro succedaneis assumi possant Parabolarum, Hyperbolarum et Ellipsium: id tamen dissimulat, atque haec a se ante multos jam annos fuisse conscripta. Sed cum videatur praedixis ad paucula, quae forte inventi, protrudenda in publicum, credo hanc meditationem non spernendam, non (ut nos solemus) nonum in annum pressisset.

Mirum quod adduci possit, ut errorem retractaret circa lineam Cassinianam: forte fecit, quia adversarium habuit in Anglia imminuentem, ita non ausus est repugnare, ne Chelynsi contrarium fato uteretur. Rectius credo animum alijerit ad Gracos Mathematicos edendos.

Lineae, quae angulos circum unum focum habeat proportionales areis circa alterum focum, omnino possibilem puto, neque desperem ad eam pervenire, si res tanti esset.

Ad promovendas quadraturas ultra limites, quos hactenus habemus, ipseque reliquit Newtonus, aliis artibus opus puto.

Angli affectant paneta adhibere pro nostra litera d; quod etsi nullius momenti in communi usu discrimen sit, sunt tamen usus singulares, ubi puncta non sufficiunt, nempe cum differentiae gradus ipse generaliter sumitur et per literam exprimitur, ut gradus potentiae solet.

Avidus sum discere, an Sectio rationis Apolloniana aliquid commune habeat cum Logarithmis.

Jam dudum mihi dictum memini ab aliquo, regulam Goldini esse apud Pappum. Oportet ejus rei vestigium sit in jam editis. Jam venit in mentem Du. Tschirhausium mihi dixisse, hoc se didicisse a Duo. Regnier, qui erat insignis, pro suo tempore, Mathematicus Lugdunensis, etsi paralogismum commiserit, cum vellet mensurare superficiem sphaeroidis pro fornicibus arcum, nostris scilicet artibus tunc parum exploratis. Etsi enim, et Hugruius et alii, veram dimensionem ejus superficiei invenissent, id tamen pauci intelligebant, et Bahaldus credere solebat. Sed ego me video alius alia innectere, Te vero otio non abundare. Itaque felix iter precatus sum.

Babam Hanoverae 28 Julii 1705.

P. S. Motus reptoni noscendi curiosus sum. Non ingratus est, quod meam indagationem modi solvendi Problema Tuum publicasti. Etsi perfecti calculo exequi liceat, vix tamen in animam inducere possum ut faciam, quae alius facile suppleat, hac scilicet aetate.

CLXXXVI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postquam in Patriam redii cum tota familia mea exacto itinere periculi, curarum et tardii pleno (utpote quo durante dos ex liberis meis moribillis correpti graviter et non sine vitae discrimine decubuerunt) Tu inter primos es, cui scribendum esse censui. Jam forsitan nosti, quid vobis et mihi imprimis mali acciderit per inexpectatum Fratris mei obitum, cujus tristem nuncium Amstelodami agens cum stupore accepi, et simul intellexi ipso quo ejus exequiae celebrabantur die me Groninga discessisse, illo Patriam coelestem, me terrestrem repente. Mirabile fatum! sine

quo Trajectum me nunc teneret, ita enim cogitabam, ut nimirum visis Parentibus, cognatis et amicis post aliquot menses ad Batavos revererer amplectereque Professionem Trajecti, nam quae sub abitum meum ex Groningiana statione jam altera vice cum lautissimis conditionibus offerebatur, non obstante prima, quam Proceres a me tulerunt, repulsa. Injevit vero Patria mihi vincula et compedes, voluit ut succederem Fratri defuncto: sedem vacantem obtulit mihi Senatus Academicus more extraordinario et perquam honorifico, collegialiter ut vocant me convenit aedibus meis atque me precibus et promissis luculentissimis obstrinxit, quibus adde quod Magistratus, ut sua interposita Auctoritate me retinerent, compellavit, qui proin praeter salarium ordinarium aliquid augmentum mihi decreverunt. Hiscе aliisque agendi modis, imprimis vero Parentum et amicorum sollicitationibus aures tandem praebui, spretis eorum in gratiam tot tantisque Extraneorum oblationibus, quae non me tantum, sed et Uxorem mihi superstitem meoque liberos post fata mea fuissent beaturae, quippe quibus singulis promissa sunt facta non contemnenda. Etiam Leydenseni reperi vocationem, quam G. Volderus, cum Trajecti nuper essem, jussu Ill. Obdamii reliqueramque Academiae Leydensi Curatorum mihi obtulit, sibiique ut succedere vellem impense rogavit: voluit enim (ut me in Batavis retineret) consensu Curatorum Professionem (quam per 35 annos cum laude summa obivit) deponere et in me transferre. Ecce me ergo tandem Professorem Math. Basiliensem. Ut novam hanc stationem eodem quo priorem successu eodemque applausu lueri possim, omnes meos Deo adjuvante nervos intendam. Nunc variis cogitationibus distractus multisque negotiis impeditissimus, rebus mathematicis animum advertere nequeo. Vale etc.

Basileae d. 10 Octobr. 1705.

P. S. Commendavi ego Trajectinis et Leydensibus Hermannum nostrum. Si de illo consulereris a Voldero, meae quaeso commendationi suffragare: post meum enim abitum ex Batavis nuncium novi, qui studia nostra in oris illis cum fructu excolat, et certe nisi Hermannus aliunde ea excitet, neglecta ibi jacbunt. Videri nunc sine dubio meum motum Reptorium: quid de eo censes, libenter intelligam.

CLXXXVII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Salvum Te cum Tuis advenisse ex animo gaudeo. Quod vero Du, Fratrem vivum non invenisti, dolere me fateor. Speram enim a vestro colloquio et conspiratione plurimum fructus Reipublicae literariae et Vestrum utrique. Sed quoniam Deo aliter visum est, convenit Divinae voluntati nostram accommodare.

Velim quae reliquit conservari et in publicos usus transferri. Tibi gratulor Patria et amicis jam fruendi, et, quod auguror, diu fruendo. Nec dubito, hunc gratum rerum Tuarum habitum incrementum Tibi fore ad prosequendos laudatissimos labores.

Cl. Hermanno paratissima semper officia mea fuisse. Itaque si consulor a Cl. Voldero, vel si qua alia se offert ratio ejus rebus commodandi, non deero. Responsum ab ipso ad meas expecto, quas ei scripseram de dolere, quem in Societate Berolinensi, ex denunciata morte clarissimi Fratris Tui percepinus, deque exhibendo ejus nominis officio consolatorio apud Dominam Viduam, liberos et proximos, quod ad Te utique imprimis referatur. Id jussu Societatis repeti, quod excellentis Viri memoriam sibi semper commendatam habebit. Elogium ejus conscribi et re erit, quod Actis Eruditorum inseratur.

Quantum intelligo, vacant Groningana et Ultrajectina Professio Matheseos, et Leydensis semivacat, quando, quem memoras, nimis Cl. Volderi erga Te fuit. Sed vereor, ne idem in alterius gratiam sit facturus.

Mirum est in Germania nostra vis quemquam vel paulum in nostra Analysis proficere. Juvenis ille Saevus, qui me Berolini salutavit, Tibi quoque non ignotus (*Jenichio* nomen erat, ni fallor) curam aliquam hujus scientiae habere videbatur, magnos progressus non fecerat. Nescio an multo majores progressus fecerit Dns. Wolfius, qui Lipsiae dissertationem de nostro Calculo edidit. Ille tamen crediderim longius progressurum, quia prior, ni fallor, se praxi potissimum dabat.

Medicus Scotus doctus ad me attulit Cheynaei Librum pro veritate Religionis ex natura, et ejusdem responsionem ad Moiraeum. Neutrum expendere vacavit. Spero meliora pro Religione, quam de Analysis attulisse.

Nescio, unde judices, meam Methodum curvae datae exhibendi infinitas aequales perplexo admodum calculo indigere. Si ex eo, quod calculum non aggressus sum, colligis, adhibes non causam pro causa emissionis meae. Saepe enim etiam facilissima declino, quia in hac multitudine eorum, quae adhuc agere vellem, necessaria praefari debent. Constructionis Tuae per motum repletorium nullum adduxisti exemplum, nec minus quam ego in generalibus mansisti, quod me minus promptum ad rem attentius considerandum reddidit. De Dno. Craigio merito mones, non satisfecisse, etsi aliquid fecerit nimirumque aggressus sit.

Puto etiam meas priores Domino Hermanno redditas, in quibus ei demonstrationem misi, quod omnes series Arithmeticae non tantum, sed et potentiarum ab Arithmetice, et conflatarum ex his quantitatum habeant columnas periodicas, si dyadice exprimantur.

Nuper legi in Actis Academiae Regiae Scientiarum, dubios adhuc esse de Tuo Phosphori Barometrici experimento, utrum quando lubet confici possit. Vellem nosse, an nondum scrupulum sibi exemerint. Vale et fave etc.

Dubum Hanoverae 30 Octobris 1705.

CLXXXVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Pro benevolentia Tua et voto pio, quo adventum meum in hanc urbem novamque stationem gratulari voluisti, nec non pro testificatione doloris ex praecoci fratris morte Tibi percepti, gratias ago maximas. Velit Deus in hujus jacturae compensationem Te quem diutissime salvum sospitemque conservare magno Reipublicae Literariae et imprimis Orbis mathematicae commoda incoque singulari solatio. Nudus tertius defuncti fratris mei manibus justa persolvit noster Eloquentiae Professor publica Parentatione, quam Vidua imprimi curabit cum amicis Fantorum et Amicorum epicediis, quare si et Tibi volupe erit defuncti memoriam honorare versibus nonnullis, rogo eos mature transmittas: curabo ut obtineant locum eminenti Tuae dignitati convenientem. In parentatione audivi creberrimam et honorificam Tui mentionem. Inchoavi meam profes-