

sionem XVII. hujus mensis a solenni Oratione *) in frequentissimo Auditorio; materiam dicendi ex adjuncto hoc programmate vides. Facile cogitabis me ea occasione Tuorum meritum non esse oblitum. Virorum enim egregiorum, per quos profeci, memoriam mihi gratam esse non utique hac prima vice publice testatus sum, sed extant, uti nosti, jam alia testimonia multo priora. Quod Societas Berolinensis dignata fuerit dolorem ex nuncio fratris feneris perceptum testatum dare et officium suum consolatorum exhibere, omnibus defuncti consanguineis et proximis fuit pergratissimum et honorificum.

Cl. Volkerus, uti mihi scribit, reapse jam se abdicavit munere suo professorio, retento tamen salario mille flor. Hallae, omnibusque honoribus et emolumentis academicis sub Titulo Professoris emeriti. Si praevidisset me suam Provisionem non amplezurum, non potem eam tam cito depositurum fuisse, sed cum mentem suam festinanter nimis declaravit, postea honestatis causa eam retractare non potuit. Interim surrogatus ipsi est Da. Bernhard, Gallus, qui scribit: Les nouvelles de la republique des lettres, non quidem ut Professor perpetuus, sed ut Lector Provisionarius, uti vocant, donec de Professore aptior perro vacando constitutum esset. Sperant enim Langunenses etiamiam, oriturum forte illud tempus, quo de me feliciori cum successu cogitare queant, mutato hic rerum mearum statu. Et enim certum fateor, pruriri mihi animus adhuc in Belgium, quod Cl. Voldeo non adeo obscure significavi; nihil autem impedit, quominus desiderio meo satisfaciam, quam quod viventibus nonnullis usulum omnino sim mei juris: ideo gaudeo januam in Batavis mihi apertam servari.

Juvenem illum Suevum Jenichium, de quo loqueris, non memini me videre. Dni. Wollii Dissertationem de nostro Calculo videre optarem. Mirari non debes, quod judicaverim methodum Tuam curvae datae exhibendi infinitas aequales perplexo calculo indigere; nosti enim, quam longa plerumque expressione radii caustici, imo et radii osculi, quibus illi indigent, determinantur in curvis etiam simplicioribus. Sed quod primum est, non video, quomodo calculus sit institutus ad inveniendum situm, parame-

*) Sie handelte: De altioris Geometriae nova Analysis ejusque usu et necessitate ad studium physicum.

trum, aliunde simile curvae assumptiae speculi vices agentis; praevideo enim hujusmodi inquisitiones insolitam aliquam et nondum satis perspectam calculandi rationem requirere. Quod vero dicis, etiam me motus mei reperiendi nullum particulare exemplum adduxisse, verum utique est; sed videris non satis attendisse ad scopum meum: animas mihi erat constructionem tradere universalem, quae in praxi posset applicari ad omnes casus particulares sine ulla praevio calculo, quod utique effectui dedi per motum meum reperiendum, quippe cujus beneficio curvam datam (modo descripta supponatur) nullo interveniente calculo in aliam ejusdem longitudinis geometricae transformo; cujusmodi effectiorem tetragonismi etiam Tu per motum tractorum exhibuisti. Quantum vero ad methodum Tuam transformandi curvas per coevolutas, per eam problema solvere vel construere non potes, nisi primo curvam per speculo adhibendum per calculum definias, et hoc est quod quomodo commode fiat, nondum perspicio, et cujus processum vel in unico exemplo a Te desiderarem. Mea interim constructio utut nullo indigeat calculo; si tamen problema analytice solvi deberet, nihil facilis est effectus, ratio enim ad acceptionem perveniendi oppido patet ex ipsa motus reperiendi natura.

Quod quidam Parisienses adhuc dubii sint circa phosphorum meum mercurialem, causa est ipsorum minus perfecta in experimentis instituendis dexteritas; oblati illis me paratum phosphorem elegantissimum ex ipso illo mercurio, in quo frustra laboraverunt, si ejus copiam mihi facere vellet; sed hactenus non fuit transmittendi occasio. Res ergo huc rediit, ut eos experientia convincam, quod facere paratus sum quando libuerit. Vale etc.

Basiliae d. 25 Novembris. 1705.

CLXXX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nescio an Tibi perinde ac Dno. Hermanno, qui prior postulerat, jam transmissis Distichon, quo inelyti Geometrae Domini Fratris Tui memoriam utcumque celebravi; id ita habet:

Infinita Tibi teris lux fuisit in ipsis,
Bernoulli, et quisquam Te superasse neget?

Scio Philosophos inter alia ex infiniti cognitione pro anima immortalitate argumentari, et quidem non male. Spero accipere aliquando quae honori ejus edentur; commode enim in veras Lipsiensium Nundinas transmitti poterunt.

Fortasse Orationem quoque Tuam interim edes de Laubius Analysis novae, quam eadem occasione sperabo.

Non satis noveram doctrinam Dni. Bernardi, Editoris Novellarum literariorum, Galli; atque ideo ignorabam tantum in Physicis praestitisse, ut Volderi vices subire posset.

Domini Wolffii Dissertatio de nostro calculo non procedit ultra elementa seu Algorithmum meum. Si Problema aliquod reducatur ad determinationem Cauticarum, utique pro soluto haberi delect. Ita autem solutum a me est Tuum.

Ut vero videas non requiri aliquam, ut scribis, insolitam et nondum satis perspectam calculandi rationem, ecce Tibi exemplum, sed generale et cuius curvae infinites per aequationem exhibendae suffectorum, ubi debitus speculi situs sine ullo calculo determinatur. Nempe adhibeo speculum Ellipticum et duo extrema arcus dati puncta colloco in foco Ellipseos et circa hos focos describo Ellipsin quamcumque seu filo quantumcumque, et posito arcu datum radiare per tangentes in speculum Ellipticum, erit imago ejus catacaustica, reflexione radiorum incidentium formata, arcus quaesitus priori aequalis et semper dissimilis, prout major minorque eisdem focus manentibus assumitur Ellipsis. Sit (fig. 158.) arcus datus ABC; circa focus A, C describatur Ellipsis FLG, et A per tangentem arcus radians in F, habeat punctum contradictionis seu catacausticum respondens in altero foco C, et C per tangentem arcus radians in G habeat punctum catacausticum respondens in altero foco A ex natura Ellipseos. Cumque per naturam Catacausticarum sit filum AFCIA (seu birecta AFC + arc. CIA) aequale filo ABCGA (id est arcui ABC + birecta CGA) et AFC et CGA birectae sint aequales ex natura Ellipseos, erit arcus ABC aequalis arcui CIA. Vides ergo nihil plane insolitum hic requiri, cum tantum de duobus punctis extremis agatur, ut birecta ad primum punctum aequetur birectae ad ultimum punctum eumque ad scopum speculi situs accommodetur; quamquam id in aliis lineis non aequè facile ac in speculo Elliptico aut Hyperbolico praestari possit. Omnia autem specula, cotica scilicet, hinc scopo inserviunt, excepto plano et sphaerico. Dato speculo cupi-

cupi figurae, quaerenda est Ellipsis vel Hyperbola lineam speculi osculans in duobus punctis. Hoc habito, facile est arcui dato talis figurae speculum accommodare, ut praestetur quaesitum. Facile etiam viles per diacausticas, debita refractionis mensura assumta, praestari posse, ut curva sit in ratione data ad datam, atque ita ad quosque infinites infinitis modis. Agnosce etiam (quod dudum obtinuisse videbas) iudicium sequens de meis non adeo promptum esse debere. Quod superest, novum annum Tibi cum multis aliis gustum et felicem precor. Vale etc.

Baham Guælfeldty 27 Decembr. 1705.

Beilage.

Das Folgende scheint Leibniz zur Bekanntmachung durch die Act. Erolit. bestimmt zu haben:

Ingeniosissimus Vir, Dn. Johannes Bernoullius, ante annos aliquot problema proposuit: Dato arcu curvilineo cuiusque infinitos alios inter se dissimiles exhibere aequales. Hoc cum ipse mihi significasset per literas, statim inveni solutionis Methodum ope imaginis catacausticae per speculum rite adhibitum, Tangentes arcus dati reflectens, formatae, quae imago Archetypo sit aequalis, eamque methodum ipsi in responsione paucis verbis indicavi. Cumque mihi evidens appareret et objectioni istidem per literas satisfecissem, de re amplius non cogitavi, quod mihi talibus ingenii exercitiis nunc incumbere parum vacaret aut conveniret. Sed cum fortasse mentem meam non satis percepisset, et ex omissa a me ob dictas rationes executione Methodi nescio quam in ea difficultatem suspicatus esset, scripsit nuper in Schediasmate Actorum mensi inserto, solutionem meam, etsi meliorem alia, quam refutat, tamen perplexo admodum calculo indigere videri addiditque in literis praevidere sese, optis fore calculi genere insolito nec satis perspecto. Ea res fecit, tum ut ab ipso vicissim impetremus methodi suae executionem (cum vereri liceat, ne motus repletus quem proposuit dicto loco, arcum dato congruum adesse non novum aut priori dissimilem reddat) tum etiam ut resumere problema, nec difficulter exemplum methodi, sed per se universale excogitarem, in quo quaesita speculi apti determinatio nullo calculo indiget, resque de caetero ad simplicem catacausticae determinationem reducitur.

Sit cujuscunque lineae curvae arcus datus ABC, quaeruntur quot quis voluerit arcus ei aequales, sed dissimiles inter se, qualis KIH. Id per speculum concavum rite collocatum cujuscunque formae (excepto plano et circulari) praestari potest. Exemplum dabimus in Elliptico, cujus collocatio commodissime determinatur: Arcus dati extremis A, C, tanquam focus, et filii vel axis transversa longitudine quacunque DACE describitur Ellipsis DFEF; dico Arcus ABC per suas tangentes radiantis ad partes E imaginem catacausticam speculi Elliptici FEC reflexione formatam KIH, id est hoc loco CIA fore arcum quaesitum ipsi ABC aequalem.

Ei primum quidem ob Ellipsin, punctum causticum K respondens ipsi A est alter focus C, et punctum causticum H respondens ipsi C est alter focus A; deinde ex natura Catacausticae manifestum est Filium AFGIA aequale esse filo ABCGA, seu esse $AFC + CIH = ABC + CGA$. Denique ex natura Ellipsis est birecta AFC aequalis birectae CGH; ergo fiet arcus CIH aequalis arcui ABC. Mutata autem circa eosdem focos Ellipsi, praediti alius arcus CAH, priori aequalis, sed dissimilis, infinitis modis, quod desiderabatur. Idem quod Ellipsi praestitimus, ope Hyperbolae praestabimus, si birectae primae AFC et postremae CGA latera non summam, sed differentiam faciant eandem.

Ita vel solus Speculi Elliptici sive Hyperbolici ope habetur quaesitum; sed idem praestari tamen potest Speculo alio (si plenum vel sphaericum excipias) quocunque, etsi aliquando per constructionem impeditiorem, cujus tamen commodissima in universum ratio hoc fundamento nititur, quod duae curvae in puncto, ubi se osculantur, eidem in hoc punctum radiantii (sive puncto sine magnitudine) reddunt eandem corradiationem seu imaginem catacausticam, ut adeo punctum osculi praestet speculi vicem, quod simplex punctum contactus non potest. Hoc loco autem sufficit puncto in locum osculi radiantii idem ab utraque curva punctum corradiationis reddi. Haec proposita figura speculi assumatur linea aliqua ejusdem figurae, quam Ellipsis aliqua vel Hyperbola osculetur in duobus punctis; ita arcui tangentibus suis radiantii, qui similis sit dato, sed cujus punctorum extremorum distantia sit eadem, quae focorum Ellipsis vel Hyperbolae osculantis, dabitur imago catacaustica aequalis. Si deinde huic imagini fiat alius arcus similis in ea ratione, quae est distantiae extremorum arcus dato similis ad distantiam extremorum arcus dati, habebitur quaesitum. Semper autem arcus dati

ABC obvolutione, arcusque quaesiti KIH devolutione, quae simul sunt, describetur arcus speculi FG. Et ut in extremo, ita ubique et in medio erit filium ABLIH aequale filo AFRKH vel ABCGH, sed quia non est generaliter filium BLI aequale filo AFC, ideo nec dici potest, quicquid nunc obvolutum est, nempe arcus AB et IH simul, aequale esse ei, quod prius obvolutum erat, nempe arcui ABC, seu arcum IH esse aequalem arcui BC. Itaque non partes arcus quaesiti partibus arcus dati aequantur, sed totus toti, quia filium devolutum primum et filium devolutum postremum sibi aequantur. Interim cujus parti separatim satisfieri posset. Ex his apparet, ad effectum quaesitum utique talem collocacionem speculi investigandam esse, ut haec aequalitas filii primi devoluti cum postremo devoluto habeatur, quod semper infinitis modis obtineri potest. Quemadmodum et in Elliptico vel Hyperbolico res aliter ad hoc infinites obtineri posset, si a commoda illa punctorum arcus dati extremorum in Focos collocacione discederemus. Quae persequi operae pretium non est. Utile interim erit considerare hoc loco Analysisin Anagogicam, ut appellare soleo, adhibitam fuisse reducto problemate ad alia feribata aut jam existentia in potestate, quae Analysis plerumque commodior est Analysis Anabatica, rem ab ovo aut certe a remotioribus problematibus persilium repetente.

CXC.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Oratio parentalis in memoriam fratris habita praefatum jam evaserat, cum distinctum Tuum ad nos veniret, et ita reliquis episodis adungi non potuit, quod doleamus; acque tamen Tuum in defunctum affectum hinc agnoscimus grati. Mittetur, uti desideras, oratio haec in verbas Lipsiensium munitas ad Te porro mittenda. Mea vero inauguralis oratio in laudem analysiseos novae lucem non videt; haec enim non, uti in academiis Batavorum, orationes publice habitae publicis etiam sumptibus imprimuntur, sed privatim editorem requirunt, qui sumtus erogat, ego autem productiones meas non usque adeo amo, ut eorum causa vel teruncium erogarem.

Berhardus, Gallus, Editor Novellarum literarum, suffectus est Cl. Voldero non ut Professor Ordinarius, sed tantum ut Praelector (ut vocant) Provisionarius. Interim ne nunc quidem mihi velle difficile foret obtinere cathedram mathematicam et philosophicam vel Lugduni Bat. vel Ultrajecti, si vel tribus verbis gratam fore ostenderem, necdum enim post ter milia respulsam me sollicitate desistunt, licet interim Vriesio defuncto Trajectini jam vocaverint aliquem Serrurierum, Volderi discipulum, qui mihi depraeclatur tanquam insignis Mathematicus et Philosophus, quo vero merito nescio. Ut verum fatear, nondum omnem cogitationem ad Batavos revertendi abieci, adeo eorum vivendi ratio mihi placuit: aliquando fortassis consilium in arena capiam.

Dni. Wolfii Dissertationem de nostro Calculo, qualescumque illa sit, videre optarem. Ferte commodiorem ordinem ad decendum studiosos observat, quam qui habetur in libro *Analyses infinite parvorum*, praeterquam quod hic liber gallicae sit conscriptus, quam linguam non omnes, qui mea manu ditione utuntur, intelligunt.

Nunc demum agnosco problema meum de transformandi curvis plene a Te solutum: non enim certe mihi in mentem venerat usus Ellipsis, quas ad hoc negotium commode adhibes, eas vero ab initio nec Tibi statim animadversas puto, alias jam tum temporis monuisses. Interim pace Tua dixerim, modum Tuum solvendi cum indigesto concursu radiorum reflexorum a radiis circumferentiam osculantium i. e. a differentibus secundi ordinis dependente, uno gradu magis esse compositum, quam is est, quo ego uter per motum reptorium, qui nihil praeter tangentium descriptionem postulat, id est, differentiales primi ordinis. Praeterea non video, quomodo methodus Tua ad praxin facile applicari possit ad habendam constructionem geometricam, quemadmodum mea procedit per motum continuum et facile ad praxin applicabilem. Deinde non assentior Tibi dicenti: omnia specula concava huic scopo inservire excepto plano et sphaerico, nam non recte excipis sphaericum, quia potius in certis casibus ex ipso Tuo praescripto necessarium est: finge enim arcus dati et transformandi ABC (fig. 138.) subtensam AC evanescere, hoc est, arcum datum esse curvam in se redeuntem, vides utique tunc ellipsin FLG (coincidentibus scilicet focus A et C in unum punctum) degenerare in circulum, et catacausticam hinc formatam CIA fore etiam curvam in se re-

deuntem. Rectissime interim mones, rem in aliis lineis non aequae facile ac in speculo Elliptico aut Hyperbolico praestari posse: quando vero subijcis: dato speculo alterius cujuscumque figurae, quaerendam esse Ellipsin vel Hyperbolam lineam speculi osculantem in duobus punctis, ut scilicet per talis figurae speculum aequae ac per Ellipsin vel per Hyperbolam praestetur quaesitum, nihil videtur verba Tua restringenda esse, nam non sufficit Ellipsin vel Hyperbolam osculari lineam speculi in quibuscumque punctis duobus, sed oportet ut oscula illa duo fiant praecise in illis duobus punctis, in quibus occurrunt Ellipsi vel Hyperbolae rectae duae tangentes arcum datum in extremitatibus seu ex focus ductae. Quomodo autem Ellipsis vel Hyperbola talis sine longo calculo inveniri possit, ut scilicet osculetur lineam assumptam speculi in duobus illis punctis, nondum video: mallem itaque in Ellipsi et Hyperbola (quae problema jam plene solvunt) acquiescere, quam praeter necessitatem aliis lineis et operoso calculo intricari. Caeterum ut curva sit in ratione data ad datam, superfluum omnino est id praestare per diacusticas: inventa enim (vel Tua vel mea methodo) curva B aequali curvae datae A, fac per modum jam ubique cognitum curvam C ipsi B similem et quae ad eandem habeat rationem datam, habebit ergo etiam C ad A rationem datam. Unum est, quod monendum restat: possum scilicet demonstrare possibile esse, ut arcus datus radius ABC (fig. 138.) sit non tantum similis, sed prorsus idem cum inventa catacaustica CIA, et ita non esset satisfactum problemati, quod curvam curvae dissimilem postulat. Ut igitur methodum Tuam et ab omni parte perficias, incumbet Tibi ostendere modum, quo hi casus identitatis dignosci et evitari possent, ut quis securus esset se invenisse curvam et specie et numero a data diversam. Vale etc.

Basiliae d. 30 Jan. 1706.

XCII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Monsio ut Tibi mittatur Wolfiana Dissertatio.
Tecum sentio, Analysis infinitesimali in Hospitaliano opere non satis methodice tradi.

Satis intelligo, cur consilium reditus ad Batavos nondum commode exequi possis.

Omnino de Ellipsi et Hyperbola cogitaveram dudum, et in antiquis Schedis notaveram. Statim enim Problema ut consideravi, solvi: sed plane ex animo demiseram, ut soleo, cum praestet mihi per alia distracto oblivisci istorum, quae magis necessariis cogitationibus obstant, retento tantum principio inventionis; sed ita fit ut aegre ad talia absolvenda redeam, praesertim si vetus schedula non adsit statim, quo casu ego malo rem iterum quaerere, quam Schedam, si modo res non minus impedita sit. Interim, ut verum fatear, talia vix amplius agere vacat.

Itaque nec objectiones quasdam Tuas ad secundaria quaedam dicta mea satis discutio, praesertim cum videantur captare magis verba, quam monere quod in rem sit.

Etsi, inventa aequali, facile demus similem in data ratione, an ideo monere velabimur per diacusticas, lineam, quae in data ratione sit, statim et immediate exhiberi.

Si opus esset quadraturis quadraturarum seu aequatione differentiali secundi gradus soluta, posset solutio proposita altisus aequo gradus censeri. Nunc radiorum concursus serviunt ad inventionem et demonstrationem, non ad constructionem; lineae enim sunt ordinariae. Quid vetat etiam modum innuere, etsi impeditiorem, aliis etiam speculis utendi? cum possit aliquis etiam desiderare hoc, scientiae causa.

Postremo nihil facilis est, cum infinitas in promptu habeam, eam evitare, quae datae lineae congruit.

Quod speculum sphaericum utile fore putas, contra quam dixeram, rogo ut adhuc semel consideres. Vereor enim ex eadem curva redeat. Nunc neque figuram ad manus, neque rem in animo habeo. Si sphaericam professe comperias, hoc monitum Tuum laudabo. Caetera non aequè, qualibus ego certe uti non soleo, quippe quae neque me neque aliis digna censeo, ne censorum supercilium praeter rem affectare videor.

Duo est, quod a Dno. Hermanno nostro nihil vidi, ut adeo ignorem, an adhuc Venetias cogitat, an consilium illuc eundi plane deposuerit? Me sane haec nosse aequum est. Quod speres, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae II Februarii 1706.

P. S. Indica quaeso interdum, quid in Mathematicis Physicisque geratur: ego enim haec serius disco, praesertim ex Gallia et Italia, quae vobis vicinae sunt regiones.

CXCI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Dedi Afini meo ad Nundinas Francofurtenses hodie proficiscenti, fasciculum Parentationum Lipsiam mittendum ad Cl. Meuserium, in quo continentur duo exemplaria Tibi inscripta, adeo ut non dubitem, quin recte ad Te perveniant. Gratum mihi feceris, si ut promittis, Wolfianam Dissertationem mihi mitti curaveris. Video non sine aliquo dolore, Te quaedam monita mea circa solutionem Tuam pro transformatione Curvarum non eo animo accepisse, quo ego ea scripsi: nescio sane quid fecerim, quod arriorem eum, quo uteris, stylium extorsit: olim non erat sic: ferreas objectiones meas, non benigne tantum, sed et quandoque gratias agbas, ubi Te praecipitantiae aliquis monitum videris. Nunc vero me censorii supercilii redarguis et dicere sustines, Te talibus quae amice obnoxi, non quidem in Adversariis soli solere; si quaedam Tua publice augulassen, non certe potuisses acerbius exprobrare.

Nesciverim cui rei attributam impatientiae Tuae causam, nisi quod forte putaveris, scrupulos meos exmero contradicendi studio fuisse profectos, quod tamen a me fuit semper alienissimum. Ita quomodum nolebam veterae monitum Tuum de linea in data ratione per diacusticas immediate exhibenda, nec Te pariter venturum spero moneri, quod idem praestari possit facilis per catacusticas ordinarias, inventam scilicet aequalem in similitudinem in data ratione inveniendam. Porro vetare nolo innuere modum impeditiorem aliis etiam speculis utendi; hoc utique saltem Scientiam auget, quod minime vituperandum est. Sed an ideo vetarum innuere, quod pro praxi praestet, adhibere specula Elliptica vel Hyperbolica, quam alia, et quod illa, cum problema universalliter solvant, pro ipsa constructione jam sufficient. Sed haec transierint; nollem enim vel huius tangere, quod Tibi ingratus esset,

quavis præter omnem meam opinionem, utpote qui semper in omnibus Tibi placere stultus. Ob hanc rationem nunc nihil dicam de iis, quae nuper observavi in Schedismate Tuo, Actis Erud. Januari inserto, ubi agis de motu radente etc. quae Te edidisse dicis occasione invitante; fuit illa haud dubie suppeditata ex iis, quae de motu reptorio scripsi; hoc unicum immere volo, aut me non recte capere mentem Tuam, aut approbari non posse quod dicis, per motum radentem moveri motu parallelo rectam aliquam in plano curvae radentis assumtam. Caeterum cum momentum meum de Speculo Sphaerico unice laudes, neque ideo exhorteris, ut adhuc semel considerem, Te enim vereri ne eadem curva redeat, ea de re nunc certum Te reddere possum. Quare mittas quaeso metum supervacaneum; si vel tantillum attendere velles, videres statim speculum sphaericum non minus utile posse esse, quam omne aliud ellipticum. Fateor casum posse occurrere, quo per speculum sphaericum eadem curva redeat: sed idem etiam contingere posse per speculum ellipticum, jam in praecedentibus monui; ad quod respondi, eum casum posse evitari tantum tanta tantum ipsis; idem nunc dico, fieri posse mutata tantum sphaera, id est, majori minorive Sphaera adhibita; curvas autem per specula sphaerica ordinarie diversas esse a datis, vel hinc patet, quod aliquando curva in se rediens pro catacaustica sua habere possit curvam asymptoticam, id est, in infinitum abeuntem, quod idem etiam in speculis ellipticis, imo in quavis curva contingere posse facile perspicio.

Sit enim (fig. 159.) speculum sphaericum AGD: Curva ab qua CNB radians secundum tangentes NG: ejus catacaustica LK, quae nimirum formatur per intersectiones radiorum reflectorum GK: pro hujus formatione dico sumendam esse $GK = \frac{NG \times GF}{4NG - GF}$

Et generaliter, si speculum sit concavum qualecunque VGX, et quaeratur longitudo radii reflexi, describendus est circulus osculator in G, qui secet radium incidentem NG (si opus est) prolongatum in F, et erit semper $GK = \frac{NG \times GF}{4NG - GF}$, quod novum est theorema lactemus nondum cognitum: unde apparet, qualecunque sit speculum sive sphaericum sive aliud, et qualecunque Curva data CNB etiam si in se rediens, modo eo propinquitatis accedit ad speculum, ut NG tandem aequatur $\frac{1}{2}FG$, fore tunc GK inf-

nitam: id est catacausticam LKP habituram asymptotum SR, et postea evadente NG minore quam $\frac{1}{2}FG$, mutari catacausticam LKP in oppositam OT. Hinc vides, quod pace Tua dixerim, solutionem Tuam pro transformandis curvis hae nova conditione et cautela restringi, ut scilicet Sphaera vel Ellipsis, ex qua fit speculum, sufficienter sumatur magnitudinis, ut NG ubique major sit quam $\frac{1}{2}GF$. In enim curvam datam finitam CNB in aliam finitam aequalem LKP transformata habebis, et quidem si illa fuerit in se rediens, etiam haec in se redibit. Secus enim, si Speculum ejus esset magnitudinis, ut alicubi NG non esset majus quam $\frac{1}{2}GF$, proveniret Curva nova constans duobus partibus infinitis, una affirmativa LKP, altera negativa OT, quae utique vix incongrue dici posset aequalis ipsi propositae CNB. Hinc ergo inconvenienti mendeberis, si speculum ex majori sphaera vel sphaeroide paraveris, quod monuisse, ut spero, saltem non displicebit; coque nimis quod, Te hortante, rem de novo consideraverim, atque adeo, Te velut auctore, hanc fecerim annotationem.

Ab Hermanno acceptis literas; se enim nuper Tibi scripsisse mihi asseruit. Vereor ne ejus spes et consilium Venetias eundi simit in spongiam incubenerit. Ex quo redi in Patriam, nihil mihi innotuit, quid in Mathematicis Physicisque sit praestitum. In Batavia cum degerem, citius et frequentius ad me pervenerunt Nova Literaria ex Gallia et Italia, quam nunc in isidem multo vix censoribus. In Physicis Experimentalibus quaedam ipse promitterem, sed instrumentis hic caevis, neque ea ex sumptibus publicis (ut Groningae obtinui) hic aequo facile comparare spero: tentabo tamen. Ex Gallia habeo quod Saurinus finaliter (ut loquuntur) responderit Hollio provocans ad decisionem Academiae; legi ejus Responsionem quae satis placuit. In Memorabilibus Academiae reperi La Hire Specimen pro determinatione curvaturae radii medium continue difforme transeuntis, quam tandem concludit esse Cycloidem, sed omnia ejus ratiocinia sunt meri paralogismi et palpabiles, adeo ut mirer Academiam pati ejusmodi absurditates et ineptias sua auctoritate in lucem protrudi. Vale etc.

Basilense d. 13 Martii 1706.

CLXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quam Te aestimaverim semper, atque omni etiam benevolentia complexus sim, puto Tibi multis argumentis a tot annis fuisse perspectum. Itaque cum nuper in objectionibus quibusdam Tuis aliqua minus nobis convenire putassem, idque veris, ut par est, temperatis admovissem, spero Te, pro prudentia Tua exploratoque animo, sedata jam mente facile agniturum, nihil a me actum, quod non admitteret, imo quod non postularet officium amici. Verissimum enim arbitror, ne in adversarios quidem utendum hoc genere animadversionum. Vides etiam me unum mentum Tuum, quo revera docebas aliquid, ex merito laudasse, nihilque adeo affectu dedisse. Itaque spero Te animo ejectionum omnem opinionem acerbitatis candoremque meum potius benivolentiae imputaturum, cum actus ususque eorum, quae ad iudicium congrui pertinent, aliquam mihi monendi fiduciam in hoc genere dare potuisse videantur.

Limitatio Tua, quam solutioni meae adhibes, mihi non minus grata est, quam si a me perfecta esset atque observata. Ego enim animam ab his abstrahere cogor meditationibus, ferpe in generalibus consisto, contentus viam reperire, qua rem in potestate habeam. Utile videtur esse Theorema Tuum ex Circulo osculatore, alique continet comprobationem quandam suimet. Nam si producas GK (fig. 159.), dum circulo eidem occurrat in H, cum utique linea corradata per tangentes et corradata sint sibi mutuo

catacausticae, erit $\left\{ \begin{array}{l} \text{ut G, N, F,} \\ \text{ita G, K, H,} \end{array} \right.$

adeoque uti est $KG = NG \cdot GF$; $4NG = GF$, ita erit $NG = KG \cdot GH$; $4KG = GH$. Sed ob circulum semper $GF = GH$, itaque si pro GH ponas GF, ambae aequationes coincident.

Quod transitum Ellipseus in Circulum attinget, bene habet quod res succedit, nec redire oportet eandem curvam. Itaque saltem hoc modo ope Circuli cuius lineae in se redeunt aliam lineam aequalem commode exhibere possumus, focus (fig. 160.) B et N coincidentibus in C. Totum negotium de motu repente aut valente, Tuo attento examini committo.

Dn. Varignonium periculose decubuisse mihi Parisiis scribitur nome paulatim convalescere. Litem vero inter Saurinum et Rollium decisam ajunt utamque, sed ita, quantum ex iis, quae Bernardus Menstruis suis literariis inseruit, apparet, ut circa summan rei nihil actum videatur. Bernardus enim haec tanquam Parisiis scripta refert: Monsieur Saurin a été renvoyé à son bon cœur, et Monsieur Rolle admonesté de dire les choses avec ménagement. Quae fateor me non satis intelligere. Abbatem Gallosium pro Rollio omnia conatu egisse ajunt, et Saurinum, quod pendente lite nescio quid imprimi curasset, indignationem Bignonii et periculum pensionis incurrisse. Ipsum Gallosium et La Hirium, indulgente Saurino, inter iudices sedisse ajunt, vel, si maxis, iudicii assessores, quorum consilium Bignonius pronuntiaret. Sed hi duo manifeste pro adversario stabant. Itaque Bignonium arbitror rem utramque sopire maluisse.

Mira sunt, quae de la Hirio narras, Cycloidelem Curvaturam radii in medio difformi, paralogismi in speciem demonstrationum adornatis, in ipsis Academiae Commentariis confirmare voluisse: credo, ut calculo differentiali carere posse crederetur. Fortasse, ut apud Gregorium, duo paralogismi se mutuo destruentes in veritatem desinunt. Totius ille nondum ad me pervenit. Admoneri talium Bignonium Abbatem, e te profecto Academiae et Republicae esset.

Dn. Hermannii negotium Patavinum putabam non male procedere. Nam scripsit ad me Dn. Guglielmus V. Cl. se sententiam rogatum, Viro merito favere; ipse Dn. Hermannus visus est in nuperis de successu non male sentire.

Bernardus in Batavis suis Menstruis nuper habuit aliqui, quibus pro merito memoria Dni. Fratris Tui laudatur; quaedam tamen impergantur, quae Tibi profecto non probantur. Neque: quae quelques faibles lumières m'estant échappées de mon invention du calcul des différences, vous et Monsieur votre frère avertis pris la résolution de m'en enlever l'invention, et que vous y avertis enfin reussi. Sed neque propositum vestrum, quod sciam, fuit (quod utique iustum non fuisset) mihi admere vobiscum tribuere laudem Calculi hujus inventi, cujus Elementa atque etiam specimina nonnulla jam in Actis erant proposita. Illud verissimum est, vos, vestro marito (sed te ante fratrem), applicationem ad difficultis Problema, nempe Catenarium, me tamen praemouente de successu, III, 2. 21

reprise, et inde aditu aperto ad laudem famaque inventi non minus contulisse quam me ipsum, me certe applaudente atque gaudente. Quis talia Bernardo suppeditarit, satis exputare non possum.

Ajunt Du. Marchionem Hospitalium in posthumo Opere de Sectionibus Conicis et constructionibus per loca, omnia, in quae hoc genere hactenus publicata sunt, obumbrare. Quaestio tamen ante materiam pefererit. Sane si loca plana et Solida Veterum species a Pappo enumerata, velles perspicere principium, quo Veteribus ita venire in mentem. Nam Fermatius et alii et novissime Vivianus, qui loca illa Veterum explicaverunt et demonstrarunt, veritatem quidem comprobaverunt, sed principium inventionis non dedere. Quod superest, vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 15 Aprilis 1706.

CXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Gaudeo limitationem meam, quam solutioni Tuae adhibi. Tibi non improbari. Theorema quod ea occasione inventi pro determinanda linea corradiata ex corradiante et circulo occultare, facile demonstrari potest non uno tantum modo etiam citra calculum. Hinc porro inventi, si circulus ipse transformandus esset in aliam curvam algebraicam longitudine aequalem Tuae methodo, quantae longitudinis oporteret esse radium circuli assumpti pro speculo, ne scilicet curva nova abeat in infinitum, sed in se rebot: reperio enim, posito a radio circuli dati et x radio circuli specularis, sumendum esse x majorem quam $4a\sqrt{3}$, hoc est, omne speculum sphaericum habens radium ad radium circuli dati in majore ratione quam 4 ad $\sqrt{3}$, seu quam duo latera trianguli aequilateri ad ejusdem altitudinem reddere curvam catacausticam in se redeuntem, omne vero sphaericum speculum minus catacausticum dare asymptoticam: uno etiam, ubi radiorum ratio esset exacte ut 4 ad $\sqrt{3}$, foret nova curva ad asymptoton, sed hoc esset discriminis, quod partes haberet duas, unam affirmativam, alteram negativam, non oppositas instar hyperbolarum, quem admodum reli-

quae habent, existente scilicet ratione minore quam 4 ad $\sqrt{3}$, sed juxta se positas ad communem asymptoton.

Motum Tuum radentem quod attinet, Du. Hermannus explanationem a Te datam eodem, quo ego, modo intellexit, sed neuter nostrum concipere potuit, quomodo dici possit lineam aliquam rectam determinatam in plano curvae radentis manere hoc motu sibi semper parallelam, cum tamen nobis manifeste appareat, situm illius rectae adeo non parallelum manere inter movendum, ut tandem plane pervenire possit ad situm priori oppositum, uti illud accidit semper, quando curva immobilis, quae raditur, est circularis vel elliptica vel quaevis alia, quae habet duas tangentes parallelas. Expectamus itaque ulteriorem explanationem, quoniam forte mentem Tuam non recte assecuti sumus.

Du. Varignonius Lutetia profectus est ad usum aquarum Borromensium, rediturus ut scribit intra bimestre. Miror Saurinum voluisse in iudicium admittere Gallosium et La Hirium, Viros ob imperitiam nostri calculi eidem infensissimos adeoque partium studio nimis addictos. Hinc vero non miror litem tam ridiculo quo refers modo decisam esse. Quae Saurinus pendente lite imprimi curavit, fuerunt testimonia nostra, Tuum nempe. Du. Hermanni et meum; melius fecisset, si ante contestationem litis ea promulgasset, sed ea, credo, nondum habebat suppeditata. La Hirius in determinatione curvaturae radii in medio difformi nullo modo veram attigit curvam; ea enim non est cyclois, ut quidem credere videris. Nosti utique me ostendisse cycloidem tunc fore, si medium variaret in raritatibus secundum legem accelerationis gravium, ut nimirum ex illa ficta suppositione determinarem curvam celerissimi descensus, quam eandem cum illa opertere esse demonstravi; ut vero cum reales medi raritates, hoc est, aëris quem radius penetrat consistentiae varient in longe alia ratione, nempe secundum applicatas logarithmicas, ut facile patet, erit etiam curvatura radii diversa prorsus a cycloidalis; habet enim illa, ut inventi, asymptoton axi parallelam, cujus applicatae aequantur arcibus circularibus, quorum complementa habent pro sinibus applicatas logarithmicas super eodem axe constitutae, quod ubi monueram Du. Hermannum et fratris mei secundi Filium *), juvenem quidem nondum octodecim annorum, sed tamen in hisce profundioribus jam

*) Es ist dies Nicolaus Bernoulli.

non mediocriter versatum, uterque, nulla quamvis communicatione facta, problemata solvit et in eandem omnes incidimus solutionem. Quam etiam Dn. Hermannus me suadente ad Acta Lipsiensis misit, ut absurditas Hirceanæ solutionis pateat, quam certe tibi lecturus es, vereror ne nauseam moveat, adeo quas fere periodo peractas et in materia et in forma. Sed miror Te eam nondum vidisse, extat enim in Academiæ Commentariorum Tomo 4to seu anni 1702, quem ad Te pervenisse jam non dubito.

Quousque negotium Patavinum Dno. Hermanno successerit, ex ipsiusmet literis percipies. Nunc in eo est, ut quotidie expectet vocatorias literas ab Academiæ Curatoribus, a quibus se designatum Professorem jam ante aliquot menses intellexit.

Non sine stupore et indignatione accepit, quae dicas Bernhardum Batavis suis Menstruis inseruisse. Quisquis ille sit, qui ea Bernhardo suggererit, nec Tibi nec mihi valde eum favere oportet. Maxime vero miror Bernhardum suggesta quævis tam terrore statim vulgare, quæ potius suppressenda essent. Qui ambo! unquam sustinuissem adimere Tibi laudem inventi calculi differentialis, qui contra quavis occasione publice profertus fuerim et post-hæc profitebor, Tibi maximum ejus rei gloriam deberi, atque adversus invidios obtractatores Tuas partes semper pro viribus firmiter tuitus. Ex innumeris habeas exemplum, quod existat in Actis anni 1701 pag. 139 circa finem, ubi sic loquitur: „Quod in hunc diem incomparabilis differentialis calculi ejusque Illustrissimi Autoris dictum esto, ut ipsi sua constat excellentia et vindictor ab „iniqua censura etc.“ Item in Dissertatione mea de Motu musculorum hic impressa a. 1694 exertis verbum pronuncio Tibi prima ejusdem calculi elementa deberi. Optarim itaque hæc et alia Bernhardo commonstrari, ut quæ tam imprudenter contra veritatem prostruit, incunctanter nunc revocet.

Observavimus nupero 12^{mo} hujus mensis Eclipsin solarum celo undique favente et sereno; erat illa totalis contra Ephemeridum Parisiensium calculatorem Lientaudium, qui eam posuit undecim tantum digitorum et octo minutorum. Non enim puteam tantum esse differentiam horarum, ut propter parallaxim inducatur differentia unius fere digiti. In maxima solis obscuratione, quæ accidit paulo ante decimam, multæ visæ sunt stellæ, Vetus et Oculus Tauri soli adstant ad sinistram versus orientem. Insolutum hoc phaenomenum et orta hinc magna obscuritas, quæ per

scietiam hominum nunquam observata fuit, totum nostrum orbem imperium præteritum terræ impendit. Vale et bene etc.

Basiliæ d. 22 Mjji 1706.

P. S. Novitne aliquem Josephum Verria Bostonensem? ab eo super literis accepit, ubi a me petiti novorum Bostonensium expectationem. De cetero valeat differentiarum calculum et quassum nostræ methodos satis sibi familiares tradidisse.

CXC.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Mulla incidere, quibus spæie distractus sum. Res Anglicæ imprimis, cum et expectaretur Legatio nova extraordinaria et postea presens me quoque non perfectorie occuparet. Supererunt et Rex Borussiae, cuius Filio responsa est Filii Electoris, neque intra paucas septimanas cum Filio hoc reddidit ad suscipiendam preparationem. Sed ordinare quoque labores meos et cogitationes de multis antiquo collectaneis meditationibusque conservandis, ne quid de literis amitterem et conversatione Antiquæ dicam, ita sæpe dividant, ut non semper mihi aliquid satisfacere possim.

Færrugina sunt, quæ de causticulis solutionis meæ moxos, pætereaque ut ipsam aliquando Analysim communicares, non molestus esse vereror.

Vetur te parè quædam in nova motus radente explanatione desideres; cum enim super tandem omnibus anticum adverterem, statim dependentes amla valebor, curva aliam curvam mere radente omnino mutari parallelismum rectarum, et nisi fallor, punctum (fig. 161.) quodvis determinatum rectæ AB ad amboas curvas BB et CDB normalis, in mobilis curvas CBD plano ductæ et cum eo procedentia, describere lineam AA, basi BB sequodistantem. De linea autem (fig. 162.) LL, quæ a puncto certo L plani mobilis LMN describitur cum curva LSM in hoc plano posita, super basi immota BB ita incidit, ut recta quævis ejus plani, ut LM, sibi maneat parallelæ, quem motum, si fallor, repentem vocas; vixit mihi sum reperire hanc lineam L₁L, ita describitur sequari aggregato ex $\frac{1}{2}B_1B$, arcu percurso basi, et $\frac{1}{2}B_2B$, arcu percurso cur-

vae mobilis, ita omnes a diversis punctis descriptae, velut ab L vel ab M vel ab N aequaluntur. Haec meditantī breviter occurrunt, dum ad distinctas delineationes venire non vacat, itaque malo Tuo examini rem submittere, quam diutius responsum differre: neque omitam aliquando rem retractare in Actis.

Saurinum in Gallosii et al Hirii arbitrium consensisse arctior, quod Abbatis Bignoni voluntatem intellexisset. Hic enim Judex sibi caeteros, velut consiliarios, adhibuit. Si vera sunt quae referuntur, Judicium magis morale quam mathematicum fuit. Pataveram La Hirium id, quod a Te circa Cycloidem per curvaturam radii prodeuntem inventum erat, demonstrare voluisse. Ita fortasse dum aliquid per se assequi voluit super analyseos propriae captum, non miror si longissime a jama aberrarit: speroque Du Bernanum non tantum veram solutionem ad Acta misisse, sed etiam & falsa admonuisse, ut La Hirius errorem suum agnoscat.

Quoniam Licutaudius, Parisini Calendarii annuus Calculator, rem non bene assecutus est, fortasse nec Tabulae Hirianae adeo exactae sunt quam creduntur; eas enim secutum puto. Nullus vult admittere hypotheses Hirius et ex solis observationibus construi Tabulas, sed ego putarem simul cogitandum de hypothesis perficiendis, ope observationum. Puto eum in Tabulis condendis tantum continuasse, quae a multis annis in Parisino observatorio notata sunt: sed haec methodus, etsi utilis, non nisi in paucis annis prodesse potest.

Flamstedius, homo paulo morosior, Newtono observationes suas negaverat, tunc cum is de perficienda Lunae Theoria cogitaret: si novissem, suppeditassem Kirchianas etiam diligenter factas et a multis annis. Nunc Flamstedius, sumbitus Admirali Angliae, suas triginta annorum observationes edet. Sed Newtonus negat sibi animum esse rediendi ad hos labores. Cum eclipsis in summo esset, Venus etiam in his oris passim visa est, tametsi Eclipsis totalis non esset. Certe Berolini spectatam ad me relatum est.

Facile judicabam Tibi non probari, quae Bernardus, nescio unde accepta, Diario suo de Calculo nostro inseruit, itaque hominem admonere ut corrigat. Non constat mihi de Josepho Verzaia Bononiensi, ejusdem Analyseos non experto. Alius quidem ex

Italia Monachus Benedictinus *) (si bene memini) Guido Grandus nomine, aliquando ad me scripsit de eo argumento, et Libellum a se editum **) misit, ubi quaedam nostra assecutus non male videbatur; nihil tamen dederat quod non ex illis prompte fluere. Si qua ex Gallia intelligis ad rem literarum spectantia, communica quaeso. Moivraei ad me literas attulit aliquis, qui cum Legato nuper huc venit. Nuntiat Hallaem edere Libellum Apollonii ex Arabico versum de Sectione rationis, simulque partem jam publicam mittit. A Dno. Hermannino diu est quod nihil accipi: spero omnia jam confecta. Gaudeo esse Tibi, ex alio licet Fratre, Neptem, quem Fratranarum laudum heredem sperare fas sit. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 15 Julii 1706.

CXCVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas meas acceperis, quibus quaedam notavi de lineis, nota quam repente vocas descriptis, de quibus iudicium Tuum exopto.

Nunc mitto Tibi quae Dno. Bernardo, Novellarum Literariorum Auctori, destino, tibi prius a Te approbata fuerint ***). Si quid est, quod monere velis, facies ut mature intelligam. Non optima fide contexta fuit narratio, quam Bernardus Collectionibus suis inseruit, nec mihi tantum, sed et Tibi parum aequa videtur, cum non attingatur, quod verissimum est. Te ante Du. Fratrem in difficultis Problematis Catenarii interiora penetrasse, cumque hac in re non parum Tibi debuisse. Id ego non plane dissimulandum putavi, ut cuique sumus tributatur. Interea me ad priores refero. Vale et me ama etc.

Dabam Hanoverae 20 Augusti 1706.

*) Guido Grandi war Camaldulenser-Mönch.

**) Geometria Demonstratio Theorematum Hugenianorum circa Logisticam etc. Auctore D. Guidone Grandi, Florent. 1701. 4.

***) Siehe Nouvel. de la Repub. des lettres 1706, pag. 121.

CXC VII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nuper redux ex thermis responsum jam paro ad postrema Tus 15 Juli datas. Gaudeo Te tandem animadvertere pararam Tuam circa motum valentem; videtur ortum habere ex eo, quod motum illum cum motu meo repente quodammodo confundis. Verissima nunc sunt, quae de hoc altero motu asseris, sed pessimis etiam, quae jam in Actis Augusti anni superioris a me fuisse sunt explicata, quaeque fundamentum faciunt solutionum meorum problematis de curvarum transformatione, ejus rei vero memoriam Tibi elapsam esse facile suspicor.

Analysis, quam desideras, pro determinandis cautionibus solutionis Tuae ejusdem problematis communicare non detrecto. Primo qui invenerim theorema illud, quod Tibi non displicuit pro longitudine radii reflexi, ita habet: Esto (fig. 163.) curva quaecumque V G X, radius incidens N G, reflexus G K, puncta corradiantia N et K. Jam concipe in puncto G circumum osculatorem G F H, radios illos si opus productos secantem in F et H. Concipe etiam duos alios radios quam proximos, incidentem N g et reflexum g k, occurrentes circulo in f et h. His ita positis, habebis arcus aequales G F, G H, ut et g f, g h, adeoque arc. G F = arc. g f, hoc est G g - F f = arc. G H - arc. g h, hoc est H h - G g; unde sequitur H h + F f = 2 G g. Porro ob similitudinem triangulorum N g G, N F I, ut et K G g, K h H, habes G N, N f (N F):: G g, F f = $\frac{G g \times N f}{G N}$

deinde etiam G K, K h (K H):: G g, H h = $\frac{G g \times K h}{G K}$; quoniam itaque summa Elementorum H h + F f = Elemento G g his sumto, erit, substitutis valoribus inventis, $\frac{G g \times K h}{G K} + \frac{G g \times N f}{G N} = 2 G g$;

unde, elemento G g utrobique per divisionem destructo, emergit aequatio in terminis finitis seu ordinariis K H x G N + N f x G K = 2 G N x G K, quae, quia K H = G F - G K, et N f = G F - G N mutatur in hanc G F x G N = 4 G N x G K - G F x G K; adeoque G K = $\frac{G N \times G F}{4 G N - G F}$ quod ipsum est Theorema, quod Tibi perscripseram, ob simplicitatem expressionis non parum utile futurum in Cataoptics ad Catacausticas sine magno labore inveniendis, cum

alias formula ordinaria exprimens radium reflexum, ope radii circuli osculatoris, multo magis sit composita, quippe in ejus terminis reperias solida et plana, si non ultiores dimensiones, quando nostra continet dantaxat plana et lineas. Alii praeterea mihi sunt modi non minus elegantes, ad praedictam nostram formulam perveniendi, quorum unus petitur ex hac jam nota proprietate, quod summa angulorum hinc radii incidentibus proximis binisque item reflexis contentorum aequatur suo respective angulo ad centrum circuli osculatoris his sumto, scilicet N + K = 2 D, hoc est, quod tres anguli N, D, K sunt arithmetice continue proportionales. Ex quo vel in transitu concludere potes, radium reflexum G K pro diversitate horum angulorum tribus modis varicere posse: angulus enim N aut minor est 2 ang. D, quo casu G K erit finita et affirmans, id est, versus concavam speculi partem sumenda; aut N aequalis est 2 D, et tunc G K abit in infinitum; aut N major est quam 2 D, id quod reddit G K finitam, sed negativam, hoc est, sumendam versus convexam Speculi partem. Ex hisce tribus casibus primus tantum est, quem admittit Solutio Tua, quam reliqui duo inutiliter et irritum reddunt, ob rationem quam ex praecedentibus meis literis nosti.

Ut vero hanc cautionem quo pacto distincte determinaverim, nunc porro, quoniam petis, edocem, consideres velim meam formulam G K = $\frac{G N \times G F}{4 G N - G F}$, patebit utique oportere 4 G N majorem esse quam G F, si velimus ut G K fiat affirmans et finita; alioquin certe aut negans aut infinita evaderet: unde jam constat Speculum Sphaericum ut pro transformatione curvae alicujus in se redemptis utiliter adhiberi queat, tantae magnitudinis esse debere, ut ex quocumque curvae datae puncto N ducatur tangens, utrinque terminata in G et F pars ejus N G, quae pro radio incidente sumitur, semper major sit quam $\frac{1}{4}$ G F: secus enim curvam datam in se redemptem in aliam, quae duas habebit partes in infinitum protensas mutaret, quod absurdum esset. Ex his sequitur, Speculum Sphaericum tantae magnitudinis esse debere respectu Curvae transformandae, ut minima ex omnibus rationibus, quam habere possunt G N ad G F, tamen adhuc major sit quam subquadrupla: cui conditioni ut satisfiat, considero primo radium circuli Specularis tanquam datum, et postea quaero generalem expressionem pro $\frac{G N}{F G}$.

quae more solito differentiata et nihilo adaequata, dabit casum pro
 $\frac{GN}{GF}$ minima: hanc deinde porro aequando cum $\frac{1}{4}$ obtinebis aequationem, ex qua elicies valorem radii circuli specularis pro limite quaesito, citra quem radium illum diminueri non licet, sed ultra quem auctus nullum parvumque semper utiliter adhiberi potest. Sit (fig. 164.) curva data transformanda ex. gr. circulus CNB, transiens per centrum C circuli specularis AGD, cujus diameter ACD transeat per centrum O circuli minoris, ex cujus puncto quovis indeterminato N ducta concipiatur tangens FG, et utrimque producta ad majorem circuli peripheriam. Si nunc ex Centro C demissa perpendicularis CL ad tangentem FG vocetur x; radius CD, a; et radius OG, r; reperietur

$$\frac{GN}{GF} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2rx - xx}{aa - xx}}$$

ut igitur $\frac{GN}{GF}$ evadat minima, inventa haec quantitas vel ejus loco tantum $\frac{2rx - xx}{aa - xx}$ differentietur, neglecto scilicet, quod constans est $\frac{1}{4}$, ut et signo radicali, res enim eodem recidit; invenienturque $x = \frac{aa + a\sqrt{aa - 4rr}}{2r}$, et ideo in hoc casu

$$\frac{GN}{GF} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{-a^4 + 4aarrr + a^3 + 2arr\sqrt{aa - 4rr}}{-a^4 + 4aarrr + a^3\sqrt{aa - 4rr}}}$$

hoc si aequetur ipsi $\frac{1}{4}$, prodibit $a = \frac{1}{2} r \sqrt{3}$ hoc est = lateri trianguli aequilateri, cujus altitudo est CB: eo igitur latere, tangam radio, descriptus circulus est ultimus eorum omnium, qui inutilis sunt, quilibet quippe circulus eo minor, vel ei aequalis, reddit catacausticam circuli CNB infinitam et asymptoticam, per consequens inutilem: quilibet vero circulus, eodem illo termino major, dabit circulo dato CNB aequalem catacausticam finitam et clausam, adeoque talem qualis in problemate postulatur. Q. E. F.

Haec nonnulli fusius, quam par est, explicata dedi, quod non fecissem, nisi Tu ita desiderasses. Nunc ad reliqua litterarum Tuarum pergo. De Hiri errorum circa curvaturam radii optici refutatum a Dno. Hermanno, cum hujus vera solutione substituta, sum dubito Tibi nunc visum, utpote jam ab aliquo tempore in Actis editum. Quam misere soleat hallucinari la Hirus alieni inventa demonstrare volens, ostendit in sua Mechanica, ubi tantu-

chromium Hugenianum probaturus concludit tempus descensus per cycloidem aut quavis ejus arcum esse duplum temporis descensus per diametrum verticalem circuli generatrix, quod falsissimum; tempus enim descensus per curvam est ad tempus descensus per diametrum, ut semicircumferentia ad diametrum, adeoque non ut 2 ad 1. Paralogissimum ejus dudum in Actis aperui. Et ego quoque accepi nuper literas a Moyraeo, una cum inclusis literis Hallaei: nuntiavit mihi se ad me misisse fasciculum aliquem continentem Apollonii Pergaei libellum de sectione rationis, ab Hallaeo editum, tum etiam Newtoniani Tractatus de Coloribus latinam versionem, ut et tandem Cheynaei responsionem ad Moyraei libellum. Fasciculus autem iste ad me nondum pervenit. Guidonis Grandii nomen in Actis jam aliquoties occurrit; non videtur magna illum praestaturum, si ex iis quae dedit judicandum. Accepi hinc Dissertationes Wolffii, quas ipsemet Auctor mihi misit cum epistola humanitate plena. Ut verum fatear, neque hic satis alte penetrasse videtur; communia et trita sunt quae pertractat et quaedam operosius multo quam opus est; mirum in modum se torquet in quadrama parabola ordinaria, pro qua plus quam integram paginam adimplet nec tamen sine paralogismo. Nolle autem hoc, quod Tibi soli scribo, ab Auctore rescisci, ne fervor ejus, quo haec studia prosequi videtur, iniquiori ut forte putaret iudicio sufflaminetur, quem potius quoque laudabili modo incitare convenit; quo fine haecae adjunctas ad ipsum scripsi. Spero occasionem Tibi fore eas porro Lipsiam mittere.

Ante paucos dies literas accepi a Varignonis, ex quibus cum reducere intellexi ex thesibus summo cum fructu melioris valetudinis. Significat mihi, Hamelium Secretarium emeritum in Academia Scientiarum Regia diem suum obisse, eique successisse aliquem nomine d'Aleme, Mechanicum, atque hunc receptum esse inter Veteranos, qui novam insituantur classem Academicorum supernumerariorum et qui non ita strictè teneantur interesse congregationibus.

Scriptorem hunc hucusque productum interrupit Uxor mea, quae ex improvise et ante terminum quem sibi constituerat, peperit feliciter filiolam, et ita me jam sextae prolis parentem fecit. Credo thesuras, ex quibus ante aliquot hebdomadas redimus, nonnulli maturasse partum, quamvis et puerpera et infans nihilominus bene hactenus valeant Deo favente. Vides interim qualia nobis uxoris negotia facessant familiae nostrae jam satis numerosae et subinde

allic accrescentes: non miraberis igitur, si studiis mathematicis non ea amplius qua desideramus assiluitate operam dare possimus. Mille sunt curae et sollicitudines, quae nos occupant, a quibus coelibes sunt liberi: habet matrimonium sua commoda et habet sua incommoda in variis vitae generibus, sed qui literis se totum dedere cupit, disrat is primum vitium suam in coelibatu transigere, quo nomine Te felicem reputo. Vale et fate etc.

Basildae a. d. 11 Septembr. 1706.

P. S. Quod ad Dn. Hermannum attinet, oblitus eram dicere, quod in vocationis negotio nihil adhuc est confectum praeter id, quod a Curatoribus Academiae nominatus quidem fuit jam a longo tempore, ut nosti; confirmationem autem ab Excellentissimo Senatu Veneto in hunc usque diem nondum obtinuit. Cl. Fardella lentoris hujus culpam rejecit in importunitatem armorum Patavinus oras nimis molestantium; interim spem fecit felix successus brevi secuturi, ubi belligerantes ex Venetorum terris exierint, quos cum nunc maxima parte jam Pedemontium ingressos et hinc Taurinum ab obsidione liberatum audiverimus, videbimus quoniam tandem Dn. Hermannus optato fine potiri possit.

Cum in eo essem, ut has literas complicarem, novissimae Tuae mihi opportune traduntur. Legi animodiversionem Tuam Novellis Literariis inserendam; placet ea mihi et propositum Tuum suum cuique tribuendi, quo Tua Tibi summo jure vindicentur, ego plane non improbo. Potuisses tamen etiam hoc non omittere, quod post publicatum Tuum algorithmum calculi differentialis eundemque quantitates differentiant, ego primus fuerim, qui propriis Marte cogitarum de altera calculi parte, qua a differentis ad summas regressus quaeritur, ejus antea nec volam nec vestigium sive in Actis sive alibi videram, quem ideo cum commodis vocabulum nescirem, novo nomine calculi integralis nunc possum recepto insigiebam, et postea regulas plures eodem tempore pro eo calculo a me inventas partim cum fratre partim cum aliis communicavi. Mihi enim tum temporis persuadebam, nemini ante me in mentem venisse cogitationem de inversione methodi differentialis ejusque inversionis modo et usu, ut itaque ego, quantum et Te et Newtono sim posterior, nihilominus tamen quantum ad calculum integralium spectat, aliquo modo in inventionis gloriae partem jure merito vobiscum venire possem.

De problemate curvae catenariae quod dicis illud a Fratre

Tibi fuisse propositum, non addis quod id fecerit ex meo instinctu; considerabam enim eam curvam ante fratrem, nescius tamen uterque eandem illam jam a Galileo fuisse tentatam. In hoc vero problemate solvendo cum ille frustra desudasset, ego vero primum usum regularum mearum pro calculo integrali feliciter adhibuisse et solutionem meam Fratri ostendisse, inceperat meas regulas plures quam antea aestimare et excolere. Hoc modo calculus iste paulatim incrementa nova et perfectiones accepit, dum alter alterum deinceps continuo exercebat. Lutetiam tandem profectus, communicavi cum Hospitalio omnes nostras regulas duplicis calculi differentialium et integralium; pro opere autem Hospitaliano postea edito, certe non tantum fundamenta, ut unus, sed materiam ipsam totam ego suppeditavi, ut per manuscripta et literas bene multas etiamnum apud me asservatas atque jam a multis Viris doctis et fide dignis saepe visas planissime constat, ut ita non minori jure, quod Virgilius olim de versibus suis ab alio usurpatis, id ego de hoc opusculo dicere possem:

Hunc ego codiculum feci, tulit alter honores,

Sic Vos non Vobis etc.

Ceterum nihil aliud praeterea in schediasmate Tuo monendum reperio, nisi ut quantocyus lucem videat. Illud non remitto, ne literarum fasciculus nimis intumescat, ejus enim autographum Tibi superesse non dubito. Nunc iterum vale.

CXCVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratias ago, quod labore me sublevari inquirendi in meae constructionis limites, per quam datae curvae quodlibet aequales exhibere doceo. Cum alia peragenda magis magisque urgeant, fit ut talia vix possim tractare, quae vellem, attentione.

Nuper cum Epistola Tua excitatus considerarem motum repletum, contentus fui primariam eruisse proprietatem dimensionis; Tua autem tunc ad manum non erant. Quod si in Schediasmate ad Acta olim misso, hinc clare duxisti Tuam constructionem arcus

dato aequalis, bene habet; sin minus, cogar eam a Te petere. Et optarem aliquod exhiberi exemplum, veluti pro curva Elliptica.

Du. Fratrem Te suggerere de Catenaria quaesisse ignorabam: quia vero indicas, non dissimulabo.

Quem integralem Calculum appellas, ego Summatorum dicere solitus sum, et Integralem appellabam eum, qui docet Problemata Arithmetica in integris solvere, quando id fieri potest. Saepem autem opposui differentias et summas, d et f , ita ut $f dx$ sit x et $d f x dx$ sit $x dx$. Ita f et d conjuncta se mutuo tollunt. Imo summae meae differentialis Calculi admodum, eaque Methodi meae clavis fuit, cum in scribibus numericis hanc reciprocationem deprehendissem, eaque arte summasset multas series antea non summatas. Re igitur ad lineas seu series inassignabiliter differentes tractata, animadverti tangentes respondere differentis, quadraturae summis. Et quod in Numericis feceram, multo magis in Geometricis faciebam, ut de variis regrediendi seu summandi artibus cogitarem, non sine multiplici jam tum successu, ut specimina etiam comprobarent. Et quod de rationalibus Quadraturis inper edidi, jam tum habui; reductione enim fractionum compositarum ad simplices pro scribibus numericis inventa, primum fuit idem adhibere figurarum quadraturis. Eaque omnia jam triginta annorum aetatem habent.

Si quia in summando vel integrando artificia detexisti, quae me ferunt, gratias agnoscam pro eo candore, quem semper ostendi.

Apollonianum Fragmentum ab Halleio editum nondum accepit totum.

Etiā ego Duo. Wollio statim ostendi, parabolae quadraturam non ex Theorematis aliunde mutuatis, sed ipsius calculi ruderibus esse petendam. Et postea series numericas longe aliter tractandas admodum.

Quidam nuper ad me scripsit, nostram Methodum maxime et minimae non pertinere ad casum talem: Sit (fig. 165. 166.) Curva ABCD, quae a C reflectatur, sitque CE portio tangens communis; hinc ille non putabat hic locum habere, ut BF existente y, quaeratur GC, ubi $dy=0$. Respondi etiam hoc locum habeturum, si concipias curvam, quasi saecum regressa facis, qui in hoc casu evanescat in punctum. Vale.

Babam Hanoverae 3 Octobr. 1706.

CXCIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Non est quod gratias agas pro tenui labore, quo Te sublevavi, inquirendi in Tuas constructionis limites, per quam datae curvae quolibet aequales exhibere doceres: certe enim fuit labor tunc, mihi tamen, qui dubia semper valetudine utor, satis molestus, ut nesciam an aliena Tua negotia Te magis, quam corporis mei infirmitas me excuset, quominus talia pertractare debita attentione. Id saltem rogare Te ausim, ut ne imponas mihi in posterum aliquid oneris, ad quod ubi responsum dedero, quantum per vires licuit, cum tamen postea attente perlegere et examinare vix Tibi vacet. Cui enim bono, ut impleam literas longis calculis (hoc praesertim valetudinis meae statu) quas si Tu non legis, nemo mortalium unquam leget. Possum subinde colligere, ignoscas candide loquenti, ex his quae a me petis, quod literas meas olim ad Te datas vel plane non vel admodum perfunctorie legeris, vel saltem lectorum facile nimis obliviscaris: nam quandoque petis, quae dudum dedi. Petis ex gr. constructionem meam arcus dato aequalis, ex Schediasmate meo ad Acta olim misso ductam, quam tamen ex his omnibus, quae Tecum pro aliquot annis circa hanc materiam communicavi, jam perspectissimam esse nullo dubitavi. Sed quomodo cum nunc clarius exhiberem, quam in Actis habetur? Impende, quæso, semiquadrantem horae, ubi vacaverit, lectioni attentae illius Schediasmatis: extat in Mense Aug. 1705; forte nec temporis nec operae poterit. Hermannus noster legit et examinavit illud serio, lectumque impense probavit laudavitque.

Ut tamen Tibi morem geram petenti, exemplum pro Curva Elliptica in aliam aequalem transmūtanda dato. Sit (fig. 167.) Ellipsis data ABDE, cujus axes conjuncti AD et BE. Fac igitur aliam Ellipsin datae aequalem XPMQ, tangentique primo duae illae Ellipses se mutuo in verticibus conjunctis A et P, ita nempe ut in directum cadat axis major AD cum minore PQ. Hoc in positu reperere facias PMQN, hoc est, moveas eam motu parallelo super immobili ABDE, servato interim semper contractu mutuo ellipsium, quo fiet ut Ellipsis PMQN transferatur post primum circumlatis quadrantem in situm $P_1M_1Q_1N_1$, post secundum in $P_2M_2Q_2N_2$, post tertium in $P_3M_3Q_3N_3$, et post quartum redeat

in primum PMQN; atque interim vertices quatuor A, B, D, E, successive excipiant suos respective conjugatos P, N, Q, M. Hoc motu punctum quodvis in plano curvae repetitis centrum O describet curvam OG, O₁, H, O₂, IO, KO, quae, secundum ea quae demonstravi in Actis, erit dupla curvae Ellipticae ABDE adeoque illius dimidia OG, O₁, H, O₂ erit aequalis propositae curvae Ellipticae. Quod si magis desideres, ut integra descripta Ellipsi datae sit aequalis, oportet prius assumere loco Ellipsidis datae aliam Ellipsin similem, habentem axes conjugatos datorum dimidios: ita enim ambae Ellipses ABDE et PMQN simul sumtae aequant propositam, hincque adeo aequalis erit integra curva descripta GHIK. Habes ergo (ut desiderasti) constructionem per motum continuum, certe non minus geometricam, quam ea est, quam per motum circuli describitur circulus. Forte tamen ei non acquiesces, sed petes aequationem algebraicam pro determinanda natura curvae ejusque punctis inveniendis; talem exhibere aequationem si intelligis per constructionem dare, etiam in hoc me obsequentem labels: Sit igitur semiaxis major AC = a, semiaxis minor BC = b, abscissa indeterminata in Ellipsi CR = x, adeoque applicata in eadem

$$RS = \frac{b}{a} \sqrt{aa - xx} = (\text{brevitatis gratia}) \frac{by}{a}; \text{ ex his fiant ordinatae}$$

$$CT, TF \text{ hac conditione, ut abscissa } CT \text{ sit} = x + \frac{b^2 x}{\sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2}}$$

$$\text{et ordinata } TF = \frac{by}{a} + \frac{a^2 y}{\sqrt{a^2 y^2 + b^2 x^2}}; \text{ dico curvam hoc modo determinatam fore quaesitam, nempe illam ipsam, quae per motum$$

repetentis puncti O fuit delineata. Notes hic obtine puncta F et S ita sibi respondere, ut ubi O processit in F, mutans Ellipsium contactus tunc semper celebretur in S, quae omnia demonstrata sunt facilia.

Sed ad aliud nunc progredior, quod moneri alijus operae pretium duco, quamquam alias, ut videtur, haud adeo magni meum inventum hactenus aestimaveris. Idque hoc est, quod hodie me a Methodo transformandi curvas simul doceat lineas ellipticas, ceterasque ellipticarum formas habentes, imo omnes curvas comprehendere intra limites pro arbitrio coarctandos duorum circulorum, quorum unus majorem, alter minorem circumferentiam habeat, quam data curva elliptica, quod quantum usum habere possit in

praxi ipse perpendas, licet tale quid nemo lucusque praestiterit, nemo enim lucusque sine serie in terminis finitis et geometricae reduxit ex. gr. ellipsin ordinariam intra duas circumferentias circulares, quae vel tantum centesima, nedum millesima, vel minori adhuc sui parte, altera alteram excedat. Hoc tamen est, quod mea Methodo feliciter exquiritur, eo qua ratione!

Vides curvam rependo descriptam, quae ellipsi aequalis, habere quatuor sua puncta cardinalia O, O₁, O₂, O₃ aequaliter distantia a centro C; sed et demonstrare possum, intra quatuor ista puncta dari quatuor alia exacte intermedia G, H, I, K, itidem aequaliter distantia a centro C, sed hoc discrimine, quod illorum intervallo a centro C sint minima, horum vero maxima; id quod curvae nostrae peculiarem hanc formam conciliat, ut nempe habeat quatuor gibbos valde quidem obtusos in G, H, I, K, alternatim protuberantes inter quatuor puncta cardinalia O, O₁, O₂, O₃, ubi curva quatuor veluti compressiones patitur: unde clarum est, circulos duas ex centro C et radius CO, CG descriptos tangere curvam in quatuor punctis, et unam interne in O, O₁, O₂, O₃, et alteram externe in G, H, I, K; adeoque illum tanquam inscriptum minorem esse curvam, hunc vero tanquam circumscriptum eadem esse majorem. Est autem radius inscripti CO = CA + CB = a + b, et radius circumscripti CG inveni = AB√2 = √2aa + 2bb. Hinc ergo concludo curvam nostram OG, O₁, H, O₂, IO, KO, hoc est, Ellipsin, cujus axes conjugati sunt 4a et 4b, nempe duplo majores quam AD et BE, esse majorem, quam ambitus circuli, cujus radius a + b, sed minorem quam alium, cujus radius √2aa + 2bb. Summam exemplum hujus adjectae figurae, ubi tali Ellipsi sum usus, in qua semiaxes conjugati AC et BC sint ut 5 et 4, unde radius circuli minoris erit 9 vel √81, et radius circuli majoris erit √82; assero igitur longitudinem ellipsis, cujus semiaxes conjugati habent partes 10 et 5, esse inter duas circumferentias circulares radiorum √81 et √82, qui numeri sibi propius accedunt, quam hi rationales 9 et 9½, hoc est, quam 162 et 163, ideoque minor a majori minus differt, quam centesima sexagesima secunda sui parte. Hac occasione memini me legere apud nonnullos Practicos, quod pro comparandis perimetris Ellipsium cum circularibus jubeant describere circulum radio aequali medio arithmetico inter semiaxes conjugatos ellipsis propositae, cui asserunt aequalem

fore circuitum circuli ita descripti; revera hic circulus, cujus circuitum haud dubie ex sola sensuum aestimatione aequalem judicant lineae ellipticae, est ipsissimus minor ex limitibus a me hic assignatis; sed cum illi cum non nisi circiter aequalem aestiment, incerti tamen utrum, rem accurate sumendo, sit justo major aut minor, ego rei veritatem scientificè assecutus, ostendi nihil justo minorem esse. Sed haec de limitibus primis. Nunc limites secundos, multo quam primi propinquiores, et postea tertios propinquiores adhuc, et ita porro, invenio hac ratione: Finge scilicet curvam nostram prima operatione inventam GHIK se ipsam obrepere, et ita quidem ut ab initio vertex gibbositatis G tangat verticem compressitatis O, hoc est, ut recta longissima GC in curva mobili cadat in directum cum recta brevissima OC in curva immobili, plane ut factum est in ipsa ellipsi, ubi ab initio vertex conjugati A et P (qui sane nihil aliud sunt, quam id quod ibi vertex gibbositatis et compressitatis) se tangunt, et maxima minimaque distantia AC, PO in directum ponuntur. Hoc intellecto, levi attentione adlabita percipies, secundo hoc motu reptito, centrum C curvae mobilis vel quovis aliud ejus plani describere curvam novam Octigibbam, hoc est quae habebit octo gibbos tantillulum prominentes alteratim inter totidem compressuras, et quorum vertex octo aequaliter a centro distabunt; curvamque ipsam octigibbam longitudine duplam esse curvae generantis quadrigibbae, uti haec ipsa dupla est ellipticae, ex qua fuit generata. Attendas igitur admirabilem generationem harum curvarum; Ellipsis, quae reapse est curva bigibba, generat sui duplam quadrigibbam; quadrigibba producit sui duplam octigibbam; et haec, simili motu et conditione, gignet etiam sui duplam sedecigibbam, et ita porro in infinitum. Sed quemadmodum curva quadrigibba propius ad rotunditatem circuli accedit, quam bigibba seu Ellipsis, ita quoque octigibba propius accedit ad eam, quam quadrigibba, et sedecigibba propius quam octigibba etc. ad instar polygonorum, quae quo plures habent angulos, eo magis circulo assimulantur, magno tamen discrimine ratione appropinquationis, nam per multiplicationem angulorum in polygonis diu multumque procedendum est, antequam perveniantur ad limites a Ludolpho van Cillè constitutos, sed curvae nostrae multigibbae incredibili adeo celeritate ad circulum convergent, ut quemadmodum ex indicis quibusdam mihi patet, institutis quomodo operationibus jam perveniantur ad limites Ludol-

phini arciores, reperia nempe curva tantum 64 gibborum, loco quod Archimedi opus fuerit polygono 96 angulorum ad rationem suam 7 ad 22 diametri ad circumferentiam inveniendum, quae tamen a vera multum adeo adhuc ablati. Veritatem hujus aliquid modo percipies ex limitibus nunc tradendis, quos mihi suppeditavit curva octigibba. Hos ut inveniam, facile colligere est ex ante dictis necesse esse, ut quaeram illius curvae distantias a centro maximum et minimum: circulus enim, radio maximo intervalli descriptus, tanget curvam exterius in octo punctis, et erit per consequens longitudine major quam curva; sed circulus descriptus radio minimi intervalli tanget curvam interius in octo punctis, adeoque longitudine minor erit, quam curva. Quantum ad distantiam minimum, invenitur facile; est enim aequalis summae distantiarum minimae et maximae curvae quadrigibbae generatricis, quod per se patet, sed quod spectat ad distantiam maximam, demonstrare possum, quod sit illa aequalis perpendiculari CZ bis sumtae, quae demittitur ex centro C in rectam VX tangentem curvam quadrigibbam generatricem in Y, quae tangens supponitur facere cum CO et CG prolongatis basin trianguli isoscelis VGX. Et quidem pari modo distantiae minimae et maximae in sequentibus curvis multigibbis inveniantur. Semper enim distantia minima aequatur distantis duabus, minimae et maximae simul sumptis in praecedente multigibba generatrice, et distantia maxima aequalis est altitudini bis sumptae trianguli isoscelis formati per prolongationem distantiarum praecedentium maximae et minimae usque ad tangentem tanquam basin ejus trianguli. Ex hoc generali fundamento, si nunc habeat eruere limites secundos, quos nempe suppeditat curva octigibba, advertendum primo est, eam octigibba sit dupla quadrigibbae, et quadrigibba dupla bigibbae seu ellipsis, fore curvam octigibbam longitudine quadruplam ellipsis, adeoque ut illa fiat aequalis ellipsi propositae, assumendum esse pro prima generatrice aliam ellipsin similem, cujus axes conjugati sint subquadrupli conjugatorum propositae. Sint igitur iterum (ut ante) axes conjugati ellipsis propositae 4a et 4b, adeoque nunc AD = a, et BE = b, inveni pro limitibus secundis, nempe radium circuli curvae octigibbae inscripti = $\frac{a+b+\sqrt{2aa+2bb}}{2}$, et radium circuli eidem circumscripti =

$$\frac{1}{2} \sqrt{2aa+2bb+aa-bb} \sqrt{2} + \frac{1}{2} \sqrt{2aa+2bb-aa+bb} \sqrt{2},$$

vel quod tantundem est $= \sqrt{a^2 + b^2 + \frac{1}{2}\sqrt{2a^4 + 12sabb + 2b^4}}$.
 Ut applicationem faciamus ad exemplum nostrum, ubi semines-
 conjugati ellipsis propositae sunt partium 10 et 8, hoc est ubi
 $a=5$ et $b=4$, invenietur pro radio circuli minoris $\frac{9+\sqrt{82}}{2}$ et

pro radio circuli majoris $\sqrt{41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562}}$, qui numeri sibi magis
 appropinquant, quam hi rationales $9\frac{2}{5}$ et $9\frac{111}{55}$; est enim
 $9\frac{2}{5}$ tantillo minor quam $\frac{9+\sqrt{82}}{2}$, et $9\frac{111}{55}$ tantillo major

quam $\sqrt{41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562}}$, atqui numeri $9\frac{2}{5}$ et $9\frac{111}{55}$ paulo adhuc
 propius accedunt ad rationem aequalitatis, quam hi numeri integri
 36562 et 36563; ergo a potiori, ratio inter limites inventos $\frac{9+\sqrt{82}}{2}$

et $\sqrt{41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562}}$ magis convergit ad rationem aequalitatis, quam
 quae est inter 36562 et 36563. Determinavi igitur hac secunda
 operatione duas circumferentias circulares, unam proposita ellipsi
 majorem, alteram eadem ellipsi minorem, quae tamen circumferen-
 tiae tam parum ab aequalitate recedunt, ut in plusquam triginta
 sex millibus partium ne quidem parte unica a se differant. Nunc
 quae modo perpende, si limites primos 162 et 163 excipiant statim
 limites secundi enormi adeo modo sibi propinquiores, quid fieri
 si institueremus nunc tertiam operationem, postea quartam et
 quintam? Haec dubitabis, credo, de eo quod dixi, paucis istis
 operationibus posse pro ellipsis coaequantibus perimetris circulo-
 rum perveniri ad limites angustiores, quam quos Ludolphus multis
 quatenus exactius operationibus invenit pro ipso circulo rectificando.
 Fateor equidem posteriores operationes nostras nonnulli difficiles et
 longas evadere propter complicationem signorum radicalium, quae
 in expressionibus limitum magis magisque coarctantur, sed qui
 haece delectatur, operae pretium faceret, si inquireret, num qui
 certa lege limites progrediantur, quo casu sine calculo prohibita
 continuari possent; uti certe jam factum est pro deliniendo limite
 minori, quippe qui, ut supra monui, semper est aequalis medio
 arithmetico inter limites praecedentes, modo nunc pari facilitate
 limites major ex praecedentibus erui possent, haberevum quod vole-
 mus. Interim quamvis nondum id laboris mihi dederim, ut insti-
 tuta tertia operatione tertium limitem majorem delinierim, potest

tamen conferendo tertium limitem minorem, qui tam facile inve-
 nitur, cum praecedente secundo majori perveniri ad rationem ma-
 gis aequalitati accedentem, quam quae habetur ex utroque limite
 secundo; ita in praesenti exemplo, ubi limites secundi $\frac{9+\sqrt{82}}{2}$ et

$\sqrt{41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562}}$, quorum ratio continetur intra 36562 ad 36563,
 nunc habebitur pro limite minori $\frac{9+\sqrt{82}}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562}}$ et pro

majori $\sqrt{41 + \frac{1}{2}\sqrt{6562}}$; has limites reperio contineri intra terminos
 hujus rationis 36717 ad 36718, quos vides una tantum unitate
 differre. Ellipsis igitur nostra, cujus axes conjugati sunt ut 5 ad
 4, eo jam proximitatis ad perimetrum circuli reducta est, ut ex-
 liberi possint duae circumferentiae circulares, una ellipsi major,
 altera eadem minor, quae tamen in plusquam quinquaginta sex
 millibus partium ne una quidem a se differunt. An talia jam ab
 alio quopiam ante me fuerint tradita, nihil sane vidi unquam,
 neque quatenus de hisce vel somniasse tantum arbitror. Petisti so-
 lum ut methodum meam transformandi curvas (quam sine dubio
 inapplicabilem crederas) ad ellipsin applicarem, quod feci; sed
 dedi insuper, ut cernis, quae a me non expectaveras, occasionem
 forte data excitandi Tuam curiositatem, deque methodo illa mea
 paulo benignius quam prius sentiendi. Possem hic attingere alia,
 quae ea pro fecunditate sua mihi suppeditavit in ipsis cyclometri-
 cis profutura, sed justos literarum fines jam egressus ad finem
 proferre jubet.

Ut cetera Epistolae Tuae capita brevissime perstringam, me-
 mini jam olim me haece quaedam mea in summando vel integrando arti-
 ficia Tecum communicare, ut aileo non vacet ea in adversariis meis
 hinc inde dispersa donuo recolligere et exscribere; mihi enim est
 quod magis fastidium, quam operam eandem bis peragendum, praeser-
 tiam si nulla Tibi hinc nascitur commoditas, nisi quod literas
 meas olim ad Te datas paululum perustrandi labore levis. Con-
 ceptus quem habes de curvis, ut voco, bicurvis, quod nimirum
 quasi saecum regressu faciant, etiam mihi ante complures annos
 fuit familiaris, et de ea re multis literis egi cum Marchione Hospi-
 tulo, cui in exemplis quibusdam curvarum tam algebraicarum, quam
 transcendentium ostendi per calculum in saeculo illo seni puncto
 reversionis (point de rebroussement) revera omnes directiones

reperiri, hoc est quamlibet rectam per illud punctum ductam esse in numero tangentium, quod conceptum istum meum mirifice confirmabat. Cl. Hermannus, cui monstravi literas, de rei veritate testari poterit.

Forte adhuc nescio, communem nostrum Adversarium Rollium ad bonam frugem rediisse et tandem veritatem agnovisse; conversionem suam coram Varignonio, Malebranchio, Fontenellio aliisque palam testatus edixit se investigatione quorundam malevolorum scripsisse contra calculum infiniti parvorum. Scire etiam convenit, aliquem Du Tal et alium Polinier Parisinos tandem ducisse imitari me in conficiendo meo phosphoro ex mercurio et quidem ex eo ipso cum quo Hombergius aliique Academici frustra laboraverat. Prior ille Du Tal etiam in mei defensionem publice edidit aliquod scriptum, quod vidi in Menstruis Bernhardsi praeterito Septemb. Sic tandem bona causa semper triumphat. Vale et transige novum hunc pluresque secuturos annos ex animi sententia etc.

Basilae a. d. XV. Januar 1707.

CC.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non mediocriter turbaverunt me literae Hermannianae, et mox Tuae, quae valetudine Te parum firma uti significat. Itaque valde suadeo, ut eam cures diligenter, et laboribus animi maxime abstineas, inter quos Calculi non sunt postremi. Potes ingenio prodesse, etsi non prosis labore. Neque gravius haec studia dumtaxat sentire possent, quam a pictura Tuae, quae adhuc Fratrem Tuum deplorant. Gaudeo interim alterius Fratris Filium vestigia vestra premere. Hunc poteris excitare, ut juvet meditationes Tuas, haereditariamque vobis laudem in posteris servet.

Nolim me Tuorum inventorum negligentem aut parcum aestimorem putes, etsi praedictio nescio quo, festinus circa repentem motum Te lapsam putarim: quamquam Tu quoque (patere ut hanc vicem reddam) meam problematis Tui solutionem initio negligentius tractaveris, quae res fecerat, ut nescio quas Tibi perplexitates fingeres, ubi nullae erant.

Scimus et hanc veniam petimusque damusque vicissim.

Ceterum etsi pro poenitentia injunxeris, ut Tuas Gibbo-compressas (sic enim credo apte vocabimus) attentas legerem, legisse non penituit. Pulcherrima enim visa profecto Tua meditatio de circulis duobus, uno extimo, altero intimo, circa curvam ad easdem partes cavam, adeoque uno majore, altero minore. Ita per curvas plus semper multigabbas eidem aequales indefinite hinc acceditur per circuitu circumferentias. Nec dubito, quin possis hoc artificium aliquo ad ipsius applicare dimensionem circularis circumferentiae et facili negotio superare Ludolphum.

De Sacco in curvae cornu evanescente Te non minus, quam me dudum cogitasse facile credo: monui tantum amicum, ut objectioni satisfacerem, quae hic regulas nostras maximo-minimorum locum non habere volebat. Plus gaudii est in caelo nostro Geometrico ex uno peccatore commos, quam ex decem justis: itaque Rollium ad bonam frugem rediisse impense laetor. Qui vero illi malevoli insigatotes? Binos ex illis non difficulter divinare posse mihi video; sed patiamur eos Heantontimorumenos esse.

Du Talus ille, quem memoras, Scapham Scapham appellavit, quantum ex Bernardus vidi.

Aliquoties notavi Academicos nonnullas sua tantum curare, aliena negligentem, ne dicam inique. Nonnulli id habent, ut aliena, quantum possunt, sibi vindicent. Ita La Hirus pessime Homerum inventorem dentium Epicycloidalium dissimulavit: Parentius in Praefatione suorum Elementorum pactat, se, quae Varignonius de compositione motuum, imo etiam quaedam, quae Hagenus dudum dederat, per se invenisse, ne lectis quidem eorum scriptis, quae in omnium manibus versantur. Nunc Memorias Academicas suis quibusdam Calculi mechanicis (nescio quam bonis) implet, pactatque se primum de frictionum aestimatione cogitasse: sed quantum video, semper in abstractionibus subsistit; nunquam ad usum rerum venit, quod in Mechanicis imprimis desideratur.

Cogitavi inter scribendum, an tua per circumum appropinquandi ad curvam Ellipseos Methodus applicari appropinquationi rectae ad circuli circumferentiam possit. Sit (fig. 168.) linea Epicycloidalis ABCDE, descripta revolutione circuli cujusdam mobilis super circulo immobilis AEF. Sit BD chorda maxima in dicta Epicycloidal, per quam absceditur segmentum BCD, hinc adjungatur aliud per omnia congruum BKD, et ita formabitur linea El-

lipsisformis ECDKB rectificabilis per viam communem. Haec tractetur, ut Tu tractasti Ellipsis, et habebis curvas ei aequales, vel in ratione ad eam data ad circulum in infinitum accedentes, adeoque lineam rectificabilem in infinitum magis magisque admovento ad circulum, vicissim circumferentiam ejus magis magisque mensurationi admovebis. Suppono autem Epicycloidalem esse eam, cujus quaevis puncta per Geometriam communem definiiri possunt. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Berolini I Febr. 1767.

P. S. Itum hic sum, id ago ut aliqua sub approbatione Societatis Scientiarum nostrae edantur Miscellanea. Observationes Astronomicas habemus non contemnendas, et non paucas, quae factae sunt a Parisiis Anno 1704 nuperque editae, poterunt conferri cum nostris, quas edi curabo. Si quid submittere nobis vis generis cujuscunque, libenter adjicietur. Etiam quae Du Hermannus forte dare volet, grati erunt; nam non contemnenda erunt, quae ab ipso proficiuntur et nos undecumque submissa, quae digna erunt publico, non negigemus. Iterum vale.

CCL

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Te nunc liberatum a praesudicio illo, quo me lapsus putasti circa motum repentem, valde laetor, sed magis adhuc, quod quae hinc meditatae sui de curvis multigibbis, pro appropinquatione ad curvas ellipticas per circulares, legisse Te non poeniterit; nihil enim magis in votis habeo, quam ut aliquid Tuae attentione dignum praestare possim. Recussime interim cogitasti methodum istam appropinquandi per circulum ad curvam ellipseos applicari etiam posse lineae rectae: sed pro hoc ideo non opus est linea epicycloidali, quae pro calculo nimis esset composita; quaelibet alia linea rectificabilis huic fini inservire potest, etsi Ellipseos formam non habeat: hac de causa, jam in praecedentibus meis (nam tum de hac re jam cogitaveram) scripsi methodum meam non tantum ad ellipseos, sed ad omnes curvas omnino extendi. &

enim (fig. 109.) BA arcus curvae cujuscunque ex. gr. parabolae: adjungatur ad B, versus partem alteram, arcus alius priori per omnia similis et aequalis BD, ita quidem ut in B (quanquam nec hoc absolute sit necessarium) habeant communem tangentem, hoc est, ut formant curvaturam continuam; jam duobus istis arcubus BA, BD, adaptentur dus alii proorsim similes et aequales EA, ED, ut hinc oriatur figura clausa ellipsisformis BAED, cujus tota circumferentia aequatur arcui BA quater sumpto, neque obstat quod in A et D arcus in angulos coeant, non vero, ut in B et E, abeant in curvam continuam. Jam si huic figurae BAED alia per totum congruens PNQM admoveatur, et altera alteram obrepatur, ut feci in ellipsi, describet punctum O curvam quampiam quadrigibbam, quae erit arcus BA octupla, haec quadrigibba postea mutabitur in octigibbam et ita porro. Fateor equidem curvas illas multigibbas non esse uniformis naturae, ut sunt illae, quae generantur ex ellipsis; constant enim ex arcubus diversis, qui tamen in continuationem ubique abeunt curvitate, et hoc jam sufficit pro approximatione ad circulum. Vides itaque, quomodo nunc parabolae arcus et quae ab eo dependet arca hyperbolae per circulum quantumvis prope mensurari possit, quod sane lactemus nempe feliciter executus est. Hac enim methodo intra paucas horas pro illis arduiores limites invenirentur, quam quos Tibi misi pro ellipsis. Interim, ut et hoc moneam, non necesse est ut arcus BA quater sumatur ad formandam figuram clausam ellipsisformem BAED, nisi eam omnino ad integram circumferentiam reducere velimus, nam quilibet arcus solus cujuscunque curvae, per obreptionem subcontrariam continuo repetitur in infinitum, tandem abt saltem in arcum circuli. Voco autem obreptionem subcontrariam, quando arcus aliquis se ipsam obrepat inverse, hoc est, quando in reptitionis initio extremitates oppositae se mutuo tangunt; hoc enim modo arcus propositus per reptitionem primam mutabitur in alium ejusdem, ut voco, amplitudinis, sed qui constabit ex duobus arcubus similibus et aequalibus, qui si nunc porro subcontrarie se mutuo obrepant, oriatur arcus, constans quatuor arcubus similibus et aequalibus, adeoque ad rotunditatem arcus circularis magis accedens; per obreptionem tertiam subcontrariam formabitur arcus habentem arcus octo similes et aequales, et sic magis et magis ad ipsum arcum circuli, ejusdem cum praecedentibus singulis amplitudinis, pervenimus. Hoc unicum adhuc addam pro applicanda methodo ad

rectae appropinquationem ad circulum, sumi posse Ellipsin, cujus axis minor sit indefinite parvae longitudinis, quae utique nihil aliud erit quam linea recta duplicata. Hanc si more ellipsium per reptionem moveas, habebis loco curvae quadrigibbae quatuor latera quadrati; postea loco octigibbae ambitum octogoni, ita scilicet, ellipsi abeunte in rectam lineam, curvae multigibbae quoque abeunt in polygona regularia et haec tandem in circulum. Id quod mihi suppediavit modum hunc facilem, exhibendi per constructionem continuo et celeriter appropinquantem arcum circuli aequallem lineae rectae datae. Esto (fig. 170.) data recta BG perpendicularis ad aliam rectam AC, ducatur ad arbitrium recta BA et angulo A fiat aequalis angulus ABC, ut habeatur triangulum isosceles BCA. Jam ducatur perpendicularis CD in AB, et ipsi CD capiatur aequalis CL; jungatur DL, in quam agatur perpendicularis CE, cui aequalis abscondatur CM. Jungatur EM, et ducatur perpendicularis CF, haeoque continuetur in infinitum; et sit CR illarum perpendiculariarum ultima, dico arcum circuli RS radio CR descriptum fore aequallem rectae propositae BG. Atque hoc est, ad quod respiciebam, quando in praecedentibus meis dixi, me quaedam ex occasione illa invenisse in cyclometricis profutura; quoniam postea viderim puncta B, D, E, F etc. esse in quadratrice Binstrati, quod quidem facile demonstrari potest, adeoque hoc nomine nihil novi me praestitisse, quatenus diu jam cognitum est rectificationem circuli dependere a determinatione intersectionis quadratricis et ejus diametri; in eo tamen aliquid singulare hic factum cernis, quod hic puncta in quadratrice D, E, F etc. ob perpendicularitatem CD, CE, CF etc. certis designantur, adeoque punctum ultimum R multo accuratius determinatur, quam per modum vulgarem, quo propter sectiones magis magisque obliquas puncta in quadratrice tandem valde incerta evadunt. Caeterum vero, quod quid de eo sit, elegans mihi videtur et minime contemnendum, quod hoc, quod ab aliis jam pridem inventum et ut singulare quid venditatum, idem tamen huc nostrae inventionis nemini minimum tantum sit corollarium.

Binos illos ex malevolis Rollii instigatoribus, quos Tu divisabis, et ego dividabo; nisi enim vehementer fallor, in mente habes Galoisium et La Hirium, calculi differentialis acerrimos hostes. Verissimum est quod de nonnullis Academicis notas, sua tantum curare, aliena negligenter; et sane quae a se habent, ple-

rumque sunt mediocria, ne dicam ridicula, ut omnino pudenda res sit ejusmodi magis admiscere Memorabilibus Academiae scientiarum, Si quid boni subinde edunt, dubitare non licet, quid id ab aliis futurum sit, ut recte judicas; possem dare exempla bene multa. Sed nesciveram Romerum esse verum Autorem inventorem dentium epicycloidalium, quorum La Hirius se inventorem praedicavit, aut saltem verum Inventorem dissimulavit; hoc quidem dicere auleo, quod statim ac elegantissimam inventionem illam apud La Hirium legi, mihi plagii suspicio suborta est ex consideratione ingenii La Hiriani ad tam sublimia pertere non soliti.

Gratissimum fuit intelligere Te curaturum, ut quaedam sub nomine Societatis Scientiarum vestrae edantur Miscellanea. Sic enim Rempublicam Literariam, quam multis adeo modis jam demeruisse, de novo insigniter Tibi obstringes. Eoque magis gaudebit, quod quae Tus auspiciis eduntur, nil nisi bonum et selectum continere sibi persuadebit; secus ac fieri solet in aliis ejusmodi Ephemeridibus, in quibus plerumque multa sunt mala mixta bonis. Si quae a me proficiscuntur, publico digna judicas, exempli gratia quae de curvarum comparatione et reductione ad circulos quae multigibbarum meditatae, aliaque quae ad Te scripsi in literis privatis et alias publice communicavi, libenter patiar ut edas; Tus enim arbitrio ex relinquo. Interim dum aliquando vacabit, discutiam Adversaria mea, et quae invenero alienas momenti, Tibi submittam. Significavi Dno, Hermanno Tum propositum, eum hortatus, ut mittat quoque si quid edendum habeat, quod se facturum promisit. Miror vero quod ipse nondum in hanc Societatem sit cooptatus, cum tamen alii forte minus Tibi noti in eam jam sint recepti. De caetero libenter a Te scirem Theodorum Zuingerum, in hac Academia Medicinae Professorem, in numerum Sororum, ut quidem jactat, fuisse relatum, et si sit, ex quo tempore.

Interim vale et fave etc.

Basiliae a. d. 23 Martii 1707.

P. S. Accepto ante aliquot dies nuncio inspectato de cessione Regis Galliarum, vi cujus Longobardia et totus Status Mediolanensis a copiis Gallicis evacuaabitur, atque adeo etiam Venetorum Dux ab exercitiis peregrinis liberabitur, spes de novo affulget Hermanno nostro Vocacionis Patavinae diu promissa, nunc tandem submesto illo publicae calamitatis praetextu ut voto successurae.

CCH.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Cum nuperas ad Clarissimum Hermannum scriberem, via domum redix, nec Tuae nec ipsius novissimae mihi redditaee erant. Gaudeo valere Te ex sententia, et ut valetudinem cures suades.

Gallosium obisse ex Gallia scribitur; erat in Viro eruditio non vulgaris, sed aderat tamen et philantia et nescia cedere veritati pertinacia, quam impugnatione Calculi nostri omnibus patefecit. Ego Virum olim noveram familiariter, cum Colberti favore floretet. Forte agebam ipse apud Colbertum, comes generoso Chevrensis Ducis. Offendi Gallosium, cum altero Colberto, cognomine Croissin, ad Tractatus pacis habendos profecturo, loquentem, atque id quaerentem ut risum nugosis verbis excitaret: miratus sum non mediocriter hominem haud incelebrem gratiam Magnatum pene scurrilibus diceris captare. Sed agebant, Colbertum majorem hominis dicacitate delectari, quum a laboribus ministerii relaxat.

Romeum esse verum dentium epicycloidalium inventorem pro certo habeto. Nam ipse mihi monstravit Parisiis Theorema summum, ac simul demonstrationem, cum prius rem Hugenius mihi narasset. Qua autem audacia Hirsus viventi et sentienti inventum summum tantum non surripuit, mirari satis non possum.

Elegantissima sunt, quae de curvis multigibbis repletiorque motu habes, imprimis consensus cum Dinostrati Quadratrice. Si quid vel de his, vel de aliis in ordinem redigere velis, ut Miscellaneis Berolinensibus adici possit, rem gratam facies, et a me curabitur liberetur. Quae Hermannus noster de stationibus planetarum summis, etiam locum illic invenient.

Domum Zuinggerum vestrum in nostram Societatem, commendantibus Virum amicis, quibus Berolii innotuerat, recipi minima; quam mature aut tarde non memini, neque apud nos quicquam refert. Ut Hermannus recipiatur, haud dubie curabo.

Videris in Bernardi Diario literario apud Batavos novas quaedam de Phosphoro Tuo Mercuriali observationes Parisiis institutas.

Fontanelius per amicum mihi significat, quae idem Diarium retulerit, tanquam a se dicta circa Historiam calculi nostri, quaeque refutanda mihi visa sunt, male relata fuisse ab Auditore forte aliquo imperito.

Parentium intelligo mire sua nescio quae in Mechanicis inventa jactare. Ego nihil animadverto, saltem circa res aliquis momenti, quod attulerit novum. Nec varat excutere ratiocinia ejus, quae sese obscuritate tument. Verorū autem, ne accuratus inspecta erroribus scature deprehendantur. Quod superest, vale et fave etc.

Batum Hanoverae 24 Junii 1707.

P. S. Ozannam et Saurinum nostrum in numerum Academicorum Regiorum Parisiis receptis intelligo, quod perplacet. Ozannus in Diophtaeis maxime calculus excellit.

CCH.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postremas Tuas me absente reseravit uxor mea, et inclusas tradi curavit G. Hermann; ipsas vero ad me scriptas postea mihi misit in thermis Faboriensibus prope confinia Rhaetiae degenti, ex quibus, quae Dei est benignitas, satis vegetus et salvus redii inpererrime. Aquae illae pro potu et balneo usurpantur, ego vero potavi tantum. Hermannus ab itinere suo Patavino nonnulli deflectens earundem aquarum potus gratia ibi me convenit triduum quatuorve diebus ante meum discessum; ipsum vero ante finitum aquarum usum etiam brevi post, iter suum Patavinum versus prosecutum ob literas in thermis receptas quibus convenit triduum literas suas recentiores ad filium suum jam tum profectum huc directas, adeo ut exhortatio Tua ad iter maturandum fuerit supervacanea; eas tamen Filio suo missurum se Patavinum mihi asseruit Pater, idque Tibi significare velle per literas, quod haud dubie fecit.

Audaciam Hirii theorema de Dentibus Epicycloidalibus vero inventori Romeri vicenti et sentienti surripientis ego, qui hominis genium novi, plane non miror; miror autem Romeri suum sibi inventum non vindicantis tranquillitatem.

Quod ea quoque Tibi placeant, quae de curvis multigibbis repletiorque motu prioribus meis meditationibus addidi, imprimis

quod probes, quae de consensu ostendi cum Dinostrati Quadratrice, qui tamen nihil est nisi levissimum tantum corollarium universali meorum theorematum, habeo de quo mihi gratuler, praesertim cum ea digna iudices, ut inserantur Miscellaneis vestris Berninensibus. Non video autem, cur ea in ordinem de novo redigere me iubeas; id quisquam amantem, cui literas meas excerptas tradere volueris, praestare poterit, atque melius quam ego, qui jam haec praesentia nec habere audeo, medicis interdictibus nihil mathematicas meditationes ad aliquid tempus.

Diu est quod Hermannus problema de stationibus planetarum a Fatio Duillerio seniore, qui Genevae degit, sibi propositum, etiam mihi proposuerat, cuius non diu post ipsi dedi solutionem, quam agnovit elegantiorum et concinniorum esse sua et Fatiana; scire itaque vellem, an etiam mecum cum sua Tibi summiserit, an vero eam retinuerit.

An aliquid in Bernardi Diario literario de novo prodierit de phosphoro meo mercuriali, praeter id quod a Du Talio vidi, plane ignoro; Diarium enim illud ordinarie ad me non pervenit, ideoque rem gratam mihi facies, si paucis indicaveris, quod observationes illae Parisiensi institutae continent.

Ozanam audio nondum in numerum Academicorum pensionariorum, sed tantum inter subiectos (élèves) relatum esse, sed aliquem Chevalierium successisse Gallosio. Hisce vale et fave etc.

Basileae a. d. 12 Aug. 1707.

CCIV.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gaudeo Dni. Hermannus res bene procedere, ut tum ipse tum Du Fardella ad me scripsere. Hic certe spem suam aliorumque ab eo superatam testatur. Parabat se tunc ad stationem habendam, aliaque novo officio obeundo necessaria; itaque aliquandiu a meditationibus divertetur.

Audio Dni. Marchionis Hospitalii librum de Sectionibus Conicis et Constructionibus inde deductis prodixisse. Credo virum egregium hunc laborem non fuisse tractaturum, nisi aliquid singularis

quod diceret habuisset. Videbo aut, quod saepe fieri desideravi, non tantum ordinatas parallelas, sed et convergentes pro locis experimentis adhiberit. Id enim plurimum ad variantas perficiendasque Constructiones conferre notavi. Nescio an Dn. Marchio Hospitalis protrulerit cogitationem ad altiores gradus. Velim nosse, an Tibi aliquando vacaverit examinare, quae de eis Dn. Newtonus dedit. Si regula ejus generalis de Diametris vera est, eorum et non difficili calculo deprahendi possit. Puto Dni. Reynan Algebram vel Analysis tandem prodixisse. Haec Tibi Gallis viciniori omnia immolescent. Itaque si quid intelligis de rebus literariis ex Gallia, necum subinde communicari peto. Ex Anglia mihi scribitur primum Tomum observationum Astronomicarum Flamstedi esse sub prelo. Vidi aliquando consilium ejus talia edendi peculiari scheda expressum, quod non exiguum spem fecit augendae hujus Scientiae.

Dn. Scheuchzerus in Alpium descriptione apud vos utiliter est occupatus. Vitivne adhuc Dn. Hollanderus, qui praecara quae iam excogitaverit, etiam in studiis nostris; pergere posset utiliter, nisi negotiis impederetur.

De Te nobis in dies magis magisque praecara promitto, ita tamen ut nolim id valetudinis Tuae incommodo fieri; eam spero nunc fore ex sententia.

Ego animi gratia, cum Serenissima Electricae Guelfebym excurri, et inde Casselas ad Serenissimum Landgravium, qui rerum Mathematicarum et Mechanicarum est curiosissimus, et nunc Zumbachium in Aulam suam accivit (cujus Planetolabium Tibi notum esse puto) ut Mathematicum habeat (postquam Dominus Papinus discessit) et ab eo etiam Algebram discat.

An te aliquot dies locutus sum cum Missionario ex China reduce, qui Medicum illic utcumque egit. Is mihi inter alia dixit Imperatorem Sinesem etiam Algebrae rudimenta a Patre Verbiestio didicisse, eaque re fuisse imprimis delectatum. Quod superest, vale et fave etc.

Datum Hanoverae 12 Octobr. 1707.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ex literis Tuis novissimis colligere non licuit, utrum acciperis meae precedentes meas, quas ad Te scripsi statim post reditum unce ex thermis Fabariensibus; nullam enim earum mentionem facis, quare rogo ut me ea de re certiorum facias. Scripsit etiam mihi nuperime Du. Hermannus, qui omnia ex voto sibi procedere dicit; Dni. Abbat. Fardellae, apud quem hospitatur, eruditionem et comitatem satis depradicare non potest, ad pro magna sibi felicitate reputare possit, tantum in illo Viro reperisse Patronum, praesertim in ea qua nunc ipsi degendum regione, ubi nemo peregrinus incolarum astutiam et insidias facile evitabit, nisi a Viris probis et auctoritatem aliquam habentibus protegetur.

Librum Hospitalii de Sectionibus Conicis ab ejus Vidua mihi dono missum percurri, sed nihil tale, quod a Te desideratur, in eo reperi, praeter ordinatas parallelas, nullas nec convergentes nec alias pro locis exprimentis adhibuit; neque etiam protulit cogitationem ad curvas altiorum graduum, uti Newtonus fecit in sua diatribe de Enumerationis Linearum tertii ordinis, cujus regulam generalem de diametris, elegantem certe si vera est, nondum vacavit examinare; mallem autem ab ipso Newtono demonstrationem videre, veror enim ne quod pro regula vendit, mera tantum sit conjectura. Caeterum quod attinet librum Hospitalii, eum in decem divisit partes, quarum sex priores agunt de tribus sectionibus tam in genere, quam in specie, ubi affectiones et proprietates plerasque jam cognitatas et vulgares algebraice pertractat; quatuor reliquae agunt de Locis geometricis et resolutione aequationum et problematum determinantum et indeterminatorum. Liber hic maximam partem jam fuerat compositus, antequam Hospitalius quicquam de calculo differentiali novisset, quae causa est, cur ibi haud reperias multa extraordinaria, si pauca quaedam excipias, quae longo post tempore demum adjecit, veluti ex. gr. de sectione angulari, pro qua formulae meae generales in Actis Lips. traditatas quamvis sine demonstratione, ille nunc fuse explicat, demonstrat et extendit, sed pro more suo alte silet, quod illas demonstrationes ex literis meis privatis eductas fuerit. Num Dni. Reynau

Algebra vel Analysis prodierit, plane ignoro; sed alia prodit, quam habeo, Auctore Guisneo; nihil autem nisi mera trivialis continet. Adeo Gallos vexat scripturandi cacothetes, ut parum curent, homine an mali quid scribant, modo audiant Auctores apud imperitos.

Ex Anglia interim intellexi, Newtonum recentissime in lucem dedisse Algebrae aliquam sub titulo *Arithmeticae universalis*; libellum esse parvi voluminis, sed tanto majoris momenti, ut in illo a Gallis quidem superetur, in hoc vero eodem inmane quantum superet. Ejus libri copiam mihi promissam ut nanciscar, avide expecto.

Schenckterus junior, scilicet Frater ejus qui hebdomadarium Alpium descriptionem edit, aliquod etiam opus meditatur pro Graecorum in Helvetia nascentium Historia, quorum, ut mihi scribit, jam aliquot centenas species collegit; sperat se Rajamam graminum methodum multis naevis laborantem mirifice emendaturum. Agnoscit autem in physicis saepe sibi aquam haerere, quod in Geometria praesertim sublimiori nostra non satis versatus sit; hanc partem ob causam, partim etiam ut propositionum suam de graminum collectione promoveat, proximo inveniit ut ad nostros hosce lres se conferre vult, meo ductu ut sperat ampliore sibi comparaturus stipendium in re Geometrica. Ambos Fratres vidi in thermis Fabariensibus; ea qua sunt infatigata curiositate saepe in altissimos montes et rupes non sine vitae periculo ascenderunt, non tantum ut novas plantas et lapides figuratos, quorum magna copia ibi invenitur, exquirerent, sed etiam ut experimenta physica instituerent praesertim circa barometrum, ad experiendum num regula Mariotti pro metiendis altitudinibus montium, prout illa emendata habetur in Memorabilibus Acad. Reg. Scient. jam certa sit et accurata. Hunc in finem sibi fieri curarunt barometrum portatile, quod ubique locorum in manibus commodè gestant instar baculi. Semel me curiositas invasit adveni cum illis scaturigine thermarum Fabariensium in antro horribili absconditam, ad quam per mille circiter passus semita ducit angustissima juxta praecipitium, in quo rapidissimus torrens vel solo suo stridore terrorem iniecit; sed vix unguem latum abiiit, quin vertigine conceptas praecipiti casu inconsultae curiositatis poenam dederim.

Nesciveram Papini discussum ex Academia Marburgensi; erogare ad aliam Academiam evocatus fuit? Zumbachius me Ultra-
lit. 2, 26

jecti convenit, cum ibi transirem; tum temporis munus Lectoris, ut docuit, obibat in Academia Leydensi; verum in Astronomicis quidem videbatur versatus, in Geometricis autem et Analyticis parum. Vivit, ut opinor, adhuc Ampl. Hollanderus, Consul Scaphisianus; ex quo alteram etiam partem suae Amaltheae edidit, nihil ab eo vidi, quoniam haud dubie negotiis politicis impeditur, postquam praesertim Speisius, Rector Scholarum, a quo multum adjuvus fuerat, obiit. Vale et fave etc.

Basiliae a. d. 19 Novembr. 1707.

CCVL

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ex literis Tuis 19 Novembris anni superioris datis libenter admodum intellexi, Te valere et ab aquarum potu bene valentem docum rediisse. Literas a Te exinde accipere non memini satis.

Libri Newtonianus sub titulo *Arithmeticae Universalis*, Cantabrigiae hoc ipso anno editus, ex Anglia ad me missus est. Newtoni nomen nuspjam memoratur. Credo quod ipse ex sua dignitate non putavit profiteri se autorem libri ante triginta annos conscripti, cum praedicationes publicas Cantabrigiae haberet, et quibus est concinnatus, quamquam imperfectum ipse editor profiteatur. Percurri festina lectione et quaedam deprehendi non spernenda, praesertim in exemplis. Unum placuit, quod pro Te exscribi jussi, ut si vacat consideres et examines; etsi enim non magnopere ad praxin facere videatur, videtur tamen speculationis causa dignum considerari, praesertim si processus in infinitum haberetur, pro divisore gradus cujuscumque.

Quae Du. Hermannus mihi summisit de statione Planetarum, Berolini sunt, ibique edentur; non puto Tuam solutionem esse adjectam, sed nec Fatimam

Gaudeo Du. Scheucherum Juniores apud Te Geometriam altiorum cum Physica conjungere velle: ea sane verissima proficiendi ratio est.

Laudandos puto Botanicorum conatus in digerendis speciebus,

et Methodos quibus Rujus, Tournefortius, alique utuntur, petitis ex florum figura, utilem tyronibus puto, sed tamen ad perfectiorum Scientiae non suffecturam judico. Et e re arbitror ex diversis capitibus diversas institui plantarum comparationes, veluti a seminibus, radicibus, truncis vel scapis, corticibus, ramis, foliis, floribus, medullis, succis, viribus seu usibus, ratione propagandi etc. quavis capite ita tractato, tanquam ex hoc solo instituerenda esset plantarum in species digestio, etsi nunc caput alio sit aptius. Valeo enim dum nimis nisi considerationi inhaeretur, exsuccum reddi doctrinam, nec satis ad usum Agriculturae, Mechanices et Medicinae adaptari. Pene me ipsum in vertiginem dedisti, narrato itinere tuo pedestri usque adeo periculoso.

Clarissimus Papinus discedens Cassellis Angliam se in dicitulot; sed credo enim adhuc haerere in Batavis; sane ex quo Cassellis discessit, nihil ab ipso vidi. Zambachius Cassellas accessit, et credo Observationibus Astronomicis dabit operam. An Marpurgensibus datus sit novus Professor Mathematicus, nondum scio. Quis ille est Gallus F. C. D. Abb. Vall. qui calculum nostrum attentat subinde, et quaedam Martio et Novemb. Anni superioris Actis Lipsiensibus *) inseri curavit?

Excerpta ex Tuis elegantissimis Epistolis binis de Curvis illis multigibbis Berolinum misi, ut *Miscellaneis Societatis* inserantur. Ad rigorem tamen demonstrationis opus esset ostendere circuli circumscripti circumferentiam debere esse majorem semper circumferentia curvae multigibbae, quam tangit; quoniam enim haec curva non est ad eandem ubique partes cava, non habet locum Archimedis postulatum, quod linea circumscripta sit major inscripta. Si de area, non de circumferentia ageretur, demonstratione Injussu-modi opus non foret; vel si saltem ostendi posset haec loco circumferentiae minoritatem ipsius arcae esse connexam.

Scripterat ad me ante menses complures Clarissimus Turretinus; ei respondi, sed non satis memini an ad Te incluserim responsum. Communicaverat necum, quae apud Potentissimum Regem Borussiae Academia Genevensis egerat in Religionis causa: laudanda utique, sed nisi magis in rem veniat, parum profutura. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hannoverae 13 Martii 1708.

*) Act. Erudit. 1708. p. 133. 517. 536.

P. S. Quo sit loco valetudo Tua, et quid bono Scientiarum aliorum moliare, semper discere gratum erit.

CCVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Meturbam sane vehementer Te vel morbo vel morte impedi, quominus mihi responderes, cum longo adeo tempore ne ipse quidem literarum abs Te accepissem. Quod autem vixas et vales, ex Tuis tandem novissimis libenter intellexi. Meam quod attinet valetudinem sperabam firmo nunc mihi talo, post usum aquarum Fabariensium, praesertim peracta maxima hyemis parte satis felicitate: ecce me tamen nunc rursus, a quatuor fere mensibus, de novo vexatum ab horribili illa et pertinacissima tussi, quae per totam praecedentem hyemem miserandum in modum me cruciabat: auferit illa mihi somnum, quo tamen alias, ut nosti, tam modice fruor: appetitum prostermit, et saepissime pauillimum, quod est per vomitum reddere cogit; ubi enim saevire incipit carulex mea, certe nulla non corporis pars inde concutitur. Nondum equidem videtur finem plagarum mearum, sed tamen, quod nonnulli solatio affert, non augetur ex quo intor succo plantarum aliquarum Maljolin: quod de meliori successu sperandum, id tempus docebit.

Arithmeticam Universalem Newtoni ne nunc quidem accipit: qui tamen liber jam fere ultra sesquiumum Amstelodami haeret, mihi destinatus. Quod pro me exscribi iussisti, ea, qua licet in hoc valetudinis statu, attentione perlegi, ubi non tantum statim fundamentum detexi inventi Newtoniani pro dividendis aequationibus per alias simpliciores, sed etiam regulam quam habet pro inveniendis aequatione duarum dimensionum, quae propositum dividat, reddidi simpliciozem, intelligibiliorem et ad praxim magis accommodatam. Interim facile vidi posse haberi processum in infinitum pro divisore gradus cuiuscunque, si quis vellet inceptum attente prosequi. Nec mea me fecerit opinio; Agnatus enim meus *).

*) Nicolaus Bernoulli (geb. 1687, gest. 1759). Die Abhandlung desselben, die hier erwähnt wird, folgt als Beilage zu diesem Schreiben.

Senatoris Fratris mei secundi filius, juvenis vix 20 annorum, cui id curae commiseram, mox omnia felicissime executus est, uti ex hoc scripto, quod cum in finem ipse concinnavit, plenius videbis. Imo non tantum processus ostenditur in infinitum, sed ipsa traditur regula generalis pro inveniendis aequatione dividende cuiuscunque gradus. Forte non indignum iudicabis hoc Schediasma, quod Actis Vestris Berolinensibus inseratur; quibus si et solutionem meam de Statione Planetarum insertam cuperes, eam ab ipso Hermanno petere deberes, utpote cui eam tradidi, nullo mihi relicto apographo.

Nicolaus Fatius Londini tam contumeliose habitus etiam meam excitavit commiserationem, sed et simul confirmavit, quod de eo jam olim, cum Te et me in Actis Lips. tam inepte et insulse stentaret, suspicabar et Tibi, ni fallor, tum statim perscriberem scilicet eum hellebero potius quam refutatione, quo cerebrum purgaret, opus habere.

Scheuchzerus junior, Basileam alme volens, mutavit sententiam, ex quo ipsi spes facta est vocationis alicujus in Academiam Patavinam. Ad alterum Scheuchzerum curavi literas, quas ad me direxisset; cum eas accepisset intellexi.

Quis ille sit Gallus F. C. P. Abb. Vall. qui in Actis Lips. comparuit, Calculum differentialem attentans, nondum exploravi; fortassis Varignonius, quem interrogavi, avertit hominem, et mihi in responsione quam in dies expecto, nominabit.

Epistolas meas binas, de curvis multigibbis tractantes, dignas Tibi visas fuisse, ex quibus excerpta ad Acta Berolinensia mitteres, gratum fuit intelligere; ubi merito quidem mones ad rigorem demonstrationis opus esse ostendere, circuli circumscripti circumferentiam debere esse majorem semper circumferentia curvae multigibbae quam tangit. Si quis enim esset in ea opinione, in qua Tu esse videris, curvam multigibbun non esse ad eandem ubique partes cavam, summo certe jure dubitare posset, an hic locum haberet Archimedis postulatam quod linea circumscripta sit major inscripta. Sed satis mirari non possum (ignosce libere loquenti) Te putantem curvas multigibbas non esse ad eandem ubique partes cavas, quasi gibbositates in curvis adesse non possent citra flexus contrarios, cum tamen ex ipsa statim reperiendi motus natura tam evidenter pateat, curvam ex illo motu genitam vel descriptam semper eodem modo cavam esse debere, quo cava est

curva immobilis, hoc est curva illa quae obrepitur. Sit enim (fig. 171) curva immobilis ABC, quam obrepat sive super qua moveatur motu parallelo curva DBG. In cujus plano punctum quodvis datum O describat curvam rectoriam POQ, dico hanc ad eandem ubique partem cavam esse, si ABC et DBG utraque ad eandem ubique partem cavae sint. Si enim in quocunque rectoriae puncto O fingatur tangens OM, erit haec, ut in Actis Lys, ostendi, semper parallela tangenti BE, quae ducitur ex puncto B in quo duae curvae ABC, DBG, quando punctum describens est in O, se mutuo contingunt: qualis igitur est directio curvitalis in B, talis etiam esse debet in O, et sic ubique, ita ut si nulla sit flexura nec in ABC, nec in DBG, etiam necessario nulla esse queat in POQ: hinc manifestus est, quam ut moneri opus sit, curvas meas multigibbas, utpote ex motu repente elliptico vel ellipsiformis super alia ellipsi vel ellipsiformi, hoc est curvae ad eandem partem cavae super alia ad eandem partem cavae, genitis, nusquam habere posse flexus in contrarium, id est ad eandem ubique partes cavas fore; adeoque Circulorum ipsis circumscriptorum circumferentias, secundum postulatam Archimedeam, isdem multigibbis necessario majores esse. Q. E. D.

Si Marpurgensis nullus adhuc novus Professor Mathematicus loco Papini, possum commendare Moyraem in Anglia degentem, ex cujus literis nuper acceptis intellexi, ob rei angustiam tenuiter admodum ipsum visitare, idque non nisi ex privatis institutionibus, quamobrem me perquam instanter rogavit, ut sibi quorundam aliquam stationem publicam, ut nonnulli commodius vivere queat, et unde habeat aliquid fixi salarii, ne, quod imprimis metuendum, morbo aliove casu impeditus sustentatione sua priveat et ad summam miseriam redgatur; promisi me Tibi ipsum commendaturum, spemque animamque addidi, rem optato successu non caritaram. Te enim jam aetioptis et nuper admodum in oratione Hermann ostendisse, quantum Academiae Tuae commendationi deferant. Habeas ergo, quod rogo, commendatum Virum, et ingenio et industria pollicentem, atque de quo spondere auctum beneficium quovis modo agiturum: opus misericordiae si unquam certe nunc efficias. Interim vale et fave etc.

Basilicae a. d. 16 Maji 1708.

P. S. Pater meus carissimus ante duos circiter menses annum suum placide expiravit et Deo reddidit, aetatis 85^{ann} aegre.

P. S. Literis jam scriptis offeruntur mihi literae a Cl. Varignonio, in quibus sequentia reperio: „Personne ne peut deviner icy quel est ce françois marqué par F. C. D. Abb. Vall. si ce n'est Mr. Rolle qui se cache quelquefois ainsi, comme il a déjà fait sous le nom de Remi Locheil autrefois; il est si battu de foyseau en ce pays-cy, que depuis la perte qu'il a faite de Mr. l'Abbé Galois, son apuy, il n'y ose plus rien dire contre le calcul infinitesimal; mais comme je l'apprens qu'il ne laisse pas de le décrier encore sourdement par le monde, il pourroit bien s'être ainsi caché pour le faire impunément en public etc.

Un nommé Mr. De Montmort qui Vous a autrefois écrit à Groningue sous le nom de Remond, Chanoine de notre Dame de Paris, fait actuellement imprimer un livre sur les jeux de hazard.“ etc.

Beilage.*)

Regula Generalis Inveniendi Aequationes, per quas alia quaevis data, modo reducibilia sit, dividi potest.

Auge et minue radices aequationis propositae successive tot ad minimum terminis hujus progressionis Arithmeticae 1, 2, 3, 4, 5 etc. quot sunt unitates in dimidio numeri dimensionum aequationis, per quam propositam dividi posse existimas, unitate aucto, Aequationum inde resultantium ultimos terminos (quibus solis hic opus est, et qui, licet tota operatio non institatur, statim inveniuntur, si pro litera, quae in aequatione habetur, substituat vel 1, 2, 3, 4 etc. si radices minuendae, vel —1, —2, —3, —4 etc. si radices augendae sunt) una cum ultimo tertio aequationis propositae sibi invicem subscribere, ita ut in medio statatur ultimus terminus datae, supra illum ultimi termini aequationum, in quibus radices sunt minutae, et infra, in quibus auctae: quo facto hisce ultimis terminis ad latus adjuuge singulos ipsorum divisores: in his, si aequatio data reducibilis est, debent necessario aliquid inveniri, qui ita progrediuntur, ut vel ipsorum differentiae, vel differentiarum differentiae bi-

* Wir geben hier die folgende Abhandlung in ihrer ursprünglichen Fassung, so wie sie Leibniz zugesandt wurde, eingearbeitet und weiter ausgeführt findet sie sich im Commerc. epist. Leib. et Joh. Bernoull. vol. II. p. 159 seqq.

farum divisae, vel harum differentiae per 3 divisae, vel iterum harum per 4 divisae, et ita porro, sint aequales. Quod si igitur post aliquot differentiationes perveneris ad differentias et inter se et unæ ex partibus aliquot coefficientis primi termini aequationis datae aequales, erit ultima haec differentia coefficientis primi termini aequationis tentandae, pro quam divisio eo certius succedet, quo plures aequatio haec habuerit dimensiones; tot autem habebit, quot differentiationes peractae fuerint; medius autem terminus ex serie divisorum, quibus usus es, dabit ultimam terminum aequationis quaesitae, reliquorum terminorum coefficientes facile inveniuntur ex hac regula: In quolibet serie differentiarum medius terminus aut, si duo sint medi, primus ex illis est summa omnium possibilium valorum, qui hac expressione continentur

$$\frac{m^2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots M} \frac{m-1}{1 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots M-1} + \frac{m-2}{1 \cdot 2 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots M-2} \\ - \frac{m-3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots M-3} + \dots + \frac{m-M}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots M} \times N$$

ubi M denotat numerum differentiarum, m dimidium ipsius M, aut si M sit numerus impar, m est $\frac{M+1}{2}$; N est cujuslibet termini coefficientis, n autem numerus dimensionum ejusdem termini.

Nota. Invenio aequationis parium dimensionum, ut quadratae, liquidatubicae, quatrato-cubicae etc. facilius evadit, si divisores illi ultimorum terminorum minuantur divisore aliquo coefficientis primi termini aequationis datae multiplicato per quadratum, quadrato-quadratum, quatrato-cubum etc. illius quantitatis, qua radices propositae aequationis minutae fuerunt vel auctae, et in caeteris operatio peragatur, ac si aequatio 1, 3, 5 etc. dimensionum inveniendae esset; tunc enim quantitas illa, qua divisores minuti sunt, dabit coefficientem primi termini, et aequatio inventa reliquos terminos aequationis quaesitae.

Exempla.

Proponatur reducenda haec aequatio: $3x^2 - 4x - 6x + 15 = 0$; minue et auge radices hujus aequationis unitate, sive pone pro x, 1 et -1, numerosque qui tunc pro ultimis terminis proveniunt 8 et 14 una cum ultimo aequationis nostrae termino 15, et singulos horum divisores sibi invicem subscribe hoc modo:

8 | 1. 2. 4. 8. -1. -2. -4. - 8 quia igitur aequatio, si re-
15 | 1. 3. 5. 15. -1. -3. -5. -15 ducibilis est, necessario di-
14 | 1. 2. 7. 14. -1. -2. -7. -14 vixi potest per aliam unius
dimensionis, iteoque differentiae statim prae esse aequa-
les, et quidem uni ex divisoribus coefficientis primi termini h. e.
vel unitati vel ternario, illos tantum ex divisoribus excepte, qui
constituunt progressionem Arithmeticam, cujus differentia est vel
1 vel 3: tales progressionem tres invenies, scilicet 4, 4 et 8, unde

$$\begin{array}{r} 1 \quad 3 \quad 5 \\ -2 \quad 2 \end{array}$$

exurgunt tres aequationes tentandae $3x + 1 = 0$, $x + 3 = 0$ et
 $3x + 5 = 0$, pro quarum ultimam divisio succedit prodente
 $xx - 3x + 3 = 0$. Hic notandum, quod, si radices propositae
aequationis $3x^2 - 4x - 6x + 15 = 0$ binario insuper minutae et
auctae fuissent, pro ultimis terminis et eorundem divisoribus proce-
sissent, inter quos uni- 11 | 1. 11. - 1. -11
ca haec occurrit progres- 8 | 1. 2. 4. 8. - 1. -2. -4. -8
sio Arithmetica 11. 8. 15 | 1. 3. 5. 15. - 1. -3. -5. -15
5. 2. -1, adeoque exa- 14 | 1. 2. 7. 14. - 1. -2. -7. -14
mine per inutiles illos -13 | 1. 13. - 1. -13.
divisores $3x + 1 = 0$, $x + 3 = 0$ supersedere potuissent.

Sed et alter aequationis nostrae divisor $xx - 3x + 3 = 0$ sic
inveniri potest, dispiciendo scilicet an in divisoribus his 1. 11 -1. -11
et 1. 2. 4 etc. aliqui sint, quorum differentiae secundae per 2 di-
visae sint aequales uni ex divisoribus coefficientis primi termini
datae aequationis. Rem igitur tento et primo quidem per 1. 1. 1
etc. ubi ab initio statim video, hos divisores non succedere, quia
differentia secunda est 0. Traseo igitur ad 1. 1. 3, in his dif-
ferentia secunda bifariam divisa est 1: his divisoribus quia succedunt,
adjungo 1 primum ex quarta serie divisorum, sed res non
succedit, nec per 1. 1. 3. 2, prodeuntibus pro differentis secun-
dis 2 et -4, hic 2 et -3. Tento igitur per 1. 1. 3. 7, et
quia res succedit, adjungo illis primum divisorem ex quinta serie,
scilicet 1; sed hic iterum non succedit. Quocirca traseo ad secun-
dum et tento per 1. 1. 3. 7. 13, quod succedit: differentiae
enim secundae bifariam divisae sunt 1. 1. 1: divisores igitur hos
invenio una cum ipsorum differentis primis et secundis seorsim
scribo in hunc modum:

difer. 1 difer. 2 per 2 divisae

1	0
1	1
1	-2
3	1
7	-4
7	-6

In his mediis inter divisores, scilicet 3, dabit ultimum terminum, differentia ultima 1 coefficientem primi termini aequationis quaesitae; coefficientis secundi termini ex serie primarum differentiarum sic elicitur: Quia ponendo $M = 1$, in etiam fit = 1, et

praedicta series $\frac{m^N}{1.2.4...M}$ etc. \times

$N = N$, N autem denotat cuiusvis termini coefficientem, sequitur medium terminum aut potius primum ex duobus mediis in prima serie differentiarum semper esse summam omnium coefficientum, adeoque in nostro exemplo - 2 esse summam coefficientum primi et secundi termini, unde subtrahendo 1 coefficientem primi termini provenit - 3 pro coefficiente secundi termini; aequatio igitur tentanda erit $xx - 3x + 3 = 0$, per quam etiam divisio succedit, uti jam supra visum est. Citius haec aequatio quadrata inventa fuisset, si divisores praedicti 1.11.-1.-11 etc. minuti fuissent divisore aliquo coefficientis primi termini aequationis datae $3x^2 - 4xx - 6x + 15 = 0$ ex gr. 1 multipl. per quadr. unitatis et binarii: hinc loco divisorum provenissent, ubi - 3.7.-5.-15 initio statim haec se profit 0.1.3.7.-2.-3.-5.-9 progressio - 3.0.3.6.0. 1.3.5.15.-1.-3.-5.-15 cuius differentia - 3 dat 0.1.6.13.-2.-3.-8.-15 coefficientem secundi termini (alias primi termini in aequatione simplice) et medius ex divisoribus, scilicet 3, ultimum terminum aequationis quadratae quaesitae, nudo sumendo numerum illum, qui divisores minuti fuerunt, pro coefficiente primi termini. habebimus aequationem completam $xx - 3x + 3 = 0$.

Exemplum Aequationis Cubicae.

Oportet invenire an et per quam aequationem cubicam sit divisibilis haec aequatio: $2x^3 + 2x^2 - 16x^2 - 13x^2 + 41x^2 + 22x - 32x - 9 = 0$. Auctis et minutis radicibus unitate et binario proveniunt pro ultimis terminis 7 1.7. -1.-7 eorumque divisoribus, inter hos quaero, -3 1.3. -1.-3 an aliqui existant, quorum differentiae -9 1.3.9.-1.-3.-9 tertiae per 3 divisae sint aequales uni 7 1.7. -1.-7 ex divisoribus coefficientis primi ter-

mini aequationis datae h. e. vel unitati vel binario. Rem igitur tento et primo quidem per 1, 1, 1 etc. 1, 1, 7 etc. 1, 1, 1, -1 etc. 1, 1, 1, -7 etc. 1, 1, 3, 1 etc. 1, 1, 3, 7 etc. donec pervenio ad hanc seriem divisorum 7. -3. -1. 1. -9, per quos res succedit. Reliquos omnes negligo, quia ipsorum differentiae tertiae vel 0, vel numeri negativi, vel non divisibiles per 3, vel postquam divisae sunt per 3, nec unitati nec binario aequales sunt. Inventos igitur divisores cum suis differentis primis, secundis, ter-

difer. 1 difer. 2 per 2 div. difer. 3 per 3 div.

7			
	10		
-3	-2	6	
			2
-1	-2	0	
			2
1		6	
	10		
-9			

tius seorsim scribo, ex quibus aequationem quaesitam, quam interim pono esse $px^2 + qxx + rx + s = 0$, sic invenio: Differentia ultima 2 est = p coefficienti primi termini, medius inter divisores - 1 est = s ultimo termino, medius terminus inter differentias secundas h. e.

0 est = omnibus valoribus hujus quantitatis $\frac{m^N}{1.2.3.4...M}$

$\frac{m-1}{m-1} \times N = (\text{ponendo } M = 2 \text{ et } m = 1)$

$\frac{1}{1.2} - 0 + \frac{-1}{1.2} \times N$; unde porro positus pro N succedere p.

q. r et pro n, 3, 2, 1, summa horum valorum exadit $\frac{1}{1.2} - 0 - \frac{1}{1.2} \times p$

$+ \frac{1}{1.2} - 0 + \frac{1}{1.2} \times q + \frac{1}{1.2} - 0 - \frac{1}{1.2} \times r = 0p + q + 0r =$

q = coefficienti secundi termini, qui proinde in nostra aequatione,

quia ejus coefficientis est = 0, deficit; in prima serie differentiarum primus terminus ex duobus mediis dat pro summa omnium coefficientum - 2; hinc subtrahendo 2 coefficientem primi termini re-

linquitur - 4 pro coefficiente tertii termini, quare aequatio quaesita erit $2x^3 - 4x - 1 = 0$, per quam aequatio $2x^3 + 2x^2$ etc. divisa dabit pro quotiente $x^2 + x^2 - 6xx - 4x + 9 = 0$.

Exemplum aequationis biquadratae.

Proponatur iterum haec aequatio: $2x^3 + 2x^2 - 16x^2 - 13x^2 + 41x^2 + 22xx - 32xx - 9 = 0$ divisibilis per aliam 4 dimensionum,

quam oportet invenire. Auctis et minutis radicibus aequationis datae mutata et binario, divisores ultimorum terminorum provenientes minuuntur divisore aliquo coefficientis primi termini etc. gr. I multipl. per quadratoquadratum unitatis et binarii, numerique resultante una cum divisoribus ultimi termini aequationis propositae sibi invicem subscribuntur, et habebitur talis numerorum series, inter quos ab initio fere —15.—9.—17.—23
 hi inventiuntur —15.0.9.6. 0.2.—2.—4
 —15. quorum differentiae 1.3.9.—1.—3.—9
 primae sunt —15.—9.3. 0.6.—2.—8
 21. differentiae secundae per —15.—13.—7.—17.—19.—25
 2 divisae —3.—6.—9, et differentiae tertiae per 3 divisae 1.1, quae quia sunt aequales, sumo 1. h.e. divisorem illum primi termini aequationis datae, quo singuli ultimorum terminorum divisores minuti sunt, pro coefficiente primi termini aequationis tentandae, differentium ultimam, quae hic etiam est 1 et alias esset coefficientis primi termini aequationis cubicae, pro coefficiente secundi termini, medium inter divisores, qui est novenarius, pro ultimo termino, medium inter differentias secundas h. e. —6 pro coefficiente tertii (in aequatione cubica secundi) termini, et medium terminum vel primum ex duobus mediis inter primas differentias h. e. —9 pro summa coefficientium omnium terminorum excepto primo; hinc subtrahendo —5 summam coefficientium secundi et tertii termini, reliquitur —4 pro coefficiente quarti termini, ut adeo pro divisore quaesito habeamus $x^4 + x^3 - 6xx - 4x + 9 = 0$, per quam aequationem divisio succedit, prodromet $2x^3 - 4x - 1 = 0$.

Demonstratio hujus Regulae.

Sit haec aequatio data: $P + Qx + Rxx + Sx^3 + Tx^4 + Vx^5 + Wx^6$ etc. = 0, quae sit divisibilis per aliam, quam pono esse hanc $p + qx + rxx + sxx^3 + tx^4 + ux^5$ etc. = 0; augentur et minuuntur utriusque aequationis radices successive unitate, binario, ternario etc. resultantique aequationum ut et propositarum ultimi termini sibi invicem subscribuntur hoc modo:

$P + 3Q + 9R + 27S + 81T + 243V + 729W$
 $P + 2Q + 4R + 8S + 16T + 32V + 64W$
 $P + Q + R + S + T + V + W$
 P
 $P - Q + R - S + T - V + W$
 $P - 2Q + 4R - 8S + 16T - 32V + 64W$
 $P - 3Q + 9R - 27S + 81T - 243V + 729W$

$p + 3q + 9r + 27s + 81t + 243u$
 $p + 2q + 4r + 8s + 16t + 32u$
 $p + q + r + s + t + u$
 p
 $p - q + r - s + t - u$
 $p - 2q + 4r - 8s + 16t - 32u$
 $p - 3q + 9r - 27s + 81t - 243u$

Quia igitur $P + Qx + Rxx$ etc. ponitur esse divisibilis per $p + qx + rxx$ etc. oportet P esse partem aliquotam ipsius P , et $p + q + r + s + t + u$ partem aliquotam ipsius $P + Q + R + S + T + V + W$, et $p - q + r - s + t - u$ partem aliquotam ipsius $P - Q + R - S + T - V + W$, et $p - 2q + 4r - 8s + 16t - 32u$ partem aliquotam ipsius $P - 2Q + 4R - 8S + 16T - 32V + 64W$ etc. quia, quantae radices datae et quaesitae aequationis utrobique eadem quantitate minuuntur vel augentur, aequatio ex illa restitans adhuc divisibilis est per aequationem, quae ex hac resurgit, adeoque ultimus terminus hujus dividet ultimum terminum illius aequationis; oportet enim $p + qx + rxx$ etc. esse partem aliquotam ipsius $P + Qx + Rxx$ etc. quoniam demum valor pro x substituitur, sive 1. 2. 3 etc. sive 0, sive —1.—2.—3 etc. unde patet inter divisores ultimorum terminorum semper delere esse aliquos, scilicet hos $p + 3q + 9r$ etc. $p + 2q + 4r$ etc. $p + q + r$ etc. etc. qui ita progrediuntur, ut supra dictum est, quemadmodum videre est ex hac tabella:

	<i>differentiae primae</i>	<i>diff. 2ae per 2 div.</i>
$p + 3q + 9r + 27s + 81t + 243u$	$q + 5r + 19s + 65t + 211u$	$r + 6s + 25t + 90u$
$p + 2q + 4r + 8s + 16t + 32u$	$q + 3r + 7s + 15t + 31u$	$r + 3s + 7t + 15u$
$p + q + r + s + t + u$	$q + r + s + t + u$	$r + 2s + t + 3u$
$p - q + r - s + t - u$	$q - r + s - t + u$	$r - 3s + 7t - 15u$
$p - 2q + 4r - 8s + 16t - 32u$	$q - 3r + 7s - 15t - 31u$	$r - 6 + 25t - 90u$
$p - 3q + 9r - 27s + 81t - 243u$	$q - 5r + 19s - 65t - 211u$	
	<i>diff. 3ae per 3 divisae</i>	<i>diff. 4ae per 4 divisae</i>
	$+46t + 25u$	$t + 5u$
	$+2t + 5u$	$t + 5u$
	$+2t + 5u$	$t + 5u$
	$+6t + 25u$	

Quod autem in qualibet serie differentiarum medius terminus aut primus ex duobus mediis sit summa omnium possibilibus valorum, qui hac expressione continentur $1, 2, 3, \dots, n$ etc. $\times N$ sic patet: Fingé radices aequationis minui successive his quantitatibus a, b, c, d, e, f, g etc. quae denotent numeros progressionis Arithmeticae

理學爲八學之目爲因字乃爲極品也

se invicem unitate excedentes, ita quidem ut medius terminus ex, g. d. sit = 0 et ultimus g = primo termino, sed signo — affecto h. e. = — a, radicibus igitur ita minutis ultimi termini aequationum resultantium erunt

p + aq + aar + a ² s + a ³ t + a ⁴ u etc. =	posito nempe N pro p.	SN ⁶ × N
p + bq + bdr + b ² s + b ³ t + b ⁴ u etc. =	q. r. s. t. u etc. h. e.	SN ⁵ × N
p + cq + cer + c ² s + c ³ t + c ⁴ u etc. =	pro cuiusvis termini	SN ⁴ × N
p + dq + ddr + d ² s + d ³ t + d ⁴ u etc. =	aequationis inventiendae	SN ³ × N
p + eq + eer + e ² s + e ³ t + e ⁴ u etc. =	coefficiente, et u pro	SN ² × N
p + fq + ffr + f ² s + f ³ t + f ⁴ u etc. =	numero dimensionum	SN ¹ × N
p + gq + ggr + g ² s + g ³ t + g ⁴ u etc. =	eiusdem termini	SN ⁰ × N

quorum differentiae primae, secundae, tertiae, quartae etc. sunt

diff. 1^{mae} diff. 2^{ae} per 2 div. diff. 3^{ae} per 3 div.

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - a^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S a^6 - 1^6 \times N \quad S \frac{a^6 - 21a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{a^6 - 31a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

$$S 1^6 - a^6 \times N \quad S \frac{1^6 - 2a^4 + 1^6}{2} \times N \quad S \frac{1^6 - 3a^4 + 3a^2 - 1^6}{2.3} \times N$$

In his mediis termini aut primi ex duobus mediis sunt: $S c^6 - d^6 \times N$, $S \frac{c^6 - 21d^4 + c^6}{2} \times N$, $S \frac{c^6 - 31d^4 + 3d^2 - c^6}{2.3} \times N$, $S \frac{c^6 - 41d^4 + 6d^2 - 4d^2 + c^6}{2.3.4} \times N$

etc. et generaliter positus M pro numero differentiarum, in pro M (vel pro $\frac{M+1}{2}$, si M sit numerus impar) h. e. quia $d=0$, pro c, h, a etc. = 1, 2, 3 etc. medius terminus in serie differentiarum, cujus numerus est M, est

$$= S a^6 - \frac{M}{1} m^{-1} + \frac{M.M-1}{1.2} m^{-2} - \frac{M.M-1.M-2}{1.2.3} m^{-3} + \dots \times N \text{ divis, per } 1.2.3 \dots M \text{ h. e. si divisio reipsa instituitur}$$

$$= S \frac{m^6}{1.2.3 \dots M} - \frac{m^{-1}}{1 \times 1.2.3 \dots M-1} + \frac{m^{-2}}{1.2 \times 1.2.3 \dots M-2} - \dots \pm \frac{m^{-M}}{1.2.3 \dots M-3} + \dots \pm \frac{m^{-M}}{1.2.3.4 \dots M} \times N. \quad Q. E. D.$$

CCVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non raro evenit, ut mihi differenda sint literarum commercia, dum valde distineor laboribus plurimum inter se diversis, Resumo tamen, ubi primum licet, et Tecum inter primos. Sed nec plane hac hyeme adversa valetudo alioqui, magis quidem molesta quam periculosa; etsi enim appetitus inminutus esset, alia tamen mala aderant. Tuam vero vicem valde doleo, cui somnus imprimis necessarius molesta tussi interrumpitur. Sanguinis acrimoniae hae plerique imputabunt, sed fieri tamen etiam potest, ut sit aliquid in partibus, quas solidas vocamus (etsi sint molles admodum, ut pulmones) quod facile irritetur. Novi, quibus tussis a juvenia in senectam duravit, sed quantum memini, somno fruebatur. Acrimoniam partim obtundentibus infringere, partim diluentibus inferre licet, et posteriori tutius aliorum.

Mirifice placet specimen Tui ex Fratre Nepotis, et curabo omnino, ut Berolinensibus Miscellaneis inseratur. Tuam solutionem statistim planetariae a Dno. Hermanno obtinebo. Quia ingeniosum

et felicem juvenem esse video, aliud excerptum ex Newtono Tibi mitto, quo si videatur exercere ingenium utiliter poterit. Modus est investigandi numerum radicum impossibilium ex mutatione signorum qui licet non sit universalis, videtur tamen aliquid habere in recessu, et perfici posse. Mihi, ut facile judicas, talibus hodie vacare non licet, sed nec Tibi suaserim, ut hujusmodi rebus animum valde intendas.

Mihi non sit verisimile Rollium latere sub literis F. D. C. Alb. Vall. quia ille, ut intelligo, constanter alienus est a Calculo nostro; at vero hic de eo non inique judicat; an vero recte usus sit, examinare non vacavit.

Cum Rollio olim in Calculo nostro sagillando conspiravit P. Gonyé, Jesuita Claramontanus, qui etiam effecerat, ut in Memoriarum Trevullianis quaedam mordacitas, sed revera inepta insererentur. Isti homines non intelligunt, nos in Geometria aut Analysis nostra minime habere opus controversiis metaphysicis de compositione continui, cum sufficienti indelinitate parva, id est tam parva ut error fiat minor dato; vel quod eodem redit, observari regulam continuitatis a me aliquando in Novellis literariis Baylii propositam, quae jubet, ut casus specialis rei evanescentis continetur sub regula generali, quod axioma etiam in Physicis utile esse ostendi.

Nunc memini aliquid audire de Montmortio, qui de Ludis fortunae librum parat. Vellem hoc argumentum bene tractaret. Sed et Domini Fratris Tui, pie memoriae, meditationis de talibus vellem non perire. Credo enim aliquid in illis fore non spernendum. Et omnino optarem selecta ex ipso aliquando in lucem proferri. Utilitati enim publicae consuli omnibus modis velim.

Bantur haud dubie curvae multigibbae sine flexu contrario, et tales esse Tuas re considerata patet, sed quia alias saepe inter gibborum convexitates intercedere solet, ideo ad integritatem demonstrationis hoc ipsum utiliter admoneretur esse cavas ad eandem partes, provocando ad constructionem; alioqui lectori prima fronte suspecta videri potest demonstratio.

Amicus quidam mihi dixit: Te in eo esse, ut ad Belgas redeas, Lugdunum sperari. Gaudebo Te nobis propinquiorum reddi; gaudebunt alii quoque amici. Vale etc.

Dabam Branswigae 27 Junii 1708.

CCIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ex thermis redux nunc tandem ad novissimas Tuas respondeo. Valetudinem Tuam praeterita hyeme nonnulli vacillasse, aegre intellexi; solamen tamen est quod periculum abierit, id quod spem facit plenae restitutionis hac aestate factae. Thermiarum usus mutandi aeris causa potissimum adhibitus profuit aliquid et molestam meam tussim leniit quidem, sed non abstulit, ita ut verear, ne ingructe hyeme de novo exasperetur. Tecum prorsus sentio sanguinem meum imprimis acrimonia peccare: hinc dietam maxime eo dirigo, ut ea paulatim infringatur et diluatur, dum interim ab acidis et salsis abstineo; video enim symptomata haec mea provenire a scorbuta pertinaci in Batavis contracto, quandoquidem olim ab istiusmodi malis prorsus eram immunis.

Excerptum ex Newtono missum communicari cum Agnato meo, qui de eo se cogitaturum dicebat, haecenus autem nihil exhibuit. Modum investigandi radices veras et falsas ex mutatione et successione signorum a Cartesio traditum et, ni fallor, ex Harriot desumptum usque adhuc demonstratum vidi; ideo optandum fuisse, ut Newtonus huic prius demonstrasset, quam summi daret indagandi numerum radicum impossibilium: hic enim haud dubie illo nititur. Hoc vero supposito, memini etiam me aliquas regulas invenisse pro determinandis radicibus imaginariis idque occasione ejus, quod Du. Wollius ex Tuo, ni fallor, instinctu de hac eadem materia ad me scripserat; nunc vero earum amplius non recordor. Applicabo tamen animum iterum huic rei, ubi otium et valetudo permiserint.

An Montmortii liber de Ludis Fortunae nunc aspexit lucem, nihil equidem audivi; sed dubito an hoc argumentum pro dignitate sit tractaturus. Frater meus haec omnia multo curatius et enucleatius excussit, atque etiam ad moralia et naturalia extendit, itaque quoque ad probabilitates vitae et mortis suppandas; haec quidem jam olim, antequam ad Batavos irem, videre mihi licuit, quae et meis meditationibus anxie subinde illeque tum temporis suis admiscuit. Nunc vero quid factum sit de libro manuscripto (quem ad umbilicum fere perductum ab alio ludio) me penitus fugit; solent enim haeredes solliciti cavere, ne quid ex fraternis scriptis

in manus meas incidat, sit quod hoc ita ante mortem Frater voluerit, sive quod superstites ex se hoc mihi invident. Quicquid sit, procedendi istè modus me plane non offendit: eo enim plagi suspensionem apud alios tanto facilis evitabo. Itaque si optes selecta ex scriptis fraternis in lucem proferri, petendum id erit ab Haeredibus, imprimis ab ejus Filio, Parisiis nunc haerente, ad quem scripta et libri Parentis devolverunt, quamvis parum illi uti sciat, utpote studiorum nostrorum omnino ignarus et rudis.

Per me licet, ut moneas curvas meas multigibbas ad easdem partes cavas esse et carere flexu contrario, provocando ad constructionem, ne Lectori prima fronte suspecta videri possit demonstratio.

Amicus ille (forte fuit Magnevilleus, Gallus profugus in Belgio mihi notus atque Moyraeo familiaris) qui Tibi dixit me in eo esse, ut ad Belgas redeam, fuit deceptus falso rumore, qui paulo ante ejus abitu spargebatur Groningae de vocatione illa Lugdunensi; literae enim ipsae Lugduno nuper acceptae nullam ejus mentionem faciunt: hoc quidem scio, Lugdunenses mei vocationem jam ab aliquo tempore meditari, et commodam tantum occasionem expectare. Fortasse aliquando succedet; nun vero consultum mihi novam subire mutationem, otium dabitur deliberandi. Vale et fave etc.

Basileae a. d. 1 Sept. 1708.

P. S. Doctiss. Verzaglia Italus, qui nuper Bononiae hac appulit et meis fruitur laboribus et manufacture, ut peritiam quam habet in calculis nostris ulterius provehat, Tibi hic meis verbis plurimum ascribit salutem. Attulit mihi Gabriels Manfredi Librum de Constructione Aequationum differentialium primi gradus, jam ante annum editum, qui itaque haud dubie etiam ad Te pervenit. Habet quaedam elegantia, in multis tamen etiam praeter necessitatem valde prolixus est, alia vero magis necessaria et utilia omittit: neque satis profunde penetravit in integralium indagine eorumque constructione, qui tamen praecipuus ejus scopus est.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Diu est quod nihil de Te vidi. Spero tamen valere Te et me benevole meminisse. Constitutum est tandem, ut Miscellanea quaedam Societati Regiae communicata imprimantur hoc anno, ubi Tua inserentur de multigibbas, sane digna quae non pereant. Cl. Hermannus suus de statione planetarum Tui, ut par est, inseruit; sed nescio an hoc anno sint edenda; urgebo tamen, ut fiat. Sed acutissimi Juvenis, Tui et Fratris Nepotis, elegans demonstratio Regulae Newtonianae in alium annum differetur.

Quid agat Cl. Varignonius aliqui amici in Gallia, rarius intelligo. Nescio an videris Parenti Disquisitiones^{*)}, in quibus, ut audio, Cartesianum, Hugenium, Vos quoque Fratres, et me etiam acerbius tractari dicitur, quam deceat. Sed illi constitutum est laureolam in hoc alios carpendi mustaceo querrere, et primum agere, ac si nemini quicquam debeat: quae scribendi ratio verior ut approbatur, nam invidia et praeposterae ambitionis manifesta est.

La Hiris ait se praesentem fuisse, cum Mariottus olim magna diligentia exploravit mutationes colorum, quos radii lucis per refractionem subeunt, experique visus est, colorem refractione ortum rursus nova refractione mutari: cujus vero eventus contrarium asseverat Newtonus, cujus tota de coloribus doctrina hoc nititur fundamentis, quod radii colorati refractione excurrentes, sive primum (saltem quoad sensum) et in radiis ordinariis confusi per refractionem separantur, et postea novam coloris mutationem non subeant, etsi nova fiat refraectio. Vellem ut in Academia Regia accurata lupus rei experimenta sumerentur; res enim magni est momenti

Quamquam ego arbitrer, si haec experimenta colorum resumantur exanimarenturque, multa illis occurrera, quae hactenus nec Mariottus nec Newtonus notavit, nec proinde ingloriam operam positurum.

^{*)} Recherches de Mathématique et de Physique par Parent, Paris 1705.

qui hoc argumentum prosequeretur. Nullum nunc Mariottum Academia habet. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 25 Aprilis 1709.

CCXI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nisi aliunde, ante acceptas Tuas novissimas, de optato valetudinis Tuae statu certior fuissen factus, certe diuturnum Tuum silentium aliquid sinistri de ea judicandi facile praeluisset ansam. Gaudeo vero nunc etiam ex Tuis intelligere Te vivere et valere. Ubi quaedam Miscellanea, sub auspiciis Societatis Regiae impressa, lucem viderint, spero et mihi exemplar unum donatum iri. Facile auguror, Te moderatore, nil nisi quod selectum est et quod sapit, ibi contineri. Siquidem ea quoque inserenda iudices, quae de multigibbis fui meditatus, possem subministrare nova ad eam materiam spectantia: ex eo enim tempore multum eam excolui et promovi. Detexi enim, citra pactantium, admiranda Theoremata, nequidem Circuli tetragonismo recedentia; limites quippe pro Ellipsis perimetris ad circulares revocandis non tantum proximi ulterrimis, sed et certam eamque facilem legem provehendi quousque luberit, erui: habeoque etiam Theorema geometricum (quod applanum Tuum meretur) exhibens duos circulos, quantumvis prope aequales, quorum unius circumferentia major, alterius minor est Ellipsi proposita: aliud vero longe generalius mihi suppetit Theorema, quod spectat ad quamvis curvam propositam intra duos arcus circulares quantumvis sibi propinquos coarctandam: id quod opus huius Theorematis et vestigio exequi licet. Si primi Tui impressionem non retardarent, possem submittere inventa, haec nova prioribus meis adnectenda, vel saltem ad calcem totius Tomi subiungenda instar appendicis. Sin minus, id sequenti Tomo commo-
dis insereret. Hoc saltem Te rogo, ut, si possibile sit, respon-
sionem meam in priori publicandam cures, quam nuper dedisti Crai-
gio, motus nostras, Tuum nempe tractorium, et meum reptonium
suggillant. Videbis eam in excerptis quae hic Tibi mitto, ex literis
quas scripsi ad Illustrissimum Burnetum Episcopi Salisbur.

Filium, qui se Craigii discipulum dicit, et nuper, per aliquot hebdomades, Geneva veniens, in meis aedibus hospitium sanavit; dein iterum eo reversus, nunc in Italian profectus, tandem etiam in itinere per Germaniam suscipiendo Te salutavit. Mito etiam, quoniam forte non videris, Schediasma ipsius Craigianum, ubi, ex occasione solutionis suae problematis de transformatione curvarum, nostras methodos per motus reptonium et tractorium, ut ille putat, tamquam minus geometricas, exagitat: videbis quam turpiter ille erraverit, et quam ridicula sit ejus solutio, per quam daturus curvam curvae aequalem, sed diversam, ipse nescius incidit in eandem cum data, nec nisi solo axis situ diversam. Quae solutio, cum primo intuitu speciosa valde, sed inventu obvia sit, ante decem fere annos me ipsum (nisi statim paralogismum animadvertissem) decepisset, quemadmodum revera postea Moyvraem, qui in eandem ante Craigium incidit, ita fascinavit, ut etiam vulgasset, nisi, ea mihi prius per literas significata, ex errore suo ipsum extraxissem, pro quo mihi gratias egit et nunc valde laetatur. Craigium (sui nempe adversarii Chelyni Amicum) in eandem hunc scopulam impigresse et suo lapsu se publice prostituisse. Itaque Craigius, qui nostras solutiones, ut minus geometricas, suae crisi subicere voluit, suam prodidit unitatem, atque adeo nostrum Problema, quod tam facile et sua applicatione quasi indugnum praedicabat, tandem tamen, invitus omnibus suis methodis, irresolutum relinquit. Hinc vides, quam infeliciter motum reptonium, et quae inde deducti miranda Theoremata, sua censura praestringere ausus fuerit. Necessè itaque est, ut veritas contra Craigium vindicetur, ipsius vero error publice refellatur, ne apud ignaros aliquid ponderis inveniat, quod in praedugium motus mei reptonii (inventi certe utilissimi) praecipitanter nimis, et ut ipse postea in privato ad Burnetum literis fassus est, sine praevio examine delataverit. Hoc vero commode fiat, si contrahas quae in responsione ad Burnetum dedi, et postea subnectas eis, quae de multigibbis communicavi, quae utique ejusdem sunt materiae, nempe ex motu reptonii fluentia.

Disquisitiones Parentii non vidi, sed ab Hermanno sudivi, quam acerbe tractet non me tantum (quod me non adeo offendet) sed et Te aliosque Viros de re mathematica tam praecleari meritis. Transmisit mihi Hermannus excerpta quaedam ex ejus libro, ubi refutare coepat meum quondam specimen Dioptrico-

catoptricum. Sunt autem nihil, praeter puras putas cavillas; unde quilibet perspicit hominem hunc nihil aliud in animo habere, quam ut aliena extenuet, sua vero extollat. Mihi vero indignus est suffenus, cui meo nomine respondeam, ideoque nisi quasdam observatinnulas in ejus crisi ad Du. Bernannum, ut, si forte inveniat occasionem, alio sub nomine publici juris faciat. Parentis et invidia et ambitione parem nedum superiorem vidi unquam, quae etiam sanioribus Gallis est invisus.

Quod La Hirius dicit, se praesente a Mariotto exploratum esse colorem radii lucis prima refractione genitum mutari in alium refractione secunda, veror ne id pariter ex invidia dictum sit ad elevandam Newtoni doctrinam elegantissimam de radiorum coloribus: nosti enim Gallorum plerorumque morem, qui est Exteriorum inventa aut sibi arrogari, aut, ubi id non possunt, extenuare. Quidam Remodus de Montmort scripsit nuper mihi se ad me missurum librum suum, cujus Titulus *Essay d'Analyse sur les jeux de hazard*; dubito autem an bene satis tractaverit hanc materiam. Frater mei Filius ad prelum parat Dissertationem inauguralem Juridicam de simili materia, nempe De usu artis conjectandi in jure, ubi tractandas suscipit quaestiones varias in Jure agitare solitas, praecipue circa absentes pro mortuis habendos, redditus item vitales etc. adeo ut, quam ego olim ad Medicinam, ille nunc ad Jurisprudentiam non inutiliter applicare instituat Mathesin nostram, quod quidem apud Jurisconsultos (qui hunc tractandi modum insuper habent) aliquid novi et insoliti erit. Ubi prelum evaserit dissertatio, eam quoque ad Te mittam, modo mihi commodam mittendi viam indices. Spero Tibi illam non displicituram. Quod superest, vale et fave etc.

Basilaeae d. 15 April. 1709.

P. S. Ne spatium hoc vacuum maneat, ecce quoddam ex Theorematis, de quibus supra: quod si ita judicaveris, poterit specimini de multigibbis subnecti, dum ejus demonstrationem cum aliis, quae huc pertinent, commodiori tempore sibi daturus. Esto semicirculus (fig. 172.) A4B, cujus diametrum AB composita ex semiaxibus alicujus ellipsis AC et BC; sit semicircumferentia bissecta continuo in 2, 4, 8, 16 etc. quotcumque libuerit partes aequales, atque reclarum ductarum ex puncto C, ad divisionum puncta imparia 1, 3, 5, 7, capiatur media arithmetica (hoc est

$\frac{C1 + C3 + C5 + C7}{4}$) quae vocetur M: et reclarum ad divisionum puncta paria 2, 4, 6 ductarum aequalisque radio R seu $\frac{1}{2}$ AB sumatur media arithmetica (hoc est $\frac{C2 + C4 + C6 + R}{4}$) quae vocetur N: dico M et N fore radios duorum circulorum, quorum ille circumferentiam habet majorem, hic minorem, quam Ellipsis proposita. Sunt enim illi duo circuli, circumscriptus et inscriptus curvae multigibbae Ellipticae peripheriam aequanti, duplo plurimum existenti gibborum quam est numerus divisionum. Unde si in 8 partes dividatur circumferentia A4B, erunt M et N duo radii duorum circulorum circumscripti et inscripti curvae sedecigibbae, quae sit Ellipsis aequalis. Est vero, ut calculus me docuit, M ad N in minori ratione quam 6000001 ad 6000000, ita ut jam Ellipsis versetur inter duas circumferentias circulares, quae inter se non differant sexies-millionesima sui parte. Intellige hoc de Ellipsi, cujus duo axes inter se sunt ut 5 ad 4. Per divisionis suae huiusmodi continuationem inveniuntur et vestigio limites, incomparabiliter propinquoiores. Sunt enim, sicuti in praecedentibus ostendi, ceterum convergentes. Alia mirabiliora in aliam occasionem reservo.

CCXII.

Job. Bernoulli an Leibniz.

Acceperis ut spero, quas ad Te dedi d. 15 Aprilis novissimi, in quibus Tecum communicavi, quae mihi interesserunt cum Dno. Craigio circa modum transformandi curvas, ut quaedam ex is insereres Miscellaneis proxime, uti dicebas, edendis, ob affinitatem quam habent cum iis, quae dedi de Multigibbis, quam materiam mirifice me excoluisse ex eo tempore, ex literis meis ediscere potuisti imprimis ex Theoremate illo, quod ad calcem earum subnexi, et cui similia alia habet unumque generalissimum, respiciens quatuor curvas datum cum arcu circulari comparandam. E re est, ut primo statim Miscellaneorum vestrorum tomo inseratur, ut mirum Craigii paralogismus quomocumque propaleatur. Tua vero meaque transformandi ratio ab ejus cavillis vindicetur, et ita suum

cuique tribuatur. Reliqua vero, quae ex motu reposito inveni admiranda, sequenti tomo reservabo. Nunc Tibi mitto per eum, qui has ad Te deferet, repetens Patriam suam Daniam et ex Italia veniens, hunc, de qua imper Tibi scripsi, Dissertationem De Usu artis conjectandi in Jure, quae si Tibi placuerit, erit de quo sibi gratulari queat Auctor; hunc ut commendatum habes, enixe rogo. Vale etc.

Basileae a. d. 2 Julii 1709.

CCXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quasdam ad Te literas meas perisse oportet. Nam certum est, me Tibi hoc anno scripsisse et significasse reddita mihi Tua nova de Multigibbis et Miscellaneis Berolinensibus (quae nunc sub prelo sunt) cum prioribus de hoc argumento scriptis insertum in Nunc ex Tuis novissimis intellegi, dubitare Te an quae 15 Aprilis ad me dedisti, sint reddita. Qui factum sit ut responsio mea perierit, judicare non possum. Interea nihil magnopere continebat, quod conservari mereretur, tantumque significabat desiderio Tuo satisfactum iri. Miror Du. Craigium his in eundem lapidem impigisse. Videtur non satis attente versari in his quae tractat, quemadmodum et Cheynaevus. Diu est quod de Moysraeo quoque nihil intellexi, neque etiam Anglicas Transactiones vidi. Etiam Du. Bernmannus a multo tempore silet, etsi Du. Abbas Fardella subinde ad me scriperit. Danum, per quem mihi Dissertationem Tui et Fratris nepotis, juvenis ut apparet docti et ingeniosi, misisti, non vidi, nempe quod me domi non invenisset. Gratulor vestrae Familiae proventum ingeniorum, et velut hereditariam in mathesti praesentiam.

In aestimandis redivitis ad vitam occupati olim fuisse, cum Hugenio, Huddeus non tantum, sed et Pensionarius Johannes de Wit, cujus breve ea de re extat Schediasma Belgico Sermone, sed in usum popularium, ut intelligenter rei aequitatem. Quae de Amstelodamensi aestimatione refert Tuis ex Fratre nepos, credo ex Huddeianis computationibus fuisse perfecta. Quidam Fergusonensis.

Belga ex Scotis oriundus, qui olim aliquot mensibus Hannoverae egit et librum quemdam Algebraicum Belgice edidit, multa mihi de Witii et Huddeii in hac disquisitione meditationibus memorabat, etsi eorum methodos ratiocinationesque non teneret. Vellem talia ex schedis ipsorum erarerent, neque enim dubito, quin plurima inde disceremus. Volderus jam et Fullenius, Viri Egregii, obire, ita non exiguum jacturam res mathematica passa est. Vivamus, sed amice, nosque amemus, et quamdiu Deo visum erit, in stallo pergamus. Vale etc.

Daham Hannoverae 6 Septembris 1709.

P. S. Mereri puto Domini Fratris Tui p. m. librum, qui edatur, idque scribenti plus semel significavi. Saepe momi desse nobis partem Logicae de gradibus verisimilitudinis; aestimandos autem censeo ex gradibus possibilitatis, seu ex multitudine aequalium possibilitatum. Ostendi olim in schediasmate quodam politico Principis jussu edito, quasdam aestimationes fieri per additionem, quasdam per multiplicationem.

CCXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Haec qui ad Te deferet literas, Illustr. Burnetis, Illustr. Burnettii Episcopi Salisburyensis Filius, Vir Juvenis egregius et animi et corporis dotibus instructus, imper per aliquot hebdomadas meo hospilio usus abhinc in Italiam migravit; nunc Roma veniens per Germaniam ad vos quoque iter facturus a me petit, ut in favorem aliquot lineas ad Te scriberem, quibus ad Te facilius sibi accessus pateret, quamquam homo sit ejus indolis, ut se per se ipsum facile commendet nec alienis indigeat commendatione. Non levem pro ratione aetatis sibi comparavit eruditionem, et imprimis in nostri calculi genere non mediocriter versatus, et quod optimum in eo est, summum in eo deprehendi ardorem, studium hoc pro viribus excolendum, ut pro ejus incremento laud parum ab illo aliquando sit sperandum.

Verelar ne superiores mensae literae ad Te non pervenerint, sed metum illum vanum fuisse nunc ex postremis Tuis intellego et

gaudeo; interim etiam aliquam ex Tuis ad me epistolam perisse aegre percipio. Ut ad me quoque mittatur exemplar aliquod Miscellaneorum Berolinensium (ubi praelum evaserint) est quod impense rogo. Ex Fratre meo Nepos sibi gratulatur, suam exercitationem de arte conjectandi Tibi non displicuisse; cultum suum cum salute officiosissima ut Tibi denunciarem, obnixè petit; sicuti ex Tua commendatione stationem aliquam pro mathesi docenda impetrare posset, foret Tibi in perpetuum devinctus. In eo nunc sum, ut et Filium meum ad studia nostra aptum reddam.

A Domino Hermanno pariter diu nihil literarum accepi. Vellem Moyraeo, Viro sane erudito, prospectum esset, ne sibi semper cum egestate sit luctandum, quando tempus suum melius posset collocare. Remondus de Montmort, Canonicus Parisiensis, librum conscripsit sub titulo *Essay sur les jeux de hazard*, sed multum abest, quominus haec pro dignitate tractaverit. Haud dubie Frater meus materiam istam profundius aggressus, etsi nondum ad finem perduxerit. Sed alias plura. Nunc vale et fave etc.

Basiliae a. d. I Octobr. 1709.

CCXV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Non sine aliqua aegritudine video commercium nostrum tam segnitè procedere; vereor sane 'ne tandem prorsus emoriatur. Literas subinde ad Te dedi, sed raro responsum accipio: deis quidem in postremis quas accepi, quasdam alias ad me Tuas peris, id quod ab aliquot annis jam saepius contigisse a Te intellexi, secus ac olim, ubi tam accurate literae Tuae mihi trahebantur.

Burnetus, Juvenis egregius, qui novissimas 'meas ad Te detulit, mihi nuper scripsit Haga, et Tuam erga se urbanitatem multis deprædicavit, eum præcipue commendationi meae adscribens. Quod si ita sit, magnas eo nomine ago gratias. Multus est Burnetus, ut mihi persuadent acceptandum esse vocationem Leydensis demum oblatam: subditi enim ita scripsisse ex investigatione Illustrissimi Obdamii, primi Curatoris Academiae Leydensis; recipi vo-

cationem non displicituram, si lautioribus conditionibus offerretur, quae nimirum notations hujus novae molestias et incommoditates, sane summi momenti, nonnulli compensarent.

An Miscellanea Berolinensia vestra nondum evaserint praelum, sub quo ea salutare dudum est quod dixisti? Quod si in lucem prodierint, rogo ut mihi quoque aliquod exemplar mittatur. Spero me ibi visurum, quae contra paralogizantem Graugium ad Te nisi eadem etiam cum totius litis Graugianae narratione Moyraeo transmissi per Scheuchzerum juniores, Medicum Tigurinum in Orbe Erudito non obscurum, qui nuper iter aggressus est in Belgium, Angliam et Galliam, forteque in transitu per Germaniam Tui videndi copiam quaeret; hunc enim cum primis scopum istius itineris habet, ut Viris Eruditis et Celebrabilibus immolescat: quomobrem me rogavit, ut quum ad Te scripturus essem, sui etiam mentionem iniecere et se Tibi in intercessum commendare vellem. Aitheid Vir bonus aliquam honestam stationem et Professionem sibi convenientem, qualem si Tu ipsi conciliare posses, maxime Tibi foret devinctus, acque ac Dominus Moyraeus, insignis certe Geometra, qui haud dubie adhuc haeret Londini, luctans, ut audio, cum fame et miseria, quas ut depellat, victum quotidianum ex informationibus adolescentum petere cogitur. O duram sortem hominis! et parum aptam ad excitanda ingenia nobilia; quis non tandem succumberet sub tam iniquae fortunae vexationibus? vel quodnam ingenium etiam fervidissimum non algeat tandem? Miror certe Moyraeum tantis angustiis pressum ea tamen allicie praestare, quae praestat.

Habet Agnatus meus, de quo sibi gratuletur, quod Dissertatio a se conscripta Tibi non displicerit. Discessit nuper in Galliam aliterus, postquam alapsandus Genæae comarsatus fuerit. Parisiis invenit occasionem studia nostra ulterius prosequendi; videbit Montmortium, qui de simili fere materia, nempe de ludis a fortuna pendentibus non ita pridem librum edidit, in quo autem nihil valde singulare deprehendi, multa vero obscura nec nisi is, qui rem jam antea Actore ipso melius penetrarunt, intelligibilia; observationes meas in hunc librum Antori transansi, quoniam judicium meum de eo a me petat. Frateris mei Opus posthumi, si ultimum manum vidisset et 'lucem publicam aspiceret, foret haud dubie omnium, quae circa hanc materiam prodierunt absolutissimum: sed dubito an unquam proditurum sit, per nescio quam inoptam heredum suspensionem. Vidit manuscriptum Hermannus,

cum rogante vidua, statim post obitum mariti, hujus schedas et chartas in ordinem redigeret, ex quibus etiam, ut audio, multa vel descripsit vel excerptis: mihi vero nihil horum omnium intropicere concessum est, immo sollicite cavent, ne quid in manus meas incidat, quod quidem nequaquam aegre fero: habeo enim quod depromam ex propria peni nec unum tantum vel alterum, si plurimum scripturum editione gloriari vellem.

Audeo ad Te mittere Epistolam hanc adjectam et inscriptam G. Wollio: rogo ut illam ipsi transmittas per tutissimam viam. Reliqui eam apertam sub sigillo, quod vocant, volante, quod lectioe peracta observabis: invenies ibi quaedam etiam ad Te pertinentia circa aestimationem virum, quas non rite considerasse videtur. Illius Aerometriam Tibi quoque visam non dubito, sed totam a Te lectam vix credo. Observavi Auctorem aliquot in locis misere et turpiter respitantem: ex. gr. pag. 137, ubi vim requisitam ad dividenda hemisphaeria evacuatam ponit aequalem ponderi columnae atmosphaericae pro basi habente integram superficiem hemisphaeriorum, cum tamen tantum basis eorum sit sumenda; pag. 231, ubi exhibet structuram barometri, quod putat effectum habere triplo sensibiliorem, quam ordinarium, cum e contrario ne simplicem quidem sensibilitatis ordinariae gradum attingere ego demonstrum: qui vel e limine salutasset hydrostaticae principia, tam graviter errare vix posset; pag. 272 ex lapsu calculi asserit aliquid tenere, quod falsissimum est.

Ab Hermanno nostro interdum accipio literas: novissime, quas ab eo habeo, datae sunt 15. Febr. hujus anni. Statio Lugdunensis mihi oblata ipsi salivam movet, cum qua libenter Patavinam, in qua nunc est, commutaret: hoc equidem Lugdunensibus indicavi, scilicet me ipsis commendaturum aliquem virum, qui me deficientem facile resarciat. Interim in hunc usque diem a me non desistunt, nescio qua de me opinione occupati. Rumor quidem erat Keilium ex Anglia illic vocatum iri, quod vix credo.

Guilielmum, relicta sua cathedra, acceptasse munus Archiducis apud Magnum Etruriae Ducem, cum annexo salario annuo 1600 Piastrarum Florentinarum, forte jam audiveris: sed et Fardelli Guilielmi exemplum imitatus, in Cataluniam se contulisse dicitur, quod ibi facturus nescio.

De quodam Abbate Conti, Nobili Veneto, mihi multa narrat Hermannus, et de ejus peritio in reconditore Geometria. Ceterum

vero multos jam in Italia esse, qui in hac scientia excellent, non audivi: in Gallia nonnulli excolunt, sed non eo successu, quo vellem. Floret felicis, ut videtur, in Anglia et Scotia: quantum valeat in Germania nostra, mihi ignotum est.

An secunda editio Principiorum Philosophicorum Newtoni comparuerit, utpote quam sub prelo esse jam diu intellexi, fortasse Tibi innotescit, aut cum omnino jam valis, cujus videndi et ego magno desiderio tener. Moyraeus enim, jam ante annum, mira mihi de ea jactabat. Curiosus sum videndi, num Auctor in hac secunda editione correxerit quosdam errores, immo paralogismos, quos ego in prima animadverti.

Hermannus scribit, quod et ad Te scriptum non dubito, se parare aliquid Opusculum sub titulo *Mechanicae fluidorum*, quod erit collectio eorum, quae de hac materia in variis operibus dispersa sunt. Quod superest, vale, vir amplissime, et fate etc.

Basildae 26. Apr. 1710.

CCXVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Quod non ita crebro inter nos convenit literae, faciunt potissimum distractiones meae, tam multiples, ut vix illis sufficium. Potissimum efficient Historici labores, quos Principes exigunt, in quibus nunc magna cum contentione versor, ut aliquando illis defungi possim: sed et poscunt me subinde Urgentiae Aulicae, ipsi Principes, Hierolinum, Guelphibum. Acredunt literae ex multis locis de rebus non tantum mathematicis et philosophicis, sed et de pertinentibus ad jus publicum, ad res sacras, ad historiam, ad antiquitates, literasque elegantiores. Etiam nummi et inscriptiones interdum necum communicantur. Multum enim temporis detrahunt allocationes peregrinantium, qui subinde ad me adveniunt, nec honeste repelli possunt. Subinde etiam in chartam concipio novas, quae forte incidunt, cogitationes, ne plane pereant. Sed vix aliquid elaborare potero in alio genere, antequam Historicis laboribus fuerit defunctus, quod intra biennium fiet, Deo volente; modo scilicet elaborato et vita eo usque durent. Sane valetudine nunc iterum per-

commoda utor, etsi hac hyeme arthriticos assultus aliaque incommoda senserim.

Dominus Burnetius per aliquot septimanas apud nos egit, et humanitatem Tuam communicandique facilitatem, ut caeteras dotes taceam, pro merito laudavit. Mecum subinde egit, sed non tam crebre licuit ac voluisse. Certe de variis locuti sumus. Discendens, literis Hanovera Guelphobum scriptis, a me Historicis quaedam notitias desideravit. Rescripsi ut tunc quidem poteram, sed ad responsum meum acceperit, nescio; nam ex quo Hanovera discessit, nihil ejus vidi, et quae in Batavis agit, pro parte ex Tuis intelligo. Facit recte et pro gratitudine quam Tibi debet, quod rem Tuam apud illos curat. Ego de negotio tibi consilium dare non audeo. Tibi haecissima omnia ex animo opto. Excerpta Epistolarum Tuarum in Miscellaneis Berolinensibus prodire, etiam quae ad Craigianam controversiam pertinent. Exemplaria apud Bibliopolas vidi, sed nullum hactenus Berolimo accepi: expecto tamen, nec dubito etiam Tibi exemplum missum iri: ita enim dudum institutum est, me suadente.

Gratissima mihi erit etiam Dn. Scheuchzeri junioris notitia. Utinam egregis ingenis semper subveniri posset; sed scis, multa hic in casu sive fortuna sita esse. Moiraei vicem Tecum doleo.

Si Dominus Agnatus Tuus, juri dans operam, urgeat et perficiat coepta Fratris Tui, Dni Jacobi Bernoulli, circa aestimatione probabilitatum, faciet rem utilissimam. Ego jam a puero hoc argumentum versavi, tunc imprimis cum juri darem operam, et de conjecturis, indicis, praesumptionibus, et gradibus probationum minus plenarium, semi-plenarium, plenarium, similibusque aeream. Nemo enim hoc argumentum melius excoluit, quam ipsi Jurisconsulti: sed illi non satis ad certa principia methodumve reverterunt. Dn. Bernmannus mihi non significat consilium sibi esse mutandi Patavinam stationem: non tamen mirarer, si alia non inferiore ablati hoc faceret, cum ad Ministerium Ecclesiasticum ordinatus sit, cujus functiones illo in loco exercere non potest. Idem mihi ad me de Gulelmimi mutatione scripsit.

Monita Tua ad Aërometriam Wolffii, quae ipsi transmissi, ementur aliquando ab eo in usum verti, cum opusculum, caetero elegans, incedi reddet. Non legi, sed volutavi, et cum animadvertorem Machinae, qua vim venti aestimare instituit, aliquid desse, id cum olim inveni. Nempe ille venti fluxum continuum concepit.

qualis est fluminis; sed revera ventus agit per successiones, ut si dicam (Galli dicentur par bonds) quae quo sunt crebriores, inter idem temporis spatium, eo validior est ventus, adeoque est vis ejus aestimanda non tantum impetu, sed et impetuum repetitorum multitudine. Videmus hanc venti indolem, quando in asserem suspensus agit, eumque nunc attollit, nunc nomidim remittit, cum aquae jectus aut fluminis cursus eum in eadem obliquitate conservare possit.

Nondum intellexi secundam editionem Principiorum Mathematicorum Newtoni prodidisse. Velim discere, quos in priore paralogismos notaris, scilicet hanc veniam petimusque damusque vicissem. Optimus ille est qui minimis urgetur. Egregia adhuc ab eo praestari posse non dubitem. In Germania nostra nemo fere profundorem Geometriam satis intelligit. Wolffius, etsi in ea medicis, caeteris praestat. Plerique, qui in Germania studis dant operam, vix ad necessaria sufficient, aegreque animum attollunt ad sublimiora, quia scilicet per studia non nisi vitae subsidia quaerunt. At in illis regionibus, ubi homines locupletes dant studis operam, meliora praestari possunt. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Guelphyti 6 Junii 1710.

CCXVIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Non opus erat tanta apud me excusatione; novi enim dudum multitudinem negotiorum Tuorum, et miror qui laboribus sufficere possis; alium certe praeter Te tot tantisque annibus defungendis parem non facile inveniam. Succumberem ego, si eodem tempore diversis adeo studiis implicarer et simul negotiis Aulicis aliisque obruerer. Quod humeri Tui id ferre valeant, hac praesertim quae es aetate, mirabundus gratulor, ac vobis ut valetudine percommoda, quae nunc uti dicis, porro per longam aetatis seriei frui possis, non sine ingenti communium nostrorum studio, imo universae rei literariae bono, Tuorumque omnium amicorum et cultorum, quos inter me pridem profiteor, gaudio et delectamento. Unum est quod abs Te jam-dudum desideravi, et

quod hac occasione non possum non aperire, scilicet cum Tui videndi spes jam omnis mihi videatur praecisa, et hactenus non nisi mentis et ingenii Tui vastissimi ideam habeam, vultus vero Tui nullam, summopere me beares, si effigiem Tuam vivis, ut aint, coloribus pictam transmitteres mihi, sumtus in eam rem quam libentissime erogatur, qua cum aliis Iconibus Virorum quorundam Illustrum et meorum Fatutorum, partim jam comparatis, partim adhuc comparandis, Musaeum meum exornabo.

Ex literis nuperis Du. Burneti Haga missis, intelligo ipsam propediem in Angliam trajecturum; dicit quidem Illustrum Obliviam omnem moturum lapidem, ut me potiri possint, melioribus quam hucusque oblatis conditionibus, sed expectanda esse quoque meliora tempora.

Cura, quaeso, ut Miscellanea Berolinensia prompte mihi mittantur, ut desiderio meo satisfiat.

Scheuchzerus senior (junior nunc in Gallis forte versatur) sub prelo habet Physicam, ut mihi scribit, Tibi dedicandam, quam more Geometrico, ad mentem scilicet Modernorum concinnavit, inventis rarioribus Physico-Mathematicis ex optimis Auctoribus congestis: an autem pro hoc Geometriam profundiorum satis possideat, de eo valde dubito. Pronnit etiam se editurum Mappam, quam jam tradiderit sculptori, Helvetiae universae; eam fore in 4 partes digestam, ita tamen ut jungi in unum queant, 56 pedes longam, 40 altam, circumcirca regionum finitimarum loco, observationibus et iconibus selectioribus historico-naturalibus exornatam; continere imprimis observationes et correctiones Geographicas, per 16 annorum itinera congestas. Scheuchzerorum sagacitate, ante annum circiter inventa est materia in paludibus Tigurinis idonea ad Turfas conciliandas (Hollandicis, ut ipse epus expertus, non inferiores) quibus nunc passim utuntur Tigurini summa cum utilitate, viliori enim pretio habentur quam ligna: quo fit ut earum elaboratio et usus magis magisque increbrescat, et, quemadmodum scribit Scheuchzerus, nunc incipit, etiam effundere carbonem fossilem.

Agnato meo, qui nunc Parisiis agit, perscripsi monitum Tuum de perlicendis corporis circa aestimationes probabilitatum. Si Tua quae de hoc argumento quondam excogitasti, in lucem ederes, forent haud dubie omnium, quae hactenus habentur, pro more Tuo, curiosissima et ingeniosissima.

Scribit Du. Hermannus Marchionem Polemam, Golligam suum, edidisse nuper opusculum de Barometris et Thermometris, de Machina Arithmetica et Gnomonicis*). Tolam Machinam Arithmeticam, ni fallor, Tu quoque adinvenisti.

Guilielmum diem suum obisse, idem Hermannus huc perscripsit. Nosti sine dubio, Fardellam stationem aliquam habere in Aula Barinonensi.

An Du. Wolfius monita mea in Aërometriam suam accepit, nondum audivi. Scribit Du. Menkenius, illum velle proficisci in Moscoviam, suam ibi fortunam experturum; forte quod Halae habeat plurimos osos.

De secunda editione Philosophiae naturalis Newtonianae nihil equidem amplius inaudivi. Quod peralogismos attingit, quos olim in prima editione observavi, non amotavi; quare, quantum nunc statim memoria suggerit, non nisi unum vel alterum indicabo. Postquam pag. 48 demonstravit, Vires centripetas tendentes ad centrum Ellipseos esse directe ut distantia corporis gyrantis a centro, concludit pag. 49, Coroll. I, etiam conversam obtinere, hoc est, si vicissim vis centripeta sit ut distantia, moveri necessario corpus in Ellipsi; eodem etiam modo, quo pag. 50, 51, 52, 53 et 54 demonstravit, vires centripetas tendentes ad umbilicum sectionis Conicae esse reciproce in duplicata ratione distantiarum, concludit pariter pag. 55, Coroll. I, ergo vicissim curvam, in qua vires centripetae sunt in reciproca ratione duplicata distantiarum a centro virium, illam curvam esse sectionem conicam. Ego vero dico, non legitime colligi posse has conversas, licet harum veritatem singulari quodam calculo (qui alias ad differentias secundas deducti haud facile separabiles) competant habeam. Conclusiones igitur Auctoris villosae sunt formidatæ, quamvis verae materietur; demonstrare enim prorsus debuisset (quod autem non fecit) unicum tantum hic genus curvarum posse datae legi vis centripetae satisfacere, seu legem eam virium solum sectioni conicae competere et nulli aliae curvae. Nosti enim, Injustissimi problemata, quae praesertim desunt in acquisitione differentio-differentiali, plerumque admittere diversa curvarum genera: imo quandoque curvas transcendentes quasdam et alias algebraicas eidem problemati posse satisfacere,

*) Poleni Miscellanea, Venet. 1768.
III, 2, 25

quemadmodum alibi ostendi. Quid opus est multis? Habemus exemplum apud ipsum Newtonum pag. 47, prop. 9 ubi ostendi in Spirali logarithmica, centrum habente in centro virium, vim centripetam esse in triplicata ratione (reciproca) distantiarum; potuisset enim, eodem jure, ea ex concludere conversam, dicendo, unde vicissim (ut fecit pag. 49 Coroll. 1) si vis sit reciproce ut cubus distantiae, movebitur corpus in Spirali logarithmica centro habente in centro virium. Interim, ita ratiocinando, Auctor non tantum formaliter, sed et materialiter enormi modo peccasset: nam praeter logarithmicam spiralem reperio aliud genus curvarum, ubi similiter vis centripeta esse reciprocè ut cubus distantiae a centro. Sic, inter alias quam plurimas quae satisfaciunt, unam praee caeteris mirabilem invenio Hyperbolam spiralem, cujus nempe natura haec est, ut rectae a centro ad curvam ductae obtineant rationem reciprocam cum angulis, quos faciunt cum recta aliqua positione data per centrum ducta. Item si ad hanc rectam, tanquam super axe, describatur curva algebraica, cujus haec aequatio $s = \frac{rr - 2aa}{\sqrt{4aa - rr}}$, sumtis scilicet coordinatis s et r ex centro

virium, dico etiam hanc curvam algebraicam hoc praestare, ut mobile in illa feratur viribus centripetis distantiarum cubis reciprocè proportionalibus. Ex ergo jam tres curvas diversissimorum generum, communi tamen hac affectione gaudentes; quae igitur si in aliqua curva reperiat, ex hoc solo nondum concludi potest, illam curvam esse logarithmicam spiralem potius, quam Hyperbolam spiralem, aut alteram illam algebraicam, aut aliam etiam quam exhibere possem. Ita quoque non procedit Newtoni conclusio ad stabilendas suas propositiones conversas, etsi verae sint, quia prius non demonstravit, leges illas virium centripetarum (quod sane demonstratu difficillimum est) solis sectionibus conicis competere. Pag. 260 prop. 16 Problema hoc, quo quaeritur, tum medii densitas in locis singulis, quae faciat ut corpus quodvis in data quavis linea curva moveatur, tum corporis velocitas in iisdem locis, supponendo resistantiam sese habere ut medii densitatem et quadratum velocitatis conjunctim: hoc problema, inquam, mihi non recte ab Auctore solutum videtur. Quanquam autem multis in locis evidentia desideretur, ubi tamen praecise erratum

sit, non facile detegitur. Quidquid sit, ex solutione Auctoris manifeste contradictorium sequitur; nam pag. 265, ubi applicat solutionem generalem ad circulum, inventi densitatem proportionalem tangentis longitudini TC, et velocitatem proportionalem ipsi \sqrt{BC} , quod etiam ita esse, per meam solutionem invenio: sed quando habet resistantiam esse ad gravitatem, ut OB ad circuli semidiametrum OK, hoc verum esse non potest, quod ita facile proba. Cum enim vis gravitatis absoluta sit ad eam ejus partem, quae secundum tangentem curvae urgetur mobile (quoniam Newtonus vim motricem vocat), ut sinus totus ad sinum inclinationis tangentis ad horizontem, hoc est, ut OC seu OK ad OB: esset itaque gravitas ad resistantiam, ut gravitas ad vim motricem: adeoque resistantia aequalis vi motrici, et sic quantum de velocitate per vim motricem resarciretur: hinc ergo velocitas foret aequalis, et tamen dicit, decrescere in ratione ipsius \sqrt{BC} , adeoque sibi contradictori. Ego per meam solvendi modum, qui valde naturalis videtur, invenio resistantiam ad gravitatem ut 3OB ad circuli diametrum AK: ex quo sequitur, resistantiam ad vim motricem esse ut 3 ad 2, hoc est in constanti ratione sesquialtera; et sic resistantia semper majore existente vi motrici, velocitas decrescere debet, quod cum vera solutione optime consistit. Caeterum generalissima mea solutio ita se habet, Sit (fig. 173.) AIK curva quaecumque data; vocetur gravitas G, resistantia R, densitas D; sit etiam abscissa (LO — CB) = x, applicata (OB) = y, radius evolutae in C = r, velocitas in C = v: dico fore $vv = -\frac{Gr dy}{ds}$, D =

$\frac{G dx - v dy}{Gr dy}$ et $R = \frac{G dx - v dy}{ds}$. Nota quod per ds intelligo evolutionem curvae seu $\sqrt{dx^2 + dy^2}$. Hinc data curva LCK per aequationem, ratio dy, dx, ds, dv exprimitur quantitatibus finitis et ordinariis; vicissim vero determinatur curva ex data lege densitatum. Hisce vale et me ama etc.

Doham Basileae d. 12 Augusti 1710.

CCXVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Magnae mihi semper voluptati sunt literae Tuae; adde quod fructum nunquam non afferunt insignem et non paenitenda docent. Utinam vicem Tibi reddere possem. Sed ita sunt res meae, ut vix amplius cogitationem adhibere ad ea liceat, quae magna attentione indigent, ut solent Analytica et Geometrica nostra.

Multa Tibi debeo, quod benevolentiae erga me Tuae significationem eo usque porrigis, ut etiam icona vultus habere expetas. Etsi enim parum in ea re momenti sit, inde tamen intelligo, quam mihi faveas, qui animum etiam ad haec demittis.

Serenissimus Dux Antonius Ulricus, Guelfobytanus ditiones regens, jussit nuper ut pingar, et pictura Bibliothecae ejus celebri inseratur; id ubi fiet, simul tabulam exprimi curabo in usum Tuum.

Spero Miscellanea Berolinensia tandem ad Te pervenisse, in quibus maxime displicent creberrimi typorum errores; caetera mendocria sunt.

Physica more Mathematico conscripta res est magna et expendenda. Initium simulis operis nuper Vir doctus ex Batavis ad me misit, cuius nomen nunc non succurrit, quia domo absum, sed multa habet circa naturam corporis motusque, quibus minime assentior, quod etiam non dissimulavi. Interim animandi sunt ad urgendum propositum, quicunque talia moluntur, imprimisque Doctissimus Scheuchzerus noster, a quo plurima egregia expecto. Honoratus Fabrius et Carolus Renaldinus et Franciscus Lana, et nuper Johannes Christophorus Sturmus amplis Operibus similia egerunt; et licet non semper scopum sint assecuti, plerumque tamen non aliquid docent: itaque vellem Sturmi Physicam posthumi prodire.

Polem Patavini, Viri, ut apparet, docti ingeniosique, libello ad me pervenit. Sed Machina ejus Arithmetica plurimum differt a mea: nam, ut video ex ipsius structura, si 365 multiplicae vobis per 24, et initio quidem per 4, tunc multiplicabitur per 4 primum 5, deinde 6, tandem 3; sed apud me 365 simul multiplicatur per 4. Imo si adesset 19547365, totum hoc simul per 4 multiplicaretur. Ita numerus magnus et parvus eodem tempore per notam datam multiplicantur. Atque hinc etiam credo Du. Palesti-

Machinam nonnisi ad tres notas produxit

 gratias ago multiplicae, quod Tuas ad Newtonianum Opus, sane insigne, annualversiones mecum communicasti; optarem Tibi totum examine vacaret, quod nec ipsi ingratum futurum scio. In corpore tam pulchro

non ego paucis

Offendar maculis, quas aut incuria fudit,

Aut humana parum cavit natura.

Scis inter ipsum et Mariottum controversiam fuisse circa rem facti. Newtonus negat, radium per refractionem coloratum rursus nova refractione colorem mutare. Nam in refractione separationem radiorum primitivorum fieri putat. Mariottus in Tentamine de coloribus contrarium se expertum ait; et alii ex Academia Parisina Regia observationibus ejus affluere. Vix tamen ausim credere, Newtonum hic labi in re tam capitali et quam tanto studio excussit. Interim apud Parisios resumenda experimenta susceperam; sed respondit Fontenellus, habere quaeque quod agat, quasi aliquid utilis agere possint, quam quo principia maximi momenti constituantur. Berolii Du. Angicourtium, Galium, Virum ingenosum et bene animatum, hortatus sum, ut experimenta instituit, quibus res facti extra dubitationem magis magisque collocetur.

Du. est quod Du. Hermannus ad me non scripsit; sed et Du. Burnetus ex Batavis neque ad me, neque, quantum intelligo, ad alios amicos, quos Hanoverae habuit, literas dedit, quod negotiis ejus tribuere malo, quam oblivioni nostrum.

Regina Hispaniae per Ministrum status Guelfobytanum Du. de Im-Hof mihi significari jussit, adfuisse Du. Fardellam et literas etiam a me attulisse, et commendationis nostrae rationem habitum in. Plura de ipso ignoro, neque enim ipse nobis ex Hispania scripsit, sed fortasse Du. Hermannus litera intellexerit. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Guelfebiti 15 Octobris 1710

P. S. Hae aestate Hanovera transit Gallus quidam Du. Nuguet, ut se appellabat. Is se ferebat autorem novi experimenti circa Phosphorum mercurialem Parisiis a se ostensi. Exponere id promiserat, sed ad me non redit. Facile, opinor, quid rei sit Parisiis intelliges. Nescio an videris scripta medica Georgii Ernesti Stabii, Professoris Hallensis, qui quondam, suo more, Philoso-

phiae et Medicinae reformationem molitur, mirasque habet sententias de anima et contra Philosophiam mechanicam, negans spiritus animales, spermens utilitatem Acquisitionis, aliaque Paradoxa defendens, et tamen applausores invenit. Nobilis quidam Vir, mihi et ipsi amicis, cum coram me intellexisset nihil has sententias non placere, effecit ut quaedam annotata mitterem, quibus Du. Stahlus non sine supercilio respondit. In eo sum, ut replicem Tibi aliquando occasione data mittam, qui et ipse medicus es, et iudicium Tuum exquiram. Interea rogo, ut Stahlia inspicias, praesertim Theoriam ejus Medicam nuper editam, si apud vos inveniantur. Du. Hartsoekerus a me objectiones in suas Conjecturas petit. Dedi paucas, quas inseruit (me ree non nominato) et refutavit in suis declarationibus (Eclaircisemens)*.

CCXIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si quid voluptatis et fructus ex literis meis percipis, ut quidem dico, habeo certe de quo mihi gratuler; ita enim scopum meum egregie consecutus mihi visor. Orbi scilicet erudito, Tibique praesertim, qui meritis Tuis in eo prae caeteris emines, aliquid gratum et utile praestare in summis votis semper habui. Iniquis autem essem, si a Te, hac qua es aetate, exigerem quae magna attentione indigent, ut solent analytica et geometrica, post tot exantillatos labores, quibus universam rem literariam aeternum Tibi devinxisti. Scio et in me ipso expertus novi, quantum feror ille et pertinax indagandi studium cum annis juvenilibus paulatim abeat et languescat. Marcescit animi vigor in corpore debili et longis infirmitatibus attrito, quanquam nondum 44 annum compleverim; quo fit ut nescio quae gravis inertia artus meos infestet, et hinc animum quasi suffocet, pristina alacritate privatum.

Mirifice me delectabis et pro insigni benevolentiae signo habebo, si vultus Tui inaginem, ut polliceris, mihi transmittere dignaberis; hac quidem tabula, cum aliis Virorum Illustrum iconibus.

*) Eclaircisemens sur les conjectures Physiques. Amst. 1710.

Museum meum extornare constitui. Paucis ante diebus accepi in hunc finem Parisiis pictas effigies Bignonii, Malebranchii et Varignonii, sed Hospitalii epusque Uxoris, foeminas in Mathematicis non parum doctae, icones cum aliis dudum habeo; Newtoni quoque, si potero, mihi comparabo.

Accepi demum iudicium tertius Miscellanea Berolinensia, missu Cl. Jibdousii, cui, quoniam, data occasione, gratias meo nomine referas cum culta meo officiosissimo. Perustravi, quamvis lucusque obiter; multa inveni elegantia et minime spernenda; facile quidem suspicor Tibi hujus libri curam incubuisse. Dedicatio et Praefatio, quas a Te profectas credo, quantum quidem intelligo, sunt elegantissimae latinitatis; stilus plenus et facilis, sed simul tersus et castus, uniformis et simplex, et tamen sublimis. Video Te selectiora tantum edere voluisse. Plurima de Tuis interspersa observo, utilia sane et curiosa; placet Historia de phosphore Brandenburgico, antea non satis mihi cognita. Quod ex occasione Phosphori mei mercurialis tam honorificam mentionem injicere voluisti, maxims ago gratias. Quae de Symbolismo calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum habes, nondum exhaustum omnia, quae de hac materia ante hos quindecim annos inter nos fuerunt agitata. Forte oblitus es temporis longinquitate, quod tunc elicerim modum applicandi haec, retrogrado ordine, ad summationes periciendas, dum scilicet d^{-1} , d^{-2} , d^{-3} aliud nihil est quam f^{+1} , f^{+2} , f^{+3} etc. unde mihi regula subnata est (si meminisses, non Tecum communicavi) differentialis summam vel integrate $\int y dx$ universaliter per seriem exprimentis, quae quidem eadem fuit, quam paulo ante, sed alia diversissima via inventam in Artis edideram; alia praeterea circa hunc symbolismum tunc notavimus, quorum in Miscellaneis jam pariter non meministi, forte quod brevitati studere voluisti. Inveni in illis quoque descriptionem Machinae Tuae Arithmeticae ejusque usus, qui facilis est, et, ut dicis, infanti inculcabilis, adeoque hoc nomine Machinae Polenianae, cujus quidem nihil vidi, multum praeferenda est; sed optandum esset, ut etiam structuram internam spectandam dedisses; alioquin ab oblivione non vindicaret Tuis machina, contra hortatum insignium illorum quos nominas Virorum. In serius exhibitis reperio Notitiam Caerulei Berolinensis, nuper inventi, sed similiter non dicitur, quid sit vel ex quo paratur; habet ita Lector curiosus notitiam sine notitia. Ad pro-

此書為八卷本，目錄在卷首，分爲四部，每部一卷，每卷一冊，每冊一冊。

pagandas scientias et artes pro bono publico eduntur, ut in Praefatione dicitur, haec Miscellanea, et ad sua in commune utilitate conferenda imitatorum curiosi: haec ergo in hoc libro non essent celanda, sed propaganda, ut aliis ansam habeat ea ad majorem perfectionem perducendi: hoc enim pacto, non alio, in publicum redundant utilitas. Memini apud Boyleum de Coloribus me legere, ex viridi aeris et sale ammoniaco, per aliquod tempus in limbum sepulto, obtineri elegantissimum caeruleum: tale quid ego quosque expertus, scilicet viride aeris, vel vitriolum Cypricum in pulvere contritum, et spiritu urinae vel solis ammoniaci aspersum, exhibuit caeruleum amoenissimum et purissimum, ipso ultramarino elegantius: sed color non est durabilis, quippe qui exhalante spiritu, et ipse paulatim evanescit. Tanto itaque gratior esset descriptio ipsius arcani de hoc caeruleo conficiendo, quod durabile dicitur et ultramarino deries viliori pretio parabile, praeter reliquas quae de eo praedicantur virtutes. Quod si detectet inventor arcanum suum necum communicare (quanquam a me, qui alius sum professione, nihil damnosum sibi metuendum habet) vellem saltem scire, ubinam et quo pretio hoc caeruleum venale prostet.

Qui Physicam conscribere suscipit sine cognitione matheseos, nae is magis agit: multi quidem suas nobis Physicas jactant principis Geometricis superstructas, contra quae tamen ubique peccant et aperte monstrant, se leges mechanicas non intelligere. In hoc numero numerum refero Villemotum Gallum, cui, ut apparet, curio fuit simplex in Geometricis: ejus certe libellum de Systeme mundi *) non magnifico. Videtur Auctor voluisse laudulam in mustaceo quaerere et Iliada conscribere post Homerum. De Physica posthuma Christ. Sturmii nihil scivi: extat quidem ejus Physica Electiva, opus magnum in 4^{to}, ut et alia minor in 8^{vo} erothemaeice conscripta; de tertia nihil mihi constat.

Non equidem dicis, quid de animalversionibus meis super quibusdam locis Operis Newtoniani judices: olim examinavi totum fere opus, et plurima annotavi, quae censuram mererentur; sed istae notae schedulis consignatae inter adversaria latitant, ex quibus recolligere difficile jam foret. Praeter illa quae nuper communicavi, ecce quaedam alia, quae alia quaerenti in manus tua in-

*) Nouveau Systeme ou nouvelle explication du mouvement des Planetes par Phil. Villemots de Lyon. 1707.

ciderunt. Pag. 331 Auctor, aquae de Vase dato per foramen effluentis motum delineaturus, concludit tandem, aquam effluentem, motu suo sursum verso, perpendiculariter surgere ad dimidiam altitudinem aquae foraminis incumbentis, id quod est contra receptam omnium de hydraulicis scriptorum opinionem, qui volunt, aquam effluentem sursum versam ad totam illam altitudinem assurgere posse, seu quod eodem recidit, aquam eae velocitate effluere, quam acquireret grave libere cadendo ex altitudine aquae foraminis vasis incumbentis. Pag. 374 Hypothesis haec, qua supponitur, resistantiam illam ex defectu lubricitatis partium fluidi, caeteris partibus, proportionalem esse velocitati, qua partes fluidi separantur ab invicem, non est verisimilis: quin potius quadrato velocitatis resistantia ista statuenda est proportionalis; habet enim utriusque rationem compositam ex ratione velocitatis et ex ratione superficiesi sperae aequalibus temporibus superatae sunt autem superficies aequalibus temporibus superatae ab aequalibus figuris, ut ipsae figurarum velocitates, quas uniformes suppono; unde oritur ratio resistantiarum in ratione duplicata velocitatum. Pag. 374 unde cum impressiones sunt etc, duplex hic latet error; primum enim impressiones, quae orbes se mutuo per frictionem impellant, non sunt utique (ut Auctor supponit) in sola ratione virium resistantium, sed simul etiam earundem distantiarum a centro orbium, per naturam vectis, in quo virium momenta crescunt in ratione distantiarum ab hypomochlio, et in rotis vel orbibus in ratione radiorum; deinde vires resistantiarum non tantum sunt ut contingat superficies et (quemadmodum supra ad Auctoris hypothesin annotavi) harum translationum, hoc est velocitatum relativarum, quae orbes a se invicem separantur, quadrata. Interim, quod mirabile hic accidit, duo hi errores se mutuo restitunt, faciuntque ut tempora periodica se habeant, sicuti in propositione asseritur. Sed pag. 376, ubi eosdem errores commisit Auctor, hi jam se mutuo non compensant, adeoque abhinc a vera ratione temporum periodicorum partium fluidi in vortice infinito, per globum aliquem circa axem suum moventem agitato. Invenit enim haec tempora periodica in ratione quadrata distantiarum a centro sphaerae; ego vero in ratione sesquuplicata earundem, prorsus conformiter phaenomenis planetarum et satellitum, et ita vortices Cartesiani, contra opinionem Auctoris (qui falso suo

theoremati inmixtus eos convellere conatur pagg. 381 et 382) mirifice astruntur et confirmantur: de quo multum sine dubio gloriatus fuisset Cartesius, si sesquiplicatam illam rationem temporum periodicorum, quae per observationes planetis competunt, potuisset demonstrare partibus fluidi vorticis ab attritu se mutuo impellentibus identidem necessario inesse: quod certe adversus Newtonum serio ad animam revocari meretur a Cartesiano, si vortices suos (quos ille tantum explodit, quasi nimirum phaenomenis non responderent) ab impacta incongruentia vindicare velint. Pag. 422 videtur hic minus recte supponi eandem cylindricam, cum praestet adhiberi conicam verticem in centro Terrae habentem. Plura nunc non suppetunt.

Quod attinet ad radium coloratum, de eo quod nempe nova refractione colorem non mutat, Newtono plene assentior: habeo in eam rem proprias observationes, jam olim institutas, quas Tecum communicarem, nisi nimium excesserent literae: et quidem puto me posse ostendere, in quo Mariottus, qui contrarium asseruit, deceptus fuerit, sumendo scilicet (quod observanti facile contingere potest, nisi cautissime procedat) radium alium pro eo, quem in statu coloris credidit.

Miror audaciam Galli illius Nugueti mugatoris, qui se Aulem Phosphori mercurialis apud Te jactare non erubuit: hujus nomen non fando quidem audivi; scripsi nuper Varignonio, ut me doceret quid hominis sis iste temerarius: non capio autem, quid intelligas, quando dicis Te facile opinari quid rei sit.

Mira mihi narras de Paradoxis Stahlii, Professoris Hallensis, hominis, ut videtur, superciliosi et jactabundi; ejus quidem scripta nondum vidi, sed quantum hujusmodi nugae legere non valde gestiam, gratum tamen erit Tuae, quae ipsi reposuisti, inspicere, de quibus libenter iudicium meum communicabo. Baglivi, medicus Italus, negat pariter spiritus animales concurrere ad motum musculorum, quos certa quadam crispatione contrahi putat; in simili opinione fuit Steno. Vale et fave etc.

Basilae d. 10 Dec. 1710.

CCXXI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gaudeo Tibi non plane displicuisse Miscellanea Berolinensia: mihi in iis maxime displicet multitudo errorum typographicorum, caetera peraeque tolerabilia sunt. Quod si nulla inessent Tuis similia, facile haec nostra Parisius Londinensibus certarent. Nunc vero, ut in aurem dicam, pauci sunt Berolini, qui aut possint aut velint aliquid praestare dignum memoratu. Itaque mihi hoc, quicquid est, vix precibus oburgationibusque extulere licuit, ut tandem aliquid specimen extaret, et ut sic dicam obligatio continuandi imponeretur.

Symbolisum calculi algebraici et infinitesimalis dare volui simpliciter; de caetero memini inter nos de eo agi, et Te usum aliquem ad Theorema illud suppeditare, ubi summa per differentias omnium graduum colligitur; quod non Tu solummodo alia plane via habueras, sed et ego multos ante annos adhuc diversa ductaque et solis proprietatibus numerorum, quam et Tecum communicare memini, cum mihi Theorema primum a Te repetum significasses.

Constructio Machinae meae Arithmeticae paucis describi non poterat; conservari autem poterit non tantum tali descriptione, sed et actu ipso. Habeo enim elaboratam, etsi ab artifice non optimo; unde illi ago, ut perfecte elaboretur.

Cerulei Berolinensis curabo aliquid ad Te transmitti. Notitia data est *tu ôta*, sed non *tu déota*; neque enim in meo arbitrio est extorquere ab hominibus, quae illi tanquam arcana venditant.

Ego quoque Villenoti libellum non magnifico, in quo nec umbram demonstrationis invenire potui. Et miratus sum Dn. Fontenellum, istas esse aliquid, putasse, nugae.

Per Sturmii Physicam posthumaum intellectus continuationem operis Physici majoris, quod coepit, sed quod morte ejus abruptum fuit. Ajunt tamen in Scholis repertum esse sic satis profectum, atque adeo dignum esset ut edatur, quia diligens certe est in colligendis et dijudicandis is, quae profundam meditationem non postulant.

Optandum est, ut Tua ad Newtonianum Opus monita colligantur in unum, et ipsi illi egregio Viro privatiu mittantur, vel ad emendanda vel ad explicanda sua. Quod ad resistantiam attinet ex defectu lubricitatis ortam, seposito fluido, concipimus globulum in tapeto aliquo ferri. Patet amissas in globulo vires esse aestimandas numero exiguorum pilorum elasticorum, quos flectens globulum oportet, ducto in vim unicusque horum pilorum impensam, idque pendere a longitudine tineris, itaque celeritates amissae sunt longitudinibus percursis proportionales. Sit v velocitas integra g , residua v , erit amissa $g-v$; sit longitudo percursa L erunt $g-v$ ut L , ergo $-dv$ ut dL ; sed dL sunt ut vdL , ergo $fit -dv$ ut vdL , seu aequalibus sumtis temporum elementis, sunt diminutiones velocitatum in quovis momento velocitabilis ipsis proportionales. Idem est si globo, qui in medio fertur, tribuas asperitatem, nam asperitates sunt colliculi elastici, qui radendo medium nonnihil deprimuntur et resurgunt. Et, si fluido tenacitatem aliquam tribuas, res eodem redit; concipi enim potest, quoties mobile a contactu partis fluidi se liberat, toties abrumpere fila viscosa, quibus refinebatur. Porro si, omissa tenacitate, solum consideres in medio resistantiam, quae oritur ex ejus mole, dum v , gr . globus in fluido motus partem fluidi loco pellere cogitur: in dem constat, licet ex alio principio, diminutiones celeritatum aequalibus temporum elementis esse celeritatibus proportionales. Hinc cum globus torquenti emissus transit per aërem, reperi olim, quodcumque adhaereat genus resistantiae sive a mole aëris, sive ab asperitate globi et aëris tenacitate, semper tamen inminutionem celeritatis, quam quovis momento sentit globus, esse proportionalem celeritatis ejus residuae. Sed haec a Te optime didicisti perterunt, qui etiam docebis, quatenus Tuis Newtonianis consentiant.

Mihi quoque visum est Newtoni experimentis circa colores, quippe per tot annos crebro repetitis, magis esse fidendum, etsi La Hiris Mariotto (Viro equidem non spernendae diligentiae) testimonium perhibeat.

Facile assentiar Stenonio, nervos agere per crispationem quandam; sed illa ipsa crispatio, ni fallor, nisi per fluidum commens explicari non potest: ut funes aqua, crines calore contrahantur.

Videbo an et quid ad repliquam meam duplicaturus sit Salsius; et faxo, ut cuncta Tibi communicentur, ubi descripta fuerint.

Sed interim desidero, ut quae ejus ad Vos forte pervenere, inspicere possis, imprimis justum Opus Physiologicum. Nam caetera fere Dissertationibus Academicis, magno numero ab eo editis, continentur. Modus ejus scribendi est paulo perplexior.

Haec est quod nihil a Dno. Hermanno nostro intellexi. Spero tamen valere eum et vigere, et ad Te subinde crebrius scribere, quae ad me remittentur. Scriperat mihi olim de Fluidorum motu aliquid se meditari, quae materia satis est elegans; Catenarum quoque, Velarum et similia etiam, ubi ad differentias differentiarum descendendum est, velle se demonstrare ad Veterum morem, quia is modus scribendi ab Italis magis intelligitur. Hoc consilium non est sperendum; etsi enim nobis id agere non vacet, lubentissime tamen alios hunc laborem sibi sumere poterunt. Sperabam tale a La Hiris, sed ille spem meam desinit, et in Opere de Epicycloidibus revera infinitesimalibus adhibet inter demonstrandum, etsi hoc dissimulat.

Dn. Burnetus, Episcopi filius, ex quo hinc discessit, huc non scripsit, et literis meis, quibus ad interrogationem quandam ejus responderam, nihil reposuit, ut adeo ignorem quid agat et utrum alihuc in Batavia versetur, an ad Anglos redierit.

Dn. Hartsoekerus objectiones quasdam meas suae appendici Conjecturarum (Suites des conjectures Physiques) cum responsionibus inseruit.

Sed obiter tantum minuta quaedam tetigeram circa salia, circa mineralia etc. Nunc cum a me intellexisset, mihi atomos perfecte duos, et primum elementum perfectae fluiditatis non prolo, expressit a me rationes judicii mei; scripsi ei, mihi rationem duritiae, ut omnia corporea, videri explicandum per causam mechanicam, nempe per motum conspirantem, qui per separationem turbetur, quam etiam Tuam esse sententiam aliquando intellexi. Ille in responsione lingit, se non intelligere quid monstri sit motus conspirans, et dubitare an non coincidat cum quiete Cartesianae. Dixeram, si durities sit qualitas quaedam occulta primitiva, non posse explicari nisi per intricatum. Itaque necesse est, ut explicari possit per mechanismum. Ille negat meum principium, quod omnia corporea mechanicè sint explicanda: primo enim illa pendere a voluntate Dei, quasi voluntas Dei non nitatur rationibus sumtis ex natura subjecti, aut quasi Deus aliquam actionem producens in corporibus, non producat per modos naturae eorum congruentes.

Sed et multa alia promit, per quae apparet in primis philosophandi principis haud parum ab ipso aberrari, quanquam id ei sit cum multis aliis commune. Quod superest, vale et fare etc.

Dalam Hanoverae 10. Febr. 1711.

CCXLI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.*)

Quas ad Te dedi 10. Decembris anni proximi elapsi, Tibi traditas esse spero; ad eas itaque me refero. Hasce autem nunc scribere volui, ut Hermannianas, quas ecce, nuper ad me missas, aliqua mea epistola comitaret, adjecto quoque excerpto ex literis Dni. Hermannii ad me datis, ex quo videbis ineptam Hartsokeni arrogantiam in suggillandis nostris inventis. Si bilem suam in me tantum et in Phosphorum meum effudisset, possem forte propriam injuriam concoquere, crederemque me ipsi alicubi, quamvis inscium, offensae occasionem dedisse. Sed quid ceuses, quod egregios Viros, iam Te ipsum, et Newtonum tam indigne tractaverit? Ferendum non est hominem modice doctum, sine Mathesi et sine ulla profundiore notitia, cui nihil est praeter mediocre vulgariae Physicae notitiam, et in vitris posuendis aliquantillum peritiam, tam contumeliose loqui, non dico de me, sed de Viris istis egregiis, et de re mathematica tam praecclare meritis et in dies merentibus. Quid absurdius simul et acerbius ab eo dici potuisset, quam Newtoni librum (epus certe omni laude majus) continere meras nugas, minus valentes quam Veterum qualitates occultas: item duodecim quosdam mathematicos (in quibus Te sine dubio complectitur) congressus esse, et inuise speciem quendam societatis, vel commercii Euclemistici, quo se laudibus et elegis mutuis cumulent et obruant, aliisque imperitiores, ne ignorantes videantur, in simidem elogiorum cantilenam pertrahant, ut orbis eruditus saltem putet eos quoque initiatos esse istis mysteriis

*) Von diesem Briefe bis zu dem vom 8. October dieses Jahres fanden sich die Originale nicht mehr vor.

Quod vero attinet ad Phosphori mei inventum, quam adscribit Picardo, nimis quantum iravidiam suam prodit, sed Clar. Hermannus, ut ex hoc excerpto patebit, meam fecit Apologiam, quam vellem in aliquo Diario vel in Actis publicari, ut obtrectatori esset obtructor. Quid enim aliud est quam obtrectatio, hominibus ingere, quasi essent plagiarius et observationem Picardianam mihi attribuisse, suppresso ejus nomine, cum tamen cum discreto nominaverim dixerimque observationem Picardianam mihi occasionem duntaxat suppeditasse ad epus Pharaonem, fortuito casu detecti, causam investigandam, omnia Barometra postea luminosa residenda, et tandem Phosphorum portatilem perpetuum inde faciendum: haec autem, in quibus inventum meum consistere facio silentio praeterit. Interim Tibi iudicandum relinquo, annon et Tua res hic versetur, dum sententiam Tuam, mihi perhonorificam, in nuperis Miscellaneis Berolinensibus de hoc Phosphoro latam, severus noster Aristarchus evertit, et ita Tibi mali laudatoris notam tacite inurit. Hoc unum adhuc addo, quod simile non inepte huic quadrat, neque si Insulae Americanae a Colombo primitus et quidem ex deliberato consilio detectae, non tamen impediuntur, quominus postea Americus Vesputius Terrae continentis detectionem, sui nominis appellatione, sibi vindicaret; quidni majori jure mihi debeat Phosphori mercurialis inventum, quamquam ex fortuna Picardi observatione deductum? Re enim comparative sumpta, major videtur progressus a lumine casuali Picardi, ad universalem Phosphorum mercurialis parandi artem a priori inventam, quam, si parva maquis componere fas est, ab Insulis Columbi, non casu, sed de industria detectis, ad Terram continentem Americi.

Intelligo Te in commercio literario esse cum Salomone Hottingero, medico Tigurino. Scire autem Te veliam, cum ex occasione alicujus Disputationis hic habitae de Mundo (ubi Auctor Copernicanismum adstruens, ex Cosmologico Bagemi Planetis incolas adscribit) eum, inquam, nempe Hottingerum conscripsisse nuper ad refutationem illius aliam Disputationem sub titulo Libri Naturae ex Psalmo XIX etc. in qua Copernicanismum convellere volens, eum sacrae scripturae adversari contulit; argumenta autem quibus utitur sunt ut facile conjicias, talia quae dudum sunt obsoleta et explera Caeterum bonus Hottingerus de rebus Astronomicis disserens, tam inconcinne et

fere pueriliter loquuntur, ut facile pateat, eum non intelligere Elementa Sphaerica, imo nequidem terminos artis callere. Sic passim confundit Aequatorem cum Meridiano, Eclipticam cum Aequatore, et solem dicit cognominari ab Astronomis lineam Eclipticam, et huius farinae plura Quod superest, vale, vir Amplexissime, et favere perge etc.

Basildae 28 Februar. 1711.

CCXXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Novissimas meas Tibi recte redditas spero. Inter ea alius a Te gratissimas cum inclusis Hermannianis hic loci, id est Berolini, accepi. Postquam enim Rex Societatem scientiarum super, proximo post anniversarium Coronationis die, solemniter inaugurari curavit, statimque vicibus congressus haberi iussit, huc excurrendum mihi putavi, et conferrem aliquid ad ejus vigorem. Sed, ut facile intelligis, desunt nobis in his oris, a quibus aliquid magnopere expectes: imprimis Botanici, Anatomici, Chymici, a quibus aliquid singulare praestetur. Non est tamen spernenda detectio novi Caerulei, cujus specimen mitto. Color meliorem in ipso usu se exhibet quam primo aspectu apparet. Mathesis profundior in his oris adhuc propemodum ignoratur. Sed cum Dominus Sturmius, Johannes Christophori Filius, haec tenus Francofurti ad Oleram Professor, statione illa deserta officium Architecti apud Ducem Megalopolitanum in se receperit, me et amicis monentibus, de Heruzano nostro accendens cogitatur, cumque in finem et a Wollfo et a me ad ipsum datae sunt literae.

Dnus. Hartsoekerus in aliis taxandis paulo est liberior et licet me non nominaverit, facile tamen intelligo, me ejus acubus tactum fuisse. Caeterum meas quasdam objectiones desideravit, quae in sua Conjecturarum illustratione, licet me non nominatis, respondit.

Si vindicare totum voles Phosphorum, ut scribis, de quo illum praecipitantius judicasse manifestum est, putem convenientissime id fieri posse in ipsis Novellis Reipublicae literariae, ubi acule in Te sunt recensiti. Sed majus praeterea operae pretium foret

si Conjecturas ejus Physicas aliquando per otium percurreres, et animadversiones in eas dares: inde enim utilitas non spernenda nobis accederet. Ea maxime profutura et Te digna ratio foret ulciscendi Virum non tam verbis, quam rebus ipsis. Et video multos ipsa scriptoris audacia capi, qui de rebus abstrusissimis tanquam compertis pronuntiat, ut ex ipso Naturae sacratio concilio Deorum recens egressus videatur.

Cum Dno. Salomone Hottingero, Tigurino Medico, nullum mihi literarum commercium est. Eum olim apud nos transeuntem videre memini. Serus almodum venit, quisquis hodie in Copernicum scribit. Inaudiveram aliquid de Tigurina in eum tempestate, sed Theologum aliquem severiorem et sacris naturae non initium eam excitasse credebam; de Medico nihil tale suspicatus fuisset. Ego magis venia, quam ira dignos ceuses, qui hic bono animo peccant, sed non bono iudicio. Dociissime Scheuchzero de tali iudicio conquerenti in eodem sensus scribo.

H. P. Reyneau Analysisi nunc demum Berolini vidi apud amicum, et agnosco in ea multa esse non spernenda, tum ab auctore considerata, tum ex optimis scriptoribus sumta, quos vellem ubique indicasset. Quanquam erga Te meque, et alios etiam optime sese gesserit, et labores nostros commendaverit, vellem tamen generaliter fontes indicari. Quod superest, vale et fave etc.

Babam Berolini Martii 1711.

P. S. Id ago ut Miscellaneorum voluminis novi materia colligatur, et rogo ut aliquid conferas, Hermannumque in idem invites.

CCXXIII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Postridie quam superas meas cum Hermannianis ad Te dimisi, accepi gratissimas Tuas die 10 Februar. datas. Miscellanea Berolinensia Tua investigatione prodire nullus dubitavi; ea de re Tibi non parum devinctus est Orbis eruditus, eoque magis quod ut dicis, obligatio contemnandi jam imposita est. Multa certe in hoc primo Tomo, interque ea Tua imprimis, quibus mea nollem accenseri, publica luce dignissima deprehendi, et ideo Parisiis Londi-

nensibusve nihil inferiora. Caeterum multitudo sphalmatum typographicorum, prout recte mones, non nihil deturpat hoc Opus.

Caeruleum Berolinense, quod promittis, grata mente accipiam: ubi obtinero, conabor id propius examinare, et in ipsum, si pote, arcum penetrare.

Icon Tua, quam expectare facis, utinam cito! me supra modum laedit, quod officii genus omni, et quo ipse jusseris, pacto demereri studebo.

De Sturmii Physica postuma edenda adhuc nihil audivi, foret haud dubie digna quae ederetur. Tecum omnino sento, fuisse Virum diligentissimum in colligendis, quae profundam meditationem non postulant, cui etiam satis judicium fuit in discernendis bonis a malis, quamvis eum non semel paralogizantem deprenderim et, gr. in reddendis rationibus rectis homodromi et heterodromi; item Phenomenorum Camerae obscurae vel Lanternae magicae. De reliquo nesciverim hodie quemquam, qui suppleat jacturam Sturmii, nisi is sit Scheuchzerus noster senior, Vir sane, etsi a propriis inventis non valde clarus, mirae tamen sedulitatis et indefessi laboris in conscribendis observationibus, tam a se in itineribus suis de industria institutis, quam ab aliis factis; item in componendis libris circa varia objecta, sicuti qui hactenus ab eo editi sunt abunde testantur, et nuper admodum ejus Physica Germanica altera vice recusa, cujus Tomus primus Tibi et mihi dedicatus est, alter vero Schrockii, Naturae curiosorum Praesidi, et Zwingero nostrati: non vero dubito, quin Auctor ipse hoc Tibi jam significaverit, simul et librum transmisscrit. Sicubi pro ipso statio se offeret, minus commode enim in Patria vivit, opus sane laude dignum, si quid sapio, faceres, si eam illi procurares.

Quaedam ex notatis meis ad Opus Newtonianum intermiscui nuper scripto meo, continente solutionem problematis inversi virium centripetarum, et cum Academia Parisiensi communicando, quoniam ita occasio ferebat, sed Du. Varignonius, cui schedas miseraui, delevit illa, substituens scilicet ne Newtonus censuram, licet amicum, iniquius laturus esset.

Quae de resistentia ex defectu lubricitatis habes, videntur festinanter scripta, neque ea qua opus est attentione adhibita: imo si mentem Tuam rite capio, destruant quae ante complures annos, cum de aestimatione virium ageretur inter nos, in ipsiusmet Tuis literis ad me scripsisti, ut mox videbis. Concipiam

mus, inquis in literis Tuis novissimis, globulum in tapete aliquo ferri, patet amissas a globulo vires esse excitandas numero exiguorum pilorum elasticorum, quos flectere globum oporteat, ducto in vim unicuique horum pilorum impensam, idque pendere a longitudine itineris. Haec quidem verissima sunt, sed nescio quomodo cohaereat, quod subdis: itaque celeritates amissae sunt longitudinibus percursis proportionales. Videtur potius concludi debuisse, vires amissas esse longitudinibus percursis proportionales: nosti autem, vires utique non esse ut celeritates. Vel si mavis celeritates amissas considerare, dicendum fuisset, quod eodem recidit: celeritates emissae sunt temporibus impensis proportionales, sicuti videre est in ascensu gravium, quorum celeritates eadem lege, Te ipso quondam asserente, decreverunt ac globuli per medium pills aequaliter elasticis obstitum penetrantis; adeoque computatio nunc aliter est instituenda, et quidem sic: Si velocitas integra globuli g , residua v , celeritas amissa $g-v$; sit tempus impensum t , erunt $g-v$ ut t ; ergo $-dv$ ut dt : hinc sequitur aequalibus momentis, aequaliter fieri diminutiones velocitatum, non vero, ut Tu concludis, diminutiones velocitatum in quovis momento proportionales esse ipsis velocitatibus. Olim saltem alter ac nunc scripsisti: sic enim in literis 29 Julii 1695 habes: Supposito (fig. 174.) quodlibet medii punctum C esse uniformiter elasticum: si AC sit spatium percursum, erit CH , potentia amissa, applicata trianguli EAP , et CE , velocitas residua, applicata parabolae BED , cujus vertex est B . Quod si nunc consideretur resistentia, quatenus oriunda ab asperitate corporis moti vel a tenacitate fluidi, fateor idem esse, ac si solum supponatur aequalibus mediis elasticis; revera enim asperitates comparari possunt cum colliculis elasticis, qui radendo medium, nonnulli deprimuntur et resurgunt: tenacitas vero consistit in difficultate abrumpendi fila viscosa, quoties mobile a contactu partis fluidi se liberat, quibus filis retinebatur. Sed si abstrahendo ab asperitate et tenacitate, consideremus solum resistentiam, quaecumque ex medio mox removenda, dum v , gr. globus, in fluido motus, partem fluidi loco pellere cogitur, asseris itidem constare, licet ex alio principio, diminutiones celeritatum aequalibus temporum elementis esse celeritatis proportionales. Quondam hic in-

tendat principium, ego non assequor; interim mihi videtur in hac suppositione aliud principium non esse quaerendum quam hoc, quod nempe resistentia fluidi sit in duplicata ratione velocitatis, id quod vulgo ab omnibus admittitur, et singulari modo ex ipsa Tua virium aestimatione demonstrari potest. Hoc igitur principium assumpto, facile est ostendere decremента celeritatum, aequalibus temporum elementis, esse non ipsis celeritatibus, sed quadratis celeritatum proportionalia, ideoque etiam esse ut vires residuas. Sit enim mobile m , spatium percursum s , velocitas v , vis residua f , tempus t ; per regulam aestimandarum virium, fest ut vv , adeoque — df ut — vdv : est vero per principium hic assumptum — df , hoc est imminutio virium, ut $vvds$: ergo etiam (propter ds ut vd) ut v^2dt , unde — vdv ut v^2dt , hoc est — $\frac{dv}{vv}$ ut dt : ideoque, tempusculis aequalibus, decremента velocita-

tum — dv sunt ut eorundem quadrata vv . Ipsum vero principium de resistentis fluidorum quadratis velocitatum proportionalibus, si bene memini, non tantum concessisti, sed et olim in literis Tuis ad me demonstrasti. Nescio itaque, quomodo nunc dicas, Te olim reperisse, cum globus tormento emissus transit per aërem, quodcumque adhibeatur genus resistentiae sive a mole aëris, sive ab asperitate globi, et aëris tenacitate, semper tamen imminutionem celeritatis, quam quovis momento sentit globus, esse proportionalem celeritati ejus residuae. Quantum enim ad globi asperitatem vel aëris tenacitatem, quatenus pro uniformi elasticitate haberi possunt, ostendi imminutiones celeritatum, aequalibus tempusculis, esse etiam aequales; quantum vero ad resistentiam ex mole aëris abigenda orta, vides neque tum imminutionem momentaneam celeritatis simplici celeritati residuae, sed quadrato ejus esse proportionalem. Optarem itaque, ut haec aliquantulum accuratius expenderes; videris enim, haec cum conscriberes, Tuam memoriam tantum consultasse.

Testimonium a La Hlrro Mariotto perhibitum circa celeres, mihi valde est sublestum

Steno statuit, non quidem nervos, sed musculos ipsos per contractionem contrahi, idque sine accessione novae materiae: ego cum Borello, Willisio, Majovrio, et aliis, malui dicere contractionem musculorum peragi per inflationem aliquam ex effervescentia vel

ebullitione succi spiritali cum sanguine oriendam, sicuti id in peculiari Dissertatione de Motu musculorum aliquando fusius explicui.

De scriptis Stallianis nihil adhuc vidi; audivi tamen ab aliquo amico, qui ea ab aliquo peregrino sibi commodata obiter perstravit, Auctorem arrogantius de se sapere, de aliis vero minus benigne sentire. De modo scribendi idem, quod Tu, dicit, cum scilicet esse perplexum et obscuro. Interim grati erunt, quae necum communicanda pronitis, ad literas vestram spectantia.

Quid nunc Hermannus noster agat, ex suismet literis prioribus meis adjectis intellexeris. Oportet quaedam ex suis ad Te literis perisse; sicuti enim Tu de ipsius silentio, ita et ipse de Tu apud me queritur. Opusculum quod meditatur, sub titulo *Mechanicae Fluidorum*, de quo proposito diu est quod mihi scripserit, forte propediem ad umbilicum erit ductum. De La Hlrro nihil boni hanc in rem expecto: Sunt

. omnia quae de Epicycloidibus et de figura dentium in rotis habet, ab aliis et imprimis a Romero Dano expiscatum esse intellexi. Quantitates infinitesimales inter demonstrandum adhibet quidem; negat tamen hoc

De Hartsoeker in praecedentibus meis, videretur homo similis La Hlrro, cui scilicet suum tantum placet, alienum displicet. Duritiam explicandam esse per motum conspirantem, non tantum mea est sententia, sed et studiosis meis in Collegiis philosophicis nunc ita inculcavi per plures annos, ut hic et in Batavis haec opinio jam satis invaluerit. Interim quid mirum, Hartsoekerum *ἀγαθὸν ἄνθρωπον* in primis philosophandi principis aberrare.

Huic quoque scripsi haec Epistolam, cum ecce postrema Tua d... Martii data, traditur mihi, ad quam ob instantem Tabellariū abibat, multis responderi non licet; nec etiam multis opus est, cum in hac ipsa quaedam continentur, quae responsivis loco esse possunt. Dicis Te mihi mittere specimen Berolinensis caerulei, sed non addis quando et qua occasione. Dubito valde, an Hermannus Sturmio succedere voluerit; nam, ratione salarii, pingriori, ut puto, fortuna gaudet magis Patavii, quam qui gaviurus esset Frankfurti. Quocirca egregia foret occasio commendandi ad hanc stationem Scheuchzerum nostrum, vel, si cum ipsi non satis convenire censeret, commendare possem agnatum meum Nicolaum

Bernoullium J. U. L. Disputationis illius de Usu artis conjectandi, quae Tibi non displicuit, Auctorem, cujus ingenium in Mathematicis perspectum Tibi jam est per inventionem Regulae Newtonianae de inveniendis quantitatibus algebraicarum divisoribus et a se amplificatae, atque per alia quoque specimina.

Bene mones de Hartsockerō, cogitabo de ea re. P. Reynaldi Analysis non eo est loco apud me, quo forte speravit. Video hominum Virum suscepisse quaedam supra vires, quae nempe non satis intellexit. Sic mera est Metaologia, quae de Catenariis garrit, et de Isochronismo, similis sane Gregorio Catenarium quondam solvere conanti. Reliqua quae bona sunt in hac Analysis, partim ex meis, sibi, cum olim in praedio Marchionis Hospitali essem et Reynaldus nos inviseret, cui scripta mea commodaveram, suppeditatis, partim ex aliis exscriptis. Hisce autem vale et fave etc.

Basilae 8 April. 1711.

CCXXIV.

Leibnitz an Joh. Bernoulli.

Cum Rex Borussiae nunc domum ex Baltica redeat et cum eo Dominus Baro de Prinz, Minister Regius, qui Rerum Academicarum curam gerit, spero negotium Dni. Hermanni nostri perfici posse, ut Francofurtum ad Oderam vocetur. Dadum enim literis scriptis non ad me tantum, sed et ad alios oblationem accepit. Et discipulum putem, annon ei substitui apud Patavinos possit Tuus ex Fratre Nepos, qui nuper, ni fallor, in Gallia egit. Id si Tibi et re videatur, communicanda erunt consilia cum ipso Domino Hermanno, et si quid conferre potero, faciam lubens, datis, si vobis videbitur, literis ad Inclitum Virum Bernardum Trevisanum, quem ob nobilitatem et doctrinam apud Curatores Academiae aliquod posse non dubito. Sed velle non precipitari discessum Dni. Hermanni, et, si fieri commode possit, annos ei praestitutos absolvi; ita enim discedet optima Reipublicae gratia, eritque in commendando validior. Et puto non multum abesse eum a meta, et facile fieri posse, ut aliquod adhuc temporis spatium effluat.

atque Francofurtanum negotium penitus conficiatur. Sed haec Tibi scribo, fortasse enim ipse mallet discedere maturius. Itaque Tu pro prudentia Tua cum eo ages. Optimum meo iudicio erit, ut ipse Curatoribus significet appropinquare terminum temporis, in quod operam addiderit: se vero dubitare an res domesticae ferant, ut diutius in Italia haerere possit: itaque consilium suum mature aperire voluisse, ut tempestive de successore cogitari queat: inde per occasionem ostendere poterit, esse juvenem praecare versatum in rebus mathematicis profundioribus, qui sibi sparta dignissimus videatur, et quem nominaturus esset, si res in suo arbitrio foret. Eam ubi nominaverit, non dubito, quin vulturum sit vel ipsum Bernoullianum nomen. Haec consilia mea aperire Tibi volui, qui desiderare videbaris, ut praeclearo illi juveni prospiceretur. Non dubito, quin futuri sint Itali nonnulli in Analysis nostra versati ad spartam illam Venetam aspiraturi, si discessus Dni. Hermanni innotescat. Itaque consultum erit, ut prematur, donec praeparata sint omnia.

Mitto specimen Coloris Berolinensis, quem Tibi non displiciturum puto.

Puto a me in prioribus festinatione erratum circa resistantiam tapetis, et rectiora esse quae olim scripsi, ut ipse probe iudicas. Oblitus eram doctrinae meae veteris, et nescio, quomodo alia plane a me dicta constitutaque putabam.

Ut pili a calore crispantur contrahanturque, ita simile aliquid in nervoso genere ab influxu liquoris ejusdem subtilioris facile crediderim. Hoc ergo cum doctrina de spiritibus animalibus non pugnat, nec puto Stenonem spiritus animales negasse.

Romerum obisse non sine dolore intellexi: ingentem ejus obitu jacturam passa est res mathematica, sed maxime Astronomia.

Scribitur mihi Parisiis Dn. Patrem Reynaldum librum de Calculo*) meliori: novumve an renovatum, non satis exprimitur. Prodit etiam nova editio operis Malebranchani de inquisitione veritatis. Quod superest etc.

Dabam Hanoverae 14 Augusti 1711.

*) La Science du Calcul des Grandeurs en general. Paris 1714.

CCXXV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Quae mihi perscripsisti nuper de statu futurae vocacionis Cl. Hermannii ad stationem Francofurtanam, eam cum ipso communicavi, serio hortatus, ut consilio Tuo morem gerat, neque praecipiti discussum, cum praesertim aliquod temporis sit effluxurum, antequam Francofurtanum negotium, ut dicis, penitus concludatur, eoque magis, quod terminus temporis, cui se adstrinxit Hermannus, nondum exspiraverit. Tuam interim, quam offers, operam in procuranda Agnatio meo successione Hermannii, acceptamus animo gratissimo, sive id fiat literis ad Inclytum Virum Bernardum Trevisanum dandis, sive alio modo, quem conducibiliorum judicaveris. Scripsi enim commendationem Tuam fore efficacissimam, atque sine qua Hermannus suam Stationem Patavinam non obtinisset, nec obtineret Francofurtanam. Dubito vero, an hanc sit amplexurus, etsi serio velit; vereor enim ne reluctantiem habeat Patrem suum, qui ipsum in Patriam revocatum desideraret, hac praesertim occasione, qua in Academia nostra aliquot Professorum sedes vacant, quamquam non adeo magna spes pro illo affulgeat. Quidquid autem attigerit, ut Francofurtum ire vel non possit vel non velit, in omnem eventum Benevolentiae Tuae commendatum vole Agnatum meum. Hic certe non minus feliciter spartam mathematicam exornabit, quam vel Hermannus, vel quisquam alius; et qui nondum complevit annum vigesimum quintum, ubi ad maturiorem aetatem pervenerit, nullus dubito, quin Bernoullianum nomen (si quid valet) sit egregie tuiturus eique augmentum non spernendum additurus.

Caeruleum Berolinense, ejus specimen misisti, pro quo debitas exsolvo gratias, videtur elegantissimum; an vero requisitam habeat durabilitatem in picturis, ubi cum aliis coloribus permisceatur, aut etiam in illuminationibus mappis Geographicis superinducendis, hoc tempus docebit. Nonnihil ejus aqua gummata dilutum et chartae candidae ilitum radiis solaribus exposui, visurus nunquid de vivacitate sua amissurum esset; deprehendi revera aliquantum expalluisse. Dedi quoque aliquid nostro cuidam Pictori, periculum ejus facturo cum oleo; laudavit coloris elegantiam, sed putat nihil aliud esse, quam Indicum arte quadam praeparatum.

Promisisti mihi Tuam Iconem, cujus oblitus esse videris. Ego vero magno teneor desiderio; quare permittas, ut Tibi memoriam refricem: pretium Pictori solvam, vel solvi curabo libentissime.

Gaudeo Te revocasse ea, quae in prioribus festinater scripsisti circa resistendum, postquam monui ea non coluerere cum iis, quae olim ad me de eadem materia scripseras. Ita enim nunc non fiet, ut quod privatim, etiam publice Tibi exidit in veritatis praedictum, et in ipsorum Tuorum assertorum destructionem; nihil magis cum quaerant adversarii, quam ut in nosmet ipsos vertant arma nostra, sicubi vident aliquam contradictionem ex festinatione commissam.

Cl. Hermannus scribit se aliquid parare pro secundo tomo Miscellaneorum Berolinensium: ubi scivero hujus Tui impressionem imminere, aliquid pariter et ego submittam, quod si dignum judicabitur, inseri poterit. Interim vale et fave etc.

Basiliae a. d. 3 Octobr. 1711.

CCXXVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Redux Torgavia, ubi Nuptiarum Czarigenae solennia spectavi et ipsi magno Russorum Czari collocutus sum. Tuas inventas, inclusasque ad Dominum Menkenium misi.

Ad illustrissimum virum Bernardum Trevisanum non ante de re nota scribam, quam ubi simul Da. Hermannus noster animum abeundi sum declarabit.

Si constat Da. Hermannum ad Francofurtenses non iturum, sperem de Domino Agnato Tuo utiliter agi posse, neque enim res praecipitabitur.

Credo Da. Hermannum ab annorum praefixorum exitu non multum abesse. Itaque, si fallor, poterit mentem abeundi commodo tempore declarare, sed ita ut simul significet, terminum praefixum a se expectatum iri. Id enim ad bonam fidem et dignitatem pertinet, eoque facilius audiemur pro alio agentes. Omnia igitur cum illo et deinde necum recte constituas; neque enim dubito, quin pro gratitudine sua Tibi et Tuis faveat.

Pictori, qui Iconem meam nuper paravit, male successit.

Caeruleum Berolinense ex Indico esse non putem.

Ibi nihil intellecti de studiis, praesertimque de rebus mathematicis, sed Tuo favore discere potero quid geratur. Quod superest, vale et fave etc.

Dobam Hanoverae 3 Decembris 1711.

P. S. Incipio arthritide per varias partes, nempe pedes, manus, genua vagante, nomihal vexari. Haud quidem diu durat, et fere quindecim diebus perfungitur, et est tolerabilis; sed veror deteriora; mala partium solidarum, maxime membranacearum, praeter ceteris curatu difficilia sunt.

CCXXVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz*).

Ex quo postremas Tuas accepi, advolarunt quoque literae a Clarissimo Hermanno, ahaecque ex aliis locis, ex quibus, quod ad studia nostra spectat, Tecum jam libenter communico, etsi non magni sint momenti. Et quidem quod ad Hermannum attinet, ille probat consilium Tuum de non declarando animo suo abeundi, nisi paulo tantum ante terminum sibi praedatum, et promittit se omnia tentaturum, ut successio Agnato meo facilitetur. Credit quosdam ex ipsis Italis suae stationi vaturae inhabituros; inter alios praesertim Verzagium, meum quondam discipulum
 Dubito etiamnum, an unquam sit iturus Francofurtum cum Parentis sui venia; quare si aliquando consulerit, meam me non fefelisse suspensionem, operam Tuam non male collocabis in substituendo meo Agnato, qui Tibi ad ultimum vitae halitum devinctus erit; negandum quippe non est, stationem Francofurtanam multum esse praefereendam Patavinae.

Scriptis mihi Hermannus se Apologiam nostram suscepturum contra Parentem et Hartsoekerum, sub forma Epistolae Anonymi ad Anonymum, ut scilicet inventa tum Tua, tum Hugeniana, Newtonia et mea contra hos suggillatores vindicet. Guido Grandae Monachus in Solutione Problematis mei de transformatione curvarum eundem paralogismum commisit, quem Moiravaeus et Craignus.

*) Von diesem Brief fand sich das Original nicht mehr vor.

quemque hic nuper publice agnovit in Transactionibus Anglicanis, ubi simul revocavit, quod contra solutionem meam geminam per motum reparatorum inventam, quam mechanicam esse praedicaverat, protraxit in lucem. Ad hanc palinodiam, quam ursi, sine dubio aegre descendit oportet ut praeterea confiteatur, se igitur hoc Problema de transformandis curvis, quod ut leve quid traducebat, non solvisse, nec hodieum solvere potuisse ut iposterum discat, colubere iudicium de rebus nondum satis attente examinatis.

Accepi nuper literas a Nobil. Burneto ex Anglia, qui, studio Theologico relicto, Juridicum amplexus est; scribit, Cl. Moiravaem ad prelum parare librum aliquem de Alea (sur le hazard) qui multo latius se sit extensurus, quam liber ille Gallicus Auctore Montmortio, qui ante aliquot annos in lucem prodit. Communicavit praeterea experimenta quaedam a societate Londinensi facta circa descensum gravium: globum scilicet ex argento vivo (haud dubie scalganato, quod non addit) diametri $\frac{3}{8}$ pollicum, et ponderis 908 granorum, descendisse per 220 pedes anglie, quatuor minutis secundis, sed globum vitreum diametri $1\frac{1}{8}$ poll. gran. 510 per eandem altitudinem descendisse 8 $\frac{1}{2}$ secundis, ita ut hic plus quam duplo majori tempore opus habuerit, quam ille, quod resistencie aeris, quae majorem effectum habuit in vitrum, quam in mercurium, est adscribendum. Discrepantiam autem tam sensibilem non credidisset. Alterum experimentum erat, quod aer perflans metallum aliquod candens (forte liquefactum) ad respirationem sit inutilis; item quod refrangibilitas in diaphanis fluidis non gravitati specificae, sed eorum inflammabilitati proportionetur. Sed non satis capio, unde enim aqua duceret suam refrangibilitatem, si quidem inflammabilis nullo modo dici possit.

Accepi nuper sub involucro, sed sine adjectis literis, schedam aliquam impressam sub hoc titulo: Columna Herculeae, seu Problema Pragense, Augustissimo Romanorum Imperatori Carolo VI submissee consecratur, omnibus Geometris in strenam anni 1712 propositum. Ipsum vero Problema, quod auctor tribus distichis concepit, est valde triviale, ut mirer ipsum non puidisse id in publicum spargere. Huc enim redit: Invenire sphaeram, cujus superficies, una cum superficie dati alicujus cylindri recti (exclusis basiibus) aequalis sit superficiei globi dato Cylindro circumscripti.

Forsitan etiam ad Te exemplar aliquod missum est. Interim aliquis ex Discipulis meis solutionem suam, in simili scheda conscriptam, protinus Pragam remisit, sub hoc titulo: *Columna Herculeae, sine labore Herculeo superata, seu Problematissae Pragensis, Augusto Romanorum Imperatori Carolo VI consecrati solutio, et constructio, intra minus quam semiquadrantem horae inventa et exhibitae ab infimo Mathematicum Tyrone, una cum duplici Problemate, altero longe ultra fretum Herculeum petito, et Problematissae redhostamenti loco, vicissim in strenuam proposito.* Duo autem ista Problemata ita sonant: *Invenire Rhumbum, qui transeat per data duo loca, longitudine et latitudine differentia; 2^o. Determinare Rhumbum brevissimum, a loco dato ad Meridianum positione datum.* Videbimus, quantos vir sit Pragensis. Misisses Tibi schedam integram mei Discipuli, nisi id molestum Tibi fore metuissem.

Ecce hic schediasma, quod nudus tertius accepi a Cl. Varignonio, continens responsum ejus ad Guidonis Grandi librum *De infinitis infinitorum.* Rogat ille, ut porro mittatur Lipsiam. Actis inserendum*), optatque, ut si liber Grandi nondum est recensitus, ejus recensio et responsio haec in eodem mense prodeant. Cum non dubitem, Te demereri velle Cl. Varignonium, curabis ut res ad ipsius votum succedat. Meditatus sum novam et facilem rationem explorandi fluidorum gravitates specificas ope Pendulorum, et longe quidem accuratius quam per vulgaria illa instrumenta (pese-liqueurs) hactenus usitata; forte aliquid de ea re ad Aeta mittam, aut ad Miscellanea Berolinensia, si ea continuantur.

Doleo Pictori, qui Iconem Tuam paravit, male successisse; an autem ea potius nulla spes superest? Nullone pretio habenda? Aegre intellexi nec sine dolore, Te incipere vexari Arthritis vaga. Species est Podagrae, cujus ego jam aliquot insultus habui, ex quo in Patriam reversus sum: nosti vero, quod de ea non male opinentur Medici, si ea demum veniat, haec qua Tu es aetate. Summitates urticarum, mensibus vernis collectae, et inter duo folla chartae exsiccatae, a quibusdam hic summo cum fructu tanquam arcumum usurpantur, ad modum potiss

*) Act. Erudit. 1712 p. 154.

Theae; certum est, urticam insigne esse dureficum: oportet autem potum istum continuare quotidie per sat longum tempus. Hisce vale et favere perge etc.

Basiliae initio anni 1712.

CCXXVIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Significo expeditum jam esse vocationem Clarissimi Hermanni nostri ad Academiam Francofurtanam, sed non ideo minus poterit rem tegere Patavii et moram trahere, donec terminus exierit, atque interim praeparare iter Domino Nicolao Bernoulli. Nec dubito et nominis Bernoulliani claritatem et commendationem Hermanni ipsius pondus habituram. Quod si a me aliquid conferri possit, indicabis tempus ac modum.

Antagonistae Hermanni ad successionem hand dubie aspiraturo oberit opinari admissus nuper error, quantum ex Clarissimo Hermanno intellexi, et ipsa contra mentorem Hermannum impotens acerbitas. Chartas ille Tuas secum ex communicatione Tua, sed non et ingenium judiciumque abstulit, quod communicare cum ipso non potuisti. Fortasse e re erit, Tuo ac Varignonii iudicio errorem quem admisit damari, ut qui rem discutere satis nequeant ex rationibus, autoritate moveantur. Fateor, si omnia paria essent, Italiam ab Italia extraneis et Helvetio et religione diverso praelatum iri; sed nunc cum nondum apud eos satis radicata sit nova analysis, recte exterius utentur, donec his indigere desinant.

Varignoniana ad Grandi objectiones responsio in Actis Lipsiensibus mense Aprili comparabit; adjecti Observatunculam notavique, etsi possit dici, — I et similes expressiones significare nihilominus, non tamen dari rationes nisi imaginarias, quarum antecedens aut consequens sit quantitas nihilominus, seu rationem — I ad I, vel I ad — I esse imaginariam. Quod inter alia ex eo proba, quia huic rationi vel simili nullus respondet Logarithmus.

Quia Dn. Hermannus vocatus est Francofurtum, fortasse optimum erit, ut illuc eat Patavino tempore expleto: nam si recuset, veror ne alius irrepat, nec liceat de Dno. Agnato Tuo cum fru-

cta agere. Sed si adeat forma, facilius opinor obtineri deinde substitutio poterit.

Vereor ne in novissima Experimenta Londinensia de descensu gravium error irrepserit.

Pragensis ille Mathematicus, qui Herculis columnas transiisse sibi visus est, fortasse Jesuita aliquis fuerit ex numero medicorum Geometrarum, et vereor ne quicquam de Rhombis intelligat.

Nescio an habeant Lipsiae librum Grandii, itaque fortasse recte illuc aliqua ejus recensio missa fuisset; sed mihi quoque non est ad manus.

Pro urticarum remedio gratias ago.

Spero Dominum Cognatum Tunum in posterum, cum mihi honorem literarum suarum impertietur, aspersurum aliquid ex suae eruditionis penu, quo doctior fiam. Nam hac etiam aetate discere mihi dulce est. Quod superest, vale et fave etc.

Baham Hanoverae 16 Martii 1712.

CCXXIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas meas nuperas acceperis, quibus significavi vocationem Dni. Hermanni nostri in Academiam Francofurtensem esse expeditam. Nunc addo, ipsum Dno. Wolfio, Professore Hallensi, scripsisse, mox affore sese ad stationem expectandam. Spero tamen nihil praecipitatum, nec ante tempus Patavio abiturum, ut benevolentia Procerum Venetorum conservetur, promissisque satisfiat, et facilius surrogatio obtineri possit. Nam Berolino non usque adeo urgebitur, ut veniam maturioris discessionis a Venetis petere necesse sit futurum. Credo meas interim literas ipsi redditas, et non ingratum acridisse quaecumque consilium, ex bono animo profectum, de rebus praecipitandis, antequam digno successori via sternatur. Nec dubito Te quoque in eundem sensum literas ad eum dedisse, omnique adhuc in integro fore. Ubi ergo intellexero, quo res sit loco, quaeque sit Hermanni nostri sententia, faciam quae et re fore judicabitur, et si vobis ita videbitur, ad Illustrum Virum Bernardum Trevisanum pro Agnato Tuo scribam.

Et credo pondus habebit apud ipsum aliosque intelligentes, quod novas Methodos nondum satis in Italia intelligi, ex erroribus tum Guidonis Grandii, qui Problema Tunum male solvit, tum illius discipuli Tui intelligi potest. Itaque rectissime facient Proceres, si vocent peritum verae Analysis, ut radices meliores in Itali figere possit. Id quoque Hermannus insinuare poterit. Alioqui vereor ne successorem accipiat, quem minime velitis Quod superest, vale et fave etc.

Baham Hanoverae 7 April. 1712.

CCXXX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Literas meas Tibi rite redditas puto; nunc significo advenisse a Cl. Hermanno scriptas, quibus significat acceptatam a se vocationem responsione Berolino missa; summo autem studio operam a se datum iri, ut Dominus Agnatus Tuus surrogari possit. Agnoscit autem ad hoc obtinendum fore consultum, ut ante praefixi sibi apud Patavinos temporis exitum non discedat, quo plus gratiae et auctoritatis habeat sua conterranei commendatio. Sed veretur ne tanta mora sibi Berolini noceret; nam integrum allate annum superesse, in quem Patavinis sit obstrictus. Itaque petit, ut sententiam meam rescribam. Respondeo, mihi videri posse discussum bona cum Berolinensium gratia trahi, vel ideo quod negotium Francofurtanae vocationis ad extremum usque in incerto fuit, nonnullis contra machinantibus. Itaque Hermanno in ea incertitudine non licuisse prospicere rebus suis et praeparare se ad discussum, bona cum gratia Procerum Venetorum impetrandum, quibus utique paulum spatii dandum sit ad novam vocationem, cum ipsae leges, quibus illic vocatus sit, tale aliquid exgere videantur. Idque me velle in antecessum insinuare Berolinensibus, et ostendere, pene impossibile fore Hermanno Francofurtanum stationem adire hoc anno. Reliquos aliquot menses deinde ex anno sequente etiam facile indulgebunt, quoniam etiam fortasse, si confici interim mature posset Domini Agnati Tui vocatio, promptior discussus alio subrogato minus difficilis futurus esset. Caeterum illud prudenter

monet. Proceres Venetos amisso Guilielmimo talem quaesituros Mathematicum, qui etiam circa curam aquarum utilis esse possit; itaque magnum pondus habiturum, si a Domino Agnato Tuo, sagacis utique ingenii Juvene, tale quid expectari posset. Quare mihi in mentem venit, recte illum facturum, si quam primum huic negotio animum applicet, et re Tecum communicata, cui nihil in his rebus arduum est, promissidem aliquam edat in hoc, unde spem illi concipere queant, accedente ipsa harum rerum tractatione, futurum illum in eo genere utilem Reipublicae suae. Et sane res est per se egregia et non minus ob subtilitatem, quam ob usum scitu digna. Si excurreret ad Batavos ibique aquaria opera inspiceret, in plurimum ad commendationem facere posset. Sed haec mea sunt cogitata, quae Tuis summitto, profecta ex optimo animo, et vobis et Reipublicae consulendi

Domini Agnatum Tuum rogo ut a me salutes; is rem gratissimam faciet, si aliquando meditationes suas necum communicabit et quae in re literaria agantur decebit. Non dubito, quae plurimum ei profuerit iter Parisinum. Annua sperare licet, inedita quaedam utilia in Domini Fratris quondam Tui Jacobi schedis adhuc latentia in lucem proditura.

Tu quoque, cum multa adhuc praeclara haud dubie in numero habeas, velim te meditationes Tuas perire sinas, quibus nemo pretium ponere me scit melius. Inprimis optem ut cogites de Mathesi magis magisque ad naturam applicanda. Digna Te sunt, quae de musculus dedisti; talia plura dare posses, quae usum ostenderent Matheseos etiam in re medica. Scis magnas nunc esse lites in Anglia, in Batavis, in Gallia, de usu Mechanice in Medicina: quidam negant, omnia fieri mechanicè in nostrorum corporum actionibus, in quorum numero est Stahlus ille, qui per literas mecum certavit, sed credo semet ipsum non satis intelligit. Quidem contra omnia putant explicari a nobis posse mechanicè. Ego neutris accedo. Omnia quidem in his mechanicè fiunt, sed nondum eo usque profecti sumus, ut omnia mechanicè explicare possimus. Interim non sperandum est hoc studium Mechanice, sed magis magisque excolendum. Videntur in organicis plurima constare perpetuis vibrationibus insensibilibus, quae cum videntur quiescere, a contrariis coefferentur. Itaque res vere ad vim elasticam redit. Ipsam memoriam in vibrationum perduratione consi-

tere suspicor, ut campana pulsata diu adhuc tinnit assonatque Itaque fluido, quod spirituum animalium nomine venit, non videmur habere opus, nisi ad ipsam vis elasticæ rationem reddendam, quae tamen ad praxin necessaria non est, quanquam non sit negligenda ad explicandam summam rerum quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 6 Maji 1712.

P. S. An scis, qui urticarum summitatibus cum fructu usus sit? Ad Dominum Bernardum Trevisanum, scriptis celebrem, cum quo mihi subinde literarium commercium est, et Dominum Quirinum, Nobilium Venetum alium, qui mihi est amicus diuque in Aula nostra egit, in Domini Agnati Tui gratiam scripsi, et literas ad Dominum Hermannum mihi ab ipso traferendas.

CCXXXI.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ad terras, quas abs Te accepi, literas nunc una vice respondeo. Gratium fuit intelligere, vocationem Cl. Hermanni ad Academiam Francofurtanam tandem expeditam fuisse: ejus me jam antea certiores fecerat Cl. Wolfius, qui misso ad me protinus apographo Epistolae Regiae ad Hermannum datae simul me rogaverat, ut illud porro sine mora mitterem ad eundem majoris securitatis gratia, ut si forte autographum ipsum per aliam viam missum intercederet, saltem illud alterum ad manus ejus pervenire posset. Intellexi postea, utrumque Hermannò rite traditum et vocationem acceptatam, et ita quidem, ut ex investigatione Cl. Wolfii, hac adhuc aetate discussum Patavio sibi suscipere proponeret. Nunc vero ubi videt hoc fieri non posse salva Procerum Venetorum benevolentia, quibus in sex annos se adixit, mutavit sententiam constituitque sextum etiam annum, qui termino adhuc deest, in statione sua complere. Tuo consilio et hortatu, ut puto, inductus, qui ipsi persuasisti nihil esse quod discussum valde urgeat, cumque facile trahi posse bona cum Berolimensium gratia. Sic

itaque non dubito, posse Hermannum paulatim Venetorum animos lucrari pro Agnato meo sibi surrogando, quando praesertim accesserit Tuis commendatio, quae prae omni alia plurimum virum et efficaciae habebit. Rescises vero ab Illustr. Trevisano et Quirino, ad quos in gratiam Agnati mei scripsisti, numquid spei affligat futuro felici successui, quem Tibi unice acceptum feremus grati-
 cae semper agnoscemus. Non male suades, ut Agnatus Mechanicae aquariae se applicet; idem et ego suasi, quod tantum efficit, ut forte brevi ad Batavos sit excursurus, ibique, quae ad hanc rem spectant, accuratius explorare possit, modo itineris sumtus non deterreat Patrem egas. Caeterum Agnatus jam nuper ad Tuis respondit, is salutem officiosissimam cum cultu suo per me Tibi dicit. Magnopere desiderat vocationem extraneam; uno et ego nos declinarem, si denuo aliqua non spernenda mihi offerretur, sicuti ante sesquimum a Leydensibus oblata fuit, quam certe si haec, in quae incidimus tempora praevidissem, non recusassem; nosse enim sine dubio tumultus bellicos in Helvetia nostra excitatos, periculi plenos, nisi bellum religionis, in quod erumpere facile possent, prudenter praecaveatur. Huic publicae calamitati, quae totam spectant Helvetiam, adde et alteram, quae Basileam nostram premit, dum jam a longo tempore luctamur cum fame ex eo tantum oriunda, quod Galli, nescio qua causa, nobis denegent frumenta ex Suedavia et Alsatia huc asportari solita, ipsi interim eorum copia abundantes. Unde vides, quid expectandum esset a vicinis nostris, si omnino liberas haberent manus; et metuentibus est certe, ne pace reddita toti reliquae Europae, bellum sedem capiat in Helvetia atque quod primo fuit infernum, tandem ei se etiam Extranei Principes immisceant, nostramque adeo tranquillitatem per aliquot saecula nobiscum habitandam conturbent et extpellant. Utinam metus noster sit vanus!

Non prorsus Tecum sentio, rationem — I ad I, vel I ad — I esse imaginariam ex eo, quod huic rationi nullus responderet Logarithmus; supponis enim numerum negativum nullum habere Logarithmum, cuius contrarium ego sic probe: Esto x numerus variabilis, per infinite parva crescens, cuius Logarithmus sit Ix; dico eundem Ix respondere ipsi — x aequae ac ipsi +x: hoc est Ix = 1 — x. Nam scis dIx esse = $\frac{dx}{x}$, hoc est differentiale alicuius Logarithmi haberi dividendo differentiale numeri per ipsum

numerum; cum itaque $\frac{dx}{x}$ sit aequale $-\frac{dx}{-x}$, patet propositum.

Ecce rei connexionem dIx = $\frac{dx}{x}$ = $-\frac{dx}{-x}$ = dI — x, ergo etiam Ix = 1 — x. Unde vides (fig. 175) curvam Logarithmicam ABC habere suam comparationem $\alpha\beta\gamma$, ut ex gr. Hyperbola suam oppositam, ita ut, sumta BE pro unitate, EF sã Logarithmus non tantum ipsius CF, sed et ipsius γF , quae designat numerum prioris negativum.

Missa nuper ad me est altera Scheda, continens solutionem Problematis Pragensis ab Austriaco quodam, a quo etiam proponitur vicissim idem Problema, sed nonnihil auctum, de construenda nempe basi ex semiglobo truncato columnae substeruenda, cuius superficies cum superficie columnae et globi impositi habeant rationem continuam. Videtur uterque, et Problematista et Solutor, ad eundem ordinem Geometrarum referri debere; nam triviaia sunt utriusque, et a neutro solutionem Problematis de Bombis sperare possunt.

Quaeris in postremis Tuis, an sciam qui urticarum summmitatibus cum fructu usus sit; respondeo me ex ore quorundam audivisse, qui in se ipsis experimentum cum successu fecerunt, ita ut jam passim ejus usus apud nos invaluerit, et ipse ego jam per aliquot hebdomadas eodem utar, ut mirum mature occurram postlagrae jam aliquoties se mihi manifestanti, et pectoris fluxionibus, quibus saepe vector, contra quas et reliquis pectoris affectus imprimis urticae commendantur; video quantum mihi profuerint.

Quae de usu Matheseos in Re medicae mores, utilia sunt, de quibus aliquando cogitabo. Sunt sane mihi nulla, quae olim conscripsi, sed indigesta, Physico-Medico-Mechanico-Mathematica. Ubi vacaverit, aliquid in ordinem redigam. Miscellaneis Berolinensibus, si continuarentur, inserendum. Etiam ego sum in opinione, organica corpora naturalia consistere in perpetuis vibrationibus se mutuo coërentibus, et a quadam elasticitate originem habentibus, ita ut adsit quaedam veluti actio et reactio inter partes, quarum quamdiam altera alteri non praevalet, machina quiescit: sicuti aer condensatus, cuius partes singulae se mutuo urgent viribus aequalibus, et tota tamen moles quiescit, quamdiam vas, cui inclusus, probe undiqueque muratum et obturatum est. Quod ejus elaterium attinet habeo causam Physico-Mechanicam ad explicandam ejus pro-

prietatem, quod vires aeris elasticitates sint ejusdem densitatis proportionalis caeteris paribus, hoc est, servato eodem caloris gradu: cujus rei rationem evidentem et claram nemo dedit.

Quod superest, vale et fave etc.

Basiliae a. d. 25 Maji 1712.

CCXXXII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Ita est, ut ais. Res Helveticae mihi quoque mirifice turbatae videntur. Fortasse Tigurini et Bernenses biennio abhinc certiore successu rem egissent. Nunc Anglorum vacillatio, quae spes Gallicae resuscitat, efficiet ut Pontificii etiam in Helvetia animus sumant. Venetis aut Patavii nihil amplius intellexi.

Miror Te pro acumine Tuo non vidisse, haud posse dari Logarithmum $10^{\sqrt{-2}} - 2$, quia non potest dare Logarithmus $\sqrt{-2}$, qui esset prioris dimidius. At dicis, differentiale numeri $-x$, quod est $-dx$, divisum per numerum $-x$, dat differentiale logarithmi $\frac{-dx}{-x}$ seu $\frac{dx}{x}$. Sed haec regula, quod differentiale divisum per numerum dat differentiale Logarithmi, et quaevis alia de Logarithmorum natura et constructione non habet locum in numeris negativis, ut reperies, ubi demonstrare voles. Ipsa etiam figura ostendit, non posse perveniri ad $\log. -1$ vel similem, quia x (fig. 176) ordinata logarithmicae L.L. non potest ita decrescere, ut evanescat tandem seu perveniat ad 0, et deinde transeat in contrariam partem seu ad -1 , ut fit (fig. 177.) in curva C.C. Nam ad hoc obtinendum debuisset curva logarithmica secare axem, qui tamen ei est asymptotus.

Si Leydam adhuc cogitas, suggero vocationem aliquam ubi esse debere Tibi convenientem, nam Muysius, cujus Elementa Physices forte vidisti, Frankerae Medicinae Doctor et Matheseos Professor, illic, ut intellexi, cogitat et vocari sperat. Itaque non esset differendum, si quid moliris. Elementorum ejus superbus est titulus; aut enim methodo mathematica esse demonstrata, sed ego in illis plus subtilitatis, quam soliditatis deprehendi. Recte

quidem contra vacuum et Atomos pugnat, sed male extensionem habet pro substantia, et ab ea derivat impenetrabilitatem vel *circumscripturam*, cum tamen corporis extensio nihil aliud sit, quam *repletio* seu diffusio Antitypiae; atque ita extensio non est primum, sed aliquid supponit. Recte quidem contendit duritiam in corporibus a motu oriri, separationem impediente; sed an rem sufficienter explicaverit, dubito. Anglorum tamen jactantiam pro vacuo demonstrationem recte mihi refutare videtur.

Fuit mihi cum Hartsaekero quaedam per literas concertatio. Contendit ille, esse quosdam atomos in perfecto aliquo fluido omni cohaesione carente natantes, et ex his duobus omnia oriri. Ego nec perfectas atomos nec perfectum fluidum admitto, putoque in omni corpore esse aliquam cohaesionis et aliquam fluiditatis gradum, extrema autem ista cum Legibus naturae pugnare.

Literas nostras amicus communis in Galliam misit, fortasse pro parte illic Trivultiano Piaro inserendas

Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 30 Junii 1712.

CCXXXIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Epistolam a praeclearissimo Hermanno nostro acceptam, qua in sententiam meam se concedere et differre velle digressum et de Tuo Agnate, Domino Nicolao Bernoullio, commendando sollicitum fore perscripsit. Non dubito, quin idem Tibi quoque significarit. Puto autem recte facturum, si Curatoribus Academiae significet, finito penso discedendum sibi et privatis sermonibus id agat, ut de successore, quem vellemus, cogitetur. Si adesset Dn. Abbas Far della, rem credo non difficulter conficereamus; sed ille, Barcinone gravi morbo tactus, versor ut supersit. Ego interim amicos Bernoullenses moneo, ut curent ne quid Dn. Hermannus ex mora detrimenti capiat.

Aut Dn. Hermannus, sese habere demonstrationem quamdam novam sententiae mensae Dynamicae, quod vires ejusdem corporis sint ut quadrata celeritaturae. Eius demonstrationis cognoscendae

sum percupidus, praesertim si differat ab his, quas hactenus adhibuimus, partim a priori, partim a posteriori.

Non dubito quin Du. Agnatus Tuus praeclearos pro ingenio suo in rebus mathematicis progressus facere pergat, et huic multa commendare poteris, quem Tibi agere minus pergat, et huic multa ut de rebus medicis cogitis paulo attentius, dispiciassae an ad aliquod Institutionum rudimentum sive tentamentum saltem conjecturale perveniri possit. Vale etc.

Dabam Hanoverae 6 Julii 1712.

P. S. Inclusas ad Dominos Turretinum et Scheuchzerum caravi peto. Vereor ne nova pax Anglicana, si longius serpit, etiam Helvetiae circulos turbet. Hactenus Batavi sese fortes ostendant.

CCXXXIV.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ad binas literas Tuas postremas responsum debeo; in posterioribus inclusas alias ad Turretinum rite curavi, sed ad Scheuchzerum, quas dicis, nullas inveni; fortasse oblitus es includere. —

Res nostrae Helveticae bene procedunt; accepimus heri pacem esse confectam ad conditiones a Tigurinis et Bernensibus praescriptas, postquam hi nuper secundo Marte pugnantes insigni victoria fuerunt potius prope Vilmbergam, quo eodem loco anno 1656 cladem passi, nunc maculam cluerunt; sed timendum est, ut satis candide agant Pontifici, qui jam nuper fidem fecerunt. Ita vides, novam pacem Anglicanam tam intempestive proscissam Helvetiae quidem circulos non turbasse, sed causam communem confederatorum, a quibus discesserunt Angli, magis magisque exasperari hae Anglicana pace, non est quod dubitemus, praesertim cum ei accesserit nuper Gallorum victoria in Flandria: quae omnia Batavorum animos jam pro parte vacillantes ad turpem pacem tandem pertrahere facile possent; quo facto non video, quid impedire possit hodiernum Ministerium Anglicanum, quinominus negotiationibus suis ultimam admoveat manum, hoc est, Successionem eripiat Sereniss. Domini Hanoveranae. Utinam vanus sim vates! Collapsa sunt omnia mirifice adeo, ut sine miraculo vix restituenda

videantur: quis ante biennium credidisset tantam rerum mutationem? Galli, qui pacem quantumvis duram acceptassent, nunc eandem pro arbitrio detrahant, si Deus aliter providerit.

Agnatus meus fortassis jam est in Anglia. Accepi nuper litteras ab eo Rodolpho, in quibus se praecinctum significat ad transfretandum in Angliam, rogatque ut sibi emendones, quod ad litteras Tuas ad se datas nondum responderit; se id facturum, quam primum iter suum in Angliam absolverit.

Cl. Hermannus noster spem facit de successu felici; quamprimum ad illum scribam, rogare non obliviscar, qualem habeat novam demonstrationem sententiae Tuae Dynamicae, quod vires ejusdem corporis sint ut quadrata celeritatum. Curiosus quidem et ego sum cognoscendi, num illa praestet mese, quam exhibui a priori, communicavique olim cum Voltero, quam visam laudavit et ideo sententiae Tuae accessit.

Nondum video haud posse dari Logarithmum $z\sqrt{-2}$: nego enim, quod asseris, Logarithmum $z\sqrt{-2}$ esse prioris dimidium, etsi verum sit logarithmi $z\sqrt{-2}$ esse dimidium logarithmi $z\sqrt{2}$; oportet quippe inspicere rationem lupus veritatis, et videbis discrimen. Ideo scilicet $\log. z\sqrt{-2}$ est dimidium $\log. z\sqrt{2}$, quia $\sqrt{-2}$ est medium proportionale inter 1 et 2; sed $\sqrt{-2}$ non est medium proportionale inter -1 et -2 , adeoque concludi non potest $\log. z\sqrt{-2}$ esse dimidium Logarithmi $z\sqrt{-2}$, adeoque quemadmodum $\log. z\sqrt{1 \times 2}$ est dimidium logarithmi $z\sqrt{2}$, ita quoque $\log. \sqrt{-1 \times 2}$ est dimidium $\log. -2$, hoc est $\log. \sqrt{-2}$ est dimid. $\log. -2$ aequae ac dimidium Logarithmi $z\sqrt{2} + 2$. Id quod maxime confirmat argumentum necum in postremis

meis allatum, esse scilicet $\log. x = \log. -x$ ex eo, quod $\frac{dx}{x}$ sit =

$$\frac{-dx}{-x},$$

et sic numeri alicujus tam affirmativi quam negativi communem esse Logarithmum. Miror vero Te velle ex figura contrarium ostendere, quasi (fig. 178.) ordinata logarithmicae L.L. non possit ita decrescere, ut evanescat tandem seu perveniat ad 0, et deinde transeat in contrarium partem seu ad $-x$, sicuti (fig. 177.) id fit in curva C.G., cum suppetant tamen innumera exempla quodlibet obvia, quae utramque Tui argumenti partem vacillare evincunt. Primo etenim curva aliqua in partem oppositam seu $+x$ in $-x$ transire potest, ita et non opus sit, ut evanescat seu per-