

veniat ad 0, sicuti videre est in Hyperbola ordinaria super axe conjugato, cujus pars abscissa communis est ordinatae affirmativae et negativae, licet inquam evanescentis; secundo nego Logarithmicam LL non ad alteram partem pervenire  $ll$ , per evanescentiam ordinatum  $x$ ; hoc enim fit, postquam LL excurret in infinitum, ubi equipare evanescit  $x$ , seu pervenit ad 0; hujusmodi iterum multa exempla habemus, sicuti videmus in Conchoide Nicomedis, cujus (fig. 179.) duae sunt partes oppositae ABC et  $a\beta\gamma$ , super eodem axe DEF et ex eodem pole 0 descriptae, quae tamen non in se invicem transeunt, nisi post excursionem in infinitum.

Habes itaque exemplum in hac altera curva, cujus aequatio (positis ordinatis  $x$  et  $z$ )  $xx = \frac{a^4}{az + zz}$  seu  $x = \frac{+aa}{\sqrt{az + zz}}$  ostendit, eam

habere duas partes convergentes in infinitum, dum interim ordinata quaelibet  $x$  affirmativa oppositam habet  $x$  negativam, plane ut in Logarithmica fieri statuo. Quae omnia ubi perpenderit, forte mutabis opinionem, et quae in novissimo Actorum Aprilis, nuperime tantum mihi viso, hac de re habes, retractanda ultro fiteberis.

Frustra est ut Leydam cogitem; audio enim Bernardum, Novellarum Reip. literariae scriptorem, cathedrae mathematicae fuisse adnotum, quamquam ut puto haud adeo insignem mathematicum.

Vidi Myssii Elementa Physices, et perlustravi; tumidus est titulus et multa promittens, sed de quo vere dici potest: turpidum est titulus, nasceretur ridiculus mus. Cujus itaque nomen et omen habet Auctor; nonquam vidi tot verba facientem de rebus nihili; videtur id solum affectasse, ut Opus scriberet diffusum et mole amplum; unicam ibi deprehendi demonstrationem geometricam, quam hausit ex Keylo, hic vero sine dubio ex Newtonianis, scilicet de Tautochronismo Cycloidis, Myssius enim, ut suspicor, non admodum profunde in Geometriam penetravit. De Hartsoekero idem fere sentio; habet tamen in experimentalibus plus dexteritatis, sed etiam in refutando plus impudentiae quam Myssius, atque plus male fidei in citando.

In literis novissimis Burneti sequentia inveni ad Te spectantia: „L'on est occupé présentement à la Société (de Londres) à démontrer par des lettres originales, que la Méthode des fluxions a été connue de Mr. Newton plus de 7 ans, avant que Monsieur Leibnitz n'en ait rien publié, et que Mr. Leibnitz en pouvait avoir

vû les principes chez un Monsieur Collins, qui les avait Londres dans le temps que Monsieur Leibnitz y a été; et qu'en suite, par des lettres, il a demandé des éclaircissements, qui montraient qu'il n'entendait pas encore la matière, cinq ans après que Mr. Newton l'a fait voir complète à ses amis. Cette controverse a été causée par les Messieurs de Leipsic, qui ont critiqué mal à propos le Livre de Monsieur Newton sur les quadratures, et de Emmerione curvarum." Tuum est videre, quomodo ridiculam hanc Anglorum ambitionem retundas. Interim vale et fate etc.

Basilea x. d. 13 Aug. 1712.

### CCXXXV.

#### Leibnitz an Joh. Bernoulli.

Non dubito quia Du. Hermannus vester Tibi significaverit, quid cum Domino Bernardo Trevisano sit locutus, et quid ille responderit. Significavit autem mihi e re fore, ut Dominus Agnatus Taus apud Legatos Venetos in Batavis et Gallia agentes de meliore nota commendetur, et praesertim apud Dominum Ruzinum, Procuratorem T. Marci, nunc Ultrajecti Reipublicae causa agentem, quia ille ipse etiam Reformator est studii Patavini. Itaque scripsi ipse ad Dominum Baronem de Bothmar, Legatum Electoris mei, ut rem Domino Ruzino commendare vellet. Sed cum Bothmarus Bagae, Ruzinus vero Ultrajecti esset, ille huic excerptum ex Epistola mea mitti curavit, responsum autem fortasse non feret, donec ipse Bothmarus negotiorum causa Ultrajectum excurret. Interea volui ne hoc nescires, ut per amicum aliquem in Batavis aut Ultrajecti possis invigilare negotio, efficerique ut Du. Ruzinus a peritis intelligat, quod res est, quantum scilicet familiae vestrae debeant Literae mathematicae, et quantum a Juvene doctissimo Agnato Tuo sit expectandum. Ita confirmabuntur aliorum testimonio, quae ego perscripsi. E re etiam erit, Dominum Emum, Legatum Serenissimae Reipublicae Venetae ad Regem Christianissimum, de eadem re edoceri, ut suffragio quoque suo votis nostris accedat. Id vero ut agas, Tibi per Varginonum aliosque amicos Parisiis perfacile erit. Denique si ipse Agnatus Taus iter in Batavos fac

ret, ut rei aquariae cognoscendae operam ocularem daret, seque in Illustris Ruzini gratiam coram insinuaret, minus esset de successu dubitandum. Ego studium ejus in rem aquariam impensum ex praesumta voluntate ejus, literisque Tuis jam tum in meis commendavi. Vale etc.

Dabam Brunsvigae 31 Augusti 1712.

### CCXXXVI.

#### Leibniz an Joh. Bernoulli.

Vix literas ad Te dimiseram, cum alias a Te accipi: vellem scivisse iter in Batavos Domini Agnati Tui, montissem enim ad Illustrissimum Ruzinum Ultrajecti adire: sed hoc fortasse in reditu fieri poterit. Dominus Hermannus publicationem discussus sui mundum maturam putat. Puto Dominum Agnatum Tunum hydraulicae praxi (hydraulicam non intelligo) utiliter operam daturum.

Bernardus, quam Lugduni Batavorum Cathedram nactus sit, Physicam aut Mathematicam, non bene memini; illud pro certo nuntiatum est, Moysimum illic aspirare, Physicam, Medicam aut Mathematicam speret, aut non additum est, aut ego oblitus sum. Fateor in ejus opere nullum evanidae subtilitatis, parum rerum notatu dignarum comparere.

Anglorum quorundam vanos conatus rideo; nunquam illi monstrabunt, quae jactant, nisi aut verba mea corrumpant aut perverse interpretentur. Valde mihi declinare videtur doctrina in Anglia, nec tot egregijs viris defunctis pares, aut vel longo proximo intervallo successere. Scilicet nunc ingenia politicis magis, aut theologis controversiis destinantur: Successioni legibus stabilitae merito timetur, quando illi, apud quos est potestas, nihil agunt, quod ad eam firmandam facere possit, multa faciunt aut patiuntur, quae ad infirmendam; sed haec Divinae Providentiae sunt commendanda . . . . .

As Dominum Agnatum Tunum mihi scripturum itinere Anglico confecto; vellem ei ex Batavis Angliae scribere vacasset aut vacaret, tum in rem suam, tum in gratiam meam.

De nullo logarithmo  $x^0 = 1$  vel  $x^0 = 2$  etc. habes schedam adjectam. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 18 Septembris, 1712.

#### Beilage.

Series Logarithmorum est series numerorum progressionis Arithmeticae respondens seriei numerorum progressionis Geometricae, quorum unus assumi potest unitas, et alter numerus aliquis positivus, verbi gratia 2. Ubi pro Logarithmo unitatis assignari potest 0, pro logarithmo vero ipsius 2 numerus quicumque, sed ponamus, unitatem esse Logarithmum ipsius 2.

Porro manifestum est, in serie hac Geometricae progressionis nunquam, assumtis quocumque tertijs proportionalibus, perveniri ad numerum negativum. Videtur quidem ad eum perveniri posse assumtis medijs proportionalibus, nam in nostra hac serie datur 1, 2, 4; jam medium, quod sumi potest inter 1 et 4, videtur esse tam + 2 quam - 2, quia tam + 2, quam - 2 in se ductum dat + 4. Verum incommodum hic oritur, quod - 2 non potest esse in progressionem Geometricam, in qua esse + 2, quibus nempe (ex hypothesi) est nostra; cum - 2 non sit potentia ipsius 2 secundum exponentem quocumque, seu non sit 2<sup>n</sup>, quod tamen de quovis numero logarithmum recipiente dici potest, qui proinde in hanc seriem 1, 2, 4 etc. quantum opus ultra citroque continuatam vel interpolatam cadit saltem aequivalenter. Nempe si fiat  $x = 2^n$ , erit  $e = \log x$ ,posito scilicet  $\log 1$  esse 0, et  $\log 2$  esse 1. Cum ergo non dari possit  $e$  in aequatione  $- 2 = 2^e$ , consequens erit logarithmum  $- 2$  esse nullum. Atque hinc etiam fit, ut  $- 2$  non possit esse ordinata ad Asymptotum Logarithmicam in eadem serie consistens cum 1 et 2, seu non possit esse  $x$  in aequatione ad Logarithmicam, quae est  $x = 2^x$ .

Sed idem ostenditur adhuc facilius ex natura quantitatum imaginariarum. Si  $- 2$  habet logarithmum, atque hujus logarithmi dabitur dimidium. Is autem est logarithmus numeri, qui ductus in se ipsum dat  $- 2$ , seu est logarithmus ipsius  $\sqrt{-2}$ . Sed  $\sqrt{-2}$  est numerus impossibilis et numeri impossibilis Logarithmus est impossibilis; ergo dimidium logarithmi ipsius  $- 2$  est impossibile; sed cuius dimidium est impossibile, debet esse ipsum impossibile. Itaque impossibilis est Logarithmus ipsius  $- 2$ .

Ceteram ipsa harmonia Logarithmorum et numerorum haec illustrat. Ductio in se ipsum in numeris representatur per multi-

plicationem in Logarithmis; Multiplicatio in numeris representatur per additionem in Logarithmis; Positio in numeris representatur per ipsum Logarithmum.

$$\begin{array}{l} \text{Ipsi } n^r \text{ respondet } e. \log n \\ \frac{n \cdot n}{n} \quad \log n + \log n \\ \quad \quad \quad \log n. \end{array}$$

Contra Extractio in numeris representatur per divisionem in Logarithmis; Divisio in numeris representatur per subtractionem in Logarithmis. Sed per quid representatur Negatio in numeris? Respondeo, id non posse inveniri, quia in descendendo ab extractione per divisionem et subtractionem, non potest aliquid inveniri, quod sit subtractionem inferius.

$$\begin{array}{l} \text{Ipsi } \sqrt[n]{n} \text{ respondet } \log n : e \\ \frac{n}{n} \quad \log n - \log n. \\ -n \quad \quad \quad \text{quid?} \end{array}$$

Ex his etiam intelligitur, etsi possit dici  $-2$  in se ductum dare  $4$ , non tamen apte dici,  $-2$  esse medium proportionale inter  $1$  et  $4$ , et in universum numeri negativi non intrant in rationes, etsi quodammodo in calculum intrent, quod etiam nuper in Actis Eruditorum aliunde comprobavi. Unde confirmatur, non dare Logarithmos negatorum, uti vicissim exclusio Logarithmorum a negativis confirmat, negativos non ingredi rationes vel proportionalitates.

Si quis defendat, Logarithmum  $\text{cot} \sqrt{-2}$  non esse dimidium Logarithmi  $\text{cot} -2$ , etsi logarithmus  $\text{cot} \sqrt{2}$  sit dimidium logarithmi  $\text{cot} 2$ , et pro ratione discriminis alleget, quod  $\sqrt{-2}$  sit media proportionalis inter  $1$  et  $2$ , sed  $\sqrt{-2}$  non sit media proportionalis inter  $-1$  et  $-2$ ; responsio est facilis, utriusque esse commune, ut radix sit media proportionalis inter  $1$  et  $id$ , cuius est radix, nempe ut  $\sqrt{2}$  sit media proportionalis inter  $1$  et  $2$ , et ut  $\sqrt{-2}$  sit (vel certe fingatur) media proportionalis inter  $1$  et  $-2$ . Sed hinc utrobique sequitur, logarithmum mediae fore dimidium posterioris, nam log mediae proportionalis inter  $1$  et  $2$  (id est ipsius  $\sqrt{2}$ ) est log  $1 + \log 2$ ;  $2$ . Sed log  $1$  est  $0$ ; ergo log. mediae inter  $1$  et  $2$  est log  $2$ ;  $2$ . Similiter log. mediae proportionalis inter  $1$  et  $-2$  (id est ipsius  $\sqrt{-2}$ ) est log  $1 + \log -2$ ;  $2$ , id est (ob  $\log 1 = 0$ ) log  $-2$ ;  $2$ . Res etiam sic patet: cum  $-2$  sit  $\sqrt{-2}$  in  $\sqrt{-2}$ , erit log  $-2 = \log \sqrt{-2} + \log \sqrt{-2}$ . Ergo log  $\sqrt{-2}$  est dimidius log  $-2$ .

## CCXXXVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Ex novissimis Tuis die 31. Augusti datis video, Te eo die nondum accepisse literas meas 13. die ejusdem mensis scriptas: spero illas Tibi nunc traditas et, quae ibi de logarithmis numerorum negatorum habui, a Te probatum iri. Significabam Agnati mei adventum in Batavos; nunc ejusdem commorationem Londini significo. Laudat valde Newtoni, Halleji et Noybraei humanitatem, qua fuerit exceptus. Interim quod tantam Agnati mei curam geras, et tanto studio ejus negotium amplectaris, ille certe prolixam adeo benevolentiam nunquam satis depraeicare velim demereri poterit; ego vero, tanquam Tibi exhibitam, gratis agnosco, atque rogo, ut eandem Tibi proproso conserves pro commendando aliquando filio meo, Juvene octodecim annorum, qui in mathematicis aliquid promittit, modo spes me non fallat.

Quod de Anglorum acemulatione nuper perscripsi ex literis Barroetianis excerptum, nunc distinctius narrare possum ex relatione Agnati mei, quam e re Tua fore puto hic apponi, sub fide tamen silentii: „Die Historia Calculi differentialis wird hier getruckt (sunt verba Agnati mei) under der Aufsicht dess Hrn. Halley, sie solle in etlichen Tagen fertig werden; ich hab etliche Bogen darvon bey Hrn. Halley gesehen; die Brieff nemen ihren anfang von an 1669, und Hr. Newton hatt selbsten gesagt, dass Er schon an 1665 und 66 dergleichen sachen gefunden habe; man hatt ihn und wider bey den Brieflen etliche notas marginales gemacht, auss denen sie beweisen wollen, dass der Hr. De Leibnitz darmaul noch nichts von diesem Calculo verstanden habe; wie dieses alles der Hr. De Leibnitz annehmen wird, stehet zu erwarten. Die Engelländer send sehr jaloux über dess Hrn. Newtons invention, und der Hr. Newton selbsten auch etc.“ Caeterum refert, Hallejum sub praelo habere veterem aliquem Auctorem Menelaum de Trigonometricis et Astronomicis; edidisse nuper Apollonium, quem Tibi missurus sit; Newtoni Princip. philoso. alteram editionem proximo Novembri. lucem visuram. Avide video, nam quos in prima editione annuadvertisi errores, nunc correxerit. Vale etc.

Basiliae a. d. 24. Septemb. 1712.

## CXXXXVIII.

## Leibniz an Joh. Bernoulli.

Novissimas meas, quibus adjecta erat scheda de Logarithmis negativorum, Tibi redditas non dubito.

Expectabo, quae Angli sint daturi circa Calculi differentialis Historiam. Si me non tangunt, nec mihi imputant persona mea animosque indigna facile patiar, ut se jactent: sin me offendant, audient fortasse quae noleant. Memini olim literas me recepisse ab Oldenburgio, ex quibus apparebat, Newtonum tunc summam rei in seriabus ponere et putare, soluta esse Problemata, quae huc rediisset. At longe aliud ostendit differentialis methodus. Tentandum scilicet est, ut Problemata, si non possunt revocari ad constructiones ordinarias, saltem revocentur ad quadraturas: et sunt gradus in ipsis transcendentes quadraturis. Itaque nescio, an Newtonus tam mature ad methodum illam Fluxionum, quam vocat, pervenerit. Quae in Newtonianis animadvertitis, intelligere gratum erit. Quod superest, vale et fave etc.

Baham Hanoverae 10. Octob. 1712.

## CXXXXIX.

## Joh. Bernoulli an Leibniz.

Optassem ut quoque Agnatus meus Tibi jam ex Batavis scripsisset, quo citius, quid sibi agendum in vacationis negotio, ex Te ipso intelligere potuisset; spero, unne factum quod intermiserat. Haeret adhuc in Anglia, forte tamen brevi Belgium repetiturus.

Schedam Tuam de Logarithmis negativorum negativorum perlegi quidem, sed quod pace Tua dixerim, nihil inveni quod eorum impossibilitatem probet. Hoc unum efficis omnibus Tuis argumentis, ut ostendas, non dari transitum ex serie numerorum affirmativorum in seriem negativorum, hoc est assumta unitate (nempe +1) pro initio seriei numerorum, nullum numerum negativum in illa serie inveniri posse, adeoque nullos eorum logarithmos hoc casu existere; quod quidem non nego. Sed hoc non impedit, quin minus numeri negativi sum peculiarem constituent seriem, assumta

pro eorum initio unitate negativa (nempe -1), et ita quidquid de Logarithmis affirmativorum probaveris, idem et in Logarithmos negativorum quadrabit. Ut verbo dicam, quilibet numerus affirmativus idemque negativus habent communem logarithmum, seu  $\text{Log. } x a^x + n = \text{log. } x a^x - n$ : quod ut demonstrarem ulterius Tibi, ut spero, deinceps non dissensuro, hoc tantum faciam, ut problem (fig. 180) Logarithmicam ABC habere alteram oppositam  $a\beta\gamma$  pro conjugata super communi asymptoto LMN, quae duae partes sunt habendae ejusdem curvae, sicuti duae Hyperbolae oppositae nominis unam efficiunt curvam: unde constabit assumtis AL pro +1, et  $\alpha L$  pro -1 LM, LN etc. fore logarithmos numerorum tam affirmativorum MB, NC, etc. quam negativorum M $\beta$ , N $\gamma$  etc. Hoc vero commodè ostendi potest, si inspicimus modum aliquem generandi Logarithmicam, ex cujus generationis continuatione patebit duplicitas hujus curvae super communi asymptoto. Consideremus hunc in finem (fig. 181) Hyperbolam PQQ cum opposita pqq super asymptotis orthogonalibus RR, OX, et summa secantibus in T: assumta ad arbitrium applicata PR pro prima et invariabili ex singulis punctis S, E, s, e etc. tam supra quam infra asymptotum OX deductae intelligantur applicatae SQ, EG, sq, eg etc. et in illis sumantur partes SF, EH, proportionales areis hyperbolicis RSQP, REGP, hoc est ut  $SF \times C$  sit = area SP, et  $EH \times C$  = area EP, unde manifestum est, curvam exinde generatam RFH fore Logarithmicam. Attendamus nunc ad ejus generationem eamque continemus quousque possumus. Primo clarum est, quo major sumitur RS, tanto majorem fore SF, donec tandem S attingente TP, areaque per consequens hyperbolica TP evadente infinita, etiam applicata TO, in quam abit SF, fiat infinita, adeoque Logarithmicae asymptotus. Sed pergat nunc punctum S progredi (quid enim hoc impedit?) atque jam pervenerit in e; sides nunc aream hyperbolicam ipsi RE competentem esse partem affirmativam infinitam TP, partem negativam infinitam Tg, adeoque = TP - Tg = (facta TE = Te) EP: et ipsam applicatam EH = eh: et similiter, ubi punctum mobile progrediendo pervenerit ad s, ita ut TS = Ts fiet applicata sf = SF: unde nova Logarithmica hfr oritur, quae cum priori HFR unam tantam curvam constituit, nempe RFXOhfr, sicuti duae Hyperbolae oppositae PQQ et pqq unam tantam efficiunt curvam, nempe PQQOXqpp. Nam uterque ramus RFH et hfr generantur eadem lege ejusque



continuatio, ita ut quemadmodum primo crescunt applicatae SF, EH in infinitum TO, postea eodem ritu ab infinita TO iterum decrescant in eh, si etc. Cum itaque ruit ab infinita TO iterum affirmativa, et Tr pro unitate negativa, EH, SF expriment logarithmus numerorum affirmativorum, expriment eadem vel ipsis aequales eh, si logarithmus numerorum Te, Ts, qui respectu alterorum TE, TS sunt negativi. Verum igitur est, unum eundemque logarithmum respondere duobus numeris aequalibus, uni affirmativo, alteri negativo, hoc est  $\log. x00 + n = \log. x00 - n$ . Q. E. D.

Communicavi Tecum jam olim, si recte meminì, quaedam, quae in Newtonianis animadverti. Animus mihi est, Menkenio ita rogante, aliquid ad Acta Lips. mittere de motu projectilium, ubi quaedam errores Newtoni notabo, quos ostendam originem traxisse ex prava serierum applicatione, in quibus summam rei illum posuisse rectissime dicis. Sed et hoc ipsum gravissimum errorem peperit, qui late serpit et omnes fere ejus solutiones circa hanc materiam in applicatione indicit. Error autem in hoc consistit, quod pag. 263 statuit ad habendas fluxiones ulteriorum graduum alicujus quantitatis fluentis (utor nunc ipsis loquendi modo) concipiendam esse quantitatem fluentem in seriem per extractionem radicis; tunc enim fore primum ejus seriei terminum ipsam quantitatem fluentem, secundum vero ejus fluxionem primam, tertium fluxionem fluxionis vel fluxionem secundam, quartum fluxionem tertiam etc. hoc est secundum nostrum exprimi morem, si differentiantia sit ex. gr.  $x^n$ , scribendum esse  $x + dx^n$ , hucque per extractionem vel potius per evolutionem in Seriem conjunctum, nempe hoc modo  $x + dx^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} dx + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2} dx^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} dx^3 + \text{etc.}$  exhibere differentias omnium graduum, in infinitum continuatas, ipsius  $x^n$ ; quod autem, exceptis primo et secundo terminis, de reliquis omnibus falsum est; docet enim communis differentiantia regula, differentias continuatas hanc exhibere seriem,  $x^n dx^n + n x^{n-1} dx + n-1 x^{n-2} dx^2 + n \cdot n-1 \cdot n-2 x^{n-3} dx^3 + \text{etc.}$  quae cum priore duos praecedentes terminos tantum communes habet, reliquos omnes diversos; unde suspicari fere licet, Newtonum tum temporis fluxionum continuandarum ideam nullam adhuc claram habuisse. Quid enim opus habuisset confingere ad radicem extractionem, si differentiationum naturam satis

perspectam habuisset, ut adeo non sit, cur valde glorioretur de seriibus suis, cum ipsum tam facile in errorem abriperent. Quod si ita libuerit, mittam Tibi scriptum, cum paravero, primumquam Lipsiam eat, ut examinare possis, et si quid aliud in mentem venerit, de Tuo adicere. Scribit Agnatus meus (quem nunc secundum literas ejus modo acceptas ad Batavos reducem credo) alteram editionem Princip. Philos. Nat. Newtoni, hoc adhuc mense publicatum iri; nunc vero hos aliosque errores in hac editione correxerit. Acutor non addit; neque etiam quid novi accesserit, aut an apertius jam exposuerit regulam suam, quam pag. 254 latetur a Te prius communicatam, cum ipse eandem adhuc celaret. Data nempe aequatione quocumque quantitates fluentes involvente, fluxiones invenire, et vice versa; et nunc felicibus res ipsi cesserit in applicatione ejus ad differentiationum continuationem. Quod superest, vale quam optime et me amare perge.

Basilae a. d. 11 Novemb. 1712.

## CCXL.

## Leibniz an Joh. Bernoulli.

Nihil aliud revera nolo, quam quod concessis, non dari tantum pro logarithmis ex serie numerorum affirmativorum in seriem negativorum. Atque ita si sit aequatio generalis  $2^x = x$ , posito in casu  $x=1$ , fore  $e=0$ , et in casu  $x=2$ , fore  $e=1$ , non posse assignari  $e$ , cum  $x=-1$ . Neque ego alium Logarithmum cogito, quam qui tali aequatione comprehendi potest.

Recte facias et ex usu publico, si ad Acta Lipsiensia mittes, quae de motu projectilium notasti, haud dubie praecleara et singularia. Non examinaveram series Newtonianae, persuasus talem vitium in talibus labi non potuisse; eo magis miror hos lapsus et Tecum suspicari incipere, seruis ipsi immotuisse differentiantia artem, quam vult videri. Etiam Hugensius, ubi primum in Wallisianis Operibus viderat notas novas Newtonianae, miratus fuerat, quod ex ipso Newtoni Opere Principiorum non satis hujus methodi vestigia apparerent. Fere enim illi constant omnia illis methods, quae dum Hugenio immotuerant. Nec post publicatam Newtoni Methodum, quam vocant, fluxionum, quaequam fere praesertire Angli in

hoc genere, quod non ex nostris sit sublectum. David Gregorius etiam in paralogismos fuit prolapsus, cum Catenarium investigari et propriam demonstrationem attentavit.

Dno. Agnato Tuo scripsi, ut plenipotentiarium Hanoveranum Du. de Botmar adeat, qui ut est humanissimus, apud Ruzsum facile aditum sit procuratorus. Quod superest, vale et fixe, et rem in multos alios annos valeas florensque bene gere simulque salve a etc.

Julio anni 1713.

## CCXII.

## Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si nihil aliud contendis, quam non dari transitum pro logarithmis ex serie numerorum affirmativorum, hoc est, non posse ex gr. sumi logarithmum medi proportionalium inter numerum affirmativum et alium negativum, hoc certe nihil extraordinarium est, quod non competat applicatis cujuscumque curvae duas partes oppositas habentis. Sit enim (fig. 182) talis curva EAF, cujus axis AD, duae applicatae affirmativae BC et DE, aliaque negativa DF. Datur sane abscissa AG, respondeat mediae proportionali GH inter BC et DE; sed nulla datur AG respondens mediae proportionali inter BC et DF, etsi interim negari non possit, eandem abscissam AD respondere utrique applicatae, et affirmativae DE et negativae DF. Haud secus se res habet in numeris eorumque Logarithmis: numeri namque designantur per applicatas Logarithmicas, et eorum logarithmi per abscissas. Jam vero in novissimis meis ostendi Logarithmicam revera habere duas partes oppositas ab utroque axis latere, ita ut eidem abscissae, hoc est, eidem logarithmo, duae respondeant applicatae, seu duo numeri, affirmativus unus, alter negativus. Atque hoc est quod negare videbaris, numerus scilicet negativus habere logarithmos. Quod vero attinet ad id, quod dicitur: si sit aequatio generalis  $2^x = x$ , posito in casu  $x = 1$ , fore  $e = 0$ , et in casu  $x = 2$ , fore  $e = 1$ , non posse assignari  $e$ , cum  $x = -1$ , hoc quidem verum est in illa suppositione, quae est arbitraria, sed si supponatur (sicuti supponere licet) in casu  $x = -1$ , fore  $e = 0$ , potest utique assignari  $e$ , cum  $x =$  numero negativo. Et hoc est, quod ego volui.

Misi nuper ad Acta Lipsiensia, quae notavi de motu projectionum, et alia hinc materiae affinia. Monui Newtonum quorundam suorum errorum, verbis tamen mollissimis, ne Virum hunc offenderem, mihi alioquin satis benevolam, utpote qui me novissime Societati Regiae Londinensi ultro proposuit utque cooptari fecit; quam dignitatem etiam Agnato meo brevi conferendum promissit; quam praeterea humanissime ab eo fuit exceptus et habitus, cum non ita pridem in Anglia degeret. Quomodo vero, quae ad Acta communicavi, ubi ad Te pervenerint, sint placitura, libentissime intelligam, non dubitans quin, quod contra Newtonum habes, assensum Tuum eliciat. Interim secunda Editio Princip. Newtoni, quae jam praeterito Novembri in publicum expectabatur, nonnisi hoc demum mense Februario prodibat, Moyraeo ita mihi scribente; cuius retardationis causa est sine dubio, quod Agnatus meus unum alterumve ex erroribus supra memoratis, ab ipso Newtono non animadvertis, ipsi aperuit, atque ita ausam praebuit eos revidendi, corrigendi et correctionibus schedis libro (qui jam fere erat impressus) inserendi; qua de re Newtonus, quod mature adhuc satis fuerit praemonitus, mihi per Agnatum meum gratias agere voluit, quinquam multum absit, quominus ipsi omnes, quos potuissem, lapsus indicaverim. Collisit Historia calculi differentialis, cum mihi scriberet Moyraeas novissimas, nondum erat evulgata, eam autem sequenti hebdomada, post literarum suarum scriptioem, dicebat certo proditura. Ad Te pervenit illa citius sine dubio, quam ad me. Agnatus meus nunc agit in Gallia apud Montmortium, et quidem in ipsa arce Montmortiana, haud procul Lutetia, adhuc per mensem forte ibi commoraturus. Parat Montmortius alteram Editionem libri sui de Alea et sorte; Nicolaus vero et De Laguy conscribit uterque Historiam, ille de Cycloide, hic de Quadratura circuli, utriusque suppetit abundantis materia.

Paralogizavit utique David Gregorius in definienda Catenaria, et ego primus, ni fallor, Tibi indicavi ejus paralogismum. Non multum abest, quin Tecum opiner, calculum fluxionum ex calculo differentiali fluxisse, et illum hinc pro parente habere, tametsi hoc dissimulavit Angli; itaque habens video, quomodo hi partus sui primogenituram sint probaturi ex praedicta illa Collisit Historia. Nam quod hinc in rem conspiciat in Operibus Wallisians, parum evincit aetatem; alia igitur fortiora argumenta expecto. Si recte memini, scripsit Agnatus meus, se, cum esset in Belgio, adisse Ple-

nipotentiarium Hanoverarum Du. de Rotmar, non minus ac alterum Venetum Du. Ruzzini. Interim procuravi Parisiis tres epistolas commendatitias ad Illust. Morosini, Mocenigo et Emo, quas protinus ad Hermannum transmissi. Hic vero, ut audio, jamjam accepit et porro expedivit; spem facit felices successus, scribatque se proximo mense Aprilii iter in patriam redanspicaturum esse, atque librum quem ibi paravit, hic se typis commissurum. De caetero vale etc.

Basildae a. d. 28 Febr. 1713.

## CCXLII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Spero Dominum Agnatum Tuum in Batavis rei hydrogogicae practicae operam dedisse. Id enim in commendationis parte reprobatur.

Videbitis quid daturae sint nobis literae Collinsianae, in quibus quidam Angli reperisse putant, non quod Pueri in Faba. Ego Tuas ad Newtoniana annotationes avide expecto: alia nunc non attingo. Quod superest, vale et fave etc.

Babam Vennae Austriae 25. Martii 1713.

## CCXLIII.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratulor Tibi receptionem in Societatem Regiam Anglicanam, vel potius gratulor Societati, cui ornamentum addis. Magis est, cur gratulor huic honorem Tuo ex Fratre Nepoti; huic enim non tantum deus, sed etiam auctoritatem addet apud Curatores Patavinos. Spero eum in Batavis cogitasse nonnihil de praxi fluminum regendorum. Nam ut ex Ino. Hermanno intelligo, competitur quidam apud Patavinos hoc uno se jactat potissimum.

Du. Newtonus merito Te sibi obstringere voluit: quae in ipsius Principiis notaveris, in Actis videre gratum erit.

Collinsius obit credo, antequam Calculus differentialis immutaret; sed ille cum Oldenburgio, Wallisio, Newtono, me, aliisque commercium aliquod literarium exercebat in rebus Arithmetis, Geometricis, Analyticis. Quid inde elicituri sint ad natales novae Analyseos Anglicanos stabilendos, appareat, ubi prodierit hoc commercium. Ego nescio, utrum ante Te sinu conspiciatur, cum tam longe absim a domo.

Vereor ut Nicolus Cyclotidis, Lagnus Tetragonismi circularis bonum dent Historiam, nisi nobiscum communicent. Concedis mihi, ut video: si sit aequatio generalis  $2^x = x$ , ponaturque in casu  $x = 1$  esse  $e = 0$ , et in casu  $x = 2$  [si placet] esse  $e = 1$ , tunc sequi, non posse assignari  $e$ , cum  $x = -1$ . Sed addis, hanc suppositionem logarithmorum pro numeris positivis esse arbitrariam, nam retenta aequatione generali  $2^x = x$ , posse assumi, ut  $e$  sit  $0$ , cum  $x = -1$ . Verum enimvero, ut faciam priorem suppositionem esse magis naturalem, considerandum est 1<sup>o</sup> in posteriore effici, ut logarithmus aliquis quantitatis affirmativae, negativae et impossibilis sit idem. Nam cum duplum et dimidium ipsius  $0$  sit  $0$ , erit  $0$  logarithmus tam ipsius  $-1$ , quam quadrati ejus  $+1$ , et radice quadratae ejus  $\sqrt{-1}$ . Et  $2^0$ , sequitur hoc amplius,  $2^0$  non esse quantitatem fixam, sed infinitos habentem significatus, nam non tantum  $2^0$  erit  $-1$ , ut supponatur, sed erit  $2^0 = +1$  et  $2^0 = \sqrt{-1}$  et  $2^0 = \sqrt[3]{-1}$  et  $2^0 = \sqrt[4]{-1}$  et sic in infinitum. Et ita nisi  $2^0$  sit quantitas ambigua, haec omnia coincident inter se. Sed si initio tantum ponamus  $2^0 = 1$ , nihil tale occurrat, quia, quaecumque potentia aut supponentia ipsius  $1$  est  $1$ , non vero quaevis potentia aut supponentia ipsius  $-1$  est  $-1$ .

Fit etiam  $3^0$  per hypothesis Logarithmorum pro negativis, ut fiat transitus a negativis numeris ad positivos, et contra. Nam si duplices Logarithmum numeri negativi, habebis Logarithmum quadrati a numero positivo, ex. gr. si  $x^0 = -2$ , erit  $x^2 = +4$ ; sed hunc transitum Tu ipse improbas, vel ex spectata natura curvae.

Praeterea  $4^0$  Logarithmi negativorum admissis, habentur et logarithmi possibiles impossibilium, qui erunt dimidiati Logarithmi.

ritum negativorum; sed tantis Logarithmis non nisi positivorum, nunquam venietur ad logarithmos possibiles impossibillium.

Denique 3<sup>a</sup>. admissa hypothese Logarithmorum pro negativis, fiet falsum, quod concessisti. Nam concessisti ab initio, incompatibilia esse  $2^x = 1$  et  $2^x = -1$ , ita ut e possit assignari. Sed si admittas hypothesein  $2^x = -1$ , fiet etiam  $2^x = 1$ . Ergo compatibilia sunt  $2^x = 1$  et  $2^x = -1$ ,posito e = 0 contra concessa.

Ex his omnibus vides hypothesein de Logarithmis numerorum negativorum non tantum esse parum naturalem et inutilem, sed etiam non admittendam. Hinc etiam et aliunde quoque statui, proportiones non habere locum in quantitatibus negativis, nec dicendum esse  $-1$  ad  $+1$  ut  $+1$  ad  $-1$ , licet productum ex extremis hic faciat aequale producto ex mediis, quia identitatis rationum fundamentum est in similitudine, quae hic nulla est. Nam quomodo potest  $+1$  esse ad  $-1$ , ut est  $-1$  ad  $+1$ , cum prior ratio sit majoris ad minus, posterior minoris ad majus. Etsi ergo

verum sit, esse aequales has duas fractiones  $\frac{+1}{-1}$  et  $\frac{-1}{+1}$ , non tamen fractiones idem sunt ac rationes, licet haec per illas indicentur. Ex quibus intelligitur, in ipsis rei Analyticae fundamentis aliqua adhuc neglecta fuisse.

Spero Dominum Hermannum nostrum jam apud vos esse, et iter suum Berolinense acceleraturum; ita enim omnino opus est; spero et rem Cathedrae Patavinae in statu quem volumus collocasse. Quod supersedi, vale et fave etc.

Bodani Viennae Austriae 26 Aprilis 1713.

P. S. Parisiis ad me destinati erant Lucei Dni. Marchionis Hospitali, et Analysis P. Reynean; sed negligentia sive fraude Bibliopolae Galli, qui in Batavis agit, ad me non pervenere. Haec per remigratam faceret Du. Agnatus Tuus, si mihi haec opera afferret, una cum Montmortiano opere, ac nonnullis Rollii et Logni aut similibus, velut Parentii Miscellaneis, nam non nisi Mechanica ejus habeo. Basilea possent cum tempore Francofurtum delerri. Profuturum ut par est, lubens reddam. Quod Blanchinus, vir insignis et mihi olim amicus, Roma advectus, nunc in Gallia Anglaque egerit, nosse velim; praecipuus est in Astronomia et Antiquitate. —

## CCXLIV.

## Job. Bernoulli an Leibniz.

In penultimis Tuis 25 Martii datis, in prociuctu ad reditum Te dicebas, qui tamen 26 Aprilis, quod novissime ad me literae Tuae exaratae sunt. Viennae etiamnum haesisti: ego vero incertus, ubinam locorum Te quaeram, haec meas Hano-veram dirigam, more solito, quae ut Te ibi offendant reducan, salvum et incolumem, est quod ex animo voto. Biduo postquam accepissem postremas Tuas, Agnatus meus hic apparuit ex Gallis, ita ut quos petisti libros ipse asportare non potuerit.

Instantiae Tuae et objectiones contra logarithmos numerorum negativorum, omnes ex eodem falso principio fluunt, quod solo attentionis defectu pro vero assumis. Si enim vel tantillum mentem advertere voluisses, ejus falsitatem facile detexisses. Nunc quidem non litigabo, quod suppositio logarithmorum pro numeris negativis sit aequae naturalis, quam altera illa pro numeris positivis; delinendum esset, quid per naturale intelligeres; si naturale est id quod usu receptum est, quod per consuetudinem est introductum, concederem suppositionem logarithmorum pro numeris negativis minus naturalem esse, quam illam cui assenti sumus. Sic etiam logarithmi refluentes (ut vocant) minus naturales erunt, ut et Arithmetica Tua dyadica ac Weigelii Tetractis, quae usu tamen non carent, licet jam naturalis sit (quia usitatus) nisi decem notis numeralibus, quam duobus, aut quatuor, vel quinque. Quod vero attinet ad ipsius Principii (quod tacite supponis) falsitatem, haec in eo consistit, quod quae vera sunt tantum pro logarithmis numerorum affirmativorum, ea quoque ad logarithmos numerorum negativorum applicare velis, non considerans, ex quo fundamento illa sint deducta, alias statim vihis causam, ob quam applicatio ad logarithmos negativorum non valet. Sed respondebo *κατά πρόθεσιν* ad quinque tuas objectiones.

Bicis (1) in suppositione logarithmorum numerorum negativorum effici, ut logarithmus aliquis quantitatis affirmativae, negativae et impossibilis sit idem, quod quidem de affirmativis et negativis verum est; concedo enim habere communes Logarithmos, sed considerans rationem, ex qua concludis etiam quantitatis impossibilis logarithmum

esse eundem; nam cum duplum, ais, et dimidium ipsius 0 sit 0, erit Logarithmus tam ipsius  $-1$ , quam quadrati ejus  $+1$ , et radicis quadraticae ejus  $\sqrt{-1}$ . Hæc non animaliter, quod non absolute essentialis sit logarithmis, ut duplum alicujus logarithmi sit logarithmus numeri, quadrati, et dimidium logarithmi sit logarithmus radicis; oportet ut attendas, duplum logarithmi dare proprie logarithmum ejus numeri, qui est tertius geometricæ proportionalis ad primum numerum (hoc est ad unitatem, sive affirmativam, sive negativam) et ad numerum propositum, qui tertius proportionalis in affirmativis tantum est numeri propositi quadratus, in negativis non item. Deinde attendere debes, dimidium alicujus logarithmi non absolute esse logarithmum radicis quadraticae, sed potius esse logarithmum mediæ proportionalis inter primum numerum (hoc est unitatem, sive affirmativam, sive negativam) et numerum propositum, qui mediæ proportionalis in affirmativis tantum est radix quadratica numeri propositi, non vero in negativis. Quod si itaque ratiocinium Tuum recte instituas dicendo: Nam cum duplum et dimidium ipsius 0 sit 0, erit 0 logarithmus tam ipsius  $-1$ , quam tertii proportionalis ad  $-1$  et  $-1$ , qui est  $\frac{-1 \times -1}{-1} = -1$ , et mediæ proportionalis inter  $-1$  et  $-1$ , qui est  $\sqrt{-1 \times -1} = +\sqrt{+1} + 1$  vel  $-\sqrt{+1} + 1$ ; nihil certe absurdum inde sequitur.

Hæc 2<sup>a</sup> sequetur hoc amplius 2<sup>o</sup> non esse quantitatem fixam, sed infinitos habentem significatus, nam non tantum 2<sup>o</sup> erit  $-1$ , ut supponebatur, sed erit 2<sup>o</sup>  $= +1$  et  $= \frac{2}{3} - 1$  et  $= \frac{2}{4} - 1$  et  $= \frac{2}{5} - 1$ , et sic in infinitum, et ita nisi 2<sup>o</sup> sit quantitas ambigua, hæc omnia coincident inter se. Hæc secunda obiectio est tantum Corollarium prioris; illa itaque sublatâ et hæc cessat: nego enim 2<sup>o</sup> fore  $= \frac{2}{3} - 1$ , et  $= \frac{2}{4} - 1$ , et  $= \frac{2}{5} - 1$  etc. sequitur enim nihil aliud quam quod 2<sup>o</sup> sit  $= \frac{2}{3} - 1 \times -1$ , et  $= \frac{2}{4} - 1 \times -1 \times -1$ , et  $= \frac{2}{5} - 1$  etc. quæ omnia faciunt  $\pm \sqrt{+1}$ , hoc est  $+1$ , vel quod hic valet,  $-1$ , si quod nihil absenti est.

Urget 3<sup>a</sup> fieri per hypothesein Logarithmorum pro negativis, ut fiat transitus a negativis numericis ad positivos et contra: nam si duplicem Logarithmum numeri negativi, me habere asseris, Logarithmum quadrati a numero positivo ex. gr. si  $x^2 = -2$ ,

fore  $x^2 = +4$ : sed hunc transitum me ipsum negare, vel expectata natura curvæ. Verum prisina recurrit responsio: nego scilicet duplicem Logarithmum haberi logarithmum numeri quadrati. Vidisti enim ex duplicatione illa oriri Logarithmum tertiam proportionalis ad unitatem (affirmativam aut negativam) et ad numerum propositum. Sic itaque, si  $x^2 = -2$ , concludendum fore  $x^2 = \frac{-2 \times -2}{-1} = -4$ , quod nullum transitum arguit a negativis ad positivos.

Eadem est responsio ad Objectionem quartam, quando dicitur: Logarithmis negativorum admissis, haberi et Logarithmos possibiles impossibilibus, qui sint dimidiati Logarithmi negativorum; supra quippe in responsione ad objectionem primam vidisti dimidiationem logarithmi non dare (nisi per accidens) logarithmum radicis, sed mediæ proportionalis inter unitatem (affirmativam aut negativam) et numerum propositum, hæc autem mediæ proportionalis unquam est impossibilis.

Quod denique obijcit 5<sup>a</sup>, admissa hypothesei Logarithmorum pro negativis, fieri falsum quod concesserim; nam me concessisse ab initio incompatibilitatem esse 2<sup>o</sup>  $= 1$  et 2<sup>o</sup>  $= -1$ , ita ut e possit assignari. Sed si admittam hypothesein 2<sup>o</sup>  $= -1$ , fieri etiam 2<sup>o</sup>  $= 1$ ; ergo compatible esse 2<sup>o</sup>  $= 1$  et 2<sup>o</sup>  $= -1$ , posito  $e = 0$ , contra concessa. Eandem repetis sequens, quam falsam ostendi. Ex eo enim, quod admittam hypothesein 2<sup>o</sup>  $= -1$ , non sequitur fieri etiam 2<sup>o</sup>  $= 1$ , sed tantum  $\frac{-1 \times -1}{-1} = -1$ . Ita vides difficultates Tuas omnes dilatas. Non dubito quin, cum aliqua attentione rem perpendere velis, mihi sis assensusus. Vultu hæc vice distincte ad puncta singula respondere, et in posterum hæc serere cura rem levandam abstinemus.

Attoli Agnatus meus Letetia exemplar unum Commercii Epistolici Collinsii et aliorum de Analysis promotâ, quod Abbas Bignonius, qui plura Exemplaria Eruditiss. distribuit, Londinæ misit acceperat, ipsi tradidit. Legi illud, nec sine attentione sufficienti. Displect imprimis modum procedendi parum urbanis; accusaris statim coram Tribunali, quod ut videtur ex ipsis Actoribus et Testibus consistit, tanquam plagii reus, postea productis documentis

contra Te. fertur sententia; causa cadis, damnaris. Recensioem in Actis Lipsiensibus Januarii 1705 editam Libri Newtoni De numero curvarum tertii generis deque quadratura figurarum. Tuo stylo conscriptam promouit; imo postea Tibi, tantum Auctori, diserte imputat. Hæc recensio imprimis conquerendi ansam præbuit, bilemque movit accusatoribus Tuis, ut pote quam Newtoni inventis nimium derogare existimant. His itaque permotum fuisse Keilium, ut in Epistola in Philosophicis Transactionibus impressa, Newtono quod summ est vindicaret ostenderetque Fluxionum Arithmeticam inventam esse ante Calculum differentialem: imo hunc postea, mutatis tantum nomine et notationis modo, ab illa esse mutinatum et ita Newtono subreptum sub alia tantum facie in Actis Erud. a Te editum fuisse. Sed ut ego dicam, quod de hac re sentio, quantum quidem ex hac farragine Epistolarum constare potest, videtur Mercator primus Serierum inventor per continuam divisionem, Jac. Gregorius postea hanc materiam excolens incidit, ut apparet, primus in Circuli Quadratarum Arithmeticam  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} +$  etc. quam Tu, incensius sine dubio, quod jam ante Te fuerit detecta, tanquam Tuam in Actis edidisti, et revera Tux fuit æque ac Gregorio: invenisti enim (licet posterior) æque ac Gregorius, nam invenisse est industria, sed primum invenisse est felicitas, ut Wallisius alicubi dicit. Deinde videtur Newtonus, occasionem nactus, Serierum opus multum promovisse per extractiones radicum, quas primum in usum adhibuit, et quidem in iis excolendis, ut verisimile est, ab initio omne suum studium unice posuit, nec, credo, tunc temporis vel somnavit adhuc de Calculo suo fluxionum et fluxionum, vel de reductione ejus ad generales operationes Analyticas, ad instar Algorithmi vel Regularum Arithmeticarum et Algebraicarum inservientes. Cæpius meæ conjecturae validissimum indicium est, quod de literis  $\dot{x}$ ,  $x \dot{x}$ ,  $\dot{y}$ ,  $y \dot{y}$  etc. quas pro differentialibus  $dx$ ,  $d dx$ ,  $d^2 x$ ;  $dy$ ,  $d dy$  etc. nunc adhibet, in omnibus istis Epistolis nec vatum nec vestigium invenias; imo nequidem in Principiis Philos. Naturali ubi Calculo suo fluxionum utendi tam frequentem habuisset occasionem, ejus vel verbo fit mentio, aut notum hujusmodi unicam cernere licet, sed omnia fere per lineas figurarum, sine certa Analysis, ibi peraguntur, certe non ipsi tantum, sed et Hugenio, imo jam antea dudum Torricellio, Robervalio, Fermatio, Cavalierio, aliis usitato. Prima vice hæc literæ punctatæ compa-

rærent in tertio Volumine Operum Wallisii, multis annis postquam Calculus differentialis jam ubique locorum invaluisset. Alterum indicium, quo coningere licet, Calculum fluxionum non fuisse natum ante Calculum differentialem, hoc est, quod veram rationem fluxionum fluxionum capiendi, hoc est differentialis differentialis per gradus ultiores Newtonus nondum cognitum habuerit, quod patet ex ipsis Princ. Phil. Nat. pag. 263, ubi pro differentiis vel incrementis primo, secundo, tertio, quarto etc. aliquos potestatis ex gr.  $x^3$ , judicat ponendos esse secundum, tertium, quartum, quintum etc. terminos ipsius  $x + 0^1$  in Seriem expansæ per extractionem, nempe  $x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} 0 + \frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2} 0^2 + \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} 0^3$  etc. (intelligit per 0 incrementum constans ipsius  $x$ , quod nunc notaret per  $\dot{x}$ ). Vides autem, quod vera differentendi methodus eruit, hanc regulam Newtoni falsam esse. Nam, excepto primo et secundo termino, reliqui omnes abundant a differentialibus superioribus potestatis  $x^n$ , nam differentialis secunda non est  $\frac{n \cdot n-1}{1 \cdot 2} x^{n-2} 0^2$ , sed simpliciter  $n \cdot n-1 \cdot x^{n-2} 0^2$ , et differentialis tertia non est  $\frac{n \cdot n-1 \cdot n-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^{n-3} 0^3$ , sed tantum  $n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdot x^{n-3} 0^3$ , et ita de reliquis, et hoc ipsum est, quod in impeto meo schediasmate Actis Lipsiensibus inserto jam notavi. Sed ex eo tempore, quo hæc scripseram, animadverti (quod Agnotus meus mihi ostendit) Newtonum in suo errore perseverasse usque ad annum 1711, quo Libellus ejus, cui Titulus: Analysis per quantitatum series fluxiones, ac differentias, cum Enumeratione Linearum tertii ordinis, qui antea Tractatu Optico erat annexus, fuit recusus, utpote in quo (pag. 64) sicuti in precedente editione Tractatu Optico annexa, assertit adhuc terminos secundum, tertium, quartum etc. lupus serici  $x^n + n 0 x^{n-1} + \frac{n \cdot n-1}{2} 0 0 x^{n-2} + \frac{n^3-3n+2n}{6} 0^3 x^{n-3}$  etc. exprimere incrementa primum, secundum, tertium etc. ipsius  $x^n$ . Sed, quod notandum, in exemplari quod mihi domo misit per Agnotum meum, ibi calame ascriptis altera vice vocabam, ut: nam ubi habebantur hæc verba: tertius (terminus)  $\frac{n \cdot n-1}{2} 0 0 x^{n-2}$  erit ejus incrementum secundum etc. quartus

$\frac{n^3 - 3nn + 2n}{6} 0^3 x^{-3}$  erit ejus incrementum tertium etc.

intererit ut, scribendo nunc: erit ut ejus etc. adeo ut errorem suum non animadvertit, nisi brevi ante, et forte nomina post adventum Agnati mei in Angliam, ex quo alia quoque expasati sunt Angli. Hinc dubito, annon in Epistola Keilli ad Sloanium scripta et jussu Societatis Tecum communicata mense Majo 1711, duo paragraphi incipientes: Sit incrementum et Praetera si differentia, qui continent correctionem erroris Newtoniani, sint nunc demum intrusi in apographo impresso in Commercio Epistolico, quod non nisi post abitum Agnati mei ex Anglia in lucem prodit: Tutum est videre, an hi paragraphi in originali Tecum communicato reperiantur. Salfem constat, Newtono rectam Methodum differentiandi differentia non innotuisse, longo tempore postquam nobis fuisset familiaris. Sed cogor abrumpere haec vice; rogo vero, ut quae hic scribo, his recte utaris, neque me committas cum Newtono epusque popularibus; nollem enim immisceri hisce litibus, ne dum apparere ingratus erga Newtonum, qui me multis benevolentiae testimoniis cumulavit. Alias plura; nunc vale et fave etc.

Basilae 7 Junii 1713.

P. S. Cl. Hermannus nondum appulit, sed in dies expectatur. Nescio, in quo statu reliquerit vocationem Patavinam, aut quanta spes supersit Agnato meo ad eam obtinendam; ei nuper testimonium procuravi ab Academia Scientiarum Paris. Proceribus Venetis exhibendum.

## CCXL.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non vacat nunc discutere, quae meae doctrinae de impossibilitate logarithmorum numeris negativis assignatorum iterum opponit; si quid enim iudico, non potest facile hic controversia esse, nisi in modo loquendi. Res ipsa vero satis clara est, impossibilem quantitatum impossibiles esse Logarithmos; et duplum impossibile impossibile esse; Logarithmum denique numeri esse duplum Logarithmi radices; plura addi ad sententiam meam necesse non

putabam. Si aliter Logarithmum sumis, ut haec locum non habeant, nihil hoc ad me. Concessisti, si sit  $2^x = x$ , et posito  $e = 0$ , sit  $x = 1$ , non posse dari e, posito  $x = -1$ . Hoc mihi sufficit, nec aliud intellego, cum dico, non dari Logarithmum negativorum, et in haec mea Logarithmi definitione utique continetur, Logarithmum numeri esse duplum Logarithmi radices quadraticae. Alias tamen Tuas Annotationes examinabo. Magis naturalem potem appellandum non id, cui magis assenti sumus, sed quod notura prius est et simplicius.

Cum heri demum Tuas literas Hanovera acceperim, usque statim respondere velim, caetera differo.

Anglicanum libellum mihi oppositum nondum vidi; inveniuntur illae insulae rationes, quas afferri ex Tuis conjeicio, sale satyrico delirari. Poterant Newtonum suum in compositione inventi, Calculi conservare, sed apparet non magis, eum cognovisse Calculum nostrum, quam Apollonium cognovit calculum Vietae et Cartesii speciosum. Fluxiones cognovit, non Calculum fluxionum, quem demum, ut recte iudicas, nostro jam edito conflavit. Itaque plus iusto ei attribui ipse, et humanitatis meae hoc pretium fore.

Scribit mihi Dominus Agnatus Tuus, in recensione Lipsiensi, de qua queruntur, valde attolli Tschirhansii aventa. Ego non bene memini, sed si ita est, facile iudicas, illam Newtoniani libri recensione non esse a me; ego enim tam magnifica mihi de Dno. Tschirhausio, ut seis, non promittebam.

Uti domum reversus fuero, Keilli dissertationem manuscriptam mihi missam inspiciam, quam ego, ut par est, spresi. Volebat, credo, ille ut serram cum ipso reciprocarem. Respondi simpliciter ad amicum, hominem novum et parum versatum in Historia inventorum anteriorum, somnia sibi fingere de modo, quo me mea cognovisse putat. Jussu autem Societatis has inguas ad me missas non poteram suspicari, etsi miserit Sloanius.

Nunc primum audio Gregorio quoque attribui meum inventum magnitudinis Circuli: Hugenusi et quoque alii Parisiis testes sunt inventionis meae et modi, quo inveni. Hugeni haec de re literas adhuc inter schedas meas esse puto. Quin ipse Newtonus inventum meum Oldenburgio tunc communicatum in literis suis laudavit, modumque inveniendi meum singularem esse fassus est. Ignorabat ergo tunc inventionem Gregorii.

Satis apparet, Newtonum id egisse suis blanditiis, ut benevo-

lentiam Tuam captaret; conscium sibi quam non recto stent tibi, que molitus est. Ego tametsi nolim, ut in mei gratiam Tibi negotium faceress, expecto tamen ab aequitate Tua et candore, ut profitearis apud amicos quamprimum, et publice data occasione, Calculum Newtonii nostro posteriorem Tibi videri.

Fieri potest, ut una vel altera scheda librorum a Dno. Varignonio mihi missa perierit; sed constat et statim a me significatum est Delorinum hominem lucripetam oblati schedis libros negasse.

Velim nosse quid iudicent Parisini. Varignonium pro me stare, vix dubito; sed nonnulli alii invidia ducti libenter fortasse accipient occasionem carpendi sibi datam, sed haec, credo, a parum intelligentibus fient.

Jam a multis annis haec Anglis nonnullis, etiam insignibus Viris, vanitas est inoluta, ut captarent occasionem res Germanorum involandi et pro suis venditandi. Boylius Glauberianum inventum Nitri regenerati sibi tribuit; idem totum inventum Antilidae Pneumaticae a Gerikio habuit et tantum minuta quaedam in ejus structura mutavit, et tamen Angli, et eorum exemplo alii, verum inventorem ignorantem, Machinam Boylianam appellaverunt. Ita nunc libenter Nicolaum Mercatorem Holsatum gloria primae inventionis Serierum privare vellent, et mihi indignati sunt optini Viri et mihi amici deus vindicandi. Sic Hugenius Heurati inventum contra Wallisii oppositiones vindicavit Nello cuidam id tribuentis.

Dicis a Dno. Agnato Tuo non tantum Newtonium habuisse venditi quendam erroris sui correctionem, sed et alia nonnulla ab eo explicatos esse Anglos; haec qualia sunt rogo ut indices. Inservient enim nobis ad cautelam. Spero eis nondum immotuisse meum modum Tangentes invenendi curvarum quarundam non vulgari modo compositarum, ex quo deinde praeclaras consequentias duxisti. Nondum enim, quod sciam, publicatas puto, spero etiam cum Italo illi, cui cum Dno. Hermanno lis fuit, non fuisse communicatum.

Dominum Hermannum credo ad vos appulisse; iter ei accelerandum putem. Scripsi Berolinum mox afflere; Du. Abbatem Erdellam ex Tarragonensi Hispania Neapolim profectum non ita pridem, quidem mihi narravit Venetias nunc venisse. Quod si verum est, sperem Dno. Hermanno fuisse visum, et cum eo potuisse consilia capere pro Dno. Agnato Tuo; sin minus, Du. Hermannus

ad illum pro eo scribere poterit; ego jam ei in hanc rem Neapolim literas miseram, ut apud amicos Venetos auxilio esset. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Vienae Austriae 28 Junii 1713.

## CCXLVI.

## Joh. Bernoulli an Leibniz.

Per me licet definire logarithmum pro primo Tuo, modo non neges (quod ab initio concessisti) assumptionem unitatis affirmativae pro primo numero esse mere arbitrarium, adeoque licet unitatem negativam pro primo numero adhibere, ut scilicet supponatur  $\log - 1 = 0$ ; quo fit ut omnia, quae de logarithmis numerorum negativorum in anterioribus meis literis scripsi, bene procedant, nec tamen inde, quod metuis, sequatur, impossibile quantum fore possibiles logarithmos. Vidisti quoque, quo sensu verum sit, logarithmum numeri esse duplum logarithmi radices, et quam parum evertat existentiam duorum Logarithmicorum super eodem axe, a Te primo negatum, a me vero ex ipsa Hyperbolae natura postea demonstratum. Hoc autem unicum erat, quod volebam. Id, si mihi nunc concedas, poterit liberari, ut reliqua sint merae definitiones.

De libello Anglicano multa non habeo, quod addam jam in superioribus a me dictis. Forte invenies ipse plura, sibi ipsum libellum videris. Quid Parisini in universum de eo sentiant, nondum equidem mihi constat. Varignonium quod attinet, ille in suis literis Anglorum procedendi modum eorumque argutas in arrogando praesumptiones valde improbat; optat vero, ut in longa possessione Te non turbassent. Quo ipso mihi in mentem revocavit, communem fere sortem Tibi esse cum Principe Tuo, utpote quem iniquiores Angli dejectum cuperent a successione Regni, uti Te a possessione Tui calculi. Interim non dubito, quin Tibi etiam vindicandi supersint argumenta bene multa, tam ex privatis literis, quam aliunde petenda. Quantum mihi de rei veritate immolescit, facile judicabis nihil me celaturum, sive apud amicos, sive publice, tibi occasio ad postulataverit; nec est cur timeas aliquid blanditias a



me obtineri posse in aequitatis meae praedictum. Magni quidem facio Newtonum, ejusque benevolentiam minime contempno, sed non spero, cum aliquid praeter honestatem a me petiturum, uti certe nihil haecenus petii. Et si quis peteret vel petere sustineret, nihil responsi a me aliud referret, quam tritum illud: Amicus Socrates, amicus Plato, sed magis amica veritas.

Quae Agnatus meus Anglis communicavit, partim Newtoni Principia Philosophiae spectant, quorum nonnulla in Actis Lipsiensibus videbis, partim alia, quae ad analyticam non pertinent, ideoque in mere non debet revelatum ipsis esse modum illum singularem Tangentes inventiendi curvarum quarundam, et de differentiationis transitu a curva in curvam, hoc est, de inveniendi differentia inter duas curvas infinite propinquas, quam materiam, si bene memini, valde promovi et ad alia non vulgaria nec facile obvia feliciter applicari. Quamvis si tentaminis loco Anglis proponerentur, foret meo iudicio brevissima via ad eos obtinendum illis, si nimirum infirmitatem suam et calculi sui, cujus tantopere praetant antiquitatem, insufficientiam proderent, atque sic inviti palmam credere cogerent, quomodo problemata quaedam excoctam deberes hac sola methodo solubilia, ut inde discerent esse quaedam saltem, quae nos suo calculo fluxionum non debemus: sicuti Cheynaens quendam inepte praetavit, nihil nempe intra hos 20 vel 30 annos prodidisse in lucem, quae tunc sunt iteratae repetitiones vel ad summum levia tantum corollaria eorum, quae Newtonus jam pridem invenit, quasi nobis nihil amplius relictum fuisset, vel nullus esset pretii, quod subinde a nobis publicatum extat, et cujus in Newtonianis ne vestigium quidem videre est: quia sunt quae de Catarinis, Velaris, Isochronis Paraenitricis, Brachystochronis, de novis proprietatibus Cycloidis, de ejus segmentis innumeris quadrabilibus, de Calculo exponentialium seu percurrentium eoque differentiam modo, de Coevolutarum dimensione, de Masti tractorio, de reptorio, de Curvarum reductione ad circulares, de earum transformatione, et de innumeris aliis, quae Angli pro parte tentarunt, sed omnia suo calculo fluxionum adjuti irresoluta reliquerunt, quod vel ex solo problemate Catarinae et Curvarum transformandarum patet, cui pertinaciter et longo tempore insudantes, aliud nihil quam turpes paralogismos produxerunt. Reliqua vero nostra si spernere affectant, qui fit quod ea omnia corradere et in suam linguam convertere non didigerunt, exemplo illius Angli nobilis Des-Hayes.

cujus extat liber in folio, anglice conscriptus (nescio an videris) continens Marchionis Hospitali *Analysis* et reliqua nostra hinc inde ex Actis Lipsiensibus alisque Diariis compilata, et omnia verbatim translata. Praeterea nihil fere, vel parum admodum, de Newtonianis sive aliis, editor admisit, licet prodigus admodum sit in laudes Newtoni, nostri vero patris laudator, nec nisi in praefatione, et quidem ita, ut qui nostra non cognoverit, non facile judicatorius sit, illa quae tractat inventa ad nos magis pertinere, quam ad alios obscuri nominis, quorum integrum phalangem nobiscum memorat, et tantam multitudinem obtrudit, ut, quemadmodum persuadere conatur, plagii suspicionem a se moveat. Sed contrarium facit manifeste, dum veros Auctores et Inventores sub nube reliquorum, a quibus nihil notatus est, abscondit, et ita quod unicuique debet, subdole dissimulat. Num quid iniquus censes? Sed haec est horum hominum indoles, ut quod a peregrinis proficiscitur, eo quidem utantur et tacite laudent, sed publice vel spernant vel supprimant vel ad suos deferant.

Ceterum non denegavi Tibi gloriam inventionis quadraturae circuli per seriem  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$  etc. Huius tantum ex literis Gregoria (si non sint suppositae) patere, Gregorium fuisse primum hujus seriei inventorem; sed ipse videbis, quid hoc de re sit credendum, ubi ad manus habueris Libellum Epistolarem. Potest esse, ut Gregorius invenit prius, quod Tu postea etiam Tu morte invenisti, et inscius quod ante Te jam fuerit ab alio inventum. Interim, si per literas probare potes, ipsum Newtonum Te primum credidisse Inventorem et inventum laudasse, hoc in rem Tuum apprimè faciet, simulat enim Newtonus, in aliquibus literis in Libello isto publicatis, se non adeo magnificare hanc seriem ob segnem admodum advergentiam, et ut sibi dudum immotuisse, quod primo inventa fuerit a Gregorio.

Tandem Hermannus noster a catharro pectorali, quo laborabat, restitutus, ante octiduum iter ingressus est. Argentoratum petens, hinc Francofurtum ad Moenum, ubi non diu morabitur, sed citissime perget Francofurtum ad Viadrum, Provinciam sibi demandatam aspiciaturus. Quid de sede Patavina, discussu suo vacante relicta, constituerit Proceres Veneti, aut quid sint constituturi, ipsi aequè ac mihi ignotum haecenus fuit. Fortasse aliud a Fardella, cui in gratiam Agnati mei scripsisti, percipies. Tradidit mihi per Cl. Hermannus illi Diploma a Domino Caneo acceptum, quo

III, 2, 22

Agnatus meus in Societatem Regiam Berolinensem cooptatur, pro quo jam gratias egit Domino Cuneo per literas, per Dominum Hermannum ad eum deferendas. Hisce quidem vale, Vir amplissime, et fate etc.

Basilae a. d. 29 Julii 1713.

## CCXLVII.

## Leibniz an Joh. Bernoulli.

A Te et a Dno. Abbate Fardella literas eodem fere tempore accepi. Fardella Barcinone in Aula, me commendante, egerat, ubi rebus suis non male consuluit. Inde gravi symptomate Apoplectico percussus, et praeter spem recreatus, aliquandiu Neapoli egit, et nunc valetudinis causa Aponum ad aquas calidas prope Patavium accessit; scribit ad me Patavio 4. Augusti, Cathedralam discussu Dni. Hermannii vacuataam adhuc vacare, et operam suam promittit.

Interea aliquid in mentem venit, quod Tibi in aurem dicam. Quid, si Tibi ipsi, aucto stipendio, demandaretur sparta Patavina? Est enim, ni fallor, salarium multo pinguis Basileensis, et in Tui, credo, gratiam augetur; nec magnum adeo est ab Helvetiis ad Patavium iter, et locus credo magis conveniret Tuae valetudini, quam Germania inferior, nec Tibi Medico et Mathematico Religioso diversitas noceret. Tibi Tuis ex Fratre Nepos Basileae succedere posset. Aperui sententiam meam Dno. Fardellae, literis hodie datis, addidique nihil posse Reformatores stultis facere, quod magis faciat ad Academiae illius decus.

Addidi me Tibi in hunc sensum esse scripturum, et a Te petiturum, ut ipsi recta mentem Tuam significes, quod poteris facere aenigmaticè, si modo ei dicas, an sententiae meae accedas, vel non. Nam si refutas, dissimulabit ille consilium, et pro Dno. Nepote Tuo laborabit; sin mihi accedis, poterit ille ostendere Senatoribus Venetis Academiae curam gerentibus, quantum Te vocato ornamentis sit Academiae accessurum.

Vereor ne Dno. Nepoti Tuo nonnihil obsit iuventus; etsi enim Dno. Hermannio non oblitterit, erat tamen alius tunc habitus rerum.

et plus tunc fortasse poterat Fardella, qui nunc diu absens aliam, puto, rerum faciem invenit. Acepi Roma, cogitasse Praeeres de Mathematico quodam Roma vocando, Viro ex ordine quodam Religioso, sed nomen exiit. Ea res facit, ut lineam, re nostrae commendationes non satis validae fuerint . . . . .  
Quidquid ejus sit, experimur an consequi destinata licet alterutro modo. Fardellae significabis, ut assensu etiam Tuo intellecto, tamen rem ita gerat, ut non proeus, sed sollicitatus videatur, quod finae Tuae meritisque convenit.

Certissimum est, omnes in Anglia ad novissima usque tempora ignorasse, Jacobum Gregorium Tetragonismum meum etiam habuisse; certe ipse ejus ex Fratre Nepos, David Gregorius, hoc ignoravit, et inventum in Libro suo De Quadraturis mihi adscripsit. Ubi ad meas schedas reversus fuero, inspiciam veteres literas, quae adhuc extant, in quibus, ni fallor, manifesta erunt vestigia, Newtonum Analysis nostram parum exploratam habuisse tunc, cum aliquod ei necum per Oldenburgium commercium erat. Ego, neglecto Keilio, alisque ejusmodi Newtoni adulatoribus, hominibus obscuris, cogar Newtono ipsi exprobrare animum parum sincerum et acta testimonio conscientiae contraria; nam ipse ignorare non potest, Analysis istam infinitesimalem ab ipso ad me proficiens non potuisse, et tamen negatoribus imperitis talia asserentibus favet et indulget. Ita dum nimia, cum alterius injuria, affectat, cogit me et jam negare, quae, ex meo candore alius aestimans, nimis liberaliter concesseram, credideram assentiri, in Calculum nostrum de suo cum incidisse, quod verum non esse re diligentius excussa satis apparet.

Intelligo in Anglia esse Viros Eruditos, qui processum Viris gravibus et bonis indignum non probant. Et quod conjicis, non ab omni veri specie abest, eos, qui parum Domini Hanoveranae favent, etiam me facerare voluisse; nam amicus Anglus ad me scribit, videri aliquibus non tam ut Mathematicos et Societatis Regiae socios in socium, sed ut Tories in Whigum quosdam egisse. Sed ego exigua, credo, scheda effliciam, ut poenitent eos ingarum. Ut inter alia argumentis Tuis, sed a Te nominando abstinendo. Quod superest vale et fate etc.

Babam Viennae Austriae 19. Augusti 1713

P. S. Spero Dominum Varignonum curaturum, Te praesertim hortatore, ne quid in Gallia fiat, de quo queri possim. . . . .



blé en 1684, et que Monsieur Newton l'a donné 3 ans après dans les pages 251, 252, 253 de ses Princip. Mathem. où il reconnoit que ce Calcul lui avoit été communiqué 10 ans auparavant par Monsieur Leibnitz auquel temps il dit qu'il l'avoit aussy, ainsi que la phrase renversée le trouve, sans dire à quel point il l'avoit. Avant vous, Monsieur de Leibnitz et feu Monsieur votre Frère, je ne sçay point, qu'on eût passé les premières différences, employées dans les pages précédentes de Monsieur Newton, qui n'en a fait mention que longtemps depuis dans son Traité De Quadraturis. Je suis, dis-je, très fâché de voir Monsieur de Leibnitz forcé de se distraire de ses occupations si utiles au public, pour se défendre d'un mauvais procès dont le public n'a que faire etc."

Ex quo G. Hermannus hinc discessit, nihil amplius de eo invidimus, nisi quod Francofurtum ad Moenum transierit. Spermus autem propediem literas ab eo Francofurti ad Oderam datis. Hæc vero ut Te, feliciter emenso itinere, reducem inveniant Hannoveræ salvum et incolumem, est quod ex animo voveo et precor. Hisce itaque vale et fave etc.

Basilæe a. d. 9. Sept. 1713.

P. S. Frater Opus posthumum de Arte conjectandi evasit tandem præhumi; curabitur ut ad Te quoque exemplar ejus mittatur prima occasione.

### CCXLIX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gaudeo res Tuas eo loco esse, ut mutationem non quaeras. Quia Dno. Agnato Tuo firma spes est successus, merito prioribus inhaeremus, nec Dnus. Aldas Fardella deerit pro suo in nos affectu. Miror Du. Hermannum ne verbo quidem rerum suarum statum significare mihi, ex quo Italia exessit.

Dnum. Newtonum possitibi fuisse adulatorem, et nugacorum conjecturas de meis reperitis comprobasse, quas non fundatas esse haud poterat ignorare. Certe quæ Keilus ad me miserat, et quæ publice repetisse intelligo, erant plena ineptiis, mihi quæ refutatione indigna videbantur.

Vellem doctrinam Serierum, in qua potissimum versatus fuit

Newtonus, promovisset longius, imprimis circa modum agnoscendi, utrum advergant, qui transcendentes aequæ ac ordinariis quadret. Ita enim multa in transcendentes agnosci possent, quæ alias non facile paterent. Ideo Dominum Agnatum Tuum hortatus sum, ut hinc argumento diligentius incumbat, repetite montium in adjecta Epistola, vel ideo quod ille de mente mea ex priore præcipientium judicavit, cum explicationem verborum meorum convenientiore, credo, mereretur.

Universalissima (id est ordinariis aequæ ac transcendentes quibuscumque communis) hæc regula est, ut omnis valor per Seriem sit advergens, cum partes Seriei in infinitum decrescentes sunt alternis affirmativæ et negativæ. Et videtur methodus excogitari posse, quâvis Seriem advergentem transformandi in talem, quamquam et alias vias valeo, sed quæ amplius excoli mererentur.

Nihilne ad Te Moivrasus scribit de inimicibus Newtonianorum, vel Burnetus, qui hoc anno fuit nonnihil implicatus negotio molesto, quod libellum Aulæ ingratum protulisse diceretur. Nam pater ejus, Episcopus Salsburgiensis, qui super obiit, erat in partibus Aulæ adversus.

Gratias ago, quod Dni. Varignonii sententiam sane æquitati consentaneam mecum communicasti. Et qui item ab Anglis mihi notam in Diario Parisino attigit, merito irritis iudices in propria causa.

Non est cur Dnus. Varignonus vereatur, ne hæc lis me magnopere turbet, aut tempus mihi perdat: excitabit potius ut aliquid melior, aut quod molitius sem, perficiam, a quo fortasse alias abstinuissem. *Ἐπιπέδου δ' ἴσως ἴδε βεβαιώσας.*

Non parvi momenti est, quod notas, errorem Newtonianum circa determinationem medi, cujus resistentia data curva describatur, etiam ex non bene intellecta ratione subdifferentiarum profectum esse.

Hugenius etiam ad marginem Exemplaris sui quosdam in Newtono errores notaverat, ut mihi narravit, qui in Batavis Exemplar vidit, cum Bibliotheca Viri distraheretur. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Viennæ 25. Octobris 1713.

P. S. Gratissimum erit libellus Domini Fratris Tui p. m. de Arte conjectandi.

## CCL.

## Joh. Bernoulli an Leibniz.

Nescio an Agnato aliqua spes successus supersit; ex quo enim a Michellotto literas accepit, in quibus multa promittebat, nihil amplius ab eo in hunc usque diem intellexit; pariter responsi nihil accepit ab Abbate Fardella, ita ut de felici eventu junjam desperare incipiamus; fortasse Tibi quid certius ea de re constat. Quod ad meas res attinet, fateor eo loco illas esse, ut mutationem non facile permittant, eam tamen, si quae sese offerret, avidissime arripere praesertim si fructuosa foret; habeo quippe peculiares mutandi causas, quas nunc aperire non attinet. Utinam ex Batavis nunquam migrassem! utinam praevidissem olim, quae nunc video atque praevideo!

Dn. Hermann Pater mihi dixit, se a Filio suo intellexisse, quod Francofurti ad Oderam feliciter appulserit et paucis post diebus suam docendi Provinciam auspiciatus fuerit ab Oratione quadam inaugurati: ante abitum ex hoc loco ad Te literas misit, nisi vehementer fallor, quas vero intercedisse oportet si non acceperis.

Tecum sentio fore ut aliquando poenitet Dn. Newtonum, quod tam faciles aures praebuerit adulatoibus; consultum interim erit, ut quam respensionem modis contra Commmercium Epistolicum, mature absolvas et in publicum edas, ne ob retardationem gloriam causam habeant. Inprimis Keylius et Chevaneus mereri videntur, ut probe defricentur, omnium quippe Idololatorum Newtonianorum accerrimi et in Exteros inquisissimi. Sed vereor, ne non vacare possis hunc negotio, antequam ad Lares Tuos redieris.

Bene mones de Doctrina serierum, multa per eas agnoscere posse in Transcendentibus, quae alias non facile paterent; Agnatus meus qui ob negotia quaedam extra urbem agit, super hoc argumento ad Te scribet; interim nescio, an demonstrari possit quod asseris, omnem valorem per seriem esse advergentem, per consequens finitum, cum partes seriei continuo decrescentes sunt alternam affirmativae et negativae.

A longo jam tempore nihil literarum accepi a Moivrao et Burneto, quamquam uterque respensionem mihi debeat, sed aliunde audivi Novam Editionem Princip. Phil. Nat. Newtoni jam a 4 aut 5 mensibus publice prostrare; eam vero nondum vidi, etsi aliquis An-

glas ejus exemplar ex Galia mittendum quam primum acciperet, mihi promiserit. Quem notavi errorem Newtoni circa determinationem medi, cujus resistentia data curva describitur, correxit in Nova Editione, antequam publicaretur, per interpolationem alicujus schedae idque ex monitu Agnati mei; reliquos errores suos potuit etiam corrigere ex scripto meo, quod publicavi in Actis Lips. sub initium hujus anni et quod ille vidit aut sane videre potuit, antequam lucem aspexisset nova ipsius Editio; sed sicuti priorem correctionem ita inseruit, quasi a semet ipso haberet, nulla facta mentione mei vel ejus, a quo fuerit monitus, ita haud dubie, quod ad caeteros, eadem sinceritate egit.

Errores illi, quos dicit, Hugonium ad marginem exemplaris sui in Newtono notasse, sunt forte non alii, quam qui jam dudum publice extant ad calcem Historiae Cycloids a quodam Groningio Wisnariensi editae; forte etiam ab ipso Groningio Tibi hoc narratum fuit, non et mihi narravit, cum ex Batavis veniens Groninga transiret et in transitu Gradum Doct. Juris capesseret; sed nihil eorum omnium, quae ego notavi in Newtono, ab Hugonio notatum fuit. Et certe haud valde magni momenti sunt notae Hugoniae, postretque Newtonus gloriari, si caetera omnia in opere suo recte se haberent.

Carabinus ut in Nundinas Lipsienses vel Francofurtenses mittantur ibique Biblioplae Hanoverano tradantur, si quae aderunt Tibi destinata juxta Libellum fratrum de Arte conjectandi. Quod superest, vale et vive etc.

Bastiae a. d. 6 Decbr. 1713.

## CCLL

## Leibniz an Joh. Bernoulli.

Scripsi ad Fardellam, etsi restitisses, mihi tamen spem submatam, si honorificae satis conditiones offerrentur, posse Te Patavinis vindicari, quo nihil in hoc genere a Republica fieri posset gloriosius.

Dno. Hermanno tandem literas Francofurti-Oderano accepi, sed ex quibus non intelligo, utrum mihi antea scripserit, ex quo Italia discessit.

Ipsæ, ubi animum attenderis, facile animalvertes, omnem valem per seriem esse advergentem, per consequens finitum, cum partes seriei continuo decrescentes sunt alternationis affirmativæ et negativæ. Et ecce demonstrationem:

$$\text{Sit Series } \underbrace{a - b + c - d + e - f + g - h + i - k + \text{etc.}}_M \text{ cu-}$$

jus termini decrescant in infinitum, ita ut quavis sit minor proximæ antecedente.

Dico 1<sup>o</sup>. quantitatem ejus esse finitam, et 2<sup>o</sup>. Seriem portionem ab initio sumtam terminatam per +, verbi gratia L, esse majorem Serie ipsa, at 3<sup>o</sup>. portionem ab ipso sumtam terminatam per -, veluti M, esse minorem Serie; sed 4<sup>o</sup>. errorem semper esse minorem, quam terminum ultimum aut ultimo proximum signo - affectum, et 5<sup>o</sup>. Seriem finitam continuatam esse advergentem ad infinitum.

Seriem vocetur S. Primum L est major quam S, quia ex L fit S, plus subtrahendo (nempe f, h, k etc.) quam addendo (nempe g, h, i etc.) quæ fuit Assertio secunda. At M est minor quam S, nam ex M fit S plus addendo (nempe g, i etc.) quam subtrahendo (nempe h, k etc.) quæ fuit Assertio tertia. Quare S cadit inter L et M, adeoque est quantitas finita, quæ fuit Assertio prima. Sed error seu differentia ipsius S ab extremis L et M est minor, quam differentia extremorum (nempe f) secundum Assertionem quartam. Continuandoque quantum lubet, f est minor data ex hypothese; itaque habetur et Assertio quinta.

Judicio Tuo pro me usus sum, sed nomine Tuo suppresso; atque ita ut indicio non sit, Te esse Autorem ejus; dico, ita judicasse Mathematicum insignem, et qui partialitatis accusari non possit. Sed ut Apologiam justam edam, opus est ut Commentarium ipsum Epistolico videam, et cum meis schedis conferam. Fortasse recudi curabo auctus.

Nescio an in eo Commercio, quod nuper Londini edidit, repentantur eæ literæ, quas Wallisius, me consentiente, edidit, et quæ satis manifeste Newtonianam præntensionem destrunt.

Keilias vix meretur ut nominetur, homo enim vanus gloriolum me impugando quæsisse videtur. Velim nosse, an Cheynaens se negotio immiscuerit.

Newtonus multis modis effecti, ut jam de candore ejus, adde etiam de Propositionibus dubitare cogamur. Debebat agnoscere, per quem proficisset. Ajunt doctrinam de explicando motu Planetarum per simplicem trajectionem combinatam gravitati, ab Hookio jam propositam fuisse. Paralogsimi, quos in scriptis ejus notasti, faciunt ut dubitare cogamur, utrum recte numerum Curvarum tertiæ gradus determinaverit. Digna foret disquisitio illa cura Dni. Agnati Tui, quem consilio Tuo ad profundi ejusmodi eranda juvare posses. Gratissimam etiam mihi rem et in publicum utilissimam faciet, si in Seriebus porro elaborabit, quarum doctrina multum adhuc abest a perfectione. Quod superest, vale et fave etc.

Itabam Viennæ 10 Januarii 1714.

P. S. Scripsit ad me Dnus. Hermannus, Hanoveræ jam agere Nobilem Venetum Venier, amicum Procuratoris Lorelani, Academiae Curatoris, et per eum juvari consilia nostra posse. Statim scripsi Hanoveram ad amicum, ut si illic esset Veneris, significaretur illi, quanta sit laus, quanta merita Gentis Bernoullianæ in rem mathematicam, quæque res ad gloriam sua Republicæ pertineat. Peto ut inclusas ad Dominum Scheuchzerum cures.

---

## CCLII.

### Job. Bernoulli an Leibniz.

Acceptimus nuper, Agnatus meus et ego, literas ab Abbate Fardella, in quibus quod ipsi de me scriperas significat, sciscitaturus, num, si conditiones honestæ et laudæ satis mihi offerrentur, eas acceptare vellem, urgebat ut ipsemet ego eas perscribam, promittens se omnem lapidem mistorum, ut Proceres Veneti in eas consentiant, ita tamen ut hoc non noceret Agnato meo, si forte ego recusavero; quare spem de novo concepimus felicioris successus. Respondimus nos ambo Dno. Fardellæ sine mora hunc circiter in modum: nos scilicet gratias agere pro summa quæ est erga nos benevolentia, ipsi tempore proin rogatos nos velle, ut in hoc affectu perseveret atque inceptum opus absolvat; me quidem magnas habere difficultates superandas, cum sim uxoratus atque sex liberorum parens, impeditus numerosa familia atque aedes propria inhabitans; me vergere ad quinquagesimum annum, quæ æ-



a *Manoevre des Vaisseaux*, quem ante Pascha praelum evadere spero, ita ut ad Nundinas Francofurtenses pro Te exemplar mittendi tempus superis. Huic scriptioni ansam dedit Renaldus Gallus, Eques et Ingeniarius Navalis, qui circa medium anni superioris ad me misit libellum, in quo litem exoletam, quam olim habuit cum Hugenio, refricavit atque contra Objectiones Hugeni- nas alter quam olim, sed non magis feliciter, Theoriam suam vindicare voluit. Respondi Renaldo, sed damnando ipsius opi- nionem, aliumque errorem maximi in hac re momenti ostendendo, quem ipse Hugenius non animadverterat: quam itaque jam antea excogitaveram novam Theoriam novasse pro ea regulas, quales Hugenio construendas in se suscipere non ausus est, in singula- rem Dissertationem redegi, Tibi, ut spero, non disciplituram.

Dn. Scheuchzerus Senior, Professor Mathesis Tigurinus, cui literas Tuas illis quas ad me scripsisti inclusas, transmisit, post- quam per 20 annos Professionem sine salario administrasset, nunc cum in demortui alicujus locum succedere ejusque salario, si Decreti, gaudere debuisset, spe sua exiit: quare animo de- jectus anhelat stationem extraneam. Sicubi aliquam ipsi procurare posses, operam Tuam non male collocares: est enim Vir multi laboris et scribendo et observando, sed cui, ob fortunae temi- tatem et facultatum angustiam, multa desunt ad studiorum promo- tionem: cum itaque curvae Tuae commendo, Vale et fave etc.

Basildae a. d. 28 Febr. 1714.

### CCLIII.

#### Leibniz an Joh. Bernoulli.

Hoc momento literas Tuas accipio, ac statim respondeo, quia Dn. Cognatus Tuus ait, mittendum esse Francofurtum Libellum Dni. Fratris Tui p. m. si indicem, quis ibi recipere debeat. Et cum tempus instet, significo posse ibi dari Bibliopole Hanoverano Forstero, vel alicui alteri Brunsvicensi aut Hanoverano Mercatori. Quod si ergo missus est jam Francofurtum liber, de quo non du- bito, per literas significari fortasse adhuc poterit, cui tradi debeat, nisi forte id jam factum est. Posset fortasse etiam in Lipsienses Nundinas pari ratione mitti. Gaudebo simul videre praelarum

Tuum, haud dubie, libellum De Navibus regendis, Caetera ad Te et Dn. Cognatum Tuum scribenda, ob brevitetem temporis, dum cursor publicus instat, in sequentes differo.

Est Hanoverae quidam Dnus. Venier, Nobilis Venetus, cujus Frater, ut intellexi, aliquam in rebus Patavinis auctoritatem habet: huic etiam causam Dni. Cognati Tui commendavi. Putem Doctrinam Serierum absolutam majoris momenti fore, quam prima fronte videtur. Quod superest, vale et fave et Dnum, Cognatum interim a me saluta etc.

Dabam Viennae 31 Martii 1714.

### CCLIV.

#### Joh. Bernoulli an Leibniz.

Mitto ecce Forsteri Chirographum de accepto fasciculo, in quo continentur *Ars Conjectandi*, Opusculum Fratris mei post- huumum, et *Manuaria Nautica*, a me super edita: Tuum nunc est Fasciculum repetere a Dno. Forstero. Cl. Wollius mihi misit non ita pridem Tomum primum sui *Cursus mathematici*, et cum eo plura exemplaria schedasmatis continentis responsionum Tuam (nam Tuam esse dicit Wollius et publice extat in Diario illo Germanico: *Büchersaal*, quod Lipsiae imprimitur) meque roga- vit, ut ea inter Mathematicos mihi notos distribuere, quod equi- dem jam feci, praesertim in Galliam non pauca misi: sed in Angliam mittere nulla volui, ne me Angli pro Auctore suspicerent hujus Responsionis, aut saltem illius Epistolae, quam inseruisti, Si Tibi ad manus fuisset scripta et literae inter Te Anglosque olim reciprocae, invenisses fortasse plura et fortiora argumenta in usum Tuum facientia: quales enim haec Literae extant in Commercio Epistolico, quaedam earum valde suspectae videntur, si non omni- nino conflictiosis, saltem alterationis et falsificationis. Eo aliquid exemplum: „Pag. 25 Commercio Epistolico habetur Epistola Jacobi Gregorii ad Collinsium 15. Februarii 1670 data, ubi haec leguntur: Quod attinet Newtoni Methodum universalem, aliqui ex parte, ut opinor, mihi innotuit, tam quoad Geometricas quam Mechanicas curvas. Nihil tamen minus ob series ad me missas gratias ha-



beo, quis ut remunerem, mitto quae sequuntur. Sit Radius =  $r$ ,  
Arcus =  $a$ , Tangens =  $t$ , Secans =  $s$ , et erit

$$a = 1 - \frac{r^2}{3r^2} + \frac{r^4}{5r^4} - \frac{r^6}{7r^6} + \frac{r^8}{9r^8} \text{ etc. eritque}$$

$$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} \text{ etc. et}$$

$$s = r + \frac{a^2}{2r} + \frac{5a^4}{24r^3} + \frac{61a^6}{720r^5} + \frac{277a^8}{8064r^7} \text{ etc.}$$

Sit nunc tangens artificialis etc.

$$\text{Jam quod spectat ad primam seriem } a = 1 - \frac{r^2}{3r^2} + \frac{r^4}{5r^4} - \frac{r^6}{7r^6}$$

etc. potest esse, ut ea nunc demum ab Editore Commercii Epistolici hinc Epistolae Gregorianae fuerit callide inserta, ut Tua quadratura Arithmetica Circuli =  $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$  jam ante a Jacobo Gregorio communicata adeoque inventi gloria non Tibi, sed Gregorio deferenda dici posset; probabilem enim reddidit hanc conjecturam locus quidam, in quem nuperinae incidi, legens in Davidis Gregorii Exercitatione Geometrica de Dimensione Figurarum, impressa Edinburgi anno 1684, ubi haec diserta habentur verba: „Fortassis notatu erit dignum, hinc consecuti Praestantissimi Geometrae Gathofredi Gilberti (Guilhelmi) Leibniti Circuli Quadraturam *Transact. Phil. Mensis Aprilis anni 1682* editam, si nempe ponatur  $DA = \frac{1}{2}$ , arcus  $AF$  45 grad. erit  $AC$  etiam  $\frac{1}{2}$ ; unde erit sector  $DAF = \frac{1}{2} DA \times AF$  arc. =  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \text{etc.}$  ejusque octuplum, nimirum Circulus, cujus quadratum circumscriptum est 1, erit  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \text{etc.}$  in infinitum.

Ergo David Gregorius assertit Tibi primae inventionis gloriam. Quis autem tam verors esset, ut putaret, Davidem hoc fecisse in praejudicium Jacobi, Patris sui, cujus inventum, si Inventor fuisset, ipse ignorare non potuisset, depraedicans alioquin singulis fere paginis ejus Methodos et Series, fatensque ab initio suae Exercitationis se nactum fuisse post mortem Patris sui ejusdem adversaria, in quibus utique reperturus fuisset seriem Tibi ab Anglis controversam; si vel maxime Jacobus vivens eam clare voluisset Davidem; quod tamen minime verisimile est, nam ne umbram quidem verisimilitudinis haberet, si quis diceret Jacobum Gregorium studio abscondidisse Davidi, sanguine sibi proximo, quod cum Collinsio, homine ad se nihil pertinente, tam liberaliter communi-

caverit? Quae cum ita sint, nescio quid sentiam de eo, quod habetur in Epistola quodam Oldenburgi ad Te scripta d. 15. Aprilis 1675, et Commercio Epistolico inserta pag. 39, in qua nempe haec verba reperio: „Et conversim ex tangente invenire arcum quod  $a = 1 - \frac{r^2}{3r^2} + \frac{r^4}{5r^4} - \frac{r^6}{7r^6} + \frac{r^8}{9r^8} - \text{etc.}$ “ Forsitan haec

ab Editore Commercii Epistolici nunc sunt per fraudem intrusa; quare operae pretium esset, ut autographum ipsum inspiceret; talem enim si dolum detegere posses, actum esset de candore Adversariorum Tuorum, et nullam fidem amplius inveniret narratio illis satis speciosa, quam contextunt et per epistolas ubique perant. Incumbit igitur Tibi, ut montes publice, has epistolas fuisse corruptas et adulteratas, adeoque reliqua omnia esse sublestae fidei. Haec me iudice brevissima est via confundendi Antagonistas eosque ad turpe silentium redigendi.

Ex Gallia intelligo Fontenellum, Academiae Secretarium, scribere librum de infinite parvis et magnis, quem brevi absoluturus sit. Caeterum ab Agnato meo quam officiosissime salutaris, Vale, Vir Amplissime, et fave etc.

Basileae a. d. 23 Maji 1714.

## CCLV.

### Leibniz an Job. Bernoulli.

Pulcherrima Tua de Phoronomia novium dissertatio tandem ad me pervenit, postquam conversio rerum Britannicarum redditum Hannoveram meum acceleravit. Praeclara edis specimina Artis Analyticae in re maxime utili haerant generi. Et spero futurus, qui Tabulas condant, quales proponis, quibus calculis subleventur. Equidem distractissimus negotiis et laboribus diversi longae generis, non aliter legere potui librum tuum, quam ut solemus historias vel Romanicas, nec figuras cum verbis conferre, ut ratiocinationum plicas evolvere licuit; tantum tamen in his rebus tribus ingenio judicioque Tuo, ut non dubitem, summam rei Tuo studio recte esse explicatam. Placuit etiam quod magni utique viri, Christiani Hugenii, et iudicium vindicasti et defectus supplvesti. Eleganter etiam notasti objectionem Renalbinum similem esse illi,

qua Vannius olim, Jesuita Italus, regulam plani inclinati impugnat. Cum Britanni nuper praeonium ingens longitudinum invento; constituerint, fortasse dabunt operam, ut caetera ad rem nauticam pertinentia accuratius elaborentur, Tusque profundae meditationis in consilium adhaerentur.

Mihi illic Viri praecleari adulatorum Newtoni temeritatem parum probant. Cl. Camberlanus (celebris Statu Magnae Britanniae novissime edito) cum literas quasdam ad se meas in conventu Societatis Regiae ostendisset, quibus male mecum actum esse querebar, misit ad me excerptum ex Protocollo Societatis ea de habito, quibus negant item a se decisam, neque viam esse praclusam agunt ei, qui aliquid relationi Commissariorum (male proinde pro sententia Societatis editae) opponere velit.

At Keilius interea Gallicum quendam libellum edidit, quibus inter alia errorem, quem in Newtono deprehenderas, renovere catur frustra.

Mihi consilium est, edere aliquod commercium literarum meum, unde apparebit, quam in aliis quoque Newtonus olim tenuis fuerit. Et quia video, ex Collinsianis homines partium studio deditos ea suppressisse, quae Newtono minus placere debere iudicabant, sollicitabo ut ea ipsa quoque producant. Dabo etiam operam, ut quaedam etiam, in quibus Newtono aquam haerere scis.

Fieri potest, ut Gregorius etiam invenerit seriem, qua arces circuli exprimitur per tangentem, quamquam meas schedas (quarum pars vel perit vel latet) nondum omnes excutere licerit: nec potum . . . homines quantumvis iniquos falsificare literas Gregorii vel Collinsii, sed arbitrator mihi non fuisse communicatam hanc Gregorii seriem, nisi tunc cum meam jam in Angliam misissem. Itaque cum varias series Gregorianas et Newtonianas acciperem, credo me iudicasse hanc inter caeteras post meum initium relatum. Certe Newtonus ipse in suis literis ejus inventionem tunc mihi tribuit. Itaque de Gregorio, inventionis particeps nulla ad me suspicio pervenit. Ubi vacavit haec minutatim excutere, inspiciam etiam, an Keilius in sua scheda olim per Secretarium Societatis jam correctum dederit errorem Newtoni.

Cum a multo tempore nihil a Dno. Hermanno, vel ab Amicis Venetis viderim, nescio quo nunc sit loco negotium Professionis Mathematicae Patavinae. Hermannus verebatur, ne Polonus favore quorundam Nobilium Venetorum subnixus Brabium auferret.

Si res adhuc integra est, nulla re magis capi possunt Veneti, quam fama scientiae motus aquarum, quae in ea Republica merito maxime momenti habetur; itaque optaveram doctissimum Dominum Nepotem Tuum huc incumbere, et quae in hanc rem dedere Michelius et Guilhelmius accuratius examinare, eos cum tractasse rem puto superficiei tenes, et *de la vitesse*: a Te aditus longius hui, quam quisquam.

Dominus Schematzerus iter Russicum excusavit, retentus a sua Republica cunctose beneficis. Vellem in aliquot annos Virum Magno Principi commensurare statuissem. Ita rem juisissent publicam, nec suis commodis obstitissent.

Annum quem nosx infimus aliorumque multorum seriem Tibi felicem obtinere Tusque ex animo precor, ut quam dantissime de republica bene mereare. Vale etc.

Datum Hanoverae 30 Decembris 1714.

## CCLVI.

### Job. Bernoulli an Leibniz.

Postquam longo tempore nihil abs Te respondi accepissem, cupis equidem silentii causam ignorabam, tandem, magno meo gaudio, literae Tuae, ultimo anni superioris die datae, ad me sunt perlatae, ex quibus prosperam Tuam valetudinem (quam Deus per hunc pluresque alios secuturos annos sartam tectamque conservet, bono universae Reipublicae Literariae, quam hactenus tam insigniter inventis scriptisque Tuis exornasti) valde laetus collegi. Gratum fuit intelligere, traditum Tibi fuisse neque displicuisse libellam meum Gallicum De praxi Nauticae. Optassem vero, ut cum aliqui cum attentione legere Tibi licuisset, quo sententiam ferre potuisses de lite, quae hac in re etiamnum intercedit mihi cum Dno. Renaldo, quem omnibus meis rationibus, partim in Libro meo, partim in variis literis, quas ad objectiones ab eo mihi motas diluendum ad ipsum perscripsi, ab erronea opinione sua nondum avellere potui. Sed vereor ut candida mecum agat, dubitoque annon ex obstinatione potius, quam ex nondum agnito errore noisit arma abjicere: aliquis enim amicus Parisiis ita mihi scripsit, quasi Renaldum punderet fateri er-

roneum esse, quem publicavit jussu Regis, modum tractandi praxim nauticam, et quasi ipsi, tanquam hujus artis Magistro, imo per longos annos Navis praefecto, esset ignominiosum erroris argui et convinci ab Homine hujus praxeos imperito et in Museo suo vitam agente. „C'est l'envie d'avoir raison" sunt verba illius amici „qui le rend si opiniatre."

Facile credam, quod postquam Screnissimus Tunc Princeps Magnae Britanniae thronum conscendit, Societas Anglicana noluit jam haberi pro sua sententia, quod tamen ejus auctoritate et nomine prodit in Commercio Epistolico, tanquam Judicis sententia decisoria pro Newtono. Fortassis etiam Keilius suum libellum Gallicum (quem ante Reginae obitum publicavit) non fuisset publicaturus, si praesensisset optatam illam, quae paulo post contigit, conversionem rerum Britannicarum.

Consultissimum erit, quod formasti consilium, edere aliquod Commmercium Literarium alteri illi Anglico opponendum. Cum enim Angli omnia per literas et rerum gestarum historias extincere contendant, de quibus autem nobis non constat qua fide referantur, aequum est, ut et Tus producās ad Commmercium illud pertinentia, ab adulatoribus Newtonianis omissa aut dolose suppressa, quod Newtono minus favere vel placere posse judicaverint. Optatim libenter videre libellum illum Gallicum Keilii; nihil ex eo vidi, quam quod nuper noster Hermannus perscripsit, excerptum ex Diario Hagensi mensis Julii et Augusti 1714 maximum partem ad me spectans, nisi quod dicat, Keilium Te parum honorifice tractare, pariter ac Auctorem vel Auctores illius Epistolae, quae Apologiae loco pro Te in lucem prodit. Tunc Schediasma quoque circa motus Planetarum, Actis Lipsiensibus mensis Februarii 1689 insertum, sub examen revocari, in quo Keilius duos paralogismos notare molitur. Ad me vero quod attinet, agnoscat quidem errorem, quem detexi in Newtono circa determinationem resistētiaē commissum (vide Schediasma meum in Actis Lipsiensibus mensium Februarii et Martii 1713) sed multis persuadere conatur Keilius, sub examen lapsum esse, quod erroris Newtoniani originem rejicere voluerim in series ipsius, cujus terminus a Newtono pro fluxionibus vel differentia- libus superioribus adhibitos esse Keilius contra me negat, licet Newtonus alicubi disertis verbis hoc dicat, quem locum, si opus fuerit, ostendere possum, quidquid nunc dicat Keilius, vel

Newtonus ipse alive Cultores ejus, ad dissimulandum quod veram differentiaendi continuationem ignoraverit. Sed de ipso, quem indicavi, errore Newtoni mollissime loquitur Keilius, dicendo cum ex accidente irrepisse, producta aliqua tangente ad portem oppositam ei, ad quam producti oportuisset, et ideo facile fuisse errorem ejus indolis committere. Interim non addit, quod hic error, quantumvis facilis, mansisset incorrectus in nova Editione Principiorum Phil. si Newtonus de eo non fuisset opportune monitus ab Agnato meo in Anglia tum degente, cum liber jam esset praelo evasurus. De reliquis quibusdam erroribus, quos pariter notavi, nihil dicit Keilius. Caeteram mihi lepida videtur excusatio Keilii, dicentis errorem commissum esse per accidens, producendo lineam in plogam non debitam, sed debitae omnino contrariam; quid hoc aliud est, quam dicere errorem, qui diametraliter pugnat cum veritate et ab ea quam longissime abest, esse errorem accidentalem? Tandem me hortatur Keilius, ut justitiam faciam Newtono circa series, et ut publice agnoscam me in erroris Newtoniani origine indicanda errasse, quanquam Newtonus ipse tantam aequitatem non habuerit, ut in nova Libri sui editione steterit, a quo erroris sui commonefactus fuerit, cum nempē ita corrigens, quasi a nemine monitus sponte lapsum suum animadvertisset.

Recte facies, si quaedam edas, in quibus Newtono aequum haerere scis. Suppetunt haud dubie multa eorum, quae olim in ter nos agitata fuerē, et quae per communem differentialem methodum non facile obvia sunt: qualia sunt quae de transitu ex curva in curvam habuimus, quae peraguntur singulari quadam differentiaētia adhibita. Propositi olim, si meministi, publice quaedam problemata hujus generis, sed quae pro curvis dissimilibus a nemine hactenus fuerunt soluta; ea ipsi de novo possent proponi. Ex. gr. inter infinitas Ellipses super communi axe AC (fig. 183) descriptas quaeritur illa ABC, quae secans rectam positione datam, vel quamcumque etiam curvam datam LBN, relinquat arcum AB inter omnes AR, AS etc. minimam longitudine. Aliud problema foret, sed difficultius: isodem positus, determinare Ellipsin ABC, cujus arcus AB a gravi ex A decendente brevissimo tempore percurratur. Hujusmodi multa alia sunt, quae Anglis forte plus negotii facessent, quam sibi statim imaginabuntur. Ex eorum numero, quae singularem differentiaendi

et integrandi methodum requirunt, etiam hoc esset, ubi petitur modus complanandi superficies conoideas obliquas, vel quassa alias datas superficies curvas, etai non conoideas. Intellego per superficiem curvam datam, cujus singula puncta determinantur (sic ut lineae curvae datae puncta) per ordinatas tres  $x, y, z$ , quarum relatio data aequatione exprimeretur: sunt autem tres illae coordinatae nihil aliud, quam tres rectae ex quolibet superficie curvae puncto perpendiculariter ductae in tria plana positione data, et se mutuo ad angulos rectos secantia. Sit aequatio inter coordinatas ex. gr. haec  $xyz = a^3$ , quaeritur hujus superficiei dimensio, vel saltem reductio ad figuram aliquam planam. Quod attinet ad solidum ipsum inter superficiem datam et plana positione data comprehensum, ejus quidem dimensio facilius habetur, quam superficiei, non tamen omni difficultate caret. Vale etc.

Basileae a. d. 6. Februar. 1715.

### CCLVII.

#### Leibniz an Joh. Bernoulli.

Praeclarum, quantum intellego, in re nautica ex Mathesi illustranda navasti operam. Rectius talibus inventis mediocri praemia stantur, quam immensa pro inveniendis, quod non nisi multorum collatis inventis perfici potest, atque ita mea sententia, ei soli non deberetur, qui aliorum inventis tantum ultimam manum imponeret, quae est Longitudinum marinarum problema. Scriptum est mihi ex Anglia, Commissarios rei discutendae causa nominatos hactenus ne concessisse quidem; cujus ratio est, quod Parliamentum Inventori quidem futuro, sed non Commissariis providit,

Et gratis poenitet esse probum.

Optem, quando Tibi tam pulchre ejusmodi Meditationes succedunt, ut negotium aquarum currentium in manus sumas. Ea de re scripsit Guilielmus, cui contradixit Papinus. Libellus Guilielmi Latini mihi pejus videbatur, sed Italicus qui praxim attingebat, non spernendus. Huic examinari a Te, vel Te direttore, a Domino Agnato Tuo, operae pretium esset, vel Vencorum causa, ut intelligant quantum sibi defuerint. Et cum Gu-

lielmino, praeclearo quidem caetera Viro, sed in profundiore Mathesi minus provecito, non satis in hoc argumento fidam, sufficeret, gustas praechandi causa, initio notari, in quo Guilielmus rem sen non tetigerit.

Cum accepissem Newtonum mira quaedam de Deo dicere in Optices suae editione latina, quam hactenus nondum videram, inspexi et risi, spatium esse sensorium Dei, quasi Deus, a quo cuncta procedunt, sensorio esse habeat. Praeterca spatium nihil aliud est, quam ordo coexistendi, ut tempus ordo mutationum generalis sen ordo existendi incompatibilium; unde spatium abstractum a rebus non magis est res vel substantia, quam tempus. Atque ita Metaphysica hinc Viro parum subcedunt. Notavi etiam quaedam, unde apparet Dynamicen seu virium leges non esse ipsi penitus exploratas. Vacui demonstratio, quam cum assedis molitur, paralogistica est.

Perplacent quae Anglis proponi posse judicas, velut de tangentibus curvae per magnitudines arenum dissimilium curvarum determinatae. Ni fallor jam alicubi in Actis vel Diariis tale quid publice propositum. Quae etiam cum Patre egisti, et minima a puncto ad punctum superficiei ducenda, atque hujusmodi multa ex Methodis, quas jam didicere, non facile derivant. Doctrinam de aequationibus localibus trium coordinatarum, sen de Locis vere solidis, olim aggredi coepi, eorumque intersectiones seu curvas etiam non planas, sed prosequi non vacavit. Operae pretium faceret, qui studium impenderet. Viderique in eo argumento nonnulli laborasse, quae velim ne supprimas.

Paralogismus, quem mihi Keilius imputat, nihil est et redit ad modum loquendi. Cum scribat inciviliter et indecenter, a me responsum non habebit. De re ipsa agam, hominem non curabo. Quod superest, vale et fave etc.

Daham Hanoverae 9 Aprilis 1715.

P. S. Italus quidam ingeniosus, ut apparet, et in Calculo nostro versatus, misit mihi schedam adjunctam de provelenda methodo tangentium inversa. Hanc peto ut examines, et mihi cum judicio Tuo remittas. Est haec pars Mathematicae, velut illa Diophanti, ut varias aritas in nonnullis casibus utiliter adhibere liceat.

## CCLVIII.

## Joh. Bernoulli an Leibniz.

Si Tibi ardeat, quae de re nautica scripti, habeo de quo mihi gratuler; eum enim finem assecutus sum, quem intenderam, scilicet ut nihil de ea materia scripturus essem, quod a Viris doctis et judiciosis approbati non posset. Tecum sentio, quod non male actum foret, si talibus inventis mediocria praemia statuerentur, ut saltem excitarentur ingenia ad molendum aliquid pro bono publico; quis enim libenter operam suam commodabit, si praesertim ex ea nec gloria, nec lucrum, sed dispendium patius et temporis et pecuniae (ut mihi sane accidit) ipsi enascatur. Dn. Renaldus, quem ad agnitionem erroris sui vel potius ad confessionem ejus nondum adigere potui, invitis omnibus meis rationibus, tam in libro, quam in literis meis pluribus postea cum ipso commutatis, ad sollicitationem Melitensium, missus est a Rege Galli. cum aliquot navibus hellicis in Melitensium auxilium contra Turcas. Ita mea cum ipso disputatio aliquandiu sopita quievit. Sed interim Parentius, Homo Gallus arrogantissimus, ipsique quoque Gallis sanioribus odiosus, libellum meum suggillandum suscepit, primo peculiari quodam scripto quod in lucem protraxit, postea etiam in Diario Trevultensi, Mense Aprili; sed pro more suo nihil nisi ineptias mira obscuritate involutas opposuit; multa mihi imputat quae non dixi; multa praeverit, et verba mea detorquet in alienum sensum; sed, quod pessimum est, quaedam mihi furatur et sua facit, dum me refutare videtur: scilicet hoc artificio utitur, cui aliunde jam noveram, ut dissimulet plagium suum, quod quidem ob tantam, quam affectat, obscuritatem facile ipsi succedit. Etsi interim ratione civilitatis quae me tractat, conquiri non possum de ejus modo scribendis; quia est litigiosus, in hoc unico gloriam quaerens, ut lites in infinitum protrahat, novasque ex litibus serat, idque imprimis, ut audio, ambit, ut adversarios acquirat alicujus nominis et famae, ex quibus victis (nam impudentes et garruli semper vincunt, si postremum loqui vel scribere est vincere) sibi famam comparare nititur. Tamen quaedam ad Dnum. Varignonium ex annotatis meis misi, ut si e re esse autnaverit, non sub meo, sed sub alieno nomine edat, ut aequus lector videat quid de in-

genio Parentii sit tenendum. Dubito autem an sit editurus ea Varignonius, utpote qui quam maxime dissuadet altercationem, sive lecto sive aperto nomine cum Parentio inchoandam, nisi et honorem et tranquillitatem meam periclitari velit.

Pulchre quidem mones, ut negotium aquarum currentium in manus sumam: sed, ob supra memoratas rationes, non video quid me eo permovere possit vel debeat, obrutum in dies longe diversis negotiis, partim Academicis, partim domesticis aliisque: praesertim si id fieri non possit, nisi magno temporis et laboris dispendio, sed parva vel nulla prorsus spe emolumenti, et modico admodum famae augmento. Gulielmi libellos hac de re scriptos nunquam ego vidi, et de Papini contradictione nihil pater, nisi quod in Actis Lipsiensibus extat. Ea itaque omnia examinandi copia non datur. Si quidem autem Veneti mauerint me carere, quam promissam summam offerre, saepe non multum sollicitus sum de eorum favore mihi conciliando per scriptunculam hujusmodi: norunt jam satis aliunde, quid praestiterim vel porro praestare possim.

Verum est, olim partim in Actis Lipsiensibus, partim in Diariis Gallicis proposui problemata de tangentibus curvae per magnitudines arcuum curvarum determinata, et de aliis huc spectantibus: quaedam eorum soluta fuere per Fratrem meum, et Hospitalium, sed tantum pro curvis similibus, quae quidem cum meis conspirarunt extenus, sed novo rem praestitit pro curvis dissimilibus. Angli ne digiti quidem apice ea attingere veluerant, qui alias prompti satis fuerunt in respondendo, si quid ad captum suum deprehenderunt; nosti quippe quanta ferocia excepterit nostra Bullerius Anglitas, postquam tandem eo pertingere se posse putavit: nosti quam contemptum Chrysaenus nos habuerit in libello suo de Flaxionibus! Keilus nunc ejus vestigia premit.

Remitto ecce Scriptam, quod mecum communicasti, Hali illius, mihi quidem ignoti, nisi per conjecturam asserere auctim, quod ille sit vel Verzalia, hospes quondam et discipulus meus ingrattissimus, vel Comes Riccatus; prior omnia mea manuscripta vidit et excerptit, cum in aedibus meis commemoraret; alter vero eadem communicata habuit a Dno. Hermanno, eorumdem scriptorum meorum possessore. Riccatus autem, forte nescius unde Hermannus habuerit, nuper in Diario Veneto, ubi Hermannus partes contra me (licet nulla lite inter nos duos existente) agere vo-

此書乃八人字號之書因字號之誤而致此書之誤

luit, ingenue fassus est, se talia a Dno. Hermanno didicisse; sed, si verum dicere fas est, nisi alia haberemus multo generaliora, quam quae in hoc schediasmate continentur, et quae a nostris tantum vel mutando originem habent, parum sane proventa esset methodus tangentium inversa. Substitutio illa et transmutatio indeterminatarum, quae fundamentum scriptoris hujus est, nobis dudum est familiarissima. Regulae, quas dat, ad exempla sunt accommodatae, adeoque haud magni pretii: nam quodlibet exemplum peculiarem Regulam posceret. Adpersi hinc inde notulas, idem fere aliudque nonnihil indicantes. Caeterum vale et fave etc.

Datum Basileae a. d. 22 Maj. 1715.

---

CCLIX.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Has literas jam ad Te exaro in eum praecipue finem, ut commendare possim hunc, cui eas ad Te perferendas tradidi, Virum\*). Is quidem notione Anglus, sed minime Keilii aliorumque invidorum amicus, per aliquot annos meus in Mathematicis Discipulus, peculiare monstravit probavitque mihi suum ingenium, non in vulgaribus tantum, sed etiam in penitioribus nostris Analyticis. Certe in Calculo differentialium et integralium non parum profecit; habebis in eo, ubi Patriam redierit, Tuum defensorem contra invidos et malevolos, utpote, cui totius controversiae, quae Te inter et Keilium viget, statum exposui, et ostendi ipsum Keilium aliosque ex Anglis non semper bona fide et qua deceret sinceritate nobiscum agere; ac saepe verborum sensum malevole detorquere et studio res ipsas confundere, ut eo melius Lectori imponere queant; quod imprimis factum video in Keilii responsione, vel potius in Libello illo famoso, Tibi maxime injuriose in Diario Literario Hagensi mensibus Junio et Julio anni superioris edito, cujus excerpta quaedam mihi transmisit Cl. Hermannus noster. Meo quidem judicio optime feceris, si injurias

\*) John Arnold of Exon, Medicus.

istas promptissime retundas nulla rei expositione, conquisitis hunc in finem ex scriptis Tuis literis omnibusque Schedis et Actis; quo quid inter Vios actum sit, et quantum unicuique sit tribuendum et quousque quiescet, ut par est, de Inventorum gloria participet, toti Mundo constet, et ita oblatoanti Keilio os obturetur. De caetero ad praecedentes meas literas me refero. Vale, Vir Illustrissime, et fave etc.

Basileae a. d. 13 Julii 1715.

---

CCLX.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Aquam currentium argumentum eo maxime consilio suasi, ut Veneti melius intelligant quantum amittant. Sed putabam Domino Cognato Tuo id esse committendum, Te tamen dirigente.

Rectissime facis, quod Dn. Parentium suo sensu abundare poteris; videtur enim lites quaerere, et me etiam aliquoties mordere voluit. Inter alia objecit mihi, quod negem Conservationem esse continuatam creationem (quod sano sensu ferri potest) et quod concursui Divino sim contrarius, quae non in meis scriptis invenit, sed per pravas consequentias illis intulit. Respondit re ipsa potius quam verbis, dum in Theodicea naturam concursus conservationis satis explicuit. Genium viri statim agnovi ex praefatione Elementorum Mechanicorum (quod in fallor primum ejus Opus fuit) ubi dicit, se via quamdam ea demonstrasse, quam deseruerit, ubi ab aliis (Varignonio imprimis) jam usurpatam intellexisset, et novam excogitasse. Sed illa, quam pro nova vendidit, Hugeniana est, sumta ex Analogia navis, quam ipse Parentius involvit, ut alia videatur. Objecit etiam quaedam contra Harmonium praestabilitum, sed in quibus nihil responsione dignum notavi.

Recte judicasti: scriptum, quod tibi misi, profectum fuit a Dno. Riccato, ut postea didici ex Epistola quodam Dni. Zendirni, quam nunc Tibi mitto. In responsione petiti a Dno. Zendirno, ut Comitem Riccatum moderationis admoneret, quod ille Tibi tan-

quam communi et suo et Dni. Hermanni praeceptori plurimum deferat: nolim etiam in malam partem interpretetur, quod Italii speciatim problema quoddam solvendum proposuisti; quid enim habent in hoc genere Itali, quod Tibi non debeant?

Cum aliquando Viennae legerem Dni. Hermanni collationes cum Dn. Versaglia (quibus finem impositum puto) videbantur mihi quaedam monenda occurrere, sed nunc Diaria Venets non sunt ad manus.

Videntur adhuc quaedam excutienda superesse in materia conatum paracentricorum, quid nimirum fiat, si centrum ipsum est mobile.

Dn. Hermannus edet librum de motu fluidorum, in quo non dubito quin multa pulchra sit allaturus; sed dubito an excessus sit interium fluminum.

Ex adjunctis Dni. Zandrini literis, quas remitti peto, videbis hunc animum nonnihil adjeisse ad hoc de fluminibus argumentum: quo successu, ego non deliniverim.

Miror tanto proposito Longitudinibus praemio, Anglos non in eo laborare, ut perliciant Theoriam Lunae: nam si ea satis haberetur, res sic satis confecta foret, ut jam olim Johannes Baptista Morinus in Gallia ostendit, qui Commissarius a Cardinali Richelieu impetraverat. Et sane fassi sunt illi, ex Lunae motu sufficienter cognito problema solvi, sed recte negarunt rem eo usque productam, quemadmodum memini mihi Bullialdum olim Parisiis dicere. Si secundum Newtoni sententiam tota res pendet a gravitate Planetarum in se invicem et in Solem, deberet esse in potestate. Sed verendum est ne aliae adhuc causae interveniant, et hoc ipsum velle accuratius examinari, et quid ex sola illa gravitate consequatur, in Tabulas redigi, ut comparatione cum observationibus appareat, utrum et quantum inde natura disceret: hic enim fortasse propius ad hoc naturae mysterium accedere licebit. Et vero ex omnibus Observationibus Astronomicis (post satellites Jovis in ordinem reductis) nullae mihi videntur utiles, quam quae circa Lunam instituantur, diametros ejus apparentes et appulsus ad Fixas accurate notanda.

Legistine aliquando Dni. Hartsoekerii Conjecturas Physicas? Sunt eae quidem sic satis ingeniosae, sed plerumque, ni fallor, audaciores. Cum ante annos aliquot hoc transiret, non-

straverat mihi sua Experimenta magnetica, et omnium rationem a se redditam putabat; sed mihi longissime adhuc abesse videtur a verae rationis explicatione. Quod superest, vale et fave etc.  
Dabam Hanoverae 5 Augusti 1715.

## CCLXI.

## Joh. Bernoulli an Leibniz.

Abrupti tractationem cum Venetis, quia quod promissum erat, praestare postea volebant, non sine poenitenda temporis et sumtum in commercium istud . . . . jactura. Nunc quidem Agnatus meus de novo in scenam protrahitur, sed de feliciori successu dubito. Solent, ut videtur, nos habere ut pilas, quas aliquamdiu hinc inde jactatas tandem explodunt, Quosdam ex animi sententia loqui velim, fateri cogor, quod non admodum aegre tulerim negotium istud in fumum abisse, ideo praesertim quod jamjam sentire incipio aetatis ingravescens incommoda, quae sine dubio mutationem virtus et aetris non parum molestant, si non omnino periculosam reddidisset: Lampada nunc tradam Filio meo, natu maximo, Juveni XXI annorum, ingenio mathematico alisque dotibus satis instructo. Absolvit nuper studium suum juridicum, et in eo nunc est, ut hac hebdomada pro Licentia gradus Doctoratus disputet; quo peracto permittam ei ad externos peregrinari, quantum quid licebit pro tenuitate facultatum mearum. Spero fore ut ille Tuo auxilio et commendatione suffultus, stationem quandam convenientem invenire aliquando possit. Hoc si fieret, me adhuc vivente, vix quicquam juvenudis mihi per totam vitam contigisse arbitraret. Gratum foret, si modo ab initio occasio offeretur operam suam in privata informatione usvandi apud quendam nobilem Adolescentem, nam juxta mathematica etiam Linguae scilicet Germanicam, Latinam, Gallicam et Belgicam. Pro ea, quo polles auctoritate, et qua es erga me benevolentia, difficile Tibi non erit voti mei compotem me reddere, et qui jam sunt totus Tuus, me Tibi porro artissime obstringere.

De Parentio sentis, quod ego dudum observavi; ille scilicet data opera lites quaerit; gloriam videtur affectare ex eo, ut non-

此書係由上海圖書館藏書

nisi illustres habeat adversarios, quos dum refutare cenatur, sibi corundem inventa tribuit, et sub alio habitu, quamvis plerumque valde inepto, pro suis venditat; hoc quippe artificio plagiū celari posse putat. Vidi ex ejus Disquisitionibus (Recherches) quod Te quoque mordere voluerit, sagillando Systema Tuum de Ordine praestabilito; quemodo autem ipsi responderis in Theodicaea Tua, videre mihi nondum contigit, quia hic Liber ad manus meas nondum pervenit. Caeterum etsi Parentium indignum censeam, cui respondeam, non tamen abstinere possum, quin data occasione eum ictu ferulae perstringam; id quod nuper feci in aliquo specimine meo de Centro Turbinationis, Actis Lipsiensibus mense Junio novissima inserto, ubi notavi absurditatem et falsitatem censurae Parentianae, qua quondam Theoremata Hugoniana de oscillationibus Pendulorum exagitabat.

Remitto, ut jubes, Epistolam Dni. Zentrini. Ex ea video Auctorem, ut et Biecatum aliosque quosdam Italos velle agere simias nostras, non tamen agnoscere, quod nil faciant, nisi nostra tantum imitari. In Novissimo Tomo XXI. Diarū Veneti edidit Biecatum illum, quam in literis suis comminatus est Zentrinus, respensionem ad defensionem, quam Agnatus meus pro me ediderat in Tomo praecedenti XX. ejusdem Diarū. Responsio ista est ejus naturae, ut nesciam an Agnatus meus sit replicaturus: video enim Auctorem pruritu contradicendi laborare; nos autem cum tali homine, qui rationibus se vinci nunquam pateretur, seram reciprocare et tempus perdere vix utile esse posse judicamus.

Problematis ab Agnato Italici propositi nullam Biecatum exhibet solutionem; ejus quidem hanc dedit rationem vel potius praetextum, se scilicet non satis ambitiosum esse ad captandam gloriam ex solutione problematum, imitatus forte vulpeculam in fabula, pyra ad quae pertingere non poterat spernentem. Interim solutio ejusdem problematis, quam Tibi perscribit in Epistola sua Zentrinus, bona est et legitima, sed sine dubio eam ab Hermanno accepit, siquidem verum sit, quod Michelotti nobis significavit, Hermannum nempe solutionem nostri problematis ad amicos suos in Italiam misisse: ipse vero Hermannus forte nunquam solutus fuisset, nisi fundamentum ejus a me ipso didicisset eo tempore quo ex Italia redux iter parabat Francofurtum. Sciendum enim est, quod postquam ipsi hoc problema, sed generaliter conceptum, proposuissim, aliquot post diebus mihi dederit aliquam solutionem

sed erroneam et paralogisticam, cujus paralogismum a me sibi monstratam ingenue agnovit atque ultra fassus se nullam perspicere viam ad veram solutionem perveniendi, eam a me expectare aperte testabatur: quam etiam dedi pro parabolis, ostendendo quod curva virium existente ex parabolarum genere, etiam curva temporum sit aliqua ex parabolis; quod plusquam satis erat Hermannus ad casum illum particularem Italici propositum solvendum.

Recte statuis, adhuc quedam excutienda superesse in materia constantium paracentricorum, ubi praesertim centrum virium supponitur mobile. Sunt mihi de ea re varia Theoremata, quae juncta cum Methodo, qua usus sum in Actis Lipsiensibus 1713, Mensibus Februario et Martio, subsidia praebent ad maximas difficultates superandas. Certe Newtonus ipse alique Angli methodi ejus praestantiam agnovissent et laudarunt.

Hermannus Librum vidi hic manuscriptum, sed multa ab eo tempore se adjecisse mihi scribit. Oportet jam praelum evasisse Librum hunc, prout ex novissimis ejus literis intelligo.

Nos videtur magni momenti, quod Zentrinus habet de carvitate ripe fluminis alcujus. Nititur enim hypothesebus, ut appareat, mere precariis.

Imo perlustravi Harisoeckeri Conjecturas Physicas, ut et ejus Dilucidationes (Eclaircissement) in quibus vidi contemptum satis loquentem de Phosphoro meo Mercuriali, et indignantem Fontenello, quod nimis honorifice de eo conscriperit, sed ignosco homini, qui, cum alter Thraso, omnes provocat et de Newtono alisque eruditissimis acerbe et ignominiose jocatur, adeo ut tanto minus miratus fuerim, quod nec ulla peperit. Interim et mihi licebit hoc comparare cum Parentio, cum quo egregium Thrasonum bigam constituit.

Metuendum est ne cum morte Regis Galliarum etiam literae et Scientiae aliquod detrimentum patiantur: nisi forte gravior rerum catastrophe regno Galliae imminet, quod tempus docuit. Tu vero vale quam diutissime, et favere perge etc.

Basileae a. d. 11 Septembris 1715.



## CCLXII.

## Leibniz an Joh. Bernoulli.

Transiit hac nuper Dn. Johannes Arnoldus Anglus, Vir, ut apparet, doctus et bonus, et a Te mihi literas gratissimas attulit. Dedi ipsi aliquot exempla Schedae impressae, cui iudicium Tuum est insertum, quod adversarios non parum urit. Keilus quidem responsione indignus est, sed rem ipsam brevi narratione complecti et re erit et adicere problemata quaedam, unde intelligamus, quid ipsi possint. Cum illam novam differentandi rationem considerasses, cujus ope problemata solvantur, quale illud de minimo arcu Elliptico intercepto, excogitaveras inde applicationem quandam sic satis generalem, qua, si bene memini, problemata quaedam, quae ad differentio-differentiales descendere solent, intra differentiales primi gradus coeherent. Ego nunc non bene memini, nec in literis antiquis quaerere vacat. Te autem melius meminisse puto, itaque rogo ut si commodum est, iterum communices. Inveniet enim fortasse ad aliquod problema proponendum, cujus non statim apparebunt fontes.

Gaudeo etiam Dn. Filium Tuum Bernoullizare, et hereditarium familiae decus tueri. Mallem Physicae et Medicinae, quam Jurisprudentiae operam dedisset. Abundamus etiam bonis Jure-Consultis, sed pene caremus bonis Medicis; sed in his optimum est cojusque inclinationem sequi. Si qua se det occasio, commendabo lubens merito.

Dn. Generalis Schulenburgius, mihi a multis annis amicus, in eo est, ut conditionem Venetorum accipiat, qui ei Praefecturam rei militaris terrestri offerunt. Ipse mihi nuper scribit Vienna, Caesarem et Principem Eugenium hortari, ut conditionem accipiat. Ubi Venetias proficiscetur, quod credo mox fiet, penes Te erit jubere, si quid a me per ipsum in rem fieri posse putes. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 4. Novembris 1715.

P. S. Dni. Hermannii Librum accepi. Multa sunt bona, sed quaedam moneri possunt. Videtur nimium Anglis deferre. Problema Trajectoriae, si centrum locum mutet, tentavit; meo iudicio, non absolvit. Flamstedus mihi per amicum significavit, in Newtoniana Lunae Theoria esse quaedam falsa, quaedam incerta. Si Riccatus, ut audio, officiose et ut par est respondit, optimum for-

## CCLXIII.

## Joh. Bernoulli an Leibniz \*).

tasse erit litem cessare. Ego scripsi Zendriano, merita Tua in scientiam ipsoque Italos ejus cultores tanta esse, ut sequum videatur iudicio Tuo, quantum fieri potest, deferri. Parentio non respondi in Theodicaea. Curabo ut Injus Liholi exemplum, occasione data, ad Te perferatur. Spero Regentem Regni Galliarum, Scientiarum amantem, non passurum, ut morte Regis Respublica Scientiarum aliquid detrimenti capiat.

Ut petito Tuo satisfacerem, incunctanter perlustravi Adversaria mea, et tandem inveni Apographum Epistolae cujusdam meae, olim ad Te datae, unde hoc, quod Tibi mitto, excerptum fieri curavi, continens duas Methodos ex nova illa differentandi secundum parametrorum variabilitatem ratione erutas, quarum ope solvantur problemata circa curvas ordinatim positione datas, licet non similes, ex quibus ex gr. quaeritur ea, quae vel maximum vel minimum praestet, aut quae sint trajectivae per novam aliquam curvam, sive in dato angulo, sive in angulis data lege variabilibus. Si quid invenias, quod in usum Tuum faciet contra Keilum aliosve adversarios, gratissimum mihi erit. Latent certe quaedam in ista materia, quibus exerceri possunt Thrazaones Anglici pro Keilio militantes. Hi forte inveniunt, ex quo se non facile extricabunt, licet omni fluxionum methodo adjuvi.

Etiam mihi videtur Hermannus in Libro suo nimium Anglis deferre, adeo quidem ut Newtoni morem demonstrandi affectet per totius fere Libri decursum; unde fit ut demonstrationes, quas vocat lineares, saepissime magno legentium fastidio et fatione plures occupent paginas, cum si Analysis uti voluisset, eas quodque 3 aut 4 lineis absolvere potuisset. Videtur voluisse Libri usum extendere praeter necessitatem, nisi forte majorem inde sibi gloriam nascituram putaverit. Quae sunt alicujus momenti,

\* ) Von diesem Briefe bis zu dem vom 14. Jul. 1716 lagen die Originale nicht vor.



De Deo etiam miras fovet sententias; extensum esse, sensorium habere, et vereor ne revera inclinet in sententiam Averrhois et aliorum, etiam Aristoteli tributam de Anima seu Intellectu agente generali in corpore quovis pro ratione organorum operante. Illud etiam mihi plane absurdum videtur, quod putat machinae mundanae motum ex se desitutum, nisi a Deo subinde rursus animaretur. Haec miraculis opus habet, nec sine perpetuis miraculis suam attractionem explicare poterit.

Dominus Abbas Contius Parisiis discedens Epistolam ad me reliquit, quae mihi nunc reddita est. Ipsi jam respondeo, et ut pulsum Anglorum Analytarum nonnihil tentemus, rogo ut, quasi suo proprio motu aut amici rogato, Problema hoc illis proponat: Invenire lineam BCD, quae ad angulos rectos secat omnes curvas determinati ordinis ejusdem generis, exempli causa, omnes hyperbolas ejusdem verticis et ejusdem centri AB, AC, AD etc. idque via generali. Ita videbimus, quousque suis fluxionibus profecerint.

An excerptum ex antiqua Epistola Domini Filii Tui manuscriptum est?

Significavi Dno Hermanno, mihi non videri bene demonstratam, imo nec veram ipsius Propositionem pag. 7, quod causa gravitatis agat in omnes corporis partes: nam si misceantur aequaliter in corpore partes graves et non graves, eandem gravitatem manebit variato scilicet situ. Et si per partes corporis intelligit, quicquid ejus volumine comprehenditur, patet materiam gravitatem permanentem comprehendendi, quae ipsa gravis non est.

Dn. Hermannus erga me protestatur, se plane inscio esse natam illam cum Riccato litem, et adeo non a se foveri ut desisti sit susurus, in quo recte faciet. Caeterum et ego quaedam notavi acta ab ipso paulo aliquis erga me; inter alia loquitur de meo Theoremate compositionis tendentiarum, quasi ipse demonstraverit; sed ego in Diario Gallico veteri demonstrationem addideram eandem, ni fallor, cum ea quam afferit. Suo erga Newtonum Anglosque affectato studio nihil lucrabitur; audio enim Keilum jam in ipsum stricturas quasdam dedisse. Quod superest, vale et fave etc.

Baham Hanoverae Decemb. 1715.

P. S. Vidi quae in Actis hujus anni de Turbinatione destitit pulcherrima. Velim nosse an Tibi nota sit constructio H-

rologii turbinatorii, quale, ni fallor, Campanus Romae, alique conletere; quae Horologia id habent, ut scemum pene nullum edant, coque is conveniant, qui difficulter obdormiscunt. Vellem hanc constructionem discere.

## CCLXV.

### Joh. Bernoulli an Leibniz.

Etiam Monmortius in suis ad Agnatum meum literis inemittit ejus, quod amicum Parisinum Tibi significasse dicit, Anglos scilicet, longa recessione Commercii Epistolici in Transactionum aliqua suas contra Te argutationes iterasse. Quare necesse puto, ut nonnihil matures alterum illud, quod paras, Commercium Epistolicum priori ab Anglis edito opponendum.

Excerptum illud ex antiqua Epistola, quod Tibi petenti miseram, non Filii mei (qui in negotiis pro me ebundis absens erat ab urbe) sed alicujus ex Discipulis meis manuscriptum est. Interim ut scriptionem Filii mei et quid in Mathematicis praestare possit, videas, ecce mitto ad Te solutionem ab ipso inventam problematis de invenienda curva, omnes Hyperbolas ejusdem axis transversi ad angulos rectos secante, quod per Dominum Abbatem Contium Anglis Analytici proposuisti, in exemplum problematis illius generalis, quae quaerit Trajectoria omnes curvas determinatas ordinis ejusdem generis ad angulos rectos trajiciens. Fateor hoc problema generaliter sumptum ab Analysis illis non facile solutum iri, nisi cogitent de modo nostro differentiandi parametros, vel alias lineas quae parametrorum loco sunt, seu de transitu differentiationis a curva in curvam. Sed velm animadvertas, non omnia hujus exempla particularia aequae difficulta esse: sunt enim quae peculiari haec differentiandi ratione non indigent, ut sunt ea curvarum, ad quarum tangentes determinandas parametri variabiles in considerationem non veniunt; ex horum numero est exemplum, quod proposuisti, de Hyperbolis, utpote quae, sicut et omnes Sectiones conicae commune centrum et verticem habentes, habent eandem subtangentem pro communi ab-

scissa, quascunque habeant parametos: est enim pro omnibus (fig. 184) OF: OA = OA:OE, sic itaque timendum est, ne Analystae Angli hoc exemplum solvant per communes methodos, et postea ubi vident, rem tam facile sibi successisse, inde evadunt inflatiore et in opinione suae superioritatis magis confirmatur. Quod si tale quid futurum ex Abbate Contio mature intelligeres, quando scilicet publicatione hujus exempli a se solvendi mirarentur Angli, meo judicio non inconsultum erit, si illi statim praevenerint, Typis mandando in Actis Lipsiensibus (vel in alio, quod Tibi placerit, Diario) hanc Filii mei solutionem, ut vident eos, qui nostras methodos possident, ubi vix tyrocinium exacerint, jam in potestate habere talia, ad quae Thrasones . . . nonnisi aegre vel plane non pertinent, si praesertim alia exempla nonnihil difficiliora ejusdem problematis proposuisses, vel adhuc proponeres. Quale foret, si pro Hyperbolis ejusdem verticis et axis transversi, sed parametrorum variabilium supponerentur Hyperbolae ejusdem verticis et ejusdem parametri, sed axium transversorum variabilium: invenietur enim quidem satis facile (si dextre procedatur) pro natura curvae trajectoryae quaesitae (ponendo nunc AE, x; EC, y) haec aequatio differentialis  $2xy dx = (-2yy + cx) dy$ : haec vero aequatio, in qua c significat parametrum constantem et invariabilem Hyperbolicam, nullam adhuc admittit constructionem, concessis licet quadraturis, ob implicationem indeterminatorum cum suis differentiaibus x, y, dx et dy, quae necessario prius sunt separandae, ut constructio obtineatur. Dubito autem an Angli (quos nihil hactenus de hoc separationis negotio scripsisse vidi) in hunc gurgitem se demittere audeant. Non minus curiosum esset hoc exemplum, ubi proponerentur omnes omnium graduum Parabolae ejusdem parametri, verticis et super eodem axe descriptae a Trajectorya normaliter secundae, ita ut solus index vel exponens Parabolaram esset variabilis. Aequatio enim pro natura curvae quaesitae satis quidem simplex, sed non per viam tritam eruitur haec  $x lx dx = -y ly dy$ , ubi x et y designant coordinatas originem a vertice communi Parabolaram sumentes: integrando terminos, haec altera obtinetur  $2x lx - xx = -2y ly + yy \pm a$ , quae porro ad exponentialem reducitur  $x^{2lx} y^{2ly} = n^{ax} + m^{ay} \pm a$ .

Mihi videtur, si Hermanno placuisset dissuadere Riccato diutius litigare, litem jam diu sopiri potuisse: quod idem non ob-

scure insinuavi nuper ipsi Dno. Hermanno, eumque simul monui, ut citissime scribat ad scriptorem alicujus Diarii Belgici sub nomine Republicae Eruditorum (Republyk der Geleerden) ut reparat injuriam, quam in recensione Operis Hermanniani mihi intulit, quando excerptis verba ex praefatione, ubi Hermannus mentionem facit proprietatis alienjus circa Centrum gravitatis, quam proprietatem inventam sibi et mihi attribuit Hermannus; scriptor Diarii verba Hermanni truncata affert, eaque ita interpretatur, quasi Hermannus me plagii insimulare voluisset. An scriptor studio et ex malitia id fecerit, ut commendabilem et vendibilem redderet librum Hermanni, quippe qui typis eorundem Bibliopolarum quorum Diarium, nempe Westeniorum, excusus est, aut an fecerit quia sensum Hermanni, obscure satis illi loquentis, non perceperit, delinire jam non cupio.

Si Tibi placerint, quae dedi in Actis Lipsiensibus superioris anni de turbinationibus, habeo de quo mihi gratuler. Hugonii horologii turbinarium hinc meis meditationibus ansam utique dedit, sed de constructione hujus horologii nihil aliud mihi notum est, quam quod habetur in ipso Opere Hugonii, cui titulus: Horologium oscillatorium, pag. 155: ex quo autem facile intelligo, ejusmodi horologii ratione constructionis et dispositionis internae rotarum non multum differre a communibus horologiis, et nihil hic aliud requiri, quam ut pro Pendulo oscillante, cujus vibrationes reciprocatas motum horologii in isochronismo conservant, adaptetur Pendulum turbinans, cujus turbinationes continue sint isochronae; id quod fieri potest, si filum Penduli circumplectamur sit laminae incurvae secundum evolutam Parabolae. Sic enim sive intendatur, sive remittatur vis turbinans, adeoque sive ampliores sive angustiores superficies Conicas describat filum Penduli; erunt tamen omnes ejusdem altitudinis, et prout turbationes isochronae. Quod superest, annis hic novus cum plurimis aliis sequentibus Tibi sit felicissimus; vale et vive etc.

Basileae a. d. 13. Januar. 1716.

## CCLXVI.

Leibniz an Joh. Bernoulli.

Non sine multo applausu legi specimen Domini Filii Tui, Juvenis, ut video, magna nobis promittentis. Solutio elegans ingeniosis Scholii observationibus ornatur, dum eam etiam ad Ellipses tractatur. Caeterum a me in literis ad Dnum. Abbatem Contium Hyperbolarum communis verticis centricae mentio facta est, non quasi problema in iis consisteret, sed ut intelligeretur. Addidi enim discrete, quaeri methodum generalem. Quod si mihi suppeditare exemplum voles, quod non particulari aliqua facilitate adjuvari putes, sed ad generalem adigere, rem gratam facies. Id enim pro specimine solutionis verae Domino Abbati nominare poterō; vellem autem tale esse, ut factis evolutionibus tandem ad quadraturas reduceretur, ne dicant, ne a nobis quidem sufficientem solutionem dari posse. Quoniam revera sine nostra methodo a Te provecta (quemadmodum olim, ni fallor, animadverti) recurrendum sit ad differentias secundi gradus, nostra autem methodo inter primas consistatur. Gratum erit etiam, si opera Domini Filii Tui (modo vacet) analysin, cum vertex et parameter manent et cum Parabolae mutant exponentem, adjuceas.

Constructionem Horologii turbinatorii ab oscillatorio putem nonnihil delere differre in applicatione rotæ proximæ ad Pendulum, nam in oscillatione pendulum tendit luc illuc, seu itaque reditque, sed in turbinatorio semper tendit in easdem partes. Inde etiam turbineatione quidam uti sunt ad Horologium conciliendum, quod careret ictibus illis, qui molesti sunt aegre dormiscentibus.

Domini Michelottus mihi scripsit, se literas meas ad Dn. Generalem Schulenburgium attulisse, et cum eo de negotio fuisse locutum, neque illum defore occasione data. Putat ille Dn. Michelottus

facile deinde effici posse, ut Datus. Agnatus Tuus succedat.

Non dubito, quin ipse Tibi amplius de toto negotio scripserit.

Domini Comitis Schulenburgii Frater, cum nuper hic esset, mihi dixit ex Fratris literis, ipsum mox iter facturum in Dalmatiam, ut praesidia Veneta visat et omnia ad expeditionem instantem pararet; itaque haud scio an satis occasionem habiturus sit nego-

tium nostrum adjuvandi, ob distractiones et absentiam. Spero tamen Dominum Michelottum invigilaturum ubi aderit, ut optima ejus voluntate utatur.

Ego nunc totus sum in absolvendo magno Opere Historico meo, cujus apparatus a multis annis collecti, quod antiquitates Brunswicensis, simulque Annales Imperii Occidentis ab initio regno Caroli Magni usque ad finem Imperii Henrici Secundi complectitur. In hoc enim intervallo origines fere ignotae a me erutae continentur. Si Deus mihi iis, quae adhuc supersunt, viribus amplius uti concedit, hoc anno Colophonem imponam. Atque inde liberior, si quid temporis superest, aliis nonnullis meditationibus non proletariis absolvendis tribuam. Caeterum hic liber praesens me fere totum sibi vindicat. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 31. Januarii 1716.

## CCLXVII.

Joh. Bernoulli an Leibniz.

Habeo de quo mihi gratuler, quod usque adeo Tibi placuerit Filii mei specimen, continens solutionem problematis a Te propositi, de secundis normaliter per curvam aliquam Hyperbolis axis transversi et verticis communis, quam et Ellipsis normaliter secundis convenire monstravit. Ecce nunc, quia petis, Analysis a Filio meo conceptam pro determinandis Trajectoriis Parabolaram, in quibus, vertice et parametro manentibus, exponentes sunt variables. Communicabo (quamvis sine Analysis) solutionem exempli, quod omnia quae desideras habet requisita; nulla quippe particulari facilitate resolvitur, sed potius particulari quadam dexteritate opus est, quae non cuivis obvia erit; deinde recurrendum quoque est ad differentias secundas, quae autem per Methodum nostram ad primam reducerentur; postremo tale est, ut factis evolutionibus, arte quadam singulari ad quadraturas reduceretur, cum aliquo, nisi rite tractetur, aequatio prodert, in quo indeterminatae cum suis differentialibus intricatae adeo invicem permixtae reperiantur, ut inseparabiles videantur. Problema autem, quod duabus partibus constat, in hunc modum propono:

Problema 1<sup>o</sup>. Super recta (fig. 185) AG tanquam axe ex puncto A construere infinitas curvas, qualis est ABD, ejus naturae, ut radii osculi ex singulis singularum curvarum punctis B educti, secantur ab axe AG in C in data ratione, ut nempe sit BO:BC = 1:n.

2<sup>o</sup>. Construendae sunt trajectorye, qualis est ENF, priores curvas ABD ad angulos rectos secantes.

Solutio 1<sup>o</sup>. Esto AL perpendicularis ad AG: vocetur AJ, x; JB, y; et quaedam constans ad arbitrium assumpta, a: fiat y

seu  $JB = \int \frac{x^a dx}{\sqrt{a^2x^{2n} - x^{2n}}}$ , erit punctum B in quadam curva ABD,

quae desideratam habet conditionem BO:BC = 1:n. Quod si jam mutetur a eaque major minorve sumatur, prohibet alia ABD a priori diversa, eandem conditionem habens. Et sic infinitae construuntur curvae optatae. Quod erat faciendum pro primo.

2<sup>o</sup>. Fiat nova Curva AH habens (nominatis abscissis AM, z) applicatas MH =  $\frac{a^n}{z^n \sqrt{a^{2n} - z^{2n}}}$ , ubi a denotat eadem arbitrariam, quae assumta est pro curva ABD. In hac nova curva AH fiat area AHM aequalis magnitudini arbitrariae constanti C: secabit HM producta curvam ABD in puncto N, quod erit in aliqua ex trajectorys quaesitis ENF: mutata jam C, aliae orientur trajectorye. Quod erat faciendum pro altero.

Notetur si  $n = +\frac{1}{2p+1}$  aut  $= -\frac{1}{2p}$ , erunt curvae omnes ABD, ut et omnes CNF algebraicae (intelligo per p quævis numerum integrum et positivum). Si vero  $n = +\frac{1}{2p}$ , utrumque constructiones dependent a quadratura Circuli. Et tandem si  $n = -\frac{1}{2p+1}$ , dependent a quadratura Hyperbolae.

Constructio interna horologii turbinatorii in nihilo alio differre potest a communi, quam in applicatione solius rotæ proximæ, quae axem penduli turbinantis sine reciprocatione movere debet gyratione continua. Ingenius asserit, hujus generis horologia plura, nec sine successu, constructa fuisse. Habent, ut probe animadvertit, hoc commodi, quod careant icibus illis repetitis, qui aegre obdormiscentibus molesti sunt. Motus enim turbinationis, ut facile conjicio, sine strepitu peragitur. . . . .

Vale Vir, Illustrissime, et favere perge etc.

Basilie 11. Mart. 1716.

## CCLXVIII.

### Leibniz an Joh. Bernoulli.

Opportune literas Tuas accipio, renovata jam lite Anglicana, Newtons ipse, cum videret mihi Keilium indignum responsione haberi, in arenam descendit, literis ad Daum, Abbatem Contium scriptis, qui ad me misit. Ego respondi, et versionem Anglicae Newtoni Epistolae cum responsione me ad Du. Bernoullum misi Parisiis, Abbati Contio transmittendam, et amicis Parisiis ostendendam. Ex Gallia Tibi omnia communicabuntur, miraberis iam levibus argumentis actum, Potissimum est, me aliquoties ipsi inventum concessisse, ergo nunc salvo candore negare non posse. Respondeo, me tantam de ipsis candore tunc opinionem habuisse, ut quidvis affirmatum facile crederim, nunc dum accusationi contra me convixit, imo accedit, quam falsam novit, dubitare de ejus sinceritate coactum. Epistolam quam Tuam esse scit, ait a Mathematico vel Mathematicum affectante scriptam (par un Mathématicien ou prétendant Mathématicien) quasi merita Tua ignoret. Solum chartam, cui Epistola Tua inserta est, vocat difamatorium, quasi magis famam laedat, quam addita Commercio Epistolico.

Dominus Arnoldus mihi scripsit, Keilium in novo quodam Transactionum loco contendere, Te quoque ignorare Calculum differentialium, sed homo indignus est cui responderetur.

Caeterum Contius, qui ad partes novorum amicorum nonnihil accedere videtur, scribit Anglos facile solvisse Problema duarum Serierum curvarum invicem perpendicularium; Moivraeum enim, praeter alios, scilicet ut figeret ideas, rem reduxisse ad subtangentem; verba Contii sunt: il faut supposer la même soutangente pour la même abscisse, quae non satis intelligi. Quidquid vero sit, hoc non est solvere problema, sed ejus casum. Problema ipsum jam in Actis Lipsiensibus propositum Majo anni 1697, pag. 211, et cum Fatius insurrexisset, Maji

1700. pag. 204. Commodum autem evenit, ut exemplum a Te acceptum, quod non ita facile solum iri judicas; nihil potuit fieri accommodatius. Id tunc Contio mittam, ut habeant, in quo ideas figant, tantisper dum solutionem generalem inveniant. Interim Domini Filii Tui solutionem elegantem casus Hyperbolici vel Elliptici ad Dn. Wolfium misi, ut Actis Eruditorum Lipsiensibus inseri curet.

Operae pretium erit, inquiri apud amicos Parisiis vel in Italia, an ibi extent horologia turbinatoria: mereretur enim eorum constructio exacte cognosci . . . . .  
Quod superest, vale et fave etc.

Datum Hanoverae 13. Aprilis 1716.

### CCLXIX.

#### Joh. Bernoulli an Leibniz.

Bene se habet, quod Newtonus ipse tandem in arenam descendit, pugnaturus sub proprio suo nomine, et seposita larva.

Quidquid sit, spero nunc veritatem historicam melius detectum iri, siquidem Newtonus pro suo, quem habere suppono et confido, candore res gestas fideliter enarrabit, eorumque quae a Te producerentur, veritatem publice agnoscat.

Ex Gallia nihil aliud intellexi, nisi quod a Domino Montmortio (Frater ni fallor Remondi, qui Tecum in Commercio est) Agnatus meus literas accepit, in quibus aliquid de ea re commemorat confirmatque idem, quod de Contio habes, qui nimirum perscripsit, Anglos exemplum Hyperbolarum ad angulos rectos secundarum solvissse; quod equidem non miror, quia exemplum facillimum et a Filio quoque meo solum. Addit vero, Anglos jactare generalem solutionem problematis, sed dubito solutionem fore talem, quam desideramus. Nam si per solvere intelligant exhibere atque aliquam aequationem differentialem ex indeterminatis invicem permixtis complicatam, eorum solutio non erit perfecta, quia nulla constructio inde deduci potest, concessis licet

figurarum quadratoris. Ideoque cum forte pro solutione exempli postremo a me transmissi dederint aliquam aequationem, in qua indeterminatas cum suis differentialibus sibi mutuo intricatas observaveris, nullo modo acquiescendum erit, sed insistendum ut urgendum, ut quod superest absolvant, separentque a se invicem indeterminatas, sine quo gloriari non queant: se solviss exemplum, hoc est enim eis eorum numerum, ubi separatim ita succedit, si rite tractentur, sed hic singulari quadam arte epis est. Taylorum, subjungit Montmortius, etiam solviss prius exemplum Hyperbolarum, tum etiam jactasse, se quoque habere exempli quaedam, quae Tibi vicissim propositurus sit, relictique unum a Taylora perscriptum, quod hoc est: Determinare Trajectorias normaliter secantes curvas, quibus respondet haec aequatio  $zdzdx = 2xdz^2$ , in qua supponitur  $dx$  constans; et definire naturam harum curvarum, quibus ista aequatio respondet. Post brevem applicationem solvi hoc problema, et postea etiam solvit Agnatus meus, amboque invenimus, quod triplex curvarum species satisfaciatur aequationi isti  $zdzdx = 2xdz^2$ , nempe Parabolas, Hyperbolas et Curvas quasdam, quae sunt trium dimensionum. Quod si nunc Parabolae illae normaliter sunt secundae, erit Trajectoria aliqua Ellipsis: si vero Hyperbolae illae, habebimus pro Trajectoria alias Hyperbolas prioribus similes et concentricas: si Curvae illae trium dimensionum sint secundae, erit etiam Trajectoria altioris ordinis: sic itaque pars posterior problematis triplicem solutionem admittit: prior vero etiam triplicem, nisi per conditionem aliquam, quam Taylorus addit (quam vero non satis intelligo) restringatur ad unam aliquam simplicem.

Miror quomodo Newtonus scire potuerit, me auctorem esse Epistolae illius, quam inseri curasti chartae illi contra Newtonum publicatae, cum tamen nemo mortalium sciverit, me illam scripissse, nisi Tu, ad quem scripta est, et ego, a quo scripta est. Factiss autem expressio ista: par un Mathematicien ou prétendu Mathematicien, alium habet sensum, quam putas: potest enim etiam ita sumi, quasi Newtonus crederet, Epistolam istam esse suppositam et tanquam a Mathematico quadam conficto exaratum, revera tamen ab ipso Auctore chartae inventam et intrusam: quod si rem ita sumas, videbis par un prétendu Mathematicien intelligendum esse Mathematicum confictum et nunquam existentem.

Vellem Arnoldus locum indicasset in Transactionibus, ubi Keilius dicit, me quoque ignorare Calculum differentialem: interim parum me moveret, quod Keilius ex ira furiosus contra me deblaterat; etsi crederem, verum esse quod Arnoldus retulit, sed cum nec ex Gallia, nec aliunde simile quid audiverim, Arnoldus forte deceptus est, eo quod intellexerit Keilium alicubi dicere, me usum Serierum convergentium Newtoni non satis intelligere. Alias enim Keilius, si me dicere vellet Calculi differentialis ignarum, sibi me ipsi torpiter contradiceret, quippe qui in Diario Gallico Hsgerii, ubi contra Chartam illam, de qua supra, disputans ad me provocat tanquam ad Judicem idoneum et Calculi differentialis callentissimum, quique adeo quam optime decidere possim, annon problems illud: Data area curvae, invenire ejus applicatam (quod Newtonus jam dudum solverit idem sit, quam hoc: Datae quantitatis invenire differentialem. Praeterea alia in me cumulat elogia, quae omnia ejus sunt naturae, ut me necessario Calculi differentialis peritissimum crediderit, adeo ut vel calumniam, vel mente captus censendus esset, si nunc contrarium diceret.

Vale et fave.

Basilae a. d. 20 Maji 1716.

P. S. Scripsi ad Filium Venetias, ut de Horologiis turbintoriis inquirat

## CCLXX.

### Leibniz an Joh. Bernoulli.

Solutionem Trajectoriarum perpendicularium ad Hyperbolas Domini Filii Tui reperies in Actis Lipsiensibus.\* Adjectum est, inservere ad intellectum problematis generalis, quod ad explicandos progressus in Calculo infinitesimali inservere possit. Equidem dictum non est, per se tamen intelligitur, in generali illo saltem efficiendum esse, ut res rednctur ad aequationem differentialem primi gradus, et in specialibus reducendam rem ad quadraturas, quoties per notas hactenus artes licet.

\*) Acta Erudit. 1716 pag. 226.

Nisi Gontio problema Tuum speciale, et vidimus, quid Taylorus vel alii in eo sint praestituri.

Accepi Taylori Methodum, quam vocat, incremento-rum. Est applicatio Calculi differentialis et integralis ad numeros, vel potius ad magnitudines generales. Ita Angli equos, ut in Proverbio est, adjuvant post currum. Ego incepi calculum differentialem a numerorum seriebus, eoque utiliter usus sum ad summas serierum numericarum, et postea animadvertens in Geometria differentias et summas dare quadraturas, et multa ob incomparabilitatem evanescere in lineis, via naturali perveni a Calculo generali ad specialem geometricum seu infinitesimalem. Isti contra procedunt, nempe quod veram inveniendi methodum non habuerunt. In toto suo Libello neminem citat, nisi Newtonum. Scriptus est satis obscure, et cum ad usum venit, suarumque artium specimen exhibere vult, vix habet nisi jam dicta

Serram etiam Philosophicam nunc cum Newtono, vel quod eodem reddit, cum ejus Hyperaspita Clarkio, Regis Eleemosynario, me recipere fortasse jam intellexeris. Scis, Keilius et Praetorem\*) novae Editionis Principiorum Newtoni etiam Philosophiam meam pungere voluisse. Itaque scripseram ego forte Serenissimae Principi Regiae Walliae, pro excellenti ingenio suo harum rerum non incuriosae, degenerare nonnihil apud Anglos Philosophiam vel potius Theologiam Naturalem: Lockium et similes dubitare de immaterialitate animae, Newtonum Deo tribuere sensorium, quasi spatio tanquam organo sensationis opus habeat; inde alicui in mentem venire posse, quasi non sit nisi anima mundi secundum veteres Stoicos. Eundem Auctorem Dei Sapientiae et perfectionibus derogare, dum velit Mundum esse Machinam non minus imperfectam, quam horologia nostrorum artificum, quae saepe retendi debent aut alias corrigi; ita Machinam Mundi, secundum Newtonum et asselas, correctione quadam extraordinaria subinde indigere, quam parum sit dignum Deo Auctore. Mea sententia Deum omnia tam sapienter ab initio constituisse, ut correctione non sit opus, quae imprudentiam arguit. Serenissima Princeps Walliae excerpta hujus Epistolae Clarkio communicavit. Is scriptum contra Anglico sermone ipsi dedit, quod illa ad me misit; re-

\*) Roger Cotes.





honorem expressi. Tecum quoque sentio, praestare, ut Keilus non nometur, quam ut nominando ansam ei demus sibi applaudendi.

De disceptatione philosophica, quae Tibi est cum Clarkio, nihil ante intellexeram. Ex iis, quae refers, video nihil tam absurdum proferri posse a Newtono, quod inter Anglos non inveniat Patronos ac Defensores suos. Hi non disputant, ut veritatem tueantur, sed quia de Nationis gloria agi putant, quando vident, Magistrum suum, in cuius verba jurarunt, in discrimine causae suae sive bonae sive malae (hoc non attendunt) versari. Hinc dubito, utrum hoc tantum ab ipsis sis consecuturus, ut agnoscat Newtonum errare posse, aut omnino aliqua in re errasse. Mihi quoque dudum absorta visa est ejus doctrina de spontanea virium diminutione et tandem cessatione in mundo: siquidem per se clarissimum mihi apparet nullam vim destrui, quae non simul effectum edat sibi aequivalentem, quia nihil tendit ad sui annihilationem: effectus autem nihil est aliud, quam vis ipsa efficienti substituta, ita ut eandem virium quantitatem servare necesse sit. Dicit Newtonus alicubi in Principiis Philosophiae Naturalis, Vortices Caelestes Cartesii ideo admitti non posse, quia ob partium suarum attritionem et frictionem tandem a motu cessarent: sed jam sibi ipsi contradicit. Si enim, secundum ipsum, jactura virium in Mundo reparari a Deo, et tota Machina mundana subinde quasi retendi debet, annon et idem Cartesius in Vorticem suorum defensionem reponere posset, quod nempe, si vel maxime per attritionem partium in motu retardarentur, Deus tamen decrementum motus resarcire possit, eos quandoque per novam impulsionem in pristinam celeritatem incitando.

Significavit nuper Dominus Michelottus, Moderatores Archi-lycei Patavini tandem decrevisse, ut Agnatus meus ad docendam Mathesin invitetur, et nihil aliud superesse quam ut Decretum suum Senatui proponant ad ejus confirmationem et ratificationem habendam: monet ut se ad iter praeparat et instruat, quo sub initium proximi Novembris Lectiones suas publicas Patavii inchoare queat. Interim, quod miror, solennes literae votationis nondum transmissae huc sunt, etsi jam ante sesquimensum fere Michelottus perscripserit Moderatorum Decretum. Quod superest, vale et fave etc.

Basileae a. d. 14. Julii 1716.

P. S. Haece jam scriptis accipio fasciculum Actorum Lipsiensium, in quibus video Filii mei solutionem problematis Trajectoriarum Hyperbolarum. Adjectit Dominus Menkenius Lexicon Mathematicum C. Wolfii, et Neva sua litteraria Germanica, quae omnia legam per otium.

## CCLXXII.

### Leibniz an Joh. Bernoulli.

Gratular Domino Nepoti Tuo rem apud Venetos confectam, quemadmodum ex amici nostri Veneti literis intellexi. Quibus conditionibus et in quot annos pactum sit, discere gratum erit. Deum precor, ut res pulchre succedat ipsis commodo et publico.

Dn. Hermannus scripsit ad Dn. Wolfium, problema illud de ductu perpendicularium ad seriem curvarum non videri tam difficile, Ecce Methodum, qua solvi posse scribit, quam ex literis ejus a Dno. Wolfio transcriptam Tibi mitto, petoque ut eam examinare veis:

„Lineam rectam, quae in una eademque linea curva constans  
 „est, sed variabilis variata curva, vocabo Modulum. Differentietur  
 „curvae datae aequatio, sumto etiam Modulo pro quantitate varia-  
 „bili, et eadem aequatio adhuc semel differentietur, sed ita tamen  
 „ut  $x$  velut constans tractetur, et pro Elemento ipsis  $y$  ponatur  
 „ $dy = (dx dx + dy dy) : dy$ . Ope duarum episimodi aequationum  
 „eliminari potest Modulus, ejusque Elementum, adeo ut habeatur  
 „aequatio ad curvam omnes datas ad angulos rectos trajicientem.  
 „Haec solutio generalissima est, sed exemplo Bernoullii junioris  
 „illam illustrare placeat. Esto aequatio Hyperbolarum  $y =$   
 „ $b\sqrt{xx} - aa : a$ , in qua  $x$  sunt abscissae a centro, y applicatae, a  
 „semilatus transversum, et  $b$  semiaxis conjugatus, quem pro mo-  
 „dulo accipere oportet. Ergo aequationem logarithmice exprimendo  
 „erit  $ly = lb + l\sqrt{xx} - aa - la$ , et sumti  $x$  pro constante et  
 „differentiando fiet  $dy : y = db : b$ , sed per regulam est  $dy =$   
 „ $(dx dx + dy dy) : dy$ , ergo etiam  $db : b = dy : y = (dx dx$   
 „ $+ dy dy) : y dy$ ; qui valor substitutus in praecedenti  $dy : y =$   
 „ $db : b + x dx : (xx - aa)$  dat  $dy dy : y dy = (dx dx + dy dy) :$   
 „ $dy + x dx : xx - aa$ , vel  $- dx : y dy = x : (xx - aa)$ , seu  
 „ $aa dx - xx dx = xy dy$ , id est  $aa dx : x - x dx = y dy$ , quae  
 „est aequatio, quam Bernoullius inventi in Actis.”

Hæc Du. Hermannus; quæ si recte se habent, non erunt spernenda; eximè enim nos a necessitate adhibendi differentiationem meam extraordinariam, quæ tamen alibi usus suos retinebit. Eam suspicor nec Duo. Hermanno nec Italo illi vitiligatori a Te fuisse communicatam.

Ego pene integro octiduo in acidulis Pirmontanis magni Russorum Monarchæ asseclam egi et quanto magis hujus Principis indolem perspicio, tanto eam magis admiror. Male factum est, quod Tigurina Respublica ei Scheuchzeros non saltem in aliquot annos indulisit. Id Reipublicæ Tigurinae honorificum, Scheuchzeris autem et Reipublicæ literariæ utile futurum fuisset. A Dnis. Scheuchzeris ab eo inde tempore nihil amplius intellexi aut accépi.

Cum acidulas bibere Monarcha decrevisset, sanguinem misit misere et alii ex Comitatu, quibus idem bibendi consilium, et inter alios sacerdos Russus, quem unum secum habet. Hujus sanguis erat omnium pessimus, subalbidus crassusque. Transacto bibendi tempore, Princeps, ut est ingeniosus, experimentum profectus ex aquis sumere decrevit, sacerdotique iterum venam percuti jussit. Allatus est sanguis emendatissimus, floridus utique et quædam a sanissimo homine expectares; affui ipse, cum afferretur. Applausit Princeps non immerito; nam vix est ut soli diætæ tam brevis temporis tam insignis mutatio adscribatur. Quod superest, vale et fave etc.

Daham Hanoveræ 26. Julii 1716.

### CCCLXXX.

Jo. Bernoulli an Leibniz.

De conditionibus futuræ vocationis Patavinæ nihil adhuc nobis constat, nec in quot annos se adstringere debeat Agnatus, hæcenus est partum. Interim Cl. Michelottus de negotio isto scribit, tanquam confecto, jubetque nos securos esse de vocatione certo et infallibiliter forteque brevi subsecutura: nihil enim aliud superesse, quam notificationem Moderatorum Decreti in Senatu prærogandam: Decretum autem ipsum nondum fuisse propositum propter Turcicum bellum, in quod Senatus jam omnes suas cogitationes vertat; expectandum itaque esse momentum, quo Senatus

de rebus aliis tranquillus deliberare possit. Speramus fore ut, accepto nuntio de Turcarum gravissima clade in Hungaria, Veneti a pavore nonnihil redeant animumque resumant.

Facile crediderim, Hermanno difficile non videri (saltem in ea qua sumpsit extensione) problema de ductu perpendicularium ad seriem curvarum. Miror namque, quod non perceperis, methodum qua solvi posse scripsit, esse Tanta ipsissimam, quam ante complures annos in literis Tuis, postquam Tibi meam aperuissem, mecum vicissim communicasti; ego vero publicari, excerptum ex Epistola Tua ad Acta Lipsiensia mittens. Vid. Acta Lipsiensia Anno 1698, pag. 471. Hermannus, qui mirificum expiscandi donum habet et felicissimam memoriam revocandi ea, quæ diu ante in Libris legit, rem istam suam facere volens, habita nonnihil mutato, alius obtrudit. Si locum citatum conferes, videbis facillime potissimum diversitatem in eo consistere, ut Hermannus vocet modulum, quod Tu vocalas constantem, sed variabilem  $b$ , ego vero Lineam locum parametri variabilis habentem. Follitur autem Hermannus, quando putat methodum hanc, sive Tuam, sive suam tam facile ad omnia exempla applicari posse. Si pro curvis transcendentiibus tentare voluisset solutionem, observare potuisset mirum quantum adhuc deesse, quominus ista methodus succedat. Aliquid profecto in casu transcendentium deprehendo, quod et mihi etiamnum remoram injicit, facitque, ut nondum plenariam solutionem talemque qualem optarem, invenisse me jactare possim, saltem in quibusdam transcendentium generibus, nam in permultis aliis res mihi perpulchre succedit. Non bene memini, num aperuerim Hermanno differentiationem extraordinariam; videtur tamen probabile ob frequentem, quam habuimus, de his rebus sermocinandi occasionem. Ut enim minime sum mysteriosus, ita liberalissimus semper fui, præsertim erga Hermannum in communicando, quamvis ille subinde ita se gerat, ut meae facilitatis me ponere possit. Quod ad Verzalium attinet, meum quondam ingratum hospitem et discipulum, fateor illum hinc discessisse onustum spoliis nostris secretissimis; sed hoc solati restat, quod etsi illis abutendi satis quidem malitia, non tamen satis ingenii habeat. De eo nuper scripsit Michelottus, quod Libellum contra Hermannum ediderit iniprius pleburo, in quo Te quoque, non minus ac alios Mathematicos, quos Ultramontanos vocat, sugillet, et quidem hisce verbis: Si Italia non produ-

此書係由大英圖書館購得

xisset suos Galilaeos, suos Borelios, suos Caval-  
rios, Ultramontani nullos vidissent Wallisios, New-  
tonos, Leibnitios. Sed non meruit, ut ipsi responderetur.

Accepi tandem Taylori Labellum. Quid, bone Deus, sibi  
vult scriptor sua affectata ista caligine, qua involvit res quoque  
sua natura clarissimas? Haud dubie, ut tegat sui furandi studium;  
quantum enim capio, quantum sapio, nihil nisi res nostras nobis  
surreptas ibi observo per densissimam obscuritatis nebulam. Quae  
de Isoperimetris habet, Fratri meo debentur; quae de Catenariis,  
Velariis, Linteis liquore plenis etc. tradit, a me habet. Et, quod  
novissimum est plagium, sub finem Libelli proponit methodum de-  
terminandi Centrum oscillationis in pendulis compositis, quae tota  
desumpta est ex nova mea Theoria Actus Lipsiensibus 1714 inserta.  
Atque haec omnia ita profert scriptor, quasi ex propria penu de-  
prompsisset. Nemo interim ex Anglis illis, justis verique vindici-  
bus, reperitur, qui contra hunc plagiarium clamitet; nemo qui  
nobis quod nostrum est tribuat: silet Keilus, ubi videt a suis  
peccari, praesertim cum nec ipse ah hoc peccato sit immunis.

Argentorato nuper accepi, fortasse Tuo dono, exemplum  
Theodicae: pro eo itaque gratias ago. Legam quam primum  
vacaverit: spero me multa egregia et utilia in hoc Libro inven-  
turum. Interim vale et favere perge etc.

Basilae a. d. 22. Augusti 1716.

### CCLXXIV.

#### Leibniz an Joh. Bernoulli.

Expectavi quid parituri essent Angli: nunc ergo Dn. Wolfus  
mihi, quae in Scheda adjecta vides, scripsit misistque. An Metho-  
dos solvendi in Transactionibus illorum sit sufficiens, nemo Te  
melius judicaverit. Itaque judicium de ea Tuum expecto: mihi  
enim in tantis distractionibus nunc vix possibile talia discutere,  
et par est. Interim suspectum est, quod non adjecere solutionem  
problematis specialis a Te propositi, et a me transmissi, et forte  
a Te quoque per Montmortium, cum Tu speciale ipsorum solvis-  
ses, illis communicati. Sed quidquid sit, imperfecta videtur Anglo-

rum solutio, cum recurat ad differentias secundi gradus in re  
praestabili per primas.

Etiam mihi Venetiis scribitur negotium Domini Cognati Tui  
Nicolai Bernoulli esse confectum, de quo gaudeo.

Gratum mihi valde erit, habere judicium Tuum de variis in  
Theodicae mea contentis.

Clarkum videor mihi reduxisse ad absurdum. Coactus enim  
est mihi in effectu negare hanc Propositionem: Nihil existere,  
evenire, locum habere, cujus non detur sufficiens  
ratio, cur sit potius vel non sit, aut cur sic potius  
quam aliter sit. Nam coactus est recurrere ad meram, ut  
vocat, Dei voluntatem nulla ratione, nullo motivo mixtam, quod  
mihi absurdum, et Divinae Sapientiae prae ac rerum naturae  
contrarium videtur. Nam cum scias Anglos ex spatio facere ali-  
quod absolutum ac reale, vacuum etiam admittere, ostendo, ad-  
missa absoluta realitate spatii, cum id ubique sit uniforme, im-  
possibile esse dari rationem, cur res Deus in hac potius, quam  
alia parte spatii, aut hoc potius quam intervo situ loeat. Mihi  
vero spatium nihil aliud est quam ordo coexistendi, adeoque sub-  
latis rebus nullum est, et eodem manente rerum omnium situ, idem.  
Videtur et in aliis vadimonium deseruisse Clarkius. Expecta ade-  
huc responsum ad novissimum meam scripturam, quae videbo  
an replicationem a me meretur. Omnia finito certamine cedunt.  
Sed cum per manus eant Serenissimae Principis Walliae, ejus id  
venia fiet.

Rectissime faciet Dominus Hermannus, si Verzaliam omittat:  
generatim enim illis non respondendum censeo, qui a Legibus  
honestae disputationis recedunt.

Galilaem merito extollit Verzalia, qui certe ad Phoronomica  
alia viam aperuit. Sed Cavalierio multum adeo tribui posse non  
arbitror. Et notatum jam est a Guldino aliisque, Keplerum in  
libro de Dolio Austriaco ipsi Cavalierio ad hanc Geometriam,  
quam indivisibilium vocat, viam aperuisse. In Borelio multum  
diligentiae agnosco, ingenio mediocri fuisse videtur.

Facile judicabam, Taylori vel Sartorii Angli Librum Tibi pa-  
rum fuisse satisfactorium. Hujusmodi scriptor mihi haud satis  
aptus videtur ad obeundum officium Secretarii Societatis Regiae,  
quod postularet hominem minus fortasse mathematicum, sed magis  
clarum, factumque ad Commercia literaria.

Dominus Montmortius significavit mihi se literis prolixas ad hunc Sartorium parare contra hodierna Anglorum Philosophemata, Et jure meritoque scititias illorum attractiones aliaque ejusmodi ἀφῆρτα impugnabit.

Diu nihil a Dno. Albate Varignonio intellexi, ut verear ne adversa valetudine utatur, quemadmodum superiori tempore factum ad me scripsit.

Parentius quaedam in Trevultianis, si bene memini, contra Tua Nautica edidit. Dominus Bernardus Trevisanus, Nobilis Venetus, parat opus de Lacunis Venetis et remediis, quibus caventur, ne obarescant. Argumentum est nobile et Reipublicae cura dignum. Quod superest, vale et fave etc.

Dabam Hanoverae 23. Octobris 1716.

### CCLXXV.

#### Joh. Bernoulli an Leibniz.\*)

Discessit hinc Agnatus meus ante quindecim circiter dies. Eius epus literas, quas Tibi mittendas mihi reliquerat; volui haec pauca adicere, in responsionem ad ea, quae imperrime a Te accepi. Nihil intelligo ex scripto Anglicano illo a Cl. Wolfio ad Te transmissio, necumque porro communicato, neque capio quid generalis illa ab Anonymo jactata solutio contribuat ad casum aliquem specialem solvendum. Vellem tentasset exemplum, quod a me suggestum Anglis proposueras, sed id ipsum quod Anglus anonymus (quem Taylorum\*\*\*) esse credo) ne apice quidem digiti attingit, satis arguit quod aqua ipsi haeserit; quis enim sibi imaginabitur, Anglum illum ad provocationem Tuam non statim explorasse vires suas in solvendo isto exemplo particulari? Quis item putabit, illum, si feliciter solvisset, non protinus in lucem laetanter protrusurum fuisse solutionem suam? Scribit Cl. Wolfius Anglos de hoc nostro problemate, ceu videatur, abjecte sentire; sed nihil novi est in quibusdam, ut contemnunt quod attingere

\*) Dieser Brief hat höchst wahrscheinlich Leibniz, der den 14. November 1716 starb, nicht mehr lebend angetroffen.

\*\*) Die Lösung war von Newton.

nequeunt, vulpeculum nimirum in Fabula imitantes. Putem igitur urgendos esse Anglos, atque imprimis insistendum proposito exemplo particulari. Optarim etiam, ut idem tentet Dominus Hermannus per suam Methodum universalem, antequam ea publicetur. Videbit latere aliquem modum intricatissimum, qui in quamplurimis curvis transcendentibus methodum generalem facit inapplicabilem. Hoc haud dubie jam senserunt Angli; alias jam dedissent quaesiti solutionem.

Theodicaeam Tuam, Opus sane elegantissimum, nondum vacavit perlegere totam. Legi magna cum voluptate Dissertationem De Conformitate fidei cum ratione; deprehendo solidissime scriptam, mihiq; in plerisque, nec satis memini an non in omnibus, mirifice ardentem; imprimis vero placere, quae contra Baylium, Rationis inimicum, disputas. Clarium, ut videtur, ad incitas redegisti, quando coactus est dicere Dei voluntatem nulla ratione esse nixam: hoc enim pacto ex Deo fieret Ens brutum et irrationale, quod ageret tantum caeco quodam impetu, nisi omnino cum Democrito et Epicuro recurrendum esset ad fortuitum atomorum concursum.

Dominus Varignonius ante aliquot menses, ut quotannis facere solet, in Patriam excurrit; sed jamjam tempus est ut Lutatetiam repetat. Parentius, qui Nautica mea suggillavit aliaque, neque Tibi, neque aliis Viris magnis parcat: mihi habetur in eorum numero, qui responsione non sunt digni. Spero Agnatum meum hac hebdomada ad Venetias appulsurum. Caeterum vale et fave etc.

Basilicae a. d. 11 Novembris 1716.

譯者大塚淳一高田孝成松本去去子孫分館

# BRIEFWECHSEL

zwischen

## Leibniz

und

## Nicolaus Bernoulli.

Nicolaus Bernoulli (geb. 1687, gest. 1759), der Brudersohn von Jacob und Johann Bernoulli, und nicht zu verwechseln mit Nicolaus Bernoulli (gest. 1726 zu Petersburg), dem Sohne von Johann Bernoulli, war in der Mathematik ein Schüler von Jacob Bernoulli, dessen nachgelassenes Werk: *Ars conjectandi*, er im Jahre 1713 herausgab. Als Hermann Pader verliess, um die Professur der Mathematik an der Universität in Frankfurt an der Oder zu übernehmen, wurde Nicolaus Bernoulli sein Nachfolger; er kehrte jedoch später in seine Vaterstadt Basel zurück, wo er einen Lehrstuhl der Jurisprudenz bis an das Ende seines Lebens bekleidete.

Als Mathematiker debütierte Nicolaus Bernoulli mit der Abhandlung: *Regula generalis inveniendi aequationes, per quas alia quaequam data, modo reducibilis sit, dividi potest*, die er auf Veranlassung Joh. Bernoulli's verfasste, um die von Newton in der *Arithmetica universalis* gegebene Regel über die Reduction der Gleichungen von einem höheren auf einem niederen Grad zu verallgemeinern und zu begründen. Sie ist in dem vorliegenden Bande abgedruckt. Ausserdem hat Nicolaus Bernoulli noch einige mathematische Abhandlungen geschrieben, die in verschiedenen Sammlungen zerstreut sind; seine amtliche Stellung als Lehrer der Jurisprudenz, so wie andere Berufsgeschäfte, verhinderten ihn mit mathematischen Studien sich abhaltend zu befassen \*); er hat indess überall in dem Wenigen, was er auf diesem Gebiet geliefert,

\*) *Dulce sane quam maxime, quod contra animi mei prepressionem rebus mathematicis jam a longo tempore vacare non possem, impeditus variis, praeter academica, negotiis, scribit er an Euler, 13 Jul. 1742.*

den feinsten analytischen Scharfsinn documentirt. Namentlich be- weisen dies auch seine Briefe an Euler, die Fuss in der Correspondance mathématique et physique du XVIII<sup>e</sup> siècle, Tom. II. veröffentlicht hat.

In dem vorliegenden kurzen Briefwechsel zwischen Leibniz und Nicolaus Bernoulli ist fast nur von den unendlichen Reihen die Rede, ein Gegenstand, in den Nicolaus Bernoulli unter Anleitung seines Lehrers, Jacob Bernoulli, besonders tief eingedrungen war. Es werden die Kennzeichen der Convergenz und Divergenz besprochen, namentlich aber wird davon gehandelt, wie aus der unendlichen Reihe selbst zu erkennen ist, ob und in welchem Falle der Werth, dem sie sich als Gränze ins Unendliche nähert, eine mögliche oder unmögliche Grösse ist, um daraus einen Rückschluss auf ihre Convergenz oder Divergenz zu machen. Interessant ist die Bemerkung von Nicolaus Bernoulli, dass, um die genaue Beschaffenheit des Gränzwertes einer Reihe zu ermitteln, der Rest, welcher als unendlich klein gewöhnlich unberücksichtigt bleibt, nicht zu vernachlässigen ist.

## I.

## Nic. Bernoulli an Leibniz.

Incidi hic in Juvenem Ornatissimum et Doctissimum D. Gold-  
bach Regiomontanum, quem ob communia studia Juris et Mathe-  
seos amicum nactus sum singularum. Is opportunam mihi suppe-  
ditavit occasionem ad Te scribendi mediante Domino B. Brands-  
hagen, cui frequens, ut ait, Tecum commercium est. Ignosces, Vir  
Amplissime, quod ad ultimas Tuas literas, quas sub ipsum tempus  
discessus mei ex Helvetia accepi, citius non responderim; causa  
silentii fuit peregrinatio et continua sedis mutatio. Est quod mihi  
maxime gratulor de prope Tua in me voluntate, quam non solum  
literis Tuis, sed ipso opere plus satis mihi testatam dedisti. Com-  
mendatias Tuas binas ad Illustres Viros, Trevisanum et Quiri-  
num, Cl. Hermannum accepisse mihi nuntiavit Patrus priorumque,  
qua valde honorificam magisque cum laude mei mentionem feceris,  
jam reddidisse. Gratias Tibi ago ingentes pro singulari hoc favoris  
Tui testimonio, quem ut observantia in Te mea et obsequio  
ulterius demereri, eximiaeque Tuae de me expectationi satisfacere  
aliquando possim, vehementer opto. Significavit porro Patrus, Il-  
lustrissimum Trevisanum satis benigne commendationem Tuam ac-  
cepisse, seque favorum promississe, adiecisse autem maxime e re  
esse, ut Inclutus Vir Carolus Ruzzini, Republicae Ablegatus et  
Plenipotentarius in Pacificatione Ultrajectina, in partes nostras tra-  
hatur, quam ob rem suavit mihi Patrus, ut a Te commendatias  
petere, easque Illustrissimo huic Viro post reditum meum in Hol-  
landiam ipse exhibere; rem igitur facies gratissimam, si mihi  
tunc quoque Virum, dummodo aliquid Tibi cum eo sit commer-



cium, fautorem coneriliabis. Constitui intra paucos dies transire in Hollandiam, ibique per duas vel tres hebdomadas commorari, quibus exactis forte per Galliam domum redibo.

Quae de perficiendis methodis scripsisti, optime monuisti; fateor multa adhuc circa hanc rem desiderari, praecipue quod materiae infiniti concernit. Pro assignandis limitibus seriebus infinitis, ut scire possimus, quando fiant impossibiles, non meliorem habeo methodum, quam sequentem, quam tamen satis generalem esse puto. Observavi omnes series determinata aliqua lege progredientes per praeviam aliquam (si opus est) additionem aut multiplicationem, vel etiam differentiationem, reduci tandem posse ad sequentem formulam  $1 + nx + \frac{n-1}{2} xA + \frac{n-2}{3} xB + \frac{n-3}{4} xC$

etc ubi A, B, C etc. significant terminos immediate praecedentes; scimus autem hanc seriem esse impossibilem, quando x est numerus negativus maior unitate, et n numerus fractus vel integer cum fracto, cujus denominator sit numerus par. Proponatur ex. gr. series ista:  $\frac{1}{2.3} \times \frac{x^2}{a} + \frac{1.3}{4.5} \times \frac{xx}{aa} A + \frac{3.5}{6.7} \times \frac{xx}{aa} B + \frac{5.7}{8.9} \times \frac{xx}{aa} C$  etc. quae quidem nullius quantitatis additione aut multiplicatione reduci potest ad praedictam formulam, sed ejus differentialis, si multiplicetur per  $\frac{1}{adx}$ , et postea subtrahatur ab unitate, evadit

$1 - \frac{1xx}{2aa} A - \frac{1xx}{4aa} A - \frac{3xx}{6aa} B - \frac{5xx}{8aa} C$  etc. quae series est casus specialis dictae formulae, nam quod ibi est n, hic est  $\frac{1}{2}$ , et quod

ibi est x, hic est  $-\frac{xx}{aa}$ , unde concludimus quod existente  $\frac{xx}{aa}$  majore quam 1, sive x majore quam a, series ista  $1 - \frac{1xx}{2aa} A - \frac{1xx}{4aa} A$

$- \frac{3xx}{6aa} B - \frac{5xx}{8aa} C$  etc. et per consequens etiam proposita  $\frac{1}{2.3} \times \frac{x^2}{a} +$

$\frac{1.3}{4.5} \times \frac{xx}{aa} A + \frac{3.5}{6.7} \times \frac{xx}{aa} B + \frac{5.7}{8.9} \times \frac{xx}{aa} C$  etc. sit quantitas imaginaria, quod etiam alimde scimus, series enim ista existente  $a=AB$  radio circuli CEB (fig. 186) et x = abscissae AD, exprimit aream trianguli mixtilinei CEF, quae area, existente abscissa AD majore quam radius AB, est quantitas imaginaria.

De novis literariis nihil fere habeo memoratu dignum. For-

tassis Tibi jam motum erit, imprimi hic jussu Societatis Collectionem Epistolarum Collinsii etc.; audio multa ibi fore, quae Te tantum. Queruntur Angli, Collectores Aeternum Lipsiensem debant D. Newtono laudem non tribuisse, passimque nimis contemptim de ipso locutos fuisse; hinc nullam aliam ob causam opusculum hoc in publicum edunt, quam ut D. Newtono calculi infiniti parvorum, quo nunc utimur, aliterque inventionum gloriam asserant, D. Newtonus aliique jam in ea laborant, ut ostendant leges attractionum, quas corpora in se mutuo exercent. Apud observatum fuisse, aquam intra duas lamine vitreae ad angulum valde exiguum ad se invicem inclinatas alius ascendere propter attractionem laminarum versus partem, qua lamine convergunt, idque ea lege, ut sectio aquae et laminarum sit hyperbola; idem accidere, quando experimentum fiat in vacuo, adeoque non posse locum habere Cartesianorum responsionem, qui causam solummodo phaenomenorum deducunt ab aëris pressione minus libere.

Alteri Editio Principiorum Philosophiae Naturalis D. Newtoni nondum absoluta est, nec ante finem hujus anni, ut credo, absolvetur. D. Halleus edit Menclai Sphaericorum Libros Tres, Basiliae imprimitur Patris mei Tractatus posthumus de Arte Conjectandi, sed imperfectus; si post reditum mesum in Patriam heredes defuncti mihi schedas ejus confidere velint, tractato supplere, quae desunt. D. Goldbach cultum suum Tibi humilime defert. Vale etc.

Londini 25, Octobris S. N. 1712

Quando rescribere placebit, dirige literas ad D. Sch. Carolum Balde, mercatorem Amstelredamensem.

Aus Leibnizens Antwort auf dieses Schreiben fand sich nur folgendes Bruchstück vor:

Newtoni tantum adest ut debitas laudes negaverim, ut potius eas concesserim, de quibus poterat dubitari. Sed Angli nimia jactando efficiunt, ut etiam concessa amittant.

Budum constat resurrectionem liquoris in tubis angustis ultra libellam non pendere ab aëris pressione, cum etiam in Vacuo Gerikiano contingat. Ab impulsibus ad attractiones redire, est inventa fruge glandibus vesis.

## II.

## Nic. Bernoulli an Leibniz.

Redux sum hoc ipso die Lutetiae Montmortio; locus est in Campania situs, quo ante aliquot hebdomadas non nulla post adventum meum in hanc urbem me abduxerat Auctor Libri, cui titulus: *Essai d'Analyse sur les jeux du Hazard*, ejusque loci Dominus. Sub eodem tempore acceperam literas Tuas mihi ab amico, cui eas mercator Amstelodamensis tradiderat, ex Hollandia missas. Consilium, quod mihi das quodque jam antea Patrus mihi dederat, non neglexi; statim enim post nuntium a Patro acceptum, Te pro insigni Tua in me bonitate Illustrissimum Dominum Bothmarium per literas orasse, ut me Domino Ruzzino, Legato Veneto, commendaret, ipsamque Dominum Bothmarium literis Tuis ad inclytum hunc Virum missis me revera jam commendasse, me Lugduno, ubi tunc degeram, Hugam Comitum contuli, illustrissimumque Bothmarium adivi ipsique pro benevolentia sua et officio mihi praestito debitas gratias egi, qui me perquam humaniter apud Ruzzinum assulturum. Ipsum postea Dominum Ruzzini Utrajecti salutavi, a quo pari cum humanitate exceptus nec cum inani successu spe dimissus fui. Post adventum meum in hanc urbem salutavi hic Nobilissimi Quirini, ad quem pariter negotii huius causa scribere dignatus fuisti, Fratrem et Rev. Patrem Banduri, conterraneum ejus, Ordinis S. Benedicti Monachos, Virum humanissimos pariter atque Eruditissimos, qui non exigui ponderis commendatitas in mei favorem Venetias miserunt. Tot igitur insignibus commendationibus, Tuoque praecipue, pro qua demo summi-nus ago gratias, adjutus non dubitarem de felici negotii successu, nisi Dominus Hermannus uniuersis, se meture ne Dnus. Marchio Poleni, ejusdem stationis praesens, scriptis quibusdam editis inter suos celebris et fortassis Professione ista dignior quam ego, sibi successor datur.

Quod materiam atinet de impossibilitate quantitatis ex serie agnoscenda, nondum ea in re mihi satisfacere potui. Existimo, divergentiam seriei non sufficere ad concludendam ipsius impossibilitatem, cum plurimae series divergentes exhibere possint valorem realem etiam finitum. Ex. gr. inter series duas sequentes

$$1 + \frac{1}{8}x + \frac{1.4}{3.6}xx + \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4 + \text{etc. et } 1 + \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}xx + \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 + \text{etc. quae sunt ejusdem}$$

formae et quarum utraque, quando  $x$  major est quam 1, est divergens, prior habet valorem possibilem, nempe  $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}$ , cum tamen summa posterioris sit  $\frac{1}{1-x} - \frac{1}{4}$ , quae est quantitas imaginaria. Ratio, cur ex sola divergentia seriei ejusdem impossibilitas dignosci nequeat, mihi videtur esse, quod impossibilitas latet in solo ultimo termino vel potius in eo, quod seriei ad compleendum valorem exactum quantitatis in seriem conversae deest, et quod in formatione seriei tanquam infinite parvum (quod in casu  $x$  majoris quam 1 evadit infinite magnum) neglectum fuit. Ut me explicem, proponatur binomium  $\frac{1}{1-x}$  sive  $\frac{1}{1-x}$ , quod per divisionem

continuum convertatur in seriem  $1 + nx + \frac{n \cdot n + 1}{2}xx + \frac{n \cdot n + 1 \cdot n + 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \text{etc.}$ ; scimus per istam divisionem semper aliquod residuum manere, appellatur istud residuum  $R$ , ergo quantitas proposita  $\frac{1}{1-x}$  proprie non est aequalis seriei praedictae  $1 + nx +$

$\frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2}xx + \text{etc.}$  sed  $1 + nx + \frac{n \cdot n + 1}{1 \cdot 2}xx + \text{etc.} + \frac{R}{1-x}$ ; unde liquet, quod si  $n$  denotet potestatem aliquam fractam, cuius denominator numerus par, et  $x$  major sit quam 1, solum istud residuum  $\frac{R}{1-x}$  fiat imaginarium. Concludo itaque, nullam seriem ex

terminis mere rationalibus constantem unquam dici posse impossibilem, nisi sciamus quid in formanda serie neglectum et unde ipsa series deducta fuerit; adeoque ad casum impossibilitatis seriei detegendum oportet ut ipsa quantitas, ex qua series fluit, detegatur, i. e. omnibus modis tentari debet, num series proposita per praeviam aliquam operationem, ex. gr. additionem, multiplicationem, differentiationem quantitatis inconstantis, quae seriem ingreditur, reduci possit ad seriem binomium  $1 \pm x$  ad potestatem indefinitam  $\pm n$  elevatum exhibentem. Pro ista vero reductione, quae ut mihi videtur semper fieri potest,



primetur, quam oportet comprehendere casus tam posibles quam impossibles, et in priori casu esse advergentem, in posteriore non advergentem.

Exemplum dabit radix  $\sqrt{(1-x)}$ ; hæc exprimi potest per seriem  $\sqrt{(1-x)} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2 \cdot 1} x^2 - \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 2} x^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} x^4 -$

$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} x^5$  etc. Hic cum  $x$  est minor unitate, quantitas est possibilis et series est advergens, sed cum  $x$  est major unitate, quantitas fit impossibilis adeoque necesse est, ut series sit non advergens. Id autem scimus ex finita expressione  $\sqrt{(1-x)}$ , sed operæ pretium esset, idem etiam agnoscere ex serie, ignorato vel dissimulato valore finito. Nempe cum  $x = 1$ , sequitur hæc

$$1 = \frac{1}{2 \cdot 1} + \frac{1}{2^2 \cdot 1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot 3}{2^2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ etc.}$$

et tunc quidem hoc aliunde inveniri poterat, habemus enim complurium ejusmodi serierum summas; sed ostendendum restat ex serie, posito  $x$  majore quam 1, advergentem cessare. Malo autem hic dicere advergentiam, quam convergentiam et divergentiam, nam cum duæ series sibi continue accedunt, recte convergentes appellatae sunt a Jacobo Gregorio; sed cum de una serie ad valorem accedente agitur, rectius advergens dicitur. A seriis æquationum seu quantitarum ordinaliarum expressivis transcendendum foret ad series quantitarum transcendendum vel saltem earum, quæ finita expressione non habentur. Ibi enim hæc impossibilis determinatio maxime utilis foret.

Putasti, quæ Angli in Recensionem Newtoniana libri Lipsiensem dixere, non fuisse proprie dicta in me; sed ex Dni. Patrum literis intelligi, eos recensionem illam mihi attribueri, quod falso facere, vel ex immodicis laudibus Tschirnhausio attributis iudicare poteris, quæ a me non fuisse profectas facile intelligent, qui non norunt.

Exiguos esse circa corpora vortices, facile præclaro Malbranchio assenserim, sed veror ut ab iis repeti possit gravitas, res tam generalis et quæ decrevit cum distantia centri.

Interim non dubito, omnes attractiones esse ab impulsione, et minor, Anglos tanquam inventa fruge glandibus vescentes ad qualitates occultas attractrices redire. Sed talia fignenta sunt hæc vix aevi, et cum autoribus suis intercedere solent.

Epistola Dni. de Montmort nunquam ad me pervenit, et velim nosse, cui fuerit commissa. Itaque nec liber ejus mihi redditus est. Interea non minus me ipsi obstrictum agnosco, quam si accepissem. Vidi non ineleganter ab eo promotam doctrinam Summarum, et rogo, ut eum a me officiosè salutes. Tales virus de scientiis promovendis cogitare, reipublicæ interest. Interea vale et me ama etc.

Bobam Viennæ Austriae 28 Jun. 1713.

P. S. Obiter addo, quandocumque series constat ex membris alternatim positivis et privativis et membra ipsa decrescunt in infinitum, seriem esse advergentem seu errorem quoque continuando decrescere in infinitum sive numerem dato fieri. Hinc si excogitaretur modus propositam aliquam seriem infinitam mutandi in talem, cujus membra essent alternatim positiva et privativa, haberetur intentum.

#### IV.

#### Nic. Bernoulli an Leibniz.

Basileæ d. 9 Septembris Ao. 1713.

Intellexi ex Tuis ad Patrum literis, Te continuis commendationibus negotium Patavinum magis ac magis adjuvare, nuperque D. Alhatem Fardellam in partes nostras traxisse, quod usque in nos studium grato animo colere nunquam desinam. De consilio Tuo scripsi ad D. Fardellam jussu Patrum, qui ipse sententiam suam Tibi significabit, nempe res suas et familiam aegre permittere, ut spartam hæc in se suscipiat. Juventutem meam non adeo mihi nocituram spero; ipsam enim Dominum Ruzzini commendatissimè in tui favorem Venetias misisse mihi nuper perscripsit Dns. Michelotti, qui non obstantibus aliquibus difficultatibus non exiguum successus spem fecit.

De modo detegendi impossibilitatem quantitatis hortatu Tuo ulterius cogitavi; inveni non melius id fieri posse, quam si valor quantitatis propositæ datus quomodocumque h. e. per æquationem sive finiti sive infiniti gradus, per seriem exprimitur; quæ si sit advergens, certum est valorem hunc esse possibilem, sed si sit

non advergens, series non exaequat valorem quantitatis propositae, sed deficit ab ipsa quantitate infinita, quae vel possibilis vel impossibilis erit, prout ipse valor quantitatis, unde series deducta est, possibilis est vel impossibilis; series igitur ipsa semper habet valorem possibilem, etiamsi sit non advergens, hic enim casus suspensionem tantum praebet, ipsam deductam esse ex quantitate impossibili, quod nunquam ita sit melius cognosci non potest, quam si omnibus modis, puta per additionem, multiplicationem, differentiationem tentetur, num reduci possit ad seriem potestatem aliquam binomiali denotantem, quod quidem, fateor, saepius res erit non levis negotii. Caeterum observo, quod una eademque series non possit exhibere radicem generalem alicujus aequationis sive valorem omnium tam possibilium quam impossibilium radicem, quae illa aequatione continentur, uti existimas, sed per seriem illam exprimi valorem duntaxat unius ex radicibus propositae aequationis; verum invento valore unius radicis invenientur per divisionem pro singulis caeteris radicibus totidem aliae series, ex quarum unaquaque cognosci poterit, num radix per illam seriem expressa sit possibilis necne. Dicitis, operae pretium esse, seriei alicujus nonadvergentiam (uti rectius appellas, quam divergentiam) agnoscere ex ipsa serie, ignorato vel dissimulato valore ejus; mihi videtur facile id cognosci posse, nec opus esse ut series in aliam mutetur, cujus membra sint alternatim positiva et negativa; quaecumque enim termini seriei magis ac magis crescunt tandemque in infinitum abeunt, necesse est ut series sit nonadvergens; sit

$$\text{ex. gr. series, quam ipse proposuisti } 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2^2}x^2 - \frac{1}{2^3}x^3 + \dots$$

$$\frac{1.3}{1^2.2.3}x^3 - \frac{1.3.5}{2^4.1.2.3.4}x^4 + \dots \text{ etc. hujus termini decrescunt,}$$

donec numerus terminorum evadat major, quam  $\frac{3x}{2x-2}$ , tum crescere incipiunt tandemque infiniti evadunt, unde liquet quod  $x$  debeat esse major quam 1, ut series fiat nonadvergens, quod aliunde notum.

Vidi quae Angli in Commercio Epistolico Collinsii contra Te protulerunt; nunquam sane credidissem aut visum hunc librum eorum . . . . . in Te exacerbatos esse, ut Te tantum non plura publice accusare audeant; mererent inique ipsorum criminationes eo, quo facturum ais modo, refelli.

Occasio mihi data fuit superiore anno, cum Londini agerem, refutandi argumentum quoddam pro Divina providentia desumptum ex regularitate observata inter partus utriusque sexus, cujus Auctor erat D. Arbuthnot, Medicus Regius et Regiae Societatis socius, qui existimabat, valde improbabile esse, ut per longam annorum seriem tam exigua intercedat differentia inter numerum masculinorum et numerum foeminarum, qualis observata fuit Londini 82 annis, per consequens aequalitatem hanc marium et foeminarum miraculum esse nec per casum accidere potuisse; cujus rei contrarium ego ostendi, nempe limites his 82 annis observatos inter utrorumque numerum tam magnos esse, ut maxima sit probabilitas, numerum marium et foeminarum intra illos limites casurum esse. Demonstrationem meam, quam Collectores Transactionum Philosophicarum Londini imprimere volebant, ne Dn. Arbuthnot offenderent, nuper Berolinum mihi Miscellaneis vestris inserendam, in literis ad Dn. Comenem, quibus et pro transmissio Diplomaticae receptionis meae in Inelytam vestram Societatem gratias egi; non dubito quin Tua praecipue commendatione honor iste mihi ne minimum tale speranti collatus sit. Quod si ita est, debitas persolvo gratias.

Dixi est quod Dno. de Montmorti, quae jussuras, perscripsi, sed nullam . . . . . ad literas meas responsum accepit; tradiderat, mi fallor, Eberm et Epistolam suam Bibliothecario D. Abbatibus Bignonii. Altera Editio hujus libri mox perfecta erit; indicabis, si placeat, per quam viam exemplar unum una cum Commentariis Academiae Regiae Anni 1710, quos D. Varignon pro Te accepit, optime ad Te mitteri possit. Curabo quoque, ut Patrum mei p. m. Tractatus posthumus de Arte Conjectandi, qui imper prelum evasit, ad Te perveniat. Vale et fave etc.

## V.

## Leibniz an Nic. Bernoulli.

(Im Auszuge.)

Mentem meam plane non perceperisti, cum mihi imputas, quod crediderim, unam eandemque seriem posse epiodem aequationis diversas radices exprimere. Unaquaqueque series (nempe constans ex

disse ingrediendi seriem quam optime ad radicem aliquam aequationis prae aliis exprimendam, in Commercio epistolico, quod Wallisius edidit, legi, sed ipsam methodum nunquam vidi; ibidem etiam affertur Newtoni methodus, quae beneficio parallelogrammi et regulae perficitur, ejus autem rei demonstrationem nondum percipere potui. Mihi haec omnia tanti non esse videntur, ut insignem usum habere possint, cum quandocunque opus fuerit, per methodum approximandi a variis, praecipue ab Hallejo, jam proditas, cujosecumque aequationis radici quantum lubet approximare possimus. Newtonum in enumeratione linearum tertii ordinis errasse, mihi non videtur verisimile; examinabo tamen, quia ita jubes, ejus haec de re scriptum, quam primum per otium licuerit. Refutationem Tuam Commerci Epistolici Galli quam avidissime expectant. Montmortius librum suum altera vice edidit, cujus plurimas meas epistolas inseruit; non dubito, quin exemplar unum hujus libri ad Te mitti curabit. Quae Parisiis ad Te destinata erant, ea se Professore cuidam Hanoverano tum Parisiis agenti tradidisse, Varignonem Tuam Commerci Epistolici Galli quam avidissime expectant. Exemplar Libri defuncti Patris mei Tibi destinatum proximo mundanis Francofurtum mitti curabo; indicabis si placeat, ad quem inscriptionem dirigi desideres. Quod superest, vale et mihi potro fave etc.

Basilae d. 28. Febr. Ao. 1714

## VII.

### Nic. Bernoulli an Leibniz.

Diu nimis distuli, quam nunc demum persolve, debitam gratiarum actionem pro eo, quod Tua praesertim cura ac indesinenti exhortatione negotium Patavinum ex voto tandem confectum sit. Excel Dominus Comes Schalenburgius negotium hoc a Te sibi commendatum, si non consiliis suis, quod forte ob gravioris momenti curas non potuit, intrepida saltem et forti insulae Corcyrae defensione haud parum promovit, siquidem insulae hujus libera-

\*) Van diezen bereits gedruckten Briefe (Commer. epist. Leib. et Joh. Bernoull. Tom. II. p. 393 sq.) lag das Original nicht vor.

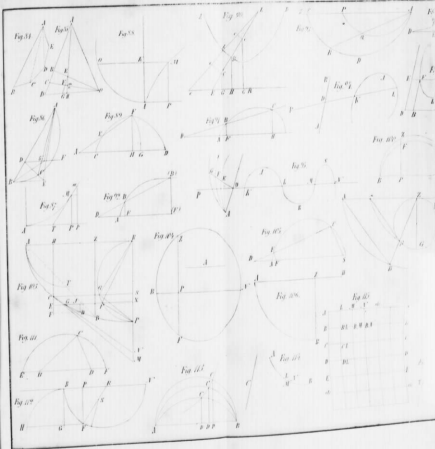
tionem mox secuta est, quam antea sperare vix licebat, electionis meae ad Cathedram mathematicam a Dominis Reformatoribus ante aliquot menses factae confirmatio, de qua misso Senatus-Consulto haec de re facti Apographo, imper me certiores fecit Michellottus noster. Proficiscar igitur, homo cum Deo, intra paucos dies, in Provinciam demandatam, durante adhuc mense Novembri, vel initio Decembris auspiciari queam. Det Deus, ut Professione ista in sui honorem et rei literariae, praecipue mathematicae, commodum defungar, et ut sperni et promissa de me Tua ita non fallant, ut de patrocinio et favore Tuo, quem haecum mihi summo pere gratulatus sum, nec posthac dubitandi locum habeam. Vale et fave etc.

Basilae a. d. 24. Octob. 1716.

P. S. Dominum Taylorum Anglum, occasione problematis Tui de duendis trajectoriis, Te ad certamen provocasse problemate, cujus solutionem mox invenimus, ex Patris mei literis intellexisti, Forte non ingratum erit, si hic apponam propria ipsius Taylori verba ad Dnum. Montmortium scripta: If Mr. Leibnitz delights in Problems, I would propose the following one to him, which I can solve. 'Tis a particular case of his own general Problem, but it tends more to the discovery, of a Man's skill in the method of fluxions, then the Problem does, as he has proposed it. Problema autem sequens Domino de Montmort propositum: Invenire curvam, quae per datum punctum transeat, et ad angulos rectos secat curvas omnes, per aliud punctum transeuntis et expressas per aequationem  $zz + dx = 2ydz^2$ , nempe  $z$  fluente uniformiter. Inveni aequationem integram hinc differentio-differentiali  $zz + dx = 2yxdz^2$  respondentem esse istam  $z^2 = axz + abc$ : et proinde curvam istam aequationi satisficientem esse Parabolam, si terminus  $abc$  deficiat, et Hyperbolam, si  $a = \infty$  et  $bc$  sit quantitas negativa. Trajectoriae autem pro istiusmodi curvis facile inveniuntur per Methodum a Te in Actis Lipsiensibus olim propositam, cum qua sane coincidit Methodus Dni. Hermanni, ut et illa quae ego utor, quamque praesidi cum Dno. De Montmort communicavi, inscius vel saltem oblitus Te simile quid in Actis dedissem. Si  $x$  et  $y$  sint coordinatae trajectoriae quaesitae,  $p$  linea illa variabilis quae determinat speciem vel positionem curvarum, ad quas alia ad angulos rectos duci debet, quaere valorem ipsius  $p$  in  $x$ , et constantibus, quo differentiato, et mutatis

$dx$  in  $dy$  et  $dy$  in  $dx$ , postique membris per  $dx$  multiplicatis aequalibus illis, quae per  $dy$  multiplicantur, habebitur aequatio differentialis satisfaciens Trajectoriae quaesitae.

Porro ad nos super demum Taylori Liber De Methodo incrementorum, in quo nulla fere nova, sed plerumque jam dicta nota, obscure tamen et nimis in abstracto proposita inveni, ita ut paucis ea intellegi credam. Propositionem ejus tertiam ego jam olim in hunc modum solvi. Sit aequatio differentialis, in quam involucrantur variables duae  $x$  et  $z$  cum suis differentialis  $dx$  et  $dz$ , quorum  $dz$  supponitur esse constans, oportet invenire quid pro  $ddy$ ,  $ddy$  etc. substituam debeat, ut  $dz$  fiat variabilis et  $dx$  constans. Erimo  $ddy = Adz^2$ , ubi  $A$  significat quantitatem compositam ex  $x$ ,  $z$  et constantibus: hinc integrando habetur  $dx = \int Adz dz$ , sive  $dx:dz = \int Adz$ , quae aequatio iterum differentiata, ponendo  $dz$  variabilem et  $dx$  constantem dat  $-dxyddz:dz^2 = Adz$ , vel  $-dxyddz:dz = Adz^2 = ddxz$ : hinc integrando  $ddy = dz^2 \int Adz$ , vel (ponendo pro  $dx$  valorem ejus modo inventum et dividendo per  $dz^2$ )  $-dxyddz:dxddz:dy^2 = \int Adz$ , quae iterum differentiat, sumta  $dx$  constans, et habetur  $(-dxyddz^2 + 3dyddz^2):dy^4 = Adz$ , sive  $-dxyddz^2 + 3dyddz^2 = Adz^2 = d^4x$ , quemadmodum Taylorus quoque invenit: eodemque modo procedere in reliquis differentialis gradibus.



此圖乃大亞細亞海島之圖也其地處大亞細亞之西

positique numeris per dx multiplicatis  
 dy multiplicatur, habetur aequatio differ-  
 entiorie quaesita.

per denu Taylori Liber De Methodo  
 quo nulla fore nova, sed plerumq; jam du-  
 nimis in abstracto proposita invenit, ite-  
 rum Propositionem ejus tertiam ego jam  
 vi. Sit aequatio differentialis, in qua ve-  
 re x et z cum suis differentibus dx et  
 dz esse constant, oportet invenire quid  
 sui debeat, ut dz fiat variabilis et dx con-  
 stans, ubi A significat quantitatem compo-  
 sitam: hinc integrando habetur dx =  
 A dz, quae aequatio iterum differentialis,  
 et dx constantem dat = dx dz: dz =  
 = A dz² = dx x. Q. E. lv. Sic pro  
 pono dz = A dz²: hinc integrando dx dz  
 pro dx dz valorem ejus modo inventum  
 dx dz: dz² = f A dz, quae iterum diffe-  
 rentialis, et habetur (= - dx dz² = A dz²  
 valorem quoque invenit) eodemq; modo  
 differentialis gradibus.

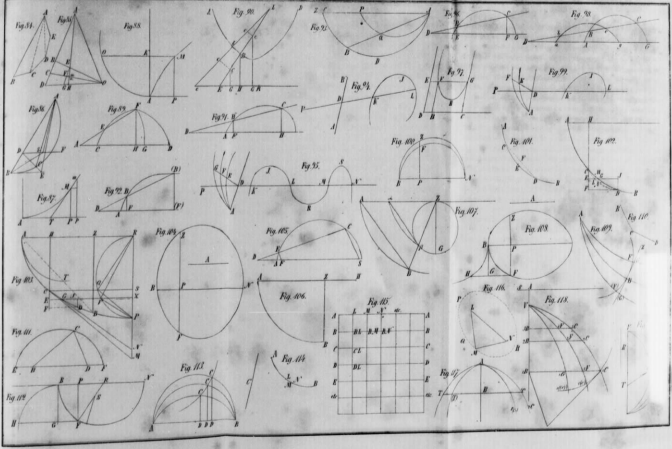




Fig. 120.

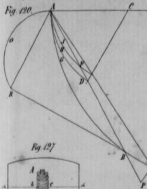


Fig. 121.

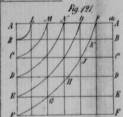


Fig. 122.

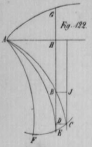


Fig. 123.

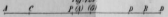


Fig. 124.

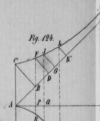


Fig. 125.

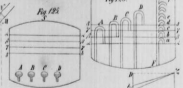


Fig. 127.



Fig. 128.

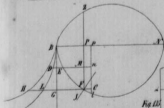


Fig. 129.

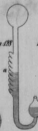


Fig. 130.



Fig. 131.

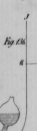


Fig. 132.

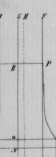


Fig. 133.

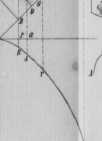


Fig. 134.

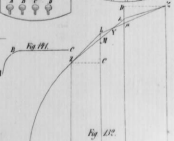


Fig. 135.



Fig. 136.



Fig. 137.

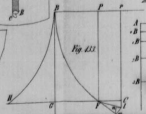


Fig. 138.

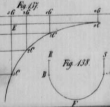


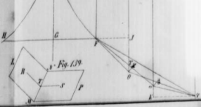
Fig. 139.

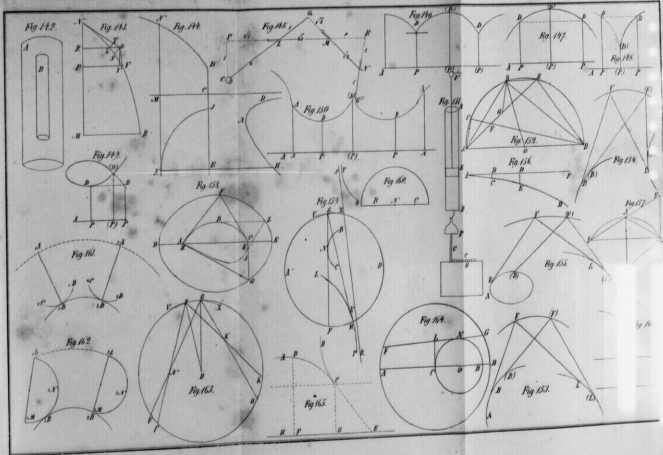


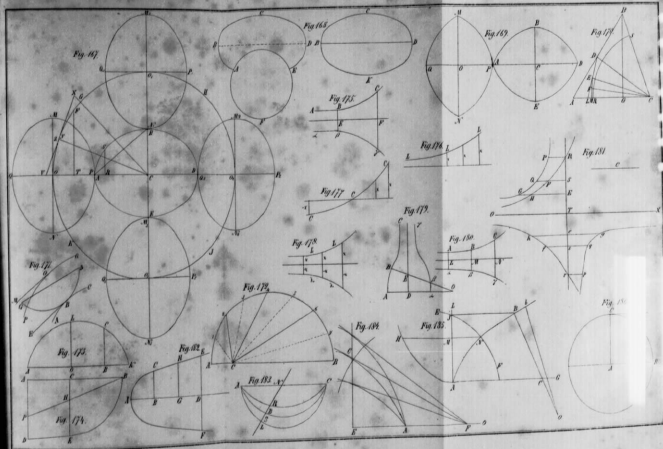
Fig. 140.



Fig. 141.







釋名八卷 卷之八 目錄 卷之八 目錄 卷之八 目錄



群馬大学附属図書館蔵書

No. 212309

1. 貸出期間は一週間です
2. なお引続き必要の場合  
は出納口に申出下さい

群馬大学附属図書館  
学芸学部分館

