NOTE-BOOK.

[illegible]

25

Russel, The Principles of Mathematics I.

Part V. Infinity & continuity p. 259 – 368

From Cantor's work it appears that there are two respects in which infinite nos. differ from those that are finite. The first, which applies to both cardinals & ordinals, is that they do not obey math. induct. — or rather, they do not form part of a series of nos. beginning with 1 or 0, proceeding in order of magnitude, containing all nos. intermediate in magnitude between any two of its terms, & obeying math. induct. The second, which applies only to cardinals, is that a whole of an infinite no. of terms always contains a part consisting of the same no. of terms. The first respect constitutes the true def. of an infinite series, or rather of what we may call an inf. term in a series: it gives the essence of the ordinal infinite. The second gives the def. of an infinite collect., & will doubtless be pronounced by the philosopher to be plainly self-contradictory. But if he will condescend to attempt ~~to~~ to exhibit the contradict., he will find that it can only be proved by admitting math. ind., & so that he has merely established a connection with the ordinal inf. Thus he will be compelled to maintain that the denial of the math. ind. is self-contradictory; & as he has probably reflected little, if at all, on this subject, he will do well to examine the matter before ~~pronoun~~ pronouncing judgment. And when it is admitted that math. ind. may be denied without contradiction, the supposed antinomies of infinity & continuity are & all disappear. 260

The math. treatment of continuity rests wholly upon the doctrine of limits. It has been thought by some mathematicians & some philosophers that this doctrine had been superseded by the Inf. Calculus, & that this has shown true infinitesimals to be presupposed in limits.* (This is the view, for instance, of Cohen, Das Pr. d. Inf. u. seine Geschichte, Berlin, 1883; see pp. 1, 2.) But modern math. has shown, conclusively as it seems to me, that such a view is erroneous. (cf. Weierstrass & Cantor, 120 259) 276

A limit may be defined generally as a term which immediately follows (or precedes) some class of terms belonging to an infinite series, without immediately following (or preceding, as the case may be) any one term of the series. 277

"If all the pts of a line can be divided into two classes such that every point of one class is to the left of every pt of the other ~~pt~~ class, then there exists one & only one pt which brings about this division of all pts into two classes, this section of the line into two parts."

This axiom of Dedekind's is, however, rather loosely worded, & requires an emendation suggested by the derivation of irrational nos. If all the pts of a line are divided into classes, no pt is left over to represent the section. If all be meant to exclude the pt representing the section, the axiom no longer characterizes continuous series, but applies equally to all series e.g. the series of integers. The Axiom must be held to apply, as regards the division, not to all the pts of the line, but to all the pts forming some compact series & distributed throughout the line, but consisting only of a portion of the pts of the line. When this emendation is made, the axiom becomes admissible. ~~279~~

The emendation, however, destroys entirely the self-evidence upon which alone Dedekind relies (p. 11) for the proof of his axiom as applied to the straight line. 279

Ded. [illegible] Irrational [illegible] Rational no. [illegible]
[illegible] $a_1 \ldots a_n \mid b_n \ldots b_1$ (280–282) [illegible] series [illegible]
[illegible] Thus Irrationals are not proved to exist, but may be merely convenient fictions to describe the rel.s

of the a's & b's. 282

The theory of Weierstrass concerning irrationals is somewhat similar to that of Ded. In W's theory, we have a series of $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, such that Σa_n, for all values of n, is less than some given no. This case is presented, e.g., by an inf. decimal. The fract. 3.14159..., however many terms we take, remains less than 3.1416. In this method, as Cantor points out, the limit is not created by the summation, but must be supposed to exist already in order that $\sum_1^\infty a_n$ may be defined by means of it. This is the same state of things as we found in Ded.'s theory: series of rat. nos. cannot prove the exist. of irrat. nos. as their limits, but can only prove that *if* there is a limit, it must be irrat. 282

Thus the arithmetical theory of irrationals, in either of the above forms (Ded. Weier.), is liable to the following objections. (1) No proof is obtained from it of the exist. of other than rat. nos., unless we accept some axiom of continuity different from that satisfied by some rat. nos.; & for such an axiom we have as yet seen no ground. (2) Granting the exist. of irrationals, they are merely specified, not defined, by the series of rat. nos. whose limits they are. Unless they are independently postulated,

the series in question cannot be known to have a limit; & a knowledge of the r. no. which is a limit is presupposed in the proof that it is a limit. — — — —

Another objection to the above theory is that it supposes rationals & irrationals to form part of one & the same series generated by relations of greater & less. 282

The theory of Cantor, though not expressed, philosophically speaking, with all the requisite clearness, lends itself more easily to the interpretation which I advocate, & is specially designed to prove the exist. of limits. He remarks (Mannigfaltigkeitslehre p. 22) that, in his theory, the exist. of the limit is a strictly demonstrable proposition; & he strongly emphasizes the log. error involved in attempting to deduce the exist. of the limit from the series whose limit it is (p. 22). 283

Thus to sum up what has been said on Cantor's theory: By proving that two fundamental series may have the rel. of being coherent (zusammengehörig), & that this rel. is symmetrical & transitive, Cantor shows, by the help of the principle of abstraction (which is tacitly assumed) that two such series both have some one rel. to one third term, & to no other. This term, when our series consist of rationals, we define as the real no. which both determine. We can then define the rules of operat^n^ for real nos., & the rel^s^. of equal, greater & less between them. But the principle of abstraction leaves us in doubt as to what the real nos. really are. - - - 285

- - - In this doubt as to what real nos. may be, we find that segments of rationals, as defined in the preceding chapter, fulfill all the requirements laid down in Cantor's def. & also those derived from the principle of abstraction. Hence there is no logical ground for distinguishing segments of rationals from real nos. 286

I conclude, then, that an irrat^l^ actually *is* a segment of rationals which does not have a limit, while a real no. which would be commonly identified with a rat. is a segment which does have a rat. limit, & this applies e.g. to the real no. defined by a ~~fund~~ fundamental series of rationals whose terms are all equal. 286

Compact (überalldicht) [illegible] Leibniz [illegible] Continuous [illegible] Cantor [illegible] (287) Cantor [illegible] higher order [illegible] continuity ([illegible] space [illegible] incommensurable [illegible] soap [illegible]) [illegible] unanalysable [illegible] religious dogma [illegible] Cantor has given his definition in two forms, of which the earlier is not purely ordinal but involves

also either no. or quantity. (288)

[illegible] perfect & cohesive (zusammenhängend, bien enchaînée) [illegible] (288)

Cohesiveness (zusammenhängend): We call T a cohesive collection of pts. if for any two pts. t & t′ of T, for a no. ε given in advance & as small as we please, there are always, in several ways, a finite no. of pts. $t_1, t_2 \ldots t_\nu$, belonging to T, such that the distances $tt_1, t_1t_2, t_2t_3, \ldots t_\nu t'$ are all less than ε (Cantor, Man. l. p. 31) [illegible] Archimedes Axiom [illegible] series, distances [illegible] minimum [illegible] And there must not only be no minimum to distances in general, but there must be no minimum to distances from any given term. Hence every *cohesive* series must be *compact* (überall-dicht), i.e. must have a term between any two. (289)

It must not be supposed, however, that every compact series is cohesive. Consider, for ex., the series formed of 0 & $2-\frac{m}{n}$, where m & n are any integers such that m is less than n. Here there is a term between any two, but the distance from 0 cannot be made less than 1. Hence the series, though compact, is not cohesive. (289)

Compactness is purely serial, while cohesion has essential reference to no^s^ or to the conditions of numerical measurement. Cohesion implies compactness, but compactness never implies cohesion, except in the sole case of the

Abgeschlossen (Dedekind: Schnitt)
Anschauung
Dedekind, ... perfect (Cantor ...)
高木, p334. überall dicht ... Dedekind ...

Complete series of rationals or real nos. (290) Klein, Hobson, Cantor

A series is perfect when it coincides with its first derivative (Cantor, acta Math. II p. 405)
Cantor: perfect ... existence of limits ... assume ...
Russell: ... A class u of terms forming the whole or part of a series is perfect when (292) each of the terms of u is the upper or lower limit of some class contained in u, and when, if v be any class contained in u, and the lower segments defined by the several nos. of v have an upper limit, or the upper segments have a lower limit, this limiting segment is one of those that can be defined by a single term of u, i.e. have a term of u for their upper or lower limit respectively - - - - -

We may repeat the def of perfect in what is perhaps less difficult language. Given any series, and any class of terms u contained in this series, there are an upper and a lower segment corresponding to every term of u. Any infinite set of terms v being chosen out of u, there are certain conditions which are commonly said to insure that v has an upper limit, which it is admitted, may belong neither to u, nor to the series in which u is contained. What these

compact + dense in itself = coherent + closed
+ closed
compact + perfect (Russell, Cantor) coherent + closed (Dedekind, Schnitt) < coherent + perfect (Cantor, zusammen. perfect) (Allg. ...)

conditions do insure, however, is that the class of lower segments corresponding to v has an upper limit. If the series is perfect, v will have an upper limit whenever the corresponding class of segments has one; and this upper limit of v will be a term of u. The def of perfect requires that this should hold both for upper and lower limits, and for any class v contained in u. 293.

Cantor's later def. § 11 ordinal (Math. Ann. XLVI.)
A one-dimensional continuum M is a series which (1) is perfect (dense in itself + closed), (2) contains within itself a denumerable series S of which there are terms between any two terms of M.

Whitehead's equivalent expression. 73 ... A series is cont. when (1) every segment, upper or lower, has a limit, and the series has a first and a last term; (2) a denumerable compact series is contained in it in such a way that there are terms of this latter series between any two terms of our original series. 299 note

The philosophical theory of the Calculus has been, ever since the subject was invented, in a somewhat disgraceful condition. Leibniz himself — who, one would have supposed, should have been competent to give a correct account of his own invention — had ideas, upon this topic, which can only be described as extremely crude. He appears to have held that, if metaphysical subtleties are left aside, the Calculus is only approximate, but is justified practically by the fact that the errors to which it gives rise are less than those of observat. (Leibniz Math. Works. Gerhardt's ed. IV pp. 91–93. Phil. works Gerh. ed. II p. 282) When he was thinking of Dynamics, his belief in the actual infinitesimal hindered him from discovering that the Calculus rests on the doctrine of limits, & made him regard his dx & dy as neither zero, nor finite, nor math. fictions, but as really representing the units to which, in his phil., infinite division was supposed to lead. (Math. W. VI. pp. 235, 247, 252) And in his math. exposition of the subject, he avoided ~~305~~ giving careful proofs, contenting himself with the enumeration of rules. (Math. W. V. pp. 220 ff) At other times, it is true, he definitely rejects infinitesimals as philosophically valid; (Phil. W. II. p. 305. Cassirer, Leib. Syst. pp. 206–7) but he failed to show how, without the use of infinitesimals, the results obtained by means of the calculus could yet be exact, & not approximate. In this respect, Newton is preferable to Leibniz: his Lemmas (Principia Part I. Sect.

I) give the true foundation of the Calculus in the doctrine of limits, & assuming the continuity of space & time in Cantor's sense, they give valid proofs 325 of its rules so far as spatio-temporal magnitudes are concerned. But Newton was, of course, entirely ignorant of the fact that his Lemmas depend upon the modern theory of continuity; moreover, the appeal to time & change, which appears in the fluxion, & to space, which appears in the Lemmas, was wholly unnecessary, & served merely to hide the fact that no def. of continuity had been given. Whether Leibniz avoided this error, seems highly doubtful; it is at any rate certain that, in his first published account of the Calculus, he defined the dif. coef. by means of the tangent to a curve. And by his emphasis on the infinitesimal, he gave a wrong direction to speculation as to the Calculus, which misled all mathematicians before Weierstrass (with the exception, perhaps, of De Morgan), & all phil. down to the present day. It is only in the last thirty or forty years that math. have provided the requisite math. ~~found~~ foundations for a philosophy of the Calculus; & these foundations, as is natural, are as yet little known among philosophers, except in France. Phil. works on the subject, such as Cohen's Pr. d. I. u. s. G., are vitiated, as regards the constructive theory, by an undue mysticism, inherited from Kant, & leading to such results as the identificat of intensive magnitude with the extensive infinitesimal. 326

The no. δ is always finite, & in the def. of the limit there is nothing to imply the contrary. In fact $\frac{f(x+\delta)-f(x)}{\delta}$, regarded as a f. of δ, is wholly indeterminate when $\delta=0$. The limit of a f. for a given value of the indep. variable is an entirely different notion from its value for the said value of the indep. var., & the two may or may not be the same no. In the present case, the limit may be definite, but the value for $\delta=0$ can have no meaning. Thus it is the doctrine of limits that underlies the Calculus, & not any pretended use of the infinitesimal. This is the only pt. of philos. importance in the present subject. 327

Just as the derivative of a f. is the limit of a fraction, so the def. integral is the limit of a sum. 328

The def. integral involves neither the infinite nor the infinitesimal, & is itself not a sum, but only & strictly the limit of a sum. All the terms which occur in the sum whose limit is the def. int. are finite, & the sum itself is finite. If we were to suppose the limit actually attained, it is true, the no. of intervals would be infinite, & the magnitude

of each would be infinitesimal; but in this case, the sum becomes meaningless. Thus the sum must not be regarded as actually attaining its limit. But this is a respect in which series in general agree --- The general rule is, that the limit does not belong to the series which it limits; & in the def. of the derivative & the def. integral we have merely another instance of this fact. The so-called infinit. Calculus, therefore, has nothing to do with the infinitesimal, & has only indirectly to do with the infinite, its connect. with the infinite being, that it involves limits, & only infinite series have limits. 330

There is, so far as I know, only one precise def. which renders the infin. a purely relative notion, correlative to something arbitrarily assumed to be finite. When instead, we regard what had been taken to be infin. as finite, the correlative notion is what Cantor calls the improper infinite (Uneigentlich-Unendliches). 331 The def. of the rel. in question is obtained by denying the axiom of Archimedes, just as the transfinite was obtained by math. induction. If P, Q be any two nos, or any two measurable magnitudes, they are said to be finite with respect to each other when, if P be the less, there exists a finite ~~n~~ integer n such that nP is greater than 1. The existence of such an integer constitutes the axiom of Archimedes & the def. of rel. finitude. It will be observed that it presupposes the def. of absolute finitude among numbers — def. which ~~as~~ depends upon two points, (1) the connection of 1 with the log. not. of simplicity, or of 0 with the log. not. of the null-class; (2) the principle of math. induction. The notion of rel. finitude is plainly distinct from that of absolute finitude. The latter applies only to nos, classes & divisibilities, whereas the former applies to any kind of measurable magnitude. Any two numbers, classes, or divisibilities, which are both absolutely finite are also relatively finite; but the converse does not hold. For example, ω & $\omega \cdot 2$, an inch & a foot, a day & a year, are relatively finite pairs, though all three consist of terms which are absolutely infinite.

The definition of the infinitesimal & the improper infinite is then as follows. If P, Q be two nos, or two measurable magnitudes of the same kind, & if, n being any finite integer whatever, nP is always less than Q, then P is infinitesimal with respect to Q, & Q is infinite with respect to P. With regard to nos, these relative terms are not required; for if, in the

case supposed, P is absolutely finite, then Q is absolutely infinite; while if it were possible for Q to be absolutely finite, P would be absolutely infinitesimal — a case, however, which we shall see reason to regard as impossible. Hence I shall assume in future that P & Q are not nos, but are magnitudes of a kind of which some, at least, are numerically measurable. It should be observed that, as regards magnitudes, the axiom of Archimedes is the only way of defining, not only the infinitesimal, but the infinite also. Of a magnitude not numerically measurable, there is nothing to be said except that it is greater than some of its kind, & less than others; but from such propositions infinity cannot be obtained. Even if there be a magnitude greater than all others of its kind, there is no reason for regarding it as infinite. Finitude & infinity are essentially numerical notions, & it is only by rel. to nos that these terms can be applied to other entities.

The next question to be discussed is, What instances of infinitesimals are to be found? Although there are far fewer instances than was formerly supposed, there are yet some that are important. To begin with, if we have been right in regarding divisibility as a magnitude, it is plain that the divisibility of any whole containing a finite no. of simple parts is infinitesimal as compared with one /332/ containing an infinite no. The no. of parts being taken as the measure, every infinite whole will be greater than n times every finite whole, whatever finite no. n may be. This is therefore a perfectly clear instance. But it must not be supposed that the ratio of the divisibilities of two wholes, of which one at least is transfinite, can be measured by the ratio of the cardinal nos. of their simple parts. There are two reasons why this cannot be done. The first is, that two transfinite cardinals do not have any rel. strictly analogous to ratio; indeed, the def. of ratio is effected by means of math. induction. The rel. of two transfinite cardinals α, γ expressed by the equation αβ = γ bears a certain resemblance to integral ratios, & αβ = γδ may be used to define other ratios. But ratios so defined are not very similar to finite ratios. The other reason why infinite divisibilities must not be measured by transfinite nos. is, that the whole must always have more divisibility than the part (provided the remaining part is not relatively infinitesimal), though it may have the same transfinite no. In short,

divisibilities, like ordinals, are equal, so long as the wholes are finite, when & only when the cardinal nos. of the wholes are ~~finite~~ the same; but the notion of magnitude of divisibility is distinct from that of cardinal no., & separates itself visibly as soon as we come to infinite wholes.

Two infinite wholes may be such that one is infinitely less divisible than the other. Consider, for example, the length of a finite straight line & the area of the square upon that straight line; or the length of a finite straight line & the length of the whole straight line of which it forms part (except in finite spaces); or an area & a volume; or the rat. nos & the real nos; or the collection of points on a finite part of a line obtainable by von Staudt's quadrilateral construction, & the total collection of pts on the said finite part. All these are magnitudes of one & the same kind, namely divisibilities, & all are infinite divisibilities, but they are of many different orders. The points on a limited portion of a line obtainable by the quadrilateral construction form a collection which is infinitesimal with respect to the said portion; this portion is ordinally infinitesimal with respect to any bounded area; any bounded area is ordinally infinitesimal with

respect to any bounded volume; & any bounded vol. (except in finite spaces) is ordinally infinitesimal with respect to all space. In all these cases, the word *infinitesimal* is used strictly according to the above def., obtained from the axiom of Archimedes. What makes these various infinitesimals somewhat unimportant, from a math. standpt., is, that measurement essentially depends upon the axiom of Archimedes, & cannot, in general, be extended by means of transfinite nos., for the reasons which have just been explained. Hence two divisibilities,
333 of which one is infinite with respect to the other, are regarded usually as different kinds of magnitude; & to regard them as of the same kind gives no advantage save philosophic correctness. All of them, however, are strictly instances of infinitesimals, & the series of them well illustrates the relativity of the term *infinitesimal*.

334

The case in which infinitesimals were formerly supposed to be peculiarly evident is that of compact series. In this case, however, it is possible to prove that there can be no infinitesimal segments, provided numerical measurements be possible at all — & if it is not possible,

as we have seen, is not definable. In the first place, it is evident that the segments contained between two different terms is always infinitely divisible, for since there is a term c between any two a & b, there is another d between a & c, & so on. Thus no terminated segment can contain a finite no. of terms. But segments defined by a class of terms may have no limiting term. In this case, however, provided the segment does not consist of a single term a, it will contain some other term b, & therefore an infinite no. of terms. Thus all terms are infinitely divisible. 334

Thus to sum up what has been said concerning the infinitesimal, we see, to begin with, that it is a relative term, & that, as regards magnitudes other than divisibilities, or divisibilities of wholes which are infinite in the absolute sense, it is not capable of being other than a rel. term. But where it has an absolute meaning, there this meaning is indistinguishable from finitude. We saw that the infinite, though completely useless in math., does occur in certain instances — for example lengths of bounded straight lines are infinite compared to areas of polygons, & these again as compared to volumes of polyhedra. But such genuine cases of infinites, as we saw, are always regarded by mathematicians as magnitudes of another kind, because no numerical comparison is possible, 24 Cohen begins (p. 1) by asserting that the problem of the infinite is not purely logical: it belongs rather to Epistemology, which is distinguished, I imagine, by the fact that it depends upon the pure intuitions as well as the categories. 349

even by means of transfinite nos, between an area & a length, or a volume & an area. Numerical measurement, in fact, is wholly dependent upon the axiom of Archimedes, & cannot be extended as Cantor has extended nos. And finally we saw that there are no infinitesimal segments in compact series, & — what is chiefly connected — that orders of smallness of functions are not to be regarded as genuine infinitesimals. The infinite, therefore — so we may conclude — is a purely restricted & mathematically very unimportant concept, of which infinity & continuity are alike independent. 337

Chap. XLI. Phil. Arguments concerning the Infinitesimal.
[illegible] Cohen; sec. [illegible] Cohen [illegible] historical excellence [illegible]
[illegible] (338)

Leibniz employed the form $\frac{dy}{dx}$ because he believed in infinitesimals; Newton, on the other hand, definitely asserts that his fluxion is not a fraction. 338

But when we turn to such works as Cohen's, we find that the dx & the dy treated as separate entities, as real infinitesimals, as the intensively real elements of which the continuum is composed (pp. 14, 28, 144, 147). 339

Cohen ~~calculus & method of limits~~ [illegible] proceeds at once to reject the view that the inf. Cal. can be independently derived by mathematics from the method of limits.

21

~~[illegible] (p. 1)~~ This method, he says (p. 1), "consists in the notion that the elementary concept of equality must be completed by the exact notion of the limit. Thus in the first place the concept of equality is presupposed. — Again, in the second place, the method of limits presupposes the concept of magnitude. — But in the presupposed concept of mag. the limiting mag. is at the same time presupposed. The equality which is defined in the elementary doctrine of mag. pays no attention to these limiting magnitudes. For it, mags. count as equal if & although their difference consists in a limiting mag. Hence the elementary concept of equality must be — this is the notion of the method of limits — not so much completed as 339 corrected by the exact concept of the limit. Equality is to be regarded as an earlier stage of the limiting relation."

I have quoted this passage in full, because its errors are typical of those to which non-mathematicians are liable in this question. In the first place equality has no relevance to limits. Cohen [illegible] polygon [illegible]
[illegible] equality [illegible] limit [illegible] equality
[illegible] 340

Magnitude is certainly not involved in the sense, which is undoubtedly that intended by Cohen, that the limit & the terms limited must be magnitudes. Every progression which forms part of a series which is a function of ω, & in which there are terms after the progression, has a limit, whatever may be the nature of the terms. --- Now of course in all series we have magnitudes, namely, the divisibilities of stretches; but it is not of these that we find the limit. 341

But we now come to a greater error. The concept of mag., Coh. sup., which is presupposed in limits, itself presupposes limiting magnitudes. By limitg mag.s, as appears from the context, he means infinitesimals, the ultimate differences, I suppose, between the terms of a series & its limit. What he means to be, that the kinds of mag. which lead to mag. limits are compact series, & that, in compact series, we must have infinit.s Every pt in this opin. is mistaken. Limits, we have just seen, need not be limits of mag.s; segments of a compact series, as we saw, cannot be infinit.; & limits do not in any way imply that the series in which they occur are compact. 341

But the crowning mistake is the supposition that limits introduce a new meaning of equality. Among magnitudes, equality has a absolutely

rigid & unique meaning: it applies only to quantities, & means that they have the same magnitude. There is no question of approximation here: what is meant is simply absolute logical identity of mag. Among numbers (which Cohen probably regards as magnitudes), there is no such thing as equality. There is identity, & there is the rel. which is usually expressed by the sign of equality, as in the equation $2 \times 3 = 6$. This rel. has puzzled those who endeavoured to philosophize about Arith., until it was explained by Prof Peano (See e.g. Riv. di Mat. VII, p. 35). When one term of the equat. is a single no., while the other is an expression composed of two or more no.s, the equat. expresses the fact that the class 341/ defined by the expression contains only one term, which is the single no. on the other side of the eq. This dif. again is absolutely rigid: there is nothing whatever approximate in it, & it is incapable of any modification by infinit.s. I imagine that what Cohen means may be expressed as follows. In forming a dif. coef. we consider two no.s x & $x+dx$, & two others y & $y+dy$. In elementary Arith. x & $x+dx$ would count as equal, but not in the Calculus. There are, in fact, two ways of defining equality. Two terms may be said to be equal when their ratio is unity, or when their difference is zero. But when we allow real infinit^s. dx, x & $x+dx$ will have the ratio unity, but will not have zero for their dif., since dx is dif from absolute zero. This view which I suggest as equivalent to Cohen's, depends upon a misunderstanding of limits & the Calculus. 342

There is no connection whatever of the notion of equality by the doctrine of limits; the only new elements introduced is the ~~consideration~~ consideration of infinite classes of terms chosen out of a series. 342

As regards the nature of the infinitesimal, we are told (p. 15) that the differential, or the inextensive, is to be identified with the intensive, & the diff is regarded as the embodiment of Kant's category of reality. This view (in so far as it is independent of Kant) is quoted with approval from Leibniz; but to me, I must confess, it seems destitute of all justification. It is to be observed that dx & dy, if we allow that they are entities at all, are not to be identified with single terms of our series, ~~not~~ nor yet with differences between consecutive terms, but must be always stretches containing an infinite no. of terms, ~~but must be always~~ or distances corresponding to such stretches. Here a distinction must be made between series of nos & series in which we have only

measurable distances or stretches. The latter is the case of space & time. Here dx & dy are not pts or instants, which alone would be truly inextensive; they are primarily nos, & hence must correspond to infinitesimal stretches or distances — for it would be preposterous to assign a numerical ratio to two pts, or — as in the case of velocity — to a pt & an instant. But dx & dy cannot represent the distances of consecutive pts, nor yet the stretch formed by two consecutive pts. Against this we have, in the first place, the general ground that our series must be regarded as compact, which ~~preced~~ precludes the idea of consecutive terms. 342/ To evade this, if we are dealing with a series in which there are only stretches, not distances, would be impossible: for to say that there are always an infinite no of intermediate pts except when the stretch consists of a finite no. of terms would be a mere tautology. But when there is distance, it might be said that the distance of two terms may be finite or infinitesimal, & that, as regards infinit. distances, the stretch is not compact, but consists of a finite ~~to~~ no. of terms. This being allowed for the moment, our dx & dy may be made to be the distances of consecutive pts, or else the stretch is compoint of consecutive pts. But now the distance of consecutive pts, supposing for example that both are on one straight line, would seem to be a constant, which would give $\frac{dy}{dx} = \pm 1$. We cannot suppose, in cases where x & y are both continuous, & the function y is one-valued, as the Calculus requires, that x & $x+dx$ are consecutive, but not y & $y+dy$; for every value of y will be correlated with one & only one value of x, & vice versa; thus y cannot skip any supposed intermediate values between y & $y+dy$. Hence, given the values of x & y, even supposing the distances of consecutive terms to differ from place to place, the value of $\frac{dy}{dx}$ will be determinate; & any other function y' which, for some value of x, is equal to y, will, for that value, have an equal derivative, which is an absurd conclusion. And leaving these math. arguments, it is evident, from the fact that dy & dx are to have a numerical ratio, that if they be intensive magnitudes, as is suggested, they must be numerically measurable ones: but how this measurement is effected, it is clearly not easy to see. - - - - - - 343

Hence the admission of consecutive nos is fatal to the Calculus; & since the Calculus must be maintained,

favors Bergson; Series without consecutive terms

the calculus is fatal to consecutive nos. 344

The notion that there must be consecutive nos is reinforced by the idea of continuous change, which is embodied in calling x & y "variables". - - - People picture a variable to themselves — often unconsciously — as successively assuming a series of values, as might happen in a dynamical problem - - - Whether or not this view of motion is correct, I do not now decide: at any rate it is irrelevant where a fundamental pt in the theory of continuous series is concerned, since time & the path of motion must both be continuous series, & the properties of such series must be decided before appealing to motion to confirm our views. For my part, to return to Cohen, I must confess, it seems evident that intensive magnitude is something wholly different from infinitesimal extensive mag. for the latter must be always smaller than finite extensive mags, & must therefore be of the same kind; while intensive mag^s seem never in any sense smaller than any extensive mag^s. Thus the metaph. theory by which infinit^s are to be rescued seems, both mathly & philly, destitute of grounds in its favor. 344

We cannot, then, agree with the following summary of Cohen's theory (p. 28): "That I may be able to posit an element in & for itself, is the desideratum, to which corresponds the instrument of thought reality. This instrument of thought must first be set up, in order to be able to enter into that combination with intuition, with the consciousness of being given, which is completed in the princip. of intensive mag. This presupposition of intensive reality is latent in all principles, & must therefore be made independent. This presupposition is the meaning of reality & the secret of the concept of the differential." What we can agree to, & what, ~~I think~~ I believe, confusedly underlies the above statement, is, that every continuum must consist of elements or terms; but these ~~as~~ will not fulfill the function of the dx & dy which occur in old-fashioned accounts of the Calculus. Nor can we agree that "this finite" (i.e. that which is the object of physical sense) "can be thought as a sum of those infinitesimal intensive realities, as a definite integral" (p. 144). The def. integral is not a sum of elements of a continuum, although there are such elements: for ex., the length of a curve, as obtained by integration, is not the sum of its pts, but strictly & only the limit of the lengths of 344 inscribed polygons. The only sense which can be given to the sum of the pts of the curve is the logical class to which they all

belong, i.e. the curve itself, not its length. 345

Hence infinitesimals as explaining continuity must be regarded as unnecessary, erroneous, & self-contradictory. 345.

Ch XLII The Philos. of the Continuum.

Of the arith. 346 continuum, M. Poincaré justly remarks (Revue de Métaphysique et de Morale, Vol 1, p. 26): "The cont. thus conceived is nothing but a collection of individuals arranged in a certain order, infinite in no., it is true, but external to each other. This is not the ordinary concept, in which there is supposed to be, between the elements of the continuum, a sort of intimate bond which makes a whole of them, in which the pt is not prior to the line, but the line to the pt. Of the famous formula, the continuum is unity in multiplicity, the multiplicity alone subsists, the unity has disappeared." 347

One of the most notable victims of posterity's lack of judgment is the Eleatic Zeno. Having invented four arguments, all immeasurably subtle & profound, the grossness of subsequent philosophers pronounced him to be a mere ingenious juggler, & his arguments to be one & all sophisms. After two thousand years of continual refutation, these sophisms were reinstated,

& made the foundation of a math. renaissance, by a German professor, who probably never dreamed of any connection between him & Zeno. Weierstrass, by strictly banishing all infinitesimals, has at last shown that we live in an unchanging world, & that the arrow, at every moment of its flight, is truly at rest. The only pt. where Zeno probably erred was in inferring (if he did infer) that, because there is no change, therefore the world must be in the same state at one time as at another. This consequence by no means follows, & in this pt the German professor is more constructive than the ingenious Greek. 347 348

Zeno's first argument, that of dichotomy, may be met in two ways, either of which, at first sight, might seem sufficient, but both of which are really necessary. First we may distinguish two kinds of infinite regress, of which one is harmless. Secondly, we may distinguish two kinds of whole, the collective & the distributive, & assert that, in the latter kind, parts of equal complexity with the whole are not logically prior to it. 348

An infinite regress may be of two kinds. In the objectionable kind, two or more propositions join to

constitute the meaning of some proposition; of these constituents, there is one at least whose meaning is similarly compounded; & so on ad infinitum. This form of regress commonly results from circular definitions. 348

Zeno's [illegible] inf. regress [illegible]

If A be a proposition whose meaning is perfectly definite, & A implies B, B implies C, & so on, we have an infinite regress of a quite unobjectionable kind. If then, it can be shown that the implication of the parts in the whole, when the whole is an infinite class of no.s, is of this latter kind, the regress suggested by Zeno's argument of dichotomy will have lost its sting. 349

In order to show that this is the case, we must distinguish wholes which are defined extensionally, i.e. by enumerating their terms, from such as are defined intensionally, i.e. as the class of terms having some given relation to some given term, or, more simply, as a class of terms. (For a class of terms, when it forms a whole, is merely all terms having the class-relation to a class-concept.) Now an extensional whole — at least so far as human powers extend — is necessarily finite: we cannot enumerate more than a finite no. of parts belonging to a whole, & if the no. of parts be finite, this

must be known otherwise than by enumeration.
But this is precisely what a class-concept effects:
a whole whose parts are the terms of a class is
completely defined when the class-concept is speci-
fied; & any definite individual either belongs, or
does not belong, to the class in question. An
individual of the class is part of the whole ex-
tension of the class, & is logically prior to this
extension taken collectively; but the extension
itself is definable without any reference to any
specified individual, & subsists as a genuine
entity even when the class contains no terms.
And to say, of such a class, that it is infinite,
is to say that, though it has terms, the no. of
these terms is not any finite no. — a proposition
which, again, may be established without the
impossible process of enumerating all finite nos. 349
And this is precisely the case of the real nos between
0 & 1. They form a definite class, whose meaning
is known as soon as we know what is meant
by real no, 0, 1, & between. ----- Thus the
solution of the difficulty lies in the theory of de-
noting & the intensional def. of a class. With this
an answer is made to Zeno's argument as it ap-

pears in Arith. 350.
Achilles fallacy. When this argument is translated
into arith. language, it is seen to be concerned with
the one-one correlation of two infinite classes. 350.

[illegible] $\frac{1+2x}{1-3}$ $\frac{2+x}{2-3}$, $0 \leq x \leq 1$.

The argument [illegible] infinity [illegible]

This (flying arrow --) has usually been thought so
monstrous a paradox as scarcely to deserve serious
discussion. To my mind, I must confess, it seems
a very plain statement of a very elementary fact,
& its neglect has, I think, caused the quagmire in which
the phil. of change has long been immersed. 350.
Zeno's: Every possible value of a variable is
a constant. [illegible] 357.
Though it (variable) is always connected with
some class, it is not the class, nor a particular
member of the class, nor yet the whole class,
but any member of the class. On the other hand,
it is not the concept "any member of the class," but
it is that (or those) which this concept denotes.
357.

But Zeno's argument contains an element which
is specially applicable to motion continua. In the case

of motion, it denies that there is such a thing as a state of motion. In the general case of a continuous variable, it may be taken as denying actual infinitesimals. For infinitesimals are an attempt to extend the values of a variable the variability which belongs to it alone. When once it is firmly realized that all the values of a variable are constants, it becomes easy to see, by taking *any* two such values, that their difference is always finite, & hence that there are no infinitesimal differences. —— It is true the dif might have been less than the one we chose; but if it had been, it would still have been finite. The lower limit to possible differences is zero, but all possible difs are finite; & in this 351 there is no shadow of contradiction. This static ~~view~~ theory of the variable is due to the mathematicians, & its absence in Zeno's day led him to suppose that continuous change was impossible without a state of change, which involves infinitesimals & the contradiction of a body's being where it is not. 352

The last of Zeno's arguments is that of the measure. —— It is only applicable against those

who hold to indivisibles among stretches, the previous arguments being held to have sufficiently refuted the partisans of infinite divisibility. We are now to suppose a set of discrete moments & discrete places, motion consisting in the fact that at one moment a body is in one of these discrete places, in another at another.

Imagine three parallel lines composed of the pts a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'' respectively. Suppose the second line, in one instant, to move all its points to the left by one place, while the third moves them all one place to the right. Then although the instant is indivisible, c', which was over c'', & is now over a'', must have passed b'' during the instant; hence the instant is divisible, contra hyp.

a b c d
a' b' c' d'
a'' b'' c'' d''

a b c d
a' b' c' d'
a'' b'' c'' d''

This argument is virtually (in the preceding ch.) that by which I proved that, if there are consecutive terms, the $\frac{dy}{dx} = \pm 1$ always; or rather, it is this argument together with an instance in which $\frac{dy}{dx} = 2$. It may be put thus: Let y, z be two functions of x, & let $\frac{dy}{dx} = -1$, $\frac{dz}{dx} = +1$. Then $\frac{d}{dx}(y - z) = 2$, which contradicts the principle that the value of every derivative must be ± 1. To the argument in Zeno's form, M. Evellin (Rev. de Metaph. et Moral. Vol. I. p. 386) who is an advocate of indivisible stretches, replies that a'' & b' do not cross each other at all. For if instants are indivisible — & this is the hypothesis — all we can say is, that at one ~~moment~~ instant a' is over a'', in the next, c' is over a''. Nothing has happened between the instants, & to suppose that a'' & b' have crossed is to beg the question by a covert appeal to the continuity of motn. This reply is valid, I think, in the case of motn; both time & space may, without positive contradictn, be held to be discrete, by adhering strictly to distances in additn to stretches. Geometry, kinematics, & dynamics become false; but there is no very good reason to think them true. In the case of Arith., the matter is otherwise, since no imp. question of existence is involved. And in this case, as we saw from the arg above [352/] argument concerning derivatives, Zeno's argument is absolutely sound. Numbers are entities whose nature can be established beyond questn; & among nos., the various forms of continuity which occur cannot be denied without positive contradictn. For this reason the problem of continuity is better discussed in connectn with numbers than in connectn with space, time, or motn. 353

We have now seen that Zeno's arguments, though they prove a very good deal, do not prove that the continuum, as we have become acquainted with it, contains any contradictn whatever. Since his day the attacks on the continuum have not, so far as I know, been conducted with any new or more powerful weapons. ~~It only remains~~ 353

The denial of infinitesimal segments resolves an antinomy which had long been an open scandal, I mean the antinomy that the continuum both does & does not consist of elements. We see now that both may be said, though in different senses. Every continuum is a series consisting of terms, & the terms, if not indivisible, at any rate are not divisible into real terms of the cont. In this sense there are elements. But if we take consecutive terms together with their asymmetrical relatn as constituting what may be called an ordinal element, then in this sense, our continuum has no elements. - - - - The demand for consecutive terms springs from an [351/] illegitimate use of math. inductn. And as regards distance, small distances are no simpler than large ones, but all are alike simple. And large distances do not presuppose small ones; being intensive magnitudes, they may exist where there are If we take a stretch to be essentially serial so that it must consist of at least two terms, then there are no elementary stretches; & if our cont. be one in which there is distance, then likewise there are no elementary distances. But in neither of these cases is there the slightest logical ground for elements.

no smaller ones at all. Then the infinite regress from greater to smaller distances or stretches is of the harmless kind, & the lack of elements need not cause any logical inconvenience. Hence the antinomy is resolved, & the cont., so far at least as I am able to discover, is wholly free from contradictions. 354

Ch. XLIII. The Phil. of the Infinite.

Kant's [illegible] This view is supported by the argument that it takes time to count, & therefore without time we could not know the no. of anything. By this argument we can prove that battles always happen near telegraph wires, because if they did not we should not hear of them. 355

Leibniz points out (Gerhardt's ed. I. p. 338) that, since every no. can be doubled, the no. of nos. is the same as the no. of ~~[illegible]~~ nos., whence he deduces that there is no such as infinite no. (307) 306

Common sense must choose between the paradox of Zeno (Achilles) & the paradox of Cantor (whole = part). 358

Russell's [illegible]

Achilles parad.

(1) For every posit. of the tortoise there is one & only one of Achilles; for every posit. of Achilles there is one & only one of the tortoise.

(2). Hence the series of positions occupied by Achilles has the same no. of terms as the series of positions occupied by the tortoise.

(3). A part has fewer terms than a whole in which it is contained & with which it is not coextensive.

(4). Hence the series of positions occupied by the tortoise is not a proper part of the series of positions occupied by Achilles. 358

The Achilles proves that two variables in a continuous series, which approach equality from the same side, cannot ever have a common limit. 359

When we come to infinite wholes, this twofold definition (def. by enumeration & by intension, i.e. by class-concept) disappears, & we have only the def. by intension. The whole & the part must both be classes, & the def. of whole & part is effected by means of the notion of a variable & of logical implication. 360

The def. of whole & part without enumeration is the key to the whole mystery. 361

If a be a class-concept, an individual of a is a term having to a that specific rel. which we call the class-rel. If now b be another class such that, for all values of x, "x is an a" implies "x is a b", then the extension of a (i.e. the variable x) is said to be part of the extension b. (Peano, Formulaire Vol. V. Part I) Here no enumeration of individuals is required. (360)

It is very important to realise, as regards ω or $\aleph_0$, that neither has a no. immediately preceding it. — When it is forgotten that ω has no immediate predecessor, all sorts of contradictions emerge. — In fact, to say that ω has no immediate predecessor is merely to say that the finite nos are no last term. 361

To deny ω would be to affirm that there is a last finite no — a view, which leads at once to definite contradictions. And when this is admitted, ω+1 is the type of the series of ordinals including ω, i.e. of the series whose terms are all series of integers from 1 up to any finite no. together with the whole series of integers. Hence all the infinite hierarchy of transfinite nos. easily follows. 362

We saw that irrationals are to be defined as those segments of rationals which has no limit, & that in this way analysis is able to dispense with any special axiom of continuity. 368

Cantor: greatest no. [illegible] 362–368.

End of Part V.

Part VI. Space. chap. 4. The Continuity of Space.

Cantor's continuity is indubitably sufficient to satisfy all metrical axioms, & the only question is, whether existent space need have continuity of so high an order. In any case, if measurement is to be theoretically possible, space must not have a greater cont. than that of the real nos. 439

Whether the axiom of continuity be true as regards our actual space, is a question which I see no means of deciding. For any such question must be empirical, & it would be quite impossible to distinguish empirically what may be called a rational space from a continuous space. But in any case there is no reason to think that space has a higher order power than that of the continuum. 440

There is thus no mystery in the cont. of space, & no need of any notions not definable in Arith. There is, however, among most philosophers, a notion that, in space, the whole is prior to the parts; (cf. Leibniz, Phil. Werke Gerhardt's ed. V. p. 375; IV. p. 491) that although every length, area, or volume can be divided into lengths, areas, or volumes, yet there are no indivisibles of which such entities are composed. According to this view, points are mere fictions, & only volumes are genuine entities. Volumes are not to be regarded as classes of pts, but as wholes containing parts which are never simple. Some such view as this is, indeed, often put forward as giving the very essence of what should be called continuity. ...

The series which arise in Arith, whether continuous or not, are essentially composed of terms — integers, rationals, real nos, etc. And where we come near to the continuity of space, as in the case of the real nos, each real no is a segment or infinite class of rationals, & no denial that a segment is composed of elements is possible. 440 In this case, we start from the elements & gradually construct various infinite wholes. But in the case of space, we are told, it is infinite wholes that are given to begin with; the elements are only inferred, & the inference, we are assured, is very rash. This question is in the main one of Logic. Let us see how the above view is supported.

Those who deny indivisible pts as constituents of space have had, in the past, two lines of argument by which to maintain this denial. They had the difficulties of cont. & infinity, & they had the way in which space is presented in what,

according to this school, they called intuition or sensation or percept. The difficulties of cont. & inf. are a thing of the past; hence this line of argument is no longer open to those who deny points. As regards the other argument, it is extremely difficult to give it a precise form — indeed I suspect that it is impossible. We may take it as agreed that everything spatial of whose existence we become immediately aware in sensation or intuition, is complex & divisible. Thus the emp. premiss, in the investigation of space, is the existence of divisible entities with certain properties. 441

We agreed that the emp premisses, as regard the continuity of space, are concerned always with divisible entities which have divisible parts. The question before us is whether we are to infer from this the the logical premisses for the science of ~~ext~~ existing space (i.e. the def. of existing space) may or must be concerned with divisible entities. The question whether our premisses must be concerned with divisible entities is fully answered, in the negative, by actual Geometry, where, by means of indivisible points, a space empirically indistinguishable from that in which we live is constructed. The ~~other~~ only reasons hitherto alleged by philosophers against regarding this answer as satisfactory, are either such as were derived from the difficulties of infinity & continuity, or such as were based upon a certain logical theory of relations. The former have been already disproved; the latter will be discussed in the next chapter. The question whether our premisses may be answered with divisible entities is far more difficult, & can be answered only by means of the logical discussions of Part II. Whatever is complex, we then decided (§143), must be composed of simple elements; & this conclusion carries us a long way towards the decision of our present question. But it does not quite end our doubts. We distinguished, in Part II, two kinds of wholes, namely aggregates & unities. The former may be identified, at any rate for present purposes, with classes, while the latter seem to be indistinguishable from propositions. Aggregates consist of units from whose addition (in the sense presupposed in Arith.) they result; unities, on the contrary, are not reconstituted by the addition of their constituents. In all unities, one term at least is either a predicated predicate or a relating relation; in aggregates, there is no such term. 442 Now what is really maintained by those who deny that space is composed

of pts is, I imagine, the view that space is a unity whose constituents do not reconstitute it. I do not mean to say that this view is unconsciously held by all who make the denial in question, but that it seems the only view which renders this and denial reasonable.

Before discussing this opinion, it is necessary to make a distinction. An aggregate may be an aggregate of unities, & need by no means be an aggregate of simple terms. The question whether a space is an aggregate of unities or simple terms is mathematically, though not philosophically, irrelevant; the difference of the two cases is illustrated by the difference between an independent projective space & the projective space defined in ~~space~~ terms of the elements of a descriptive space. For the present, I do not wish to discuss whether points are unities or simple terms, but whether space is or is not an aggregate of pts.

This question is one in which confusions are very liable to occur, & have, I think, actually occurred among those who have denied that a space is an aggregate. Relations are, of course, quite essential to a space, & this has led to the belief that a space *is*, not only its terms, but also the relations relating them. Here, however, it is easy to see that, if a space be the field of a certain class of relations, then a space is an aggregate; & if rel^s are essential to the definition of a space, there must be some class of rel^s having a field which is the space. The rel^s essential to Geometry will not hold between two spatially divisible terms: there is no straight line joining two volumes, & no distance between two surfaces. Thus, if a space is to be defined by means of a class of rel^s, it does not follow, as is suggested, that a space is a unity, but rather, on the contrary, that it is an aggregate, namely the field of the said class of rel^s. And against any view which starts from volumes or surfaces, or indeed anything except pts & straight lines, we may urge, with Peano, that the distinction between curves, surfaces & volumes, is only to be effected by means of the straight line, & requires, even then, the most elaborate developments. There is, therefore, no possibility of any definite Geometry without pts, no logical reason against pts, & strong log. reasons in their favor. We may therefore take it as proved that, if we are to construct any self-consistent theory of space, we must hold space to be an aggregate

of pts, & not a unity which is indefinable as a class. Space is, in fact, essentially a class, since it cannot be defined by enumeration of its ~~pts~~ terms, but only by means of its rel^s to the class-concept Point. Space is nothing but the extension of the conception point, as the British army is the extension of the concept of British soldier; only, since the no. of pts is infinite, Geom. is unable to imitate the Army List by the issue of a Space-List.

Space, then, is composed of pts; & if analyt. Geom. is to be possible, the no. of pts must be either equal to, or less than, the no. of the continuum. If the no. be less, some propositions of the accepted Geom. will be false; but a space in which the no. of pts is equal to the no. of finite nos, & in which the pts of a line form a series ordinally similar to the rationals, will, with suitable axioms, be empirically indistinguishable from a cont. space, & may be actual. Thus Arith, as enlarged by Cantor, is undoubtedly adequate to deal with Geom.; the only question is, whether the more elaborate parts of its machinery are required. It is in no. that we become certain of the continuum; among actual existents, so far as present evidence shows, continuity is possible, but cannot be rendered certain & indubitable 444

The practical math. form of the question arises as regards force, & in this form, there can be no doubt that the descriptive school are in the right: the notion of force is one which ought not to be introduced into the principles of Dynamics. The reasons for this ~~conclus~~ assertion are quite conclusive. Force is the supposed cause of acceleration: many forces are supposed to concur in producing a resultant acceleration. Now an acceleration is a mere math. fiction, a number, not a physical fact; & a component acceleration is doubly a fiction, for, like the component of any other vector sum, it is part of the resultant, which alone could be supposed to exist. Hence a force, if it be a cause, is the cause of an effect which never takes place. 474

~~Ch~~ Part III. Quantity

In fixing the meaning of such a term as quantity or magnitude, one is faced with the difficulty that, however one may define the word, one must appear to depart from usage. This difficulty arises whenever two characteristics have been ~~comp~~ commonly supposed inseparable which,

upon closer examination, are discovered to be capable of existing apart. In the case of magnitude, the usual meaning appears to be capable of implying (1) a capacity for the rel. of greater & less, (2) divisibility. Of these characteristics, the first is supposed to imply the second. But as I propose to deny the implication, I must either admit that some things which are indivisible are magnitudes, or that some things which are greater or less than others are not magnitudes. As one of these departures from usage is unavoidable, I shall choose the former, which I believe to be the less serious. A magnitude, then, is to be defined as anything which is greater or less than something else.

It might be thought that equality should be mentioned, along with greater & less, in the definition of magnitude. We shall see reason to think, however—paradoxical as such a view may appear—that what can be greater or less than some term, can never equal to any term whatever, & vice versa. This will require a distinction, whose necessity will become more & more evident as we proceed, between the kind of terms that can be equal, & the kind that can be greater or less. The former I shall call quantities, the latter magnitudes. An actual foot-rule is a quantity: its length is a magnitude. Magnitudes are more abstract than quantities: when two quantities are equal, they have the same magnitude. The necessity of this abstraction is the first point to be established. 159

A quantity is anything which is capable of quantitative equality to something else. Quantitative equality is to be distinguished from other kinds, such as arithmetical or logical equality. All kinds of equality have in common the three properties of being reflexive, symmetrical, & transitive. 159

We may now sum up the above discussion in a brief statement of results. There are a certain pair of indefinable relations, called greater & less; these rel^s are asymmetrical & transitive, & are inconsistent the one with the other. Each is the converse of the other, in the sense that, whenever the one holds between A & B, the other holds between B & A. The terms which are capable of these rels are _magnitudes_. Every mag. has a certain peculiar rel to some concept, expressed by saying that it is a mag. of that concept. Two magnitudes which have this rel. to the same concept are said to be of the same kind; to be of the same kind is the necessary & sufficient condition for the rels of greater & less. When a mag. _can_ be particularised by temporal, spatial, or spatio-temporal position, or when,

being a rel, it can be particularised by taking into consideration a pair of terms between which it holds, then the mag. so particularized is called a _quantity_. Two mag^s. of the same kind can never be particularized by exactly the same specification. Two quantities which result from particularizing the same mag. are said to be equal. 167

The work of Herr Meinong on Weber's law (Ueber die Bedeutung des Weber'schen Gesetzes, 1896) is one from which I have learnt so much, & with which I so largely agree, that it seems desirable to justify myself on the points in which I depart from it. This work begins (§1) by a characterisation of magnitude as that which is limited towards zero. Zero is understood as the negation of mag., & after a discussion, the following statement is adopted (p. 8).

"That is or has magnitude which allows the interpolation of terms between itself & its contradictory opposite."

Whether this constitutes a def. or a mere criterion, is left doubtful (ib.), but in either case, it appears to me to be undesirable as a fundamental characterisation of mag. It derives support, as Herr Meinong points out (p. 6 n.), from its similarity to Kant's "Anticipations of Perception." But it is, if I am not mistaken, liable to several grave objections. In the first place, the whole theory of zero is most difficult, & seems subsequent, rather than prior, to the theory of other mag^s. And to regard zero as the contradictory opposite of other magnitudes seems erroneous. The phrase should denote the class obtained by negation of the class "magnitudes of such & such a kind"; but this obviously would not yield the zero of that kind of mag. Whatever interpretation we give to the phrase, it would seem to imply that we must regard zero as not a mag. of the kind whose zero it is. But in that case it is not less than the mag^s of the kind in question, & there seems no particular meaning in saying 168/ that a lesser mag is between zero & a greater mag. And in any case, the notion of between demands asymmetrical rel^s among the terms concerned. These rel^s, it would seem, are, in the case of mag, none other than greater & less, which are therefore prior to the betweenness of mag^s. For what I conceive to be the true theory of zero, and more suitable to def. I shall endeavour at a later stage to give; & it will then appear how difficult this subject is. It can hardly be wise, therefore, to introduce zero in the first account of mag. Other objections might be urged, as, for instance, that it is doubtful whether

all kinds of mag. have a zero; that in discrete kinds of mag. zero is unimportant; & that among distances, where the zero is simply identity, there is hardly the same rel. of zero to negation or non-existence as in the case of qualities as pleasure. But the main reason must be the log. inversion involved in the introduction of between before any asymmetrical rel^s have been specified from which it could arise. 169

Cf. Cohen All the mag^s dealt with hitherto (pleasure &c) have been, strictly speaking, indivisible. Thus the question arises: Are there any divisible magnitudes? Here I think a distinction must be made. A mag. is essentially one, not many. Thus no magnitude is correctly expressed as a no. of terms. But may not the quantity which has magnitude be a sum of parts, & the magnitude a mag. of divisibility? If so, every whole consisting of parts will be a single term possessed of the property of divisibility. The more parts it consists of, the greater is its divisibility. On this supposition, divisibility is a mag., of which we may have a greater or less degree, & the degree of divisibility corresponds exactly, in finite wholes, to the no. of parts. But though the whole which has divisibility is of course divisible, yet its divisibility, which alone is strictly a mag, is not properly speaking divisible. The divisibility does not itself consist of parts, but only of the property of having parts. It is necessary, in order to obtain divisibility, to take the whole strictly as *one*, & to regard divisibility as its adjective. Thus although, in this case, we have numerical measurement, & all the mathematical consequences of division, yet, philosophically speaking, our mag is still indivisible.

There are difficulties, however, in the way of admitting divisibility as a kind of mag. It seems to be not a property of the whole, but merely a rel to the parts. It is difficult to decide this pt, but a good deal may be said, I think, in support of divisibility as a simple quality. The whole has a certain rel, which for convenience we may call that of inclusion, to all its parts. This rel is the same whether there be many parts or few; what distinguishes a whole of many parts is that it has many such rels of inclusion. But it seems reasonable to suppose that a whole of many parts differs from a whole of few parts in some intrinsic respect. In fact, wholes may be arranged in a series according as they have more or few parts; & the serial arrangement implies some series of

properties differing more or less from each other, & agreeing when two wholes have the same finite no of parts, but distinct from no of parts in finite wholes. These properties can be none other than greater or less degrees of divisibility. Thus magnitude of divisibility would *appear* to be a simple property of a whole, distinct from the no of parts included in the whole, but correlated with it, provided this no be finite. If this view can be maintained, divisibility may be allowed to remain as a numerically measurable, but not divisible, class of mags. In this class we should have to place lengths, areas & volumes, but not distances. At a later stage, however, we shall find that the divisibility of infinite wholes, in the sense in which this is not measured by cardinal nos, must be derived through rels in a way analogous to that in which distance is derived, & must be really a property of rels.

Thus it would appear, in any case, that all mags are indivisible. This is one common mark which they all possess, & so far as I know, it is the only one to be added to those enumerated in chap. XIX. Concerning the range of quantity, there seems to be no further general proposition. Very many simple non-relational terms have mag, the principal exceptions being colours, points, instants & nos. 174

Starting from one-dimensional mag. connected with the straight line, most theories may be divided into two classes, those appropriate to areas & volumes, & those appropriate to angles [181] between lines or planes. Areas & volumes are radically different from angles, & are generally neglected in philosophies which hold to relational views of space or start from projective Geom. The reason of this is plain enough. On the straight line, if, as is usually supposed, there is such a rel. as distance, we have two philosophically distinct but practically conjoined mags, namely the distance & the divisibility of stretch. The former is similar to angles; the latter to areas & volumes. Angles may also be regarded as ~~but~~ distances between terms in a series, namely between lines through a point or planes through a line. Areas & volumes, on the contrary, are sums, or mags of divisibility. Owing to the confusion of the two kinds of mag. connected with the line, either angles, or else areas & volumes, are usually incompatible with the phil. invented to suit the line.

— — — — —

We thus see how two great classes of mags — divisibilities & distances — are rendered ame-

nable to measurement. These two classes practically cover what are usually called extensive magnitudes, & it will be convenient to continue to allow the name to them. I shall extend this name to cover all distances & divisibilities, whether they have any rel. to space & time or not. But the word extensive must be supposed to indicate, as it usually does, that the magnitudes so designated are divisible. We have already seen that no magnitude is divisible. Quantities are only divisible into other quantities in the one case of wholes which are quantities of divisibility. Quantities which are distances, though I shall call them extensive, are not divisible into smaller distances; but they allow the important kind of addition which I shall call relational addition.

All other mags & quantities may be properly called intensive. Concerning these, unless by causal rel., or by means of some more or less roundabout rel such as those explained at the beginning of the present chapter, numerical measurement is impossible. Those mathematicians who are accustomed to an exclusive emphasis on nos, will think that nothing can be said with definiteness concerning mags incapable of measurement. This, however, is by no means the case. The immediate judgements of equality, upon which all measurements depend, are still possible when measurement fails, as are also the immediate judgements of greater & less. Doubt only arises where the difference is small; & all that measurement does,[182] in this respect, is to make the margin of doubt smaller — an achievement which is purely psychological, & of no philos importance. Quantities not susceptible of numerical measurement can thus be arranged in a scale of greater & smaller magnitudes, & this is the only strictly quantitative achievement of even numerical measurement. We can know that one mag is greater than another, & that a third is intermediate between them; also, since the differences of mags are always mags, there is always (theoretically, at least) an answer to the question whether the diff of one pair of mags is greater than, less than, or the same as the diff of another pair of the same kind. And such propositions, though to the mathematician they may appear approximate, are just as precise & definite as the propositions of Arith. Without numerical measurement, therefore, the quantitative rels of mags have

all the definiteness of which they are capable — nothing is added, from the theoretical standpt, by the assignment of correlated nos. The whole subject of the measurement of quantities is, in fact, one of more practical than theoretical importance. What is theoretically important in it is merged in the wider question of the correlation of series. 183

We decided that, just as there are the distinct log. & arith. negations, so there is a third fundamental kind, the quantitative negation; but that this is negation of that quality or rel of which the magnitudes are, not of magnitudes of that quality or rel. Hence we were able to regard zero as one among the magnitudes contained in a kind of mag, & to distinguish the zeroes of different kinds. We showed also that quantitative negation is connected with logical negation by the fact that there cannot be any quantities whose mag is zero. 195

In the present chapt. the problems of continuity, the infinite, & the infinitesimal, were shown to belong, not especially to the theory of[195] quantity, but to those of nos & order. It was shown that, though there are kinds of mag in which there is no greatest & no least mag, this fact does not require us to admit inf. or infinitesimal mags; & that there is no contradiction in supposing a kind of mag. to form a series in which there is a term between any two, & in which, consequently, there is no term consecutive to a given term. The supposed contradiction was shown to result from an undue use of math. induction — a principle, the full discussion of which presupposes the phil. of order. 96

Dr. Bernard Bolzano. Paradoxien des Unendlichen herausgegeb von Dr. F. Přihonsky.

§ 6. Betrachten wir einen Ggs. als gehörig zu einer Gattung von Dingen, denen je zwei, M u. N, niemals ein anderes Verhältnis zu einander haben können, als dass sie einander entweder gleich sind, oder dass sich das eine von ihnen als eine Summe darstellt, die einen dem andern gleichen [41] Teil in sich fasst, d.h. dass entweder $M = N$ od. $M = N + \nu$ od. $N = M + \mu$, wo von den Teilen ν & μ abermals dasselbe gelten muss, dass sie nämlich einander entweder gleich, od. der eine als ein in dem andern enthaltener Teil anzusehen sind: so betrachten wir diesen Ggs. als eine *Grösse*. 5

§ 7. Wenn ein gegebener Inbegriff von Dingen .... A, B, C, D, E, F ... L, M, N -- von einer solchen Beschaffenheit ist, dass sich für jeden Teil M irgend ein u. auch nur Ein anderer N nachweisen lässt von der Art, dass wir nach einem für alle Teile des Inbegriffes gleichen ~~Ite~~ Gesetze entweder N durch sein Verhältnis zu M, od. M durch sein Verhältnis zu N bestimmen können: so nenne ich diesen Inbegriff eine *Reihe*, u. seine Teile die Glieder dieser Reihe; jenes Gesetz, nach welchem entweder N durch sein-

Verhältnis zu M. od. M durch Verhältnis zu N bestimmbar ist, das Bildungsgesetz der Reihe, das eine dieser Glieder, welches man will, nenne ich (ohne durch diese Benennung der Bz. eine wirkliche Zeit- od. R-folge bezeichnen zu wollen) das vordere od. vorhergehende, das andere das hintere od. nachfolgende; 5

§ 11. Mit diesem den Mathematikern so wohl bekannten Unendlichen nun sind einige Philosophen, zumal der neueren Zeit [71] wie Hegel und seine Anhänger, noch nicht zufrieden zu stellen, nennen es verächtlich das schlechte Unendliche, u. wollen noch ein viel höheres, das wahre, das qualitative Unendliche kennen, welches sie namentlich in Gott u. überhaupt im Absoluten nur zu finden. Wenn sie, wie Hegel, Erdmann u. A. sich das mathematische Unendliche nur als eine Grösse denken, welche veränderlich ist u. in ihrem Wachstum keine Grenze hat (was freilich manche Mathematiker als die Erklärung ihres Begriffes aufgestellt haben): so pflichte ich ihnen in ihrem Tadel dieses Begriffes einer in das Unendliche nur wachsenden, nie es erreichenden Grösse

selbst bei. Eine wahrhaft unendliche Grösse z. B. die Länge der ganzen beiderseits grenzenlosen Geraden (d. h. die Grösse desjenigen R-dinges, das alle Punkte enthält, die durch ihr blosses begrifflich vorstellbares Verhältnis zu zwei gegebenen bestimmt sind), braucht eben nicht veränderlich zu sein, wie sie es denn in dem hier angeführten Beispiele in der Tat nicht ist; u. eine Grösse, die nur stets grösser angenommen werden kann, als wir sie schon genommen haben, u. grösser, als jede gegebene (endliche) Grösse zu werden vermag, kann dabei gleichwohl beständig eine bloss endliche Grösse verbleiben, wie dieses namentlich von jeder Zahlgrösse 1, 2, 3, 4 ... gilt. Was ich nicht zugestehe, ist bloss, dass der Philosoph einen Gegenstand kenne, dem er das Prädikat der Unendlichkeit beizulegen berechtigt sei, ohne in diesem Gg. in irgend einer Beziehung erst eine unendliche Grösse od. doch Vielheit nachgewiesen zu haben. Wenn ich dartun kann, dass selbst in Gott als in demjenigen Wesen, das wir als die vollkommenste Einheit betrachten, sich Gesichtspunkte nachweisen lassen, aus welchen wir eine unendliche Vielheit in ihm erblicken, und dass es eben nur diese Gesichtspunkte sind, aus denen wir ihm Unendlichkeit beilegen: so wird es kaum nötig sein, noch ferner dazuzutun, dass ähnliche Rücksichten auch in allen andern Fällen, wo der Begriff der Unendlichkeit in seinem guten Rechte ist, zu Grund liegen. 9

§.13. Die Menge der Sätze und Wahrheiten an sich ist, wie sich sehr leicht einsehen lässt, unendlich; denn wenn wir irgend eine Wahrheit, etwa den Satz, dass es Wahrheiten überhaupt gebe, oder sonst jeden beliebigen, den ich durch A bezeichnen will, betrachten: finden wir, dass der Satz, welchen die Worte „A ist wahr" ausdrücken, ein vom A selbst verschiedener sei; denn dieser hat offenbar ein ganz anderes Subjekt als jener. Sein Subjekt nämlich ist der ganze Satz A selbst. Allein nach eben dem Gesetze, wie wir hier aus dem Satze A diesen von ihm verschiedenen, den ich B nennen will, ableiten, lässt sich aus B wieder ein dritter Satz C ableiten, und so ohne Ende fort. Der Inbegriff aller dieser Sätze, deren jeder folgende zu dem nächst vorhergehenden in dem nur eben angegebenen Verhältnisse

steht, dass er denselben zu seinem Subjekte erhebt und von demselben aussagt, dass er ein wahrer Satz sei, dieser Inbegriff — sage ich — umfasst eine Menge von Teilen (Sätzen), die grösser als jede endliche Menge ist. 14

§.14. „Eine unendliche Menge", sagt man, „kann es schon aus dem Grunde nirgends geben, weil eine unendliche Menge nie in ein Ganzes vereinigt, nie in Gedanken zusammengefasst werden kann." — Diese Behauptung muss ich geradezu als einen Irrtum bezeichnen, den die falsche Ansicht erzeugte, dass man, um ein aus gewissen Gegenständen a, b, c, d ... bestehendes Ganzes zu denken, zuvor sich Vorstellungen, die einen jeden dieser Gegenstände im Einzelnen vorstellen (Einzelvorstellungen von ihnen), gebildet haben müsse. 15

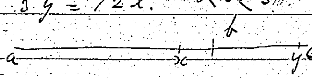
§.16. Bolzano: Unendlich Klein (Grösse) (Nicht-Archimed.) 15

[illegible] §.30 $= \frac{1}{n} = \frac{1}{\infty}$ [illegible] Wahrscheinlichkeit 22

(1 Ding [illegible] ein Paar)

§.20. [illegible] 28 — 31

[illegible] $5y = 12x$. $0 < x < 5$. $0 < y < 12$ 29ff

[illegible]  $ab : ac = ax : ay$ 30–31

§.38. Kontinuum [illegible] einfacher Teile [illegible] Paradox [illegible]

[illegible]

Dass je zwei Zeitpunkte noch durch eine unendliche

Menge dazwischenliegender gibt, ja dass es selbst im
Reiche der Wirklichkeit zwischen je zwei Substanzen noch
eine unendliche Menge anderer gebe — ist allerdings
zuzugestehen; aber, was folgt hieraus, das einen
Widerspruch enthielte? Nur so viel folgt, dass
durch zwei Punkte allein, ja auch durch drei, vier
u. jede bloss endliche Punkte allein, ja auch
Menge dieselbe noch kein Ausgedehntes erzeugt wird.
Dies alles gestehen wir selbst, ja wir gestehen,
dass auch eine unendliche Menge von Punkten
nicht immer zur Erzeugung eines Continuums,
z. B. einer auch noch so kurzen Linie, hinreicht,
wenn diese Punkte nicht zugleich die gehörige
Anordnung haben. Versuchen wir nämlich, uns
den Begriff, den wir mit den Benennungen „eine
stetige Ausdehnung od. ein Continuum" bezeichnen,
zu einem deutlichen Bewusstsein zu bringen: so
können wir nicht umhin zu erklären, dort,
aber auch nur dort sei ein Continuum vorhanden,
wo sich ein Inbegriff von einfachen Gegenständen
(von Punkten in der Zeit od. im Raume od. auch
von Substanzen) befindet, die so gelegen sind, dass
jeder einzelne derselben für jede auch noch
so kleine Entfernung wenigstens einen Nachbar

in diesem Inbegriffe habe (zusammenhängend) 73
K.. unmittelbar berühren ... einfacher Teil in Begrenzung ... 74
eine kleinste Linie ... 75
§. 39. § 40. Zeit, R.. Substanz, Beschaffenheit ...
Bestimmung an diese Substanzen. Dynamischer Atomismus 76–79. 79–8.
... wirkende Substanz, Pluralistische Metaphysik

Russel, The Philosophy of Bergson. The Monist XXII. 3 July 1912

I suppose the universe is shaped like a cone, with the Absolute at the vertex, for the movement up brings things together, ~~with~~ while the movement down separates them, or at least seems to do so. In order that the ~~down~~ upward motion of mind may be able to thread its way through the downward motion of the falling bodies which hail upon it, it must be able to cut out paths between them; thus as intelligence was formed, outlines & paths appeared & the primitive flux was cut up into separate bodies. The intellect may be compared to a carver; but it has the peculiarity of imagining that the chicken always was the separate ~~pieces~~ pieces into which the carving-knife divides it.
(Russel, Bergson 82) 325.

Bergson [?] 82. Plurality of units ~~&~~ involves space 33, 53.
p. 34 But these are mere autobiographical observations of a visualizer, and illustrates the remark we made before, that Bergson's views depend upon the predominance of the sense of sight in him. 336

Thus abstract ideas, for example, obviously exclude each other: whiteness is ---. Hence all abstract ideas involve space; & therefore logic, which uses abstract ideas, is an offshoot of geometry, & the whole of the intellect depends upon a supposed habit of picturing things side by side in space. This conclusion, upon which Bergson's whole condemnation of the intellect rests, is based, as far as can be discovered, entirely upon a personal idiosyncrasy of visualizing succession as spread out on a line. 337

Zeno. flying arrow [illegible] Bergson [illegible] cinematographic [illegible] static view [illegible] dynamic [illegible] A cinematograph in which there are an infinite no of films, & in which there is never a *next* film because an infinite no. come between any two, will perfectly represent a continuous motion. 339

Zeno assumes, tacitly, the essence of the Bergsonian theory of change. That is to say, he assumes that when a thing is in a process of continuous change, even if it is only change of position, there must be in the thing some internal *state* of change. The thing must, at each instant, be intrinsically different from what it would be if it were not changing

He then points out that at each instant the arrow simply is where it is, just as it would be if it were at rest. Hence he concludes that there can be no such thing as a *state* of motion, & therefore, adhering to the view that a state of motion is essential to motion, he infers that there can be no motion & that the arrow is always at rest.

Zeno's argument, therefore, though it does not touch the math. account of change, does, *prima facie*, refute a view of change which is not unlike M. Bergson's. How, then, does M. B. meet Zeno's argument? He meets it by denying that the arrow is ever anywhere. After stating Zeno's argument, he replies: "Yes, if we suppose that the arrow can ever *be* in a pt of its course. Yes again, if the arrow, which is moving, ever coincides with a position, which is motionless. But the arrow never *is* in any pt of its course." (C. E., p. 325). This reply to Zeno, or a closely similar one concerning Achilles & the Tortoise, occurs in all his three books. B's view, plainly, is paradoxical; whether it is *possible*, is a question which demands a discussion of his view of duration. His only

Relation [illegible] is intuit.

argument in its favor is the statement that the math. view of change "implies the absurd proposition that movement is made of immobilities" (C. E. p. 325 [340]). But the apparent absurdity of this view is merely due to the verbal form in which he has stated it, & vanishes as soon as we realize that motion implies relation. A friendship, for example, made out of people who are friends, but not out of genealogies. So a motion is made out of whats is moving, but not out of motions. It expresses the fact that a thing may be in different places at diff. times, & that the places may still be different however near together the times may be. B's argument against the math. view of motion, therefore, reduces itself, in the last analysis, to a mere play upon words.

B. 341

Action, he says, is what constitutes being, but math. time is a mere passive receptacle, which does nothing & therefore is nothing (C. E. p. 4). The past, he says, is that which acts no longer, & the present is that which is acting (M. & M. p. 74). But in this statement,

as indeed throughout his account of duration, B is unconsciously assuming the ordinary math. time; without this, his statements are unmeaning. What is meant by saying "the past is essentially <u>that which acts no longer</u> (his italics), except that the past is that of which the action is past? The words "no longer" are words expressive of the past; to a person who did not have the ordinary notion of the past as something outside the present, these words would have no meaning. Thus his definition is circular. What he says is, in effect, "the past is that of which the action is in the past". As a definition, this cannot be regarded as a happy effort. [341] And the same applies to the present. The present, we are told, is "that which is acting" (his italics). [not now] [Similarly in M. & M. (p. 193) he says it is a question whether the past has ceased to exist, or has only <u>ceased</u> to be useful. The present, he says, is not that which is, but which <u>is</u> being made. The words I have italicized here really involve the usual view of time.] But the word "is" introduces just that idea of the present which was to be defined. The present is that which <u>is</u> acting as opposed to that which was acting or will be acting. That is to say, the present is that whose action is in the present, not in the past or in the future. Again the def is circular. An earlier passage on the same page will illustrate the fallacy further. "That which constitutes our pure perception," he says, "is our dawning action .... The actuality of our perception thus lies in its activity, in the movements which prolong it, & not in its greater intensity: the past is only idea, the present is ideo-motor" (ib). This passage makes it quite clear that when B speaks of the past, he does not mean the past, but our present memory of the past. The past when it existed was just as active as the present is now; if B's account were correct, the present moment ought to be the only one in the whole history of the world containing any activity. 342

In earlier times there were other perceptions, just as active, just as actual in their day, as our present perception; the past, in its day, was by no means only idea, but was in its intrinsic character just what the present is now. This real past, however,

naive realism

B simply forgets; what he speaks of is the present idea of the past. The real past does not mingle with the present. Our memory of the past does of course mingle with the present, since it is part of it; but that is a very different thing.

The whole of B's theory of duration & time rests throughout on the elementary confusion between the present occurrence of a recollection & the past occurrence which is recollected. 342 But for the fact that time is so familiar to us, the vicious circle involved in his attempt to deduce the past as what is no longer active would be obvious at once. As it is, what B gives is an account of the difference between perception & recollection — both present facts — & what he believes himself to have given is an account of the difference between the present & the past. As soon as this confusion is realized, his theory of time is seen to be simply a theory which omits time altogether.

The confusion between present remembering & the past event remembered, which seems to be at the bottom of B's theory of time, is an instance of a more general confusion which, if I am not mistaken, vitiates a great deal of his thought, & indeed a great deal of the thought of most modern philosophers — I mean the confusion between an act of knowing & that which is known. In memory, the act of knowing is in the present, whereas what is known is in the past; thus by confusing them the distinction between past & present is blurred. In perception, the act of knowing is mental, whereas what is known is (at least in one sense) physical or material; thus by confusing the two, the distinction between mind & matter is blurred. This enables B to say, as we saw, that "pure perception, which is the lowest degree of mind — is really part of matter." 343

Throughout M. & M. this confusion between the act of knowing & the object known is indispensable. It is enshrined in the use of the word "image" — which is explained at the very beginning of the book. (for which Bergson's image = Berkeley's idea — see p. 12, Bergson, "L'intuition philosophique", (Revue de métaphysique et de Morale, Nov. 1911) p. 18) 343

The confusion of S & O is not peculiar to B., but is common to many idealists & many materialists. ~~They agree in thinking that~~ many idealists say that the O is really the S, & many materialists say that the S is really the O.

these two statements very different while yet holding that S & O are not different in this respect, we may admit, B has merit for he is as ready impartially to identify S with O as to identify O with S. As soon as this identification is rejected, his whole system collapses. 346

Cohen, Das Princip der Infinitesimal-Methode und seine Geschichte. Ein Kapitel zur Grundlegung d. Erk.kritik. 1883.

I. Einleitung 1 — 5a

Gleichheit u. Grösse setzen die Anschauung voraus. Der Logik aber gehört nicht einmal mehr die Unterscheidung von Denken u. Ansch. an; wie sollte derjenige Beg. vor ihr Forum gehören, dessen Schwierigkeit in dem Grenzstreit zw. Denk. u. Ansch. liegt. (S. 2) [illegible] Kant [illegible]

Die Grenzberichtigung solcher allgemeinen Methoden, vielmehr der Bedingungen zu den wissenschaftlichen Methoden aller Art muss der Logik ausdrücklich abgenommen werden; denn die Logik hat lediglich die von der Ansch. abgetrennten (formalen) Denkverhältnisse zu untersuchen. (3) [illegible] Logik [illegible] Erkenntnistheorie [illegible]

Zu diesen andern Mitteln des Bew. gehört die Ansch., welche der Logik fremd ist, welche jedoch im Erkennen mit den Denk-Mitteln sich verbinden muss. Alle diese zwar engeren, aber positiveren Voraussetzungen, die in der Verbindung von Ansch. u. D. arbeitenden Erkennens bilden das Gebiet einer besonderen Untersuchung, für welche in neuerer Zeit der Titel der Erk.-theorie

in allgemeine Aufnahme gekommen ist. S. 3

Psychologie [illegible] Wissenschaft [illegible] Faktum [illegible] Princip [illegible] Erk.-Kritik [illegible] 5—6

Die Erk.-kritik ist somit gleichbedeutend mit der transcendentalen Logik; denn ihre Aufgabe ist die Entdeckung der synth. Grundsätze od. derjenigen Grundlagen des Erkennens, auf welchen die Wissenschaft sich aufbaut, u. von deren Geltung sie abhängt. 7

Die erk.-krit. Behandlung eines einzelnen Grundbegriffs od. Grundsatzes setzt keineswegs die vollständige Ausführung des erk.-krit. Systems voraus. Vielmehr kann die erk.-krit. Discussion bei jedem Punkte, bei jedem Grundsatze beginnen. Vergegenwärtigen wir uns zunächst den Vorteil dieses Umstands. Es ist einleuchtend, dass somit von den verschiedenen Problemen aus, welche die einzelnen Wissenschaften darbieten, ein Zugang zur Erk.-krit. offenliegt. Ein Beg. aber enthalten alle wissenschaftlichen Gebiete in verschiedenen Abstufungen, den sie jedoch allesamt lediglich voraussetzen: das ist der Beg. des Gesetzes. Mit dem Grundsatz des Gesetzes, mit dem erk.kritischen Orte für den Beg. desselben sollte daher zunächst alle Erk.-kritik zu beginnen haben. Sie tut es teilweise, sofern sie mit den Begriffen a priori beginnt; aber nicht mit der erforderlichen Klarheit über die Voraussetzung, die in denselben für alle Wissenschaft enthalten ist. 9

Erk-kritik aber ist nicht schlechthin auf den erkennenden Geist gerichtet, sondern auf den Inhalt der Erk. Mithin kann mit jedem Steine die Reconstruction des Fundaments begonnen werde; denn solange ein Grundsatz fehlt, wankt das Ganze. 10

21. Anschauung u. Denken sind erkenntniskritische Abstraktion. Das Unendlichkleine entzieht sich der Bedingung der Ansch. — u. in Ansch. muss alle Erkenntnis darstellbar sein. Der Widerspruch steigert sich, indem das Unendlichkleine, obschon es der Ansch. nicht teilhaft wird, nichtsdestoweniger der Ansch. dienen u. vorzugsweise an den Interesse derselben, insbesondere dem Tangenten Problem entstanden ist. Dieser angebliche Widerspruch kann durch eine elementare erk-krit. Erinnerung gehoben werden, die von jedem Standpkt aus zugegeben werden wird. Es ist ein Irrtum, weil alle Erk. in der Ansch. darstellbar sein muss, darum auch alle anderen Mittel, Bedingungen u. Grundlagen der Erk. ihrerseits der Ansch.

zu unterwerfen 15

Eine Erk. vom objektiven Umfang kann weder allein durch Ansch. noch allein durch Denken zu Stande gebracht werden. Aber in diesem methodischen Satze ist zugleich deutlich ausgesprochen, dass Ansch. u. D. nicht selbst auch Erk-objekte, sondern lediglich erk-kritische Abstraktionen sind. (21 Bz) 16

Die Realität als Kategorie ist nicht schon an sich das Infinitesimale, sondern [161] erst die Ausführung der Kategorie zum synthetischen Grundsatz kann diese Deutung möglich machen und sofern es gelingt, rechtfertigen. Im Grundsatz aber muss ja Ansch. u. D. bereits verbunden sein. Also müsse die Infinitesimalgrösse, sofern sie einem Grundsatze entspricht, auch anschaubar sein. 17

In dem Element der Ansch. wird das Etwas als ein Gegebenes Inhalt des Bew. Diese Beziehung des Bew. auf ein Gegebenes, das will sagen, auf ein X als ein Gegebenes, nennen wir Ansch.

Man darf nun aber nicht etwa meinen, diese Gegebenheit recurriere auf ein Land od. Gebiet jenseit des Bew., auf welchem jenes Etwas der Ansch.

gegeben wäre. Das Gegebene ist in dem Bew. gegeben; dieser Grund u. Boden ist solide genug, die Ansch. u. somit jenes Etwas zu legitimiren. Und das Mittel, jenen Boden zu bearbeiten u. zu bebauen, das ist die reine, die math. Ansch.

Auch darf man nicht fragen wollen: wie es zugehe, dass eine solche Bezogenheit des Bew. auf ein Gegebenes stattfinde, denn diese Frage überschreitet die Grenze wissenschaftlicher Wissbegier, weil sie nicht auf die Bedingungen u. Arten des wissenschaftlichen Bewusstseins gerichtet ist, sondern auf die Möglichkeit des natürlichen Bew.s, der Bewusstheit. Es ist die eigentlich transcendente Frage. Auf alle statthaften Fragen nach dem Wie u. Wo der Gegebenheit antworten die Arten u. Bestimmtheiten der Ansch. als R. u. Z. 20

In R. u. Z. allein sind die sogenannten Dinge günstigsten Falls nur als math. Körper gegeben. Die Zahl, die diese zählt, würde daher zwar ein solchen Idealgestalten gewachsener Maassstab sein; aber ~~sowie~~ sowie jene math. Gestalten nicht als physische Objekte gegeben wären

so würde die Zahl nur eine fictive wissenschaftliche Grösse sein, correlativ jenen idealen Dingen, die als Grössen der reinen Ansch. gemessen werden. Indessen soll vermittelst der reinen Ansch. mehr geleistet, sollen die geometrischen Körper physische werden. Diese fernere Bedeutung vermag die antike Zahl nicht zu gewährleisten. So tritt an die Zahl selbst die Nötigung heran, durch ein neues Princip sich schärfer ausrüsten zu lassen, wenn anders sie dieser gesteigerten Bedeutung der Dinge, auf die sie doch ihrem ganzen Gebrauche nach gemünzt ist, soll gerecht werden können. Die Wissenschaft, welche sich mit der letzten Instruction für diese materielle Bedeutung der Dinge beschäftigt, welche die geometrischen Körper zu physischen ausrechnet, die Mechanik wurde in jener Zeit neu begründet; u. aus dem Quell[22] u. Princip der mechanischen Probleme ist im letzten Grunde der Differentialbegriff entsprungen. Um die Dinge als physische Körper, als reale Gegenstände zu bestätigen, dazu bedurfte es infinitesimaler Zählung. In dieser dritten Bedeutung entspricht das Differential einem Grundbegriffe des reinen Denkens, der Kategorie der Realität. Und auch dieses abschliessende Motiv wird von den Entdeckern deutlich geltend gemacht. 23

Kategorie d. Rel. z. Kat. d. Modalität z. Wahrnehmung; 480 f. u. 482 (27) Man kann sagen, der Grundsatz der Antizip. d. Wahrnehmung enthalte das Problem der Erk-Kritik zusammengefasst. 27.

Ein solcher besonderer Grundsatz ist erforderlich, um die Empfindung, die Wurzel des Subjektiven zu aprioirisieren u. zu objektivieren. Und dieser Grundsatz muss die Extension überwinden; denn er soll legitimieren, dass A u. B an sich gesetzt werden dürfen. Die Extension hingegeben bestimmt nur Massgrössen, die als solche auf Vergleichungen basieren. Dennoch aber behält die Realität Zusammenhang mit der Gegebenheit, mit der Bezogenheit des Bew. auf Gegebenes. Vielmehr will die Realität das Schwebende an diesem sicher machen u. erfüllen, den geom. Körper zum physischen ausgestalten. Dadurch erlangt das Gegebene jene anscheinende Solidarität u. Selbstständigkeit, die es innerhalb der Anschauung keineswegs besitzt. Denn auch das Idealgebild der

inneren Ansch. ist eine schraffierte Linie, ein loses od. festes Nacheinander, in welchem jedoch das Element selbst, welches vorangeht, welches folgt, illegitim bleibt. Dass sich e. Element selbst an u. für sich setzen darf, das ist das Desiderat, welchem das Denkmittel der Realität entspricht. Dieses Denkmittel muss zuerst aufgestellt sein, um jene Verbindung mit der Ansch., mit dem Bew. der Gegebenheit eingehen zu können, die in dem Grundsatz der intensiven Grösse vollzogen wird.

Diese Voraussetzung der intensiven Realität ist in allen Grundsätzen latent, sie muss daher selbständig gemacht werden. Diese Voraussetzung ist der Sinn der Realität u. das Geheimnis des Differentialbegriffs; das logische Geheimnis, dass die Erk-Kritik enthüllt. Und die allgemeine Bedeutung dieser Enthüllung besteht in der Aufklärung über das Verhältnis von Ansch. u. Denken. 28

Die intensive Realität ist als Qualität von der Quantität zu unterscheiden. Sie ist ein eigener Grundsatz, dem es zu verdanken ist, dass die Methode der Math. in gegenseitige Beziehungen treten können. Denn alle Anschauung ist auf eine Mehrheit von Elementen angewiesen u. besteht in der Ordnung u. Gestaltung derselben. Indessen die Wissenschaft von der Ansch. kann mit diesem Verhältnisse unter einer solchermassen gegebenen Mehrheit von Element nicht auskommen: sie bedarf der Voraussetzg einer Einheit, u. zwar einer solche, welche nicht in dem Zusammensetzung der Mehrheit besteht, sondern welche vielmehr ihrerseits die Mehrheit entstehen lässt, mithin einer qualitativen Einheit. Das ist die intensive Realität. Sie bedarf dieser neuen Voraussetzung in dreifacher Beziehung: 1. für die Geom., 2. für die Zahlenlehre, 3. für die Mechanik. Und diese drei Beziehungen haben in der Mechanik zusammengewirkt, um die Entdeckung des Differentials zu zeitigen. 29

der Grenze mangelte alle schöpferische Positivität 30

37. Grenze u. Ursprung — Es gilt demgemäss zwei Bedingungen zu erfüllen. Erstlich ist das Discrete nicht [zu] umzugehen; aber es muss bestimmt, von aller Willkür u. allem gedanklichen Schwanken befreit werden. Diese feste Bestimmung des Discreten ist ferner nur

möglich durch die Rücksicht auf das Continuum, dessen Discretheit es werden soll. Daher ist der Beg. der Grenze von seiner ausschliesslichen Beziehung auf das Discrete zu befreien, so dass er von dem Begriffe der Continuität aufgenommen werden u. in den Dienst desselben treten kann. Ursprünglich war die Grenze zum Ersatz der fehlenden Anschauungs-Evidenz erdacht, um Ungleichheiten einer obzwar unanschaubaren, so doch giltigen Gleichheit anzunähern.

Es handelt sich also bei der Grenze um nichts Geringeres, als um Elision der extensiven Grössen-Gleichheit. Ein solches Unterfangen wird gewagt, um das Gebiet der wissenschaftlichen Ansch. der gemeinen zum Trotze, zu erweitern. Diesen Zweck vermag die negative Grenze nicht zu vollführen: hierzu bedarf es positiver, das Hemmnis der Ansch. principiell überbietender Mittel, bedarf es eines Princips, welches als solches die Ansch. in ihrer bisherigen Bedeutung entsetzt. Ein solches Fundament, einer solchen Quell selbständiger Gesetzlichkeit, ein solches Princip 31

schöpferischer Continuität enthält der negative
Grenzbegriff nicht; enthält somit auch
dasjenige Unendlichkleine u. Untheilbare
nicht, welches auf jenem beruht. Denn alle
Grenze bedeutet Reduction des in der Ansch.
gegebenen Ungleichen auf Gleichheit, wobei
der Sprung unvermeidlich ist. Soll ein Continuum
als solches bestimmt, soll der durchgängige
Zusammenhang der Gebilde hergestellt werden,
so muss die Maassheit eine constructive,
nicht eine reductive sein: Die continuirliche
Einheit muss als Ursprung gedacht werden.
Das Unendliche muss dem Endlichen ent-
rückt werden, um aus sich das Endliche
erzeugen zu können. 32

Der Gedanke der Continuität wird schon bei
den Eleaten verhandelt, er gehört dem Zusammen-
hange derjenigen Erwägungen an, welche das
Sein aus dem Denken ableiten. Der Gedanke
ist daher allgemeiner, als er erscheinen mag,
34
wenn man es für ausreichend hält, denselben
auf die R-Anschauung zu basiren, damit aber
ihn dieselbe zu beschränken. 35

Die Continuität bezeichnet einen allgem.

Charakter des Bew^s, ähnlich wie die Identität.
Sie ist daher ein Special-Ausdruck des allgem.
Gesetzes der Einheit des Bew^s. 35

Das Princip der Continuität bedeutet die
Voraussetzung: conscientia non facit saltus. Diese
Stütze des Bew^s bewährt sich in eminenter Weise
an dem Infinitesimalbegriff. Das Unendlichkleine
ist das instructivste Beispiel für die Fruchtbar-
keit, den Plan u. Werth des limitirenden Urtheils.
Um das Endliche zu bestimmen, aus den Voraussetz-
ungen u. Gesetzlichkeiten, denen es entstammt u.
zugehört, letztlich zu erzeugen, dazu wird es
notwendig, ein Art wissenschaftlichen Seins
zu erdenken, welches zunächst nur durch ihren
Unterschied vom Endlichen zu charakterisiren
ist. Für die sinnliche Ansch. sind der Pt der Tan-
gente u. der Pt der Curve zwei Punkte; im Bog.
der Curve sind sie Ein Pt, unendlichkleiner. ~~So~~
So hat das Infinitesimale die Richtung den
endlichen Curven-Pt u. damit das wissenschaft-
liche Sein der Curve hervorgebracht. Diese Schöpfung
vollbringt ein Grundgesetz des Bew^s, welches gilt
vor R u. Z, welches daher von den eingeschränkten
Richten auch der reinen Ansch. abhängen kann.

Die Cont. ist also eine allgemeine Grundlage des Bew.s; nicht auf Haufen disparater Elemente verwiesen zu sein, sondern im Zusammenhange vergleichbarer Glieder zu wurzeln. Somit wird die Continuität nicht erst als Stetigkeit in der unendlichen Teilbarkeit des R wirksam; sie gehört überhaupt nicht in erster Linie der R-Ansch. an; sondern sie bildet eine fundamentale Bestimmung des Denkens, eine Grundgestalt desjenigen Bew.s, welches als Bew. des Denkens von dem Bew. der Ansch. od. dem Bew. der Sinnlichkeit so zu unterscheiden ist, wie man Logik von Erk-lehre zu unterscheiden allgemeiner geneigt ist. Die Cont. ist demgemäss auch ganz besonders in demjenigen math. Gebiete fruchtbar, welches dem allgemeinen Denken am nächsten liegt, als der allgemeine Teil der math. daher vielfach bezeichnet worden ist, der Zahlenlehre. [37]

Wenn aber die Einheit kraft der Continuität des Bew.s die Unendlichkeit in sich hat, so ändert u. vertieft sich dadurch der Bg. der Einheit überhaupt, u. demgemäss das Verhältnis des Unendlichen zum Endlichen. Solange

In der Irrationalzahl ist bereits das Princip der Continuität der treibende Gedanke, u. der legitimierende. [38]

man noch inductiv von dem Endlichen zu dem Unendlichen überzugehen sucht, solange bestehen jene Wunder, die sich jedoch aufklären, sobald man umgekehrt mit dem Unendlichen am Endlichen deductiv zu verfahren gelernt hat. Alsdann wird es klar, dass die Einheit nicht die sinnliche Discretion behalten darf, mit welcher ihre Endlichkeit begonnen hat. Die Einheit, sofern sie die Unendlichkeit in sich enthält, ist nicht mehr discrete, sondern continuirliche Bestimmtheit. Eins ist nicht günstigsten Falls dasjenige, was ich mit dem gelben Fleck der[39] Netzhaut messen kann; Einheit ist überhaupt nicht unmittelbares Prädikat sinnlicher Wahrnehmung; Einheit ist eine Bestimmung, in welcher das Bew. des Denkens sich betätigt, im Unterschiede von dem der Empfindung, u. selbst der Ansch.

Diese tiefere Bedeutung der Einheit, welche in der Continuität des Bew.s wurzelt, u. demgemäss die continuirliche Unendlichkeit in sich fasst, übersteigt daher den Charakter der Quantität überhaupt. Diese alle Discretion überwindende, u. dennoch eine schärfere u. gediegenere Bestimmtheit erzielende Bedeutung der Einheit ist die Einheit

der Qualität, welche alle Qualität des Seins
in sich begründet. Ohne diese continuir-
liche Messung bliebe alles Sein blos sinnlich
qualificirbar, dem Auge od. der Zunge.
Qualität im Sinne der math. Naturwissensch.
beruht auf der Bestimmung diejenigen Art von
Realität, zu welcher die Infinitesimal-Rech-
nung die Masseinheit liefert. In der continuir-
lichen Einheit sind Quantität u. Qualität ver-
bunden, begrifflich durchdrungen. Die qualitative
Einheit ist die Realität. Man kann daher auch
sagen: die Cont. ist diejenige Qualität,
welche die Quantität der Zahl-Einheit zum
Unendlichkleinen der Realität vertieft.

In diesem Unterschiede zwischen Realitäts-
Grösse u. Vergleichungs-Grösse besteht der
Unterschied zw. Qualität u. Quantität, zw. ex-
tensiver u. infinitesimaler od. intensiver Zahl.
Dieser Fortgang ist notwendig für die Constituirung
des Realen, wie nach dem Begr. der Zahl selbst.
Denn das Zählen setzt eine Bedingung voraus,
in keinem Punkte Halt zu machen. Die Einheit
darf nirgend abgebrochen werden. Jede Einheit
ist also willkürlich, nicht nur etwa als Zahl-

zeichen, sondern auch als Zahlgrösse; ausgenommen
allein diejenige Einheit, welche alle Discretheit in ihrem
Begriffe von sich ausschliesst. damit aber ist dem
Seienden einen echten, wenngleich keinen festen Ruhe-
punkt darbietet. Und jetzt erst kann Einheit
bestimmt u. unterschieden werden, nicht als discrete
sinnliche Individualität, sondern als reale
Grösse. Reale Grössen liefert nimmermehr
die sinnliche Ansch., noch auch an u. für sich
die reine geometr. Ansch.; sondern zu dieser
Herstellung bedarf es der [40] Infinitesimal-Rech-
nung. So sehen wir denn, wie auch die Zahl
das Differential vorbereitet hat: die Einheit der
Zahl die Einheit der Realität. 41.

Die Zahl aber, als beweglich gedacht,
ist die Variable. Mit der Variabilität kommt
der Werth-Charakter der Zahl zu voller Deut-
lichkeit. Denn die Variabilität setzt die Cont.
voraus. Die Bewegung, die Veränderung der Zahl
ist nicht eine äusserliche, willkürliche in jedem
Sinne, sondern durch die Freiheit, welche in
dem Gesetz der Continuität liegt, gebunden.
Die Z. repräsentirt in der continuirlichen
Variabilität die Grösse überhaupt als Werth;

weil sie alle Werthe derselben aus sich erzeugt, in sich darstellt. Die Z-Grösse wird damit zum Werth-Begriff, u. nähert sich so ihrer eigentlichen Bestimmung, die sie in der Realisirung erfüllt. Wir haben gesehen, dass für Galilei in der Einheit die Unendlichkeit liegt.

Sein (Galilei) Genius war also darauf gerichtet: aus dem Unendlichen das Endliche zu constituiren. Er macht den grossen Unterschied zw. dem Constituiren aus erforderlichen Denk-Bedingungen u. dem Componiren aus sinnlichen Teilen. Sein hauptsächlicher Einwand gegen die Lehre vom Untheilbaren sei, sagt er, dass kein Untheilbares, mit einem anderen Untheilbaren verbunden, das theilbare Ding nicht hervorzubringen vermöchte. 45

Mechanik

Die Geschwindigkeit kann man also anfänglich noch in sinnlicher Varietät vorstellen als ein Attribut der Zeit am Raume, obschon auch bei ihr das Zurückgehen auf die infinitesimale Zeittheilchen notwendig wird. Bei der Beschleunigung dagegen ist die Erfassung des Infinitesimalen von vornherein nicht zu umgehen, weil sie in der Bestimmung des Fallraumes dem Problem

der Constituirung des realen Continuums angehört, die entscheidende Wendung desselben darstellt. Die Beschleunigung kann nicht mehr in sinnlicher Weise vorgestellt, sie muss vielmehr als das die sinnliche Gegebenheit zur Realität bringende Moment angesehen werden. Sie wird zur Bewegungs-Ursache. Dieser Ursachen-Charakter der Beschleunigung ist der Gedanke des infinitesimalen Constituten.

Die Macht dieses Gedankens zeigt sich in dem Princip der Beharrung, u. zwar für die Bewegung in Richtung u. Geschwindigkeit. Dieses Princip ist bekanntlich ein Paradoxie, da 49 es nur für die Ruhe unmittelbar einleuchtet. Aber die Paradoxie wird durch denselben Gedanken gehoben, welcher auch das Tangenten-Problem gelöst hat. Die geradlinige Fortsetzung der Bewegung ist nichts anderes als die infinitesimale Voraussetzung, dass ein jeder untheilbare Punkt der sich bewegenden Linie eine Gerade sei. So wird durch den Begriff der infinitesimalen Geradheit Zeno's fliegender Pfeil beseitigt. Durch solche continuirliche, die Beharrung involvirende Erzeugung erlangt das Continuum die Präcision des Begriffs. Wie bei der geometr. Frage das Untheilbare diese erzeugende Bedeutung des Quantums hat, so wird gegenüber der Extension der Zeit durch die Intension der Geschwindigkeit die Kraft der Beschleunigung bezeichnet. Die Extension ist sinnlich, wie dort das Quantum. Die Intension als das Untheilbare, Unendliche ist der Grad (gradus), welcher somit für die Bewegung eine neue Art von Grösse einführt. 50.

II. Geschichte. 52–123

Leibniz: Ruhe als unendlichkleine Geschwindigkeit ou comme une tardité infinie 1-03 u. Galilei B. 72– 57

z Endlich sei auch die Gleichheit eine unendlichkleine Ungleichheit (Opp. ed. Erdman p. 104 f.) 57

Das Intensive ist die nächste Frucht des Princips der Continuität. So lange der Uebergang von Pt zu Pt, von Einheit zu Einheit nur negativ nicht als Sprung vorgestellt wird, so lange genügt die Methode der Grenzen, welche den Begr. der anschaulichen Extension principiell nicht ausschliesst. Fassen wir

aber die Infinitesimalmethode in ihrer principiellen Strenge, als Entfaltung des Stetigkeitsprincips, so ist die Ueberwindung der auf der Extension beruhenden Grösse damit vollzogen. Denn die Cont. beruht nicht auf der R-Ansch., sondern ist eine allgemeinere Voraussetzung des Bew., welche für die Abstraktion des Denkens geltend zu machen, u. welche als solche in die Bedingung der Ansch. zur erhöhten Reinigung derselben einzuführen ist.

Der Charakter der Ansch. ist die reine Gegebenheit, also die conditio sine qua non für alle Anfang der Objektivirung. Aber der nächste Schritt für dieselbe muss die 69/ Voraussetzung eines realisirenden Princips sein. 70

Wenn man die Realitäts-Bedeutung des Differentials erkannt hat, so kann die Frage ~~ob~~ keine ernstliche ~~Frage~~ Schwierigkeit bilden, ob das dx selbst continuirlich od. discret sei. Es ist discret innerhalb der zum Behuf einer fraglichen Realisirung angestellten Differentiations-Ordnung. Denn nur durch ein angenommenes Discretum kann das Continuum, das will sagen: ein dem Gesetz-der Continuität entsprechende Punkt vermessen u. bestimmt werde. Nichtsdestoweniger aber bleibt auch diese für ihre Realisirungsstufe zureichende Discretheit dem Princip der Continuität zugehörig, welches, sofern andere Realität in Frage komme, diesem Interesse der höheren Differentiale zu genügen hat, u. zu genügen vermag. 75

Mit dem Terminus der Fluxion wird in dem Increment der fictive Charakter der Zahl überwunden, dagegen das Erzeugende, Realisirende, welches in der deshalb unvermeidlichen Annahme eines absoluten Punktes der Bewegung des Momentes liegt, hervorgehoben u. als das Princip der neuen Methode fixirt. 79

Wir sahen nun schon bei Galilei, wie die Fallräume in u. aus den Geschwindigkeiten erzeugt werden, somit also R aus Zeit entsteht. Das ist der eminent idealistische Zug der Fluxions-methode: dass die R-grösse aus der Z-grösse ableitet. In dieser Richtung des Gedankens entsteht die Fluxion, welche die Fluente erzeugt, u. somit den realisirenden Charakter des Un-

Continuum : Discretum : [illegible] ; Cohen. [illegible] Differentiale [illegible] Ansch. ; [illegible] ; [illegible] Cohen - Denk[illegible]
Erzeugung. Ansch. ; [illegible]

endlichkleinen schon in der Bezeichnung des Terminus betätigt. 80

Man könnte nun meinen, dass durch die Fluxion das Unendlichkleine in seiner realisirenden Potenz erschöpft sei, dass damit der Galileische Impetus wieder zu Ehren gekommen, u. Alles, was Leibniz an intensiver Grösse aufbot, erreicht u. gesichert sei. Denn die Geschwindigkeiten sind ja die Urbilder der Kraft, also die erzeugenden Grössen κατ' ἐξοχήν. Indessen liegt die Sache so klar u. einfach bei Newton nicht, obschon sie ziemlich häufig so dargestellt wird, sogar bei Gerhardt (Entdeck. [illegible] S. 84). Vielmehr haftet doch die Vorstellung Newtons von der "erzeugenden Bewegung" u. demzufolge von der Geschwindigkeit an dem durchmessenen Raum, also an dem Extensiven. 82

Leibniz u. Newton haben Beide den erk.-kritischen Grund ihres Begriffs durchschaut. Beide sind Entdecker desselben. Und sie erweisen sich als solche in dieser erk.-krit. Begründung, in der Ueberschau über die Tragweite ihrer Voraussetzung, u. in der Anbahnung sachlicher Momente, welche als schöpferische Motive sich erkennen lassen. Der Prioritäts-Streit wird von diesem Gesichtspunkte aus gegenstandslos. Bei Leibniz, wie bei Newton ist der Infinitesimalbegriff ein Ausdruck ihres systematischen Grundgedankens, ihrer idealistischen Auffassung der Realität. Je trouve, que les règles du fini réussissent dans l'infini — et vice versa que les ~~&~~ règles de l'infini réussissent dans le fini, sagt Leibniz. Und dieser Verschlingung u. Durchdringung des Endlichen mit dem Unendlichen entspricht bei Newton der ~~bin~~ bündige Satz: Hae geneses in rerum natura locum vere habent. Daher ist bei Leibniz das Differential ein Ausdruck der intensiven Realität, nur dass er dieselbe als einfache Substanz u. Monade denkt. Und bei Newton ist die Fluxion auch in der Methode der Verhältnisse [87] noch gewahrt, insofern diese nicht schlechthin die der letzten, sondern die der ersten Verhältnisse ist. 88

Zur Einführung ihrer Entdeckungen erstrebten Beide also die erkenntnis-kritische Begründung, in welcher die Quelle ihres Begriffs lag. Dagegen haben sie zugleich der eigenen Unsicherheit wie

den Vorurteilen des Zeitalters nachgebend, hinterher einer Verbindung ihrer neuen, bekämpften Begriffe mit den alten Methoden sich nicht entziehen mögen. 88

Nachdem jedoch die Entdeckung vollzogen u. bestimmt war, sind die Versuche auch bei den Entdeckern selbst verständlich, dieselbe durch die traditionelle Methode der Grenze zu behaupten u. zu schützen. Denn wir haben vielfach die Schwierigkeiten kennen gelernt, welche mit der Voraussetzung eines realisierenden Grundbegriffs verknüpft sind. Damit aber entstand der Schein, dass die alte Methode, weil sie jener schwierigen Erk-Voraussetzung zu entbehren schien, damit auch der Logik gemässer wäre, als welche doch in der Tat die Realität nicht voraussetzt. Dieser Schein hat sich bis auf unsere Tage erhalten, insofern man die Grenzmethode als der logischen Strenge angemessener betrachtete. Diese Annahme zeigt nicht nur den Mangel an Unterscheidung von Logik u. Erk-~~theorie~~ kritik, sondern hat noch eine eigene Unklarheit bezüglich der sogenannten log. Strenge u. Schärfe. 88

68 Die Voraussetzungen u. Mängel der Grenzmethode — Wir haben oben (2) ausgesprochen, dass die Grenz- 88
methode auf der Indifferenzierung von Grenze u. Gleichheit beruht. Die Gleichheit aber kennen wir nach Leibniz als eine unendlich kleine Ungleichheit (51). Somit corrigiert der Grenzbegriff den Begr. der Gleichheit, aber durch die Supposition des Unendlichkleinen, welches bei der Correction der Gleichheit Grenze benannt wird. Diese Correctur ist erforderlich u. bestätigt sich, jedoch nicht logisch, sondern allein erkenntniskritisch. Die Gleichheit bedeutet im extensiven Verhältnis angenommene Einheiten, deren Erzeugung in der Ansch. sich vollzieht. Die extensive Gleichheit ist demgemäss Gleichartigkeit, die Einheiten selbst mögen sein u. wechseln, welche u. wie sie wollen. Die Summierung dieser Einheiten ist daher auch eine fiction, lediglich in der Vergleichung schwebende.

Um diese Fiction aufzuheben, tritt die neue u. andere Art von Grösse ein, welche die bisher mangelnde Realität hinzubringt. Es tritt also nicht etwa zur Ergänzung die logische Identität ein, die doch lediglich nur Sicherung u. Fixierung der Denkoperationen garantiert

könnte (4), während es sich hier um Gegebenheit der Ansch. (25) handelt. Und diese Gegebenheit, dieser Charakter der Ansch. soll u. kann auch die intensive Grösse der Realität erlangen, sofern sie Grösse ist. Auch ist diese intensive Grösse als Grundsatz zu denken (30), also stehen wir mit ihr wie mit der extensiven auf erk.-kritischem Grunde. 89

Die Continuität überbrückt die Kluft, welche extensiv bestehen bleiben würde, zw. Grenz-Verhältnis u. Gleichheits-Verhältnis durch das Surrogat der intensiven Grösse. Aber diese selbst, die 89'
Consequenz der Stetigkeit, ist an sich nicht eine blos logische Operationsgrösse, sondern eine Gegebenheit der Ansch., in welcher der Begr. der Realität sich eingräbt. 90

Aus diesen Erwägungen ergibt sich, dass die angenommene logische Kraft der Grenz-Methode lediglich ~~infolge~~ in den allerdings logischen Grundgesetze der Cont. des Bew.s beruht, von welchem sie jedoch für das Bew. der Sinnlichkeit, für die Gebilde u. Grösse der Ansch. Anwendung macht. Ueber diese übergreifende Anwendung muss der interne math. Gebrauch der Grenze sich klar werden: dass dieselbe nur durch die Erk.-Kritik gerechtfertigt werden kann, als in welcher jene weitere, angewandte Bedeutung der Cont. zur Basirung gelangt. Gemäss derselben aber geht die extensive Grösse in die intensive über. ↓ 90.

Nach der log. Cont. nämlich darf ich nur versichert sein, dass, was nicht Tisch ist, darum nicht Wehmuth zu sein braucht: dass die Denk-Gebilde als solche in dem non-A eine orientirungsreiche Unterkunft haben, allwo das Zusammengehörige sich zusammenfindet. Tisch u. Wehmuth [90] aber (41) sind anticipirende Illustrationen dieser rein log. Erzeugnisse, welche nur für die Sicherung der Denk-Operationen als A u. non-A stehen wollen. Die erk.-krit. Cont. dagegen verbürgt Mehr; ermöglicht das Hinzudenken einer Einheit, die nicht nur extensive, willkürliche Vergleichungseinheit ist, sondern Realitäts-Einheit, welche als solche einen absoluten Pt setzt, aus welchem die Linie hervorgeht, nicht bloss in welchen, als ihre Grenze die Linie zusammendehnt.

sine extensione prius (58, S. 71). Die Cont. des Bew. der Ansch. macht aus der Vergleichungs-Einheit die Erzeugungs-Einheit (44). Die Realität bleibt somit nicht blosser Begriff, sondern sie hat Gegebenheit zu vertreten, u. dadurch gelangt sie zu ihrer vollen erk.-kritischen Bedeutung; Realität bedeutet intensive Grösse. Dieser Uebergang von der extensiven Grösse zur intensiven Realität leitet u. bewirkt die erk.-krit. Erweiterung der Cont.

Wir erkennen demnach die doppelten Mängel der Grenz-Methode. Einmal setzt ein in der Behauptung der Indifferenz von Gleichheit u. Grenze im Grundgesetz des Bew.s voraus, dass der Cont., denn sie gedacht — u. das ist der andere Fehler — in der Grenze nicht gerecht wird. Denn die Cont. erstrebt, ermöglicht u. verbürgt Realität. Diese aber soll u. kann die Grenze nicht bedeuten. In dem Gedanken der Realität gegenüber den Leges phantasticas (51, S. 54) der extensiven Math., ist die Infinitesimal-Rechnung als die Mathesis Intensorum entstanden. Einmal ~~jedoch~~ entdeckt jedoch, lässt es sich aus den erwogenen Ansichten von angeblich des Logischen verstehen, wie die Nachfolger das schöpferische Motiv des Infinitesimal mit dem negativen Grenzbegriff vertauschen u. vermischen konnten. 91

„Diese Grenze, welche gleichsam das letzte Verhältnis der gedachten Incremente ist, macht eigentlich den Gegenstand der Differential-Rechnung aus; u. der hat eigentlich den Grund zu dieser Wissenschaft gelegt, welcher zuerst auf den Gedanken gerieth, diese letzten Verhältnisse zu untersuchen" (Euler, Anleit. z. Diff. Rechn. Vorr. übers. v. Michelsen LXX) Die Beziehung des $w = dx = o$ bedeutet nach die Basirung im Grenzbegriff.

Diese Auffassung der Null als liesse sich erk-kritisch rechtfertigen, sofern man die Null als non-A denkt u. demgemäss limitativ bestimmt. Immer aber muss der Realitäts-Gedanke selbst als eine eigenmächtige Voraussetzung hinzugethan werden. Aus der Null kann die Realität nicht hervorgehen, ebensowenig aber auch die endliche Grösse. 93

Wir wollen in dieser Abhandlung nicht des Näheren auf die Frage eingehen, wie Kant in seinen verschiedenen Schriften, insbesondere in den

„Metaph. Anfangsgr. d. Naturw." das Unendlichkleine als die intensive Grösse behandelt u. benannt habe. Nur eine Stelle sei aus der genannten Schrift angeführt: „Erklärt man aber eine doppelte Geschwindigkeit dadurch, dass man sagt, sie sei eine Bewegung, dadurch in derselben Zeit ein doppelt so grosser Raum zurückgelegt wird, so wird hier Etwas angenommen, was sich nicht von selbst versteht, nämlich: dass sich zwei gleiche Geschwindigkeiten ebenso verbinden lassen als zwei gleiche Räume, u. es ist nicht für sich klar, dass eine gegebene Geschwindigkeit aus kleineren u. eine Schnelligkeit aus Langsamkeiten ebenso bestehe, wie ein R aus kleineren; denn die Theile einer Geschwindigkeit sind nicht ausserhalb einander, wie die Theile des Raumes, u. wenn jene als Grösse betrachtet werden soll, so muss der Begriff ihrer Grösse, da sie intensiv ist, auf andere Art construirt werden, als der in der ext. Grösse des R." (Kants W. W. Rosenkr. S. 338) Hier sehen wir die Erzeugung der Geschwindigkeit als intensive Grösse als vorausgesetzt u. recipirt, u. somit die Unendlichkleine Grösse als intensiv gedacht u. bezeichnet. 110

„Man muss daher das Moment der Geschwindigkeit nicht schon selbst als Geschwindigkeit betrachten, sondern blos als das Bestreben, einem Körper eine gewisse Geschwindigkeit mitzuteilen; nicht als extensive, sondern als intensive Grösse, die aber den Grund der extensiven Grösse enthält. Man darf aber auch nicht sagen, das Moment der Geschwindigkeit sei Null, weil sonst durch die Summirung derselben keine endliche Grösse entstehen würde" (Kants nachgelassenes Fragment, WW. XI. a, S. 270)
111

Ernst Gottfried Fischer (Berliner Physiker) 3. „In dem Begriffe der Stetigkeit ~~zum Ausdruck~~ ist also in der That schon der Begr. des Unendlichkleinen als Bestandteil, nur ursprünglich ohne Bew. gedacht. (Üb. das Unendlichkleine u. die Atome, S. 30 Zwei Abhandlungen der Berliner Akademie aus den Jahren 1828 u. 1829)
115
Bei Fischer intensive Grösse S. 37 „dass in einem Punkte etwas vorstellbar sei, was in sich selbst wachsen u. abnehmen kann" (S. 38) Es „liegt in unserer Denkkraft a priori das Vermögen, das Ineinander zu denken." So denken wir die Umgrenzung in der Geometrie. Wenn wir Punkte in Einen Punkt zusammenfallend

denken, so ist für die Anschauung nur Ein Pt da, „für den Verstand aber bleibt es eine Anzahl von Pkten, die nicht neben einander, sondern in einander, also in der Form einer intensiven Grösse gedacht werden." (S. 39) vgl. Bonnel 116.

In unserem Jahrhundert u. Zeitalter ist die Begründung des Differentialbegriffs vielfach unternommen worden. Aber in keiner der diesem Problem gewidmeten Untersuchungen, soweit ich derselben habhaft werden konnte, ist der Gedanke der Realität als Motiv u. Problem erkannt worden, weder in dem vorkritischen Sinne von Galilei ~~od~~ u. Leibniz, noch vollends in demjenigen Kants. Ueberall hat man entweder in metaph. Speculationen oder in intern-math. Entwicklungen die Begründung versucht.
118

III Ausführungen

Das erste Moment nämlich, die Ableitung der Dinge aus den Gesetzen des denkenden Bewusstseins bildet das Genus des Idealismus. Die Hinzunahme des sinnlichen Bewusstseins bezeichnet nicht hinreichend den Unterschied des kritischen vom dogmatischen Idealismus: die differentia

specifica liegt erst u. ausschliesslich in dem
Hinweis auf die Wissenschaft, in welcher alle
Dinge gegeben u. für die phil. Frage angreifbar
vorhanden sind: nicht am Himmel sind
Sterne gegeben, sondern in der Wissenschaft
der Astronomie bezeichnen wir diejenigen Ge-
genstände als gegebene, welche wir von, wen-
gleich ernstlich gemeinten, Erzeugungen u.
Bearbeitungen des Denkens als in der Sinnlichkeit
gegründet unterscheiden. Nicht im Auge
liegt die Sinnlichkeit, sondern in der raison
de l'astronomie. Das bedeutet Descartes'
classisches Beispiel von der Sonne.

127

Will man nicht erst nötig haben, die Aus-
dehnung als eine Wirkung der mit den unaus-
gedehnten Punkten verbundenen Kräfte an-
zunehmen, so gilt es, das Unausgedehnte
limitativ zu fassen. Nicht der Ausdehnung
bar u. ledig, noch der Ausdehnung widerstrei-
tend sind die Punkte, die man als die
Fundamente der Materie, nämlich als des
Realen derselben anzunehmen hat, sondern
als die Ausdehnung begrenzend, mithin derselben

zugehörig. Das Inextensum muss gedacht
werden als mit der Tendenz zur Ausdehnung be-
gabt, kann daher aber nicht selbst ausgedehnt
sein sollen; denn es soll diese Ausdehnung ja u.
aus sich erzeugen. Das haben wir als die
realisierende Kraft der intensiven Geschwindig-
keiten erkannt, welche die Fallräume erzeugen.
Das ist der Fortgang vom Inextensiven zum Inten-
siven, der sich Kraft der Limitation vollzieht.

137

Die Realität aber darf nicht als unausgedehnt
bezeichnet werden, weil sie als solche auch
nicht ausgedehnt sein kann. Sie ist also das
Intensive die notwendige Ergänzung des Extensiven,
u. zwar eine Ergänzung, welche schon der Geom.
zu gute kommt, nicht allein der Mechanik, wie
wir dies an dem Tangenten-Problem gesehen
haben.

137

Erk-kritisch verstehen wir daher den Begr.
des Infinitesimalen als ein Beispiel des Grundsatzes
der intensiven Grösse. Nicht zusammenfallend
ist das dx mit der intensiven Grösse; denn
das dx hat neben räumlicher Unbegrenzt-
heit zugleich räumliche Tendenz; aber

eine Art des Geltungsbegriffs der intensiven ~~Grösse~~ Realität ist das Unendlichkleine; u. zwar nicht blos eine correctur, als etwa das Atom; sondern auch als die zureichende Bedingung für die Fundamentirung des Realen lässt sich der Infinitesimalbegriff über allen Zweifel erheben. 142

Wenn also das Differential die Realität als eine constituirende Denk-Bedingung geltend macht, so bezeichnet das Integral das Reale als Gegenstand. 144

Diese Summe (Integral) ist nicht eine Strecke, ist nicht an sich u. principiell eine extensive Quadratur — sowenig als das Differential ein extensives Quantum bedeutet. Die Summe intensiver Werthe ist selbst intensiv; dennoch zwar zur Darstellung des Endlichen geeignet, aber eben doch als „Grenzwerth" desselben, oder zutreffender, wie wir zu erweisen ~~versucht~~ habe, ausgedrückt als Erzeugungs-Werth des Endlichen gedacht. Denn die intensive Realitätsgrösse ist nur die Erzeugungs-Einheit, anstatt der extensiven Maass-Einheit. 146

Das dx ist keineswegs Null, sondern als Zahl zu denken, wie die Ruhe als intensive Bewegung. dx ist diejenige Zahl, welche die Zahl-Grösse zur Zahl-Realität bringt.

Als solche Realitäts-Einheit ist dx zunächst zwar constant; denn sie bezeichnet dasjenige Letzte, in welchem der Hilfsbegriff der Veränderung befriedigt u. somit zum Stehen gebracht ist. Wenn dagegen die Variable noch mit einem dx complicirt erscheint, so ist dies ein Anzeichen, dass die letzt-mögliche Realitäts-Einheit noch nicht erschöpft ist. Alsdann muss dx, als mit diesem x behaftet, selbst wiederum als variabel gedacht werden, zu Gunsten dieses seines x, mit dem es complicirt ist. 147

In diesem dem Behufe, zu welchem dx erdacht ist, entsprechenden Sinne stellt der Realitätsbegriff eine relative Stufe der Erzeugung dar. Das dx bezeichnet demnach diejenige Stufe, um welche eine Integralgrösse x als auf ihre Realitäts-Einheit aufsteigt. Die Realitäts-Einheit wird man nicht extensiv neben einander gelagert

erwarten. Im Sinne der intensiven Realität setzt
die Geschwindigkeit die Beschleunigung voraus,
wie die Berührung die Osculation. Ob man alle
höheren Differentiale einer gesonderten physikal.
Deutung zulassen, diese Frage wird nach
dem, was wir über das Verhältnis von
reiner u. angewandter Mathem. angedeutet
gewagt haben, keine Anfechtung bereiten;
genug, dass ihr wichtige u. fruchtbare
Anwendungen solcher Deutung gegeben ist.

Und von dieser Analogie aus dürfen wir
dem Gedanken Raum geben: dass dx mit
seinen höheren Ordnungen enthalten den Grund
der Möglichkeit einer unbegrenzten Verschie-
denheit der Qualitäten u. der Dinge. Jedes
Differential ist wie die Monade un monde
entier plein d'une infinité. Wir erkennen
damit den sachlichen Zusammenhang, der
unter den Begriffen Realität u. Qualität
besteht. Der Unterschied ~~ist~~ der Qualität
ist also ein solcher der Realitäten auf die
verschiedenen Ordnungen des Unendlichkleinen
zurückführbar zu denken. 147

Die Verschiedenheit in der Geschwindigkeit

der Atome bietet eine Analogie für die Ordnungen des
Differentials 148

Wenn nach dem Grössen-Verhältnis von Empf.
u. Reiz gefragt wird, so muss diese Frage dahin
formuliert werden: Wie verhält sich die in-
tensive Grösse der Empf. zur extensiven des
Reizes? Und diese Frage muss zu allernächst
dahin beantwortet werden: Die extensive Grösse
des Reizes hat zu ihrer unentbehrlichen Voraus-
setzung die intensive der Empf., welche dem
Reize die intensive Realität verleiht.

158

Die Grösse der Empf. ist die Erzeugungs-Einheit
dieselbe, auf welcher die Reiz-Einheit beruht.

Es gibt also nur Eine Art von Grösse
für die Empf., nämlich die intensive, in
welcher sich die Empf. als ein Vorgang des Bew.
realisiert, u. in welcher Realitäts-Einheit hin-
wiederum der Inhalt der Empf., der Reiz sich
in letzter Gründe objectiviert. Ein anderes Maass
für die Empf., als die intensive Einheit in der
Ebenmerklichkeit ein solches darbietet,
kann es einmal nicht geben. Der eine Empf.
ist als solche genau ebenso gross wie andere,

die Empf von 31 Loth ist genau so gross wie die von 31 Pfund. ↓ 158

Indessen der Umstand, dass eine Emp. empirisch, durch die physiolog. Versuch als eine andere gleich geschätzt werden kann, diese Tatsache der Schwelle, welche doch nur kraft der Lebenswirklichkeit die Gleichheit der Grösse der Emp constatiert, sollte nun ferner auch die 158' Möglichkeit eröffnen, dass eine Emp. auch als soundsovielmal so stark als eine andere gemessen werden könne. Eine „psychische Zelle" sollte das Weber'sche Gesetz liefern. Jedoch die Gleichheit der Grösse der Emp bezeichnet nur die der intensiven Grösse dieselbe, nicht aber einer extensiven, welche vielmehr die Emp als solche gänzlich unzugänglich ist. Aber auf das Problem der psych. Zelle trieb die Tendenz, das psychophysische Interesse hin. Zwischen Reiz u. Emp. sollte zur tiefern Durchdringung von Materie u. Bew, von Leib u. Seele die „psychophysische Activität" erschreiten. Diese Activität, sofern sie zugleich doch physisch ist, wird daher als „Bewegung" gedacht, u. wie auf alle Art von Bewegung scheint auch auf sie

die extensive Grösse u. zu deren Ergänzung die infinitesimale Analysis anwendbar.

Dies ist ein methodischer Fehler, welcher beinahe ohne tiefere erk-krit. Verständigung als solcher nachweisbar sein dürfte. 159

Wer daher den Vorgang des Bew selbst hinwiederum als solchen materiellen Inhalt denkt, der u. nur der darf dieses sogenannte Bew als ein Integral denken. Ein solcher denkt aber nicht den Bew vielmehr die Molecular-Bewegung des Nervensystems. Diese Bewegung gilt uns als ein wissenschaftlich notwendiger objektiver Inhalt des Bew. Dieser Inhalt kann daher nicht als psychophysisch bezeichnet werden; er ist der zum Physischen objectivierte Inhalt des Psychischen. 162

Und sofern wir an dem Bew solche Richtung vollziehen, gilt uns das Bew als objectiviert, genauer als zu objectivierender Inhalt, u. demgemäss als Materie. Zu dieser Objectivierung bedarf es der infinitesimal- od. der intensiven Grösse als der Realität. Die Realität aber ist — Bew; u. zwar nicht materieller Inhalt des Bw., sondern ein gesetzliche Grundgestalt des wissenschaftlich Bws, eine Art der E-heit des Bw, ein Grundsatz der Erk. So erledigt sich das psycho-physische Problem durch die erk-krit. Bestimmung d. Realität. (Geul) 1624

J. J. Bonnel, Les Atomes et Hypothèses dans la Géométrie

D'une manière générale, il est inadmissible qu'une grandeur quelconque qui varie, en passant par toutes les valeurs possibles, depuis 1 jusqu'à 0, n'en prenne pas une dernière, au-dessous de laquelle il n'y en ait point de plus petite, si ce n'est zéro. Cette valeur minuscule que prend toute grandeur à sa naissance ou à sa disparition, c'est l'élément α de la quantité. 57

zéro ne représente aucune quantité et α en est une. 58

~~α : [illegible] l'atome [illegible]~~

La seule idée qu'on puisse se faire de 59
cet élément α est celle de la différentielle d'une variable indépendante, telle qu'on la définit dans l'analyse; dans la géométrie, c'est celle d'un atome. 59

Lorsqu'il s'agit d'une longueur, l'atome n'est pas un point, attendu que le point n'a pas de dimension; mais, le point mis en mouvement décrit une ligne qui a une dimension. Le point mathématique, considéré en soi et condamné à l'immobilité, n'est autre chose que le néant ; au contraire, dès qu'on lui applique une force, l'effet produit est une longueur, qui débute par un atome et qui se développe suivant une ligne. Si l'atome linéaire n'est pas un point, c'est un point plus une force, c'est-à-dire une longueur. 60.

A ce titre, l'atome peut augmenter et diminuer aussi bien que toute autre longueur, mais il le fera d'une manière particulièrement remarquable ; s'il augmente, il ne peut que doubler, tripler, etc., et donner toutes les longueurs en se multipliant ; s'il diminue, ce ne sera que pour disparaître en [601] devenant zéro. L'atome géométrique n'a que des multiples, il n'a point de sous multiples. 61

Pour eux (Lagrange, Abel, Poisson, Cauchy &c) aussi, toutes les grandeurs mesurables et, par suite, calculables se trouvent comprises entre l'indéfiniment petit et l'indéfiniment grand, l'infini et zéro restant en dehors de la quantité. 68

a 0, ω ∞

Le seul moyen d'échapper à la contradiction était évidemment de supprimer cet intervalle de α à 0 et de ω à ∞, en confondant l'atome avec zéro et l'infini avec l'infini. Les néo-géomètres ont fait la confusion ; et comme il y a deux manières de la faire, il est arrivé qu'ils ont rencontré deux systèmes de géométrie non euclidienne, prenant leur source au même endroit. Qu'on y fasse attention, et l'on reconnaîtra que ceux qui supposent la somme des angles d'un triangle un peu plus grande que deux droits, ont supprimé l'intervalle en s'arrêtant, non pas à zéro, mais à l'atome ; l'infini, dans leur système, est borné à l'indéfini ; c'est le système que nous avons écarté dès le début comme étant en opposition avec une proposition démontrée par Legendre. Les autres, ceux qui supposent la somme des angles d'un triangle un peu plus petite que deux droits, ont supprimé l'intervalle en niant les propriétés de [701] l'atome, et en les accordant toutes à zéro ; ils donnent ainsi à l'infini tous les attributs de l'indéfini. L'indéfini n'étant, en définitive, qu'une variété du fini, ils traitent l'infini comme une quantité finie et déterminée, ce que Gauss reprochait à Schmacker. 71

En réalité, l'atome et le zéro sont deux états consécutifs d'une grandeur continue, tout à fait distincts l'un de l'autre, et il n'y a pas plus de motif pour confondre ces deux états particuliers qu'il n'y en a pour confondre deux états consécutifs quelconques de la même grandeur. Soutenir qu'on voit très bien que le zéro existe au bout d'une grandeur décroissant indéfiniment, mais qu'on ne voit pas qu'il en soit de même de l'atome, c'est dire tout simplement qu'on voit bien que ce qui existe n'existe pas. C'est évidemment là une prétention doublement paradoxale, qui a pour cause unique la difficulté de se figurer avec l'imagination la valeur atomique d'une grandeur. Mais, si l'on imagine difficilement un atome, on ne peut s'empêcher de

le concevoir ; la raison nous l'impose et nous laisse voir, après quelque réflexion, qu'il est beaucoup plus facile de concevoir le zéro 71 à la suite de l'atome, que de concevoir le zéro sans l'atome ou confondu avec l'atome, attendu que la première de ces conceptions est logique et que la seconde ne l'est pas. 72

Théoriquement, α étant indéfiniment petit, son inverse $\frac{1}{\alpha}$ est indéfiniment grand, tandis que, 0 étant nul, son inverse $\frac{1}{0}$ c'est l'infini. 7[illegible]

Dans chaque espèce de grandeur, l'atome géométrique est en effet la plus petite de toutes celles qui existent ; ~~un~~ un nombre n'est autre chose que l'expression du rapport d'une grandeur à une autre de même espèce. Il en résulte que, si on se représente toute l'échelle des grandeurs d'une même espèce, comme allant de la plus petite α à la plus grande ω, la valeur absolue de tous les nombres résultera de la comparaison de deux grandeurs appartenant à cette échelle. 116

Le terme de comparaison est-il α? Toutes les autres grandeurs seront exprimées par des multiples de α, c'est-à-dire par des nombres plus grands que l'unité; la plus grande sera représentée par le rapport $\frac{\omega}{\alpha}$. Le terme de comparaison est-il ω? Toutes les autres grandeurs seront exprimées par des sous-multiples de ω, c'est-à-dire par des nombres plus petits que l'unité, la plus petite sera représentée par le rapport $\frac{\alpha}{\omega}$.

Le nombre $\frac{\alpha}{\omega}$, qui est l'expression du rapport de la plus petite à la plus grande des grandeurs de la même espèce, est évidemment le plus petit de tous les nombres possibles: c'est le <u>micron</u> ou d'atome numérique. Son inverse est le <u>macron</u> ou le plus grand de tous les nombres possibles. 117

La méthode infinitésimale, comme celle des limites, dit Lagrange, offre « le grand inconvénient de considérer les quantités dans l'état où elles cessent pour ainsi dire d'être des quantités; car, quoiqu'on

conçoive toujours bien le rapport de deux quantités tant qu'elles demeurent finies (ou indéfinies), ce rapport n'offre plus à l'esprit une idée claire et précise aussitôt que ses deux termes deviennent l'un et l'autre nuls à la fois ». L'expression $\frac{0}{0}$, qu'on trouve à la limite, n'est d'ailleurs qu'un symbole abstrait, purement conventionnel, qui ne rappelle rien des éléments particuliers qu'on a soumis au raisonnement avant de l'atteindre. Est-on bien sûr même de pouvoir l'atteindre, si l'on admet la (124) divisibilité d'une ligne à l'infini, comme il paraît nécessaire de le faire?

Aucune de ces objections ne peut se soutenir, si, au lieu de poursuivre la limite jusqu'à zéro, on s'arrête à l'atome. 125

Nous appellerons <u>tome</u> d'une grandeur la plus grande de toutes les grandeurs possibles de cette espèce. La définition du tome se justifie par la raison, comme celle de l'atome; elle ne convient pas à l'infini. L'infini est un symbole qui représente, non pas une grandeur, mais la cessat° d'une grandeur. 154

Bonnel : Atome : étendue + – 5 Cohen : dx : ¼ l'atome : indivisible – 3 5 : 2 étendu +.

S'il en est ainsi, vous ne pouvez pas dire : « cette grandeur a quelque étendue, donc elle est divisible » ; c'est la récip-roque de cette pro-[145'] posit° qui seule est vraie et que vous pouvez affirmer, savoir : « Cette grandeur est divisible, donc elle a quelque étendue ; » Mais, ~~rien~~ rien ne vous autorise à soutenir que tout ce qui a de l'étendue est divisible, puisque nous venons de voir qu'il existe des grandeurs ayant quelque étendue qui ne sont le produit d'aucune multiplicat° et qui, par suite, ne sont susceptible d'aucune espèce de divis° Ces grandeurs indivisibles sont précisément celle qu'on désigne par le mot infini et celle que nous nommons l'atome. 146

Cantor, XX 57, Math. Ann. 46. 500–501 ...

Veronese, ~~Grundzüge der Geometrie~~

Das gradlinige intuitive Kontinuum ist unabhängig von dem Punktsystem, welches wir ~~uns~~ uns an ihm denken können. Ein Punktsystem kann niemals, wenn der Punkt als Zeichen der Trennung zweier consecutiven Teile der Graden od. als Ende einer dieser Teile gedacht wird, im absoluten Sinn das ganze intuitive Continuum geben, weil der Punkt keinen Teil hat. Bei den geometrischen Untersuchungen werden wir sehen, dass ein Punktsystem das Continuum annähernd, aber nur so, darstellen kann. Das gradlinige Continuum ist niemals aus seinen Punkten sondern aus Strecken zusammengesetzt, welche die Punkte zu je zweien verbinden u. welche selbst ebenfalls continuirlich sind. Auf diese Weise wird das Geheimnis der Continuität von einem gegebenen constanten auf einen unbestimmten beliebig kleinen Teil der Grade zurückgedrängt, welcher immer auch continuirlich ist, in welchen es uns aber nicht gestattet ist mit unserer Vorstellung weiter einzudringen. In diesem Geheimnis ist dann im Grunde der Fundamentalbegriff der Grenze

verborgen. Mathematisch aber, das ist wohl zu hervorzuheben, hat dieses Geheimnis durchaus keinen Einfluss, weil uns die Bestimmung des Continuums mittelst eines gut definirten u. geordneten Systems von Punkten ausreicht. Auf der andern Seite ist aber zu beachten, dass die Bestimmung durch Punkte zufällig ist, weil wir die Anschauung des Continuums ebenso auch ohne diese Bestimmung haben. Denn betrachtet man den Pt als bestehend aus keinem Teil, so erhält man wie gesagt das ganze Continuum nicht, auch wenn man die Punkte der Grade von einem Anfang ausgehend alle bekannten ~~auch wenn man die Punkte der Grade~~ reellen Zahlen entsprechen lässt. Wenn man den Pt aber als beliebig kleinen jedoch constanten Teil betrachtet, so lassen sich nicht einmal alle rationalen Zahlen auf den gradlinigen Segment, wenn man mit einem seiner Punkte als Anfang beginnt, darstellen u. dieses Segment behält trotzdem in der Anschauung seine Continuität. Wenn man schliesslich den Pt als unbegrenzt kleinen Teil, das heisst, im Zustand unbestimmter Kleinheit betrachtet, dann entspricht jeder reelle Zahl ein Pt ohne dass man ein besonderes Axiom anzunehmen hat. Wenn (A) die abstracte dem von dem gradlinigen Gegenstand angenommenen Ort entsprechende Form ist, so gibt es, wie uns die räumliche Ansch. lehrt, im Grund genommen keine andere abstracte Form (B) von derselben Beschaffenheit wie (A), von welcher ein Teil zwei consecutive Teile von (A) trennen könnte. Damit, dass man sagt, die Grade könne discontinuirlich u. von allen aus kleinen Teilen bestehenden Punkten, welche z. B. von einem gegebenen Anfang ausgehend alle algebraischen Zahlen darstellen, gebildet sein, nimmt man an sich schon Etwas an, was der Ansch. widerstreitet, nämlich, dass die abstracte der Graden entsprechende Form einer andern möglichen abstracten Form angehöre, die sämmtliche reelle[56] Zahlen in sich fasse u. deren Elemente (die Teile der Form sind a) diejenigen der ersten Henriten. Wir sind dieses Princips wegen nicht nur gezwungen anzunehmen, dass von einem Pt der Graden anfangend alle andern Pte die reellen Zahlen darzustellen, sondern auch anzunehmen, dass es Punkte in

in der Graden gibt, welche eventuell andern möglichen zwischen den reellen Zahlen liegenden Zahlen entsprechen, wobei die andern charakteristischen Eigenschaften unberührt bleiben. Wir bemerken noch, dass wir den unbegrenzt kleinen Teil unabhängig von der Unterscheidung der Zahlen in rationale u. irrationale betrachtet wurden u. dass die Hypothese, alle diese Teile enthielten nicht wenigstens einen Pt ausser den Endpunkten, für uns viel zu willkürlich u. unsicher wäre. Ferner, wenn ein Geschoss in grader Linie von dem Pt A nach dem Pt B fliegt u. man teilt seinen Weg in die Reihe von Teilen

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3},\ \ldots$$

so sehen wir, wenn wir das Geschoss durch die Reihe dieser Teile begleiten, seine Spitze in unseren Gedanken niemals aus dieser Reihe herauskommen. Und doch haben wir die Vorst. von der Tatsache, dass das Geschoss den Pt B trifft, welcher die Grenze ist, welche die Spitze des Geschosses erreicht. (AB) ist die Grenze der obigen Reihe in dem Sinne, dass die Spitze X des Geschosses, so lange sie in der Reihe bleibt, sich unbegrenzt dem Pt B nähert od. dass (XB) so klein wird, wie man will. Ebenso verhält es sich mit einer Reihe

consecutiver stets wachsender Teile auf der Grad-
wenn diese Reihe von einem Pt A ausgeht u.
einen in unserem Beobachtungsfeld liegenden
gegebenen Pt B nicht überschreitet. Um uns
diese <u>ganze</u> Reihe vorzustellen, müssen wir mit
der Vorst. aus der Reihe <u>heraustreten</u> u. müssen
sie uns von einem anderen zu A u. B aber
<u>ausserhalb</u> der Reihe liegenden Pt C begrenzt
denken, wenn (AB) selbst nicht die Grenze der
Reihe ist. Auch in diesem Fall würde die ent-
gegengesetzte Hypothese der Ansch. widerstreiten. Man
bemerke überdies, dass die Ansch. für die Geom.
ohne Zweifel wesentlich ist, dass sie aber als
notwendiger Bestandteil weder in der Fassung
der Sätze od. Definitionen noch in den Beweisen
auftreten darf.

Dass es discontinuierliche Punktsysteme gibt,
die alle von der Erf. gegebenen Eigenschaften des
Raumes genügen, ist, so soviel wir wissen, noch
nicht nachgewiesen worden; jedenfalls würde
es nichts gegen die anschauliche Continuität
des Raumes beweisen. 57 recto

Cohen: Kants Theorie der Erfahrung.

Die Veranlassung bietet die Sinnlichkeit; aber was sie veranlasst, wird ein Anderes als sie ist. Und den Eigenwerth dieses Andern herauszustellen u. auszuprägen, das wird damit zur Aufgabe der Ideenforschung. 12.

Nicht schlechthin Phantasma sind also die Dinge, sondern als Phänomena sind sie nützliche Bilder u. Beispiele, sofern sie uns zur Erforschung der Dinge als „Wecker des Denkens" reizen u. in den math. Abbildungen anleiten. Dies ist objectiv in Platons Idealismus der fruchtbare Ertrag seines unkrit. Philosophirens. Nicht Sehen sind die Dinge, u. nicht Wahrheit; sondern Anregungen, aber als solche unveränderliche u. unumgängliche zum Aufbau der Wissenschaft, zur Erk. des Seienden. Aber freilich liegt dieses Seiende seinem Grunde nach ausschliesslich in dem Denken, wie die Wiss. ausschliesslich in der Vernunft. 6.

Es ist der unschätzbare Werth des Leibnizschen Idealismus, dass er in dem Denken u. der Vernunft gegenüber der Empf. u. der Sinnlichkeit schärfer u. klarer als Descartes den Urgedanken des Platonismus

eingeprägt hat: dass die Natur im Bewusstsein entdeckt, die Materie im Denken constituiert werden müsse. 40

Humes Einfluss auf Kant darf nicht absolut geschätzt werden, sondern nach dem Verhältniss zu den Wolffianern. Damit aber ist gesagt, dass nicht in erster Linie zu Hume u. dem Verfasser der Krit. d. r. V. ein Verhältnis besteht, sondern zu Hume u. dem Kant der vorkritischen Jahre. 53.

Nachdem Kant in dem ersten Jahrzehnt seiner schriftstellerischen Laufbahn theils Kapitel der Newtonischen Wissenschaft, teils Frage der Leibnizschen Philosophie behandelt hatte, gibt er in den sechziger Jahren sich den Anregungen hin, welche von der Philosophie der Engländer ausgingen. Ohne jedoch darüber an dem Faktum u. Ideal irre zu werden, welches Newton aufgestellt hat. Nicht die Wissenschaft lässt er sich durch Hume in Frage stellen, sondern die Leibnizsche Schule. 55.

Obschon das a priori bei Kant zunächst aber schon aus der Einfügung desselben in die Hauptmethode schliessen können, die Begründung u. dadurch auch dem Inhalte nach etwas Anderes zu bedeuten hat, so liegt doch darin die

Gemeinschaft mit der frühern Bedeutung, dass in den a priori bei Kant wie bei Leibniz ein Element des Erkennens festgelegt wird, welches der psych. Analyse verschlossen bleibt. Und indem das Verfahren der tr. Methode solche a priori feststellt, unterscheidet sich dasselbe ob dieser Tendenz u. dieses Ergebnisses von der psych. Untersuchung. Diejenige Untersuchung der Tatsache des Bw ins Erkennen, welche die psych. Analyse unzugänglichen, das will sagen als a priori anzuerkennende Elemente des Bw feststellt, nennt Kant eine „metaphys. Erörterung." Und diese ist eine notwendige Vorbedingung der transcendentalen.

Man kann nun die Frage aufwerfen, weshalb die tr. Methode diese metaphysische voraussetze, weshalb das kritische Interesse die Auszeichnung solcher Elemente fordere. Könnte man denn nicht die Erk-werthe der Wissenschaft[74] auch dadurch alle bestimmen, dass man die Grundlagen als solche des Erkennens bezeichnete, unbekümmert darum, ob sie Elemente des menschlichen Bw seien? (K. K.) 75

Opposition gegen den Apriorismus hat den Skepticismus zur Consequenz. Der Glaube an den Geltungswert der Wiss. beruht daher auf der Hypothese eigentümlicher Elemente u. Charaktere des erkennenden, des geistigen Bw, in denen die Wiss. selbst ihre Grundlage u. Gewähr hat. Die Wiss. wäre von Ohngefähr, wenn es in der Combination der Wahrnehmung u. ihrer Willkür läge, dass sie sich in ihr zusammenfände; wenn sie nicht in Grundlagen des Bw wurzelte, die wir als die der Analyse unzugänglich Akte u. Bestandtheile des Bw nachweisen können. 76

So sehen wir, dass das Vertrauen in den Geltungswerth der Wiss. verbunden ist mit der Annahme von Grundlagen des Bw, in welchen die Wiss. ihren[76] Anfang genommen u. in ihrem Ausbau sie ihre Geschichte weitergeführt. Vor zwei Gefahren hat sich indess diese Annahme zu schützen. Erstlich muss von der Beziehung u. genaueren Bestimmung solcher Elemente alle Voreingenommenheit methodisch ausgeschlossen sein. Zweitens darf man in der Gliederung dieselben als Elemente des menschlich persönliche Bew. die Aufgabe nicht für erledigt halten. Wird die zweite Gefahr bestanden, so ist damit auch die erste, u. zwar methodisch gehoben.

77.

Das metaph. a priori muss zum transcendental a priori werden. So reift Leibniz, vom Hume gereinigt, zu dem im Newton befestigten Kant.

78.

Wundt lässt Kant sagen, dass die R-vorstellg „nicht durch Erf entstanden sein können." So wenig charakterisch schien ihm der Ausdruck „geborgt". Und er sagt deshalb gegen Kant: der Satz schliesse „eine Entwicklg der Erf. sammt ihrer räumlichen Form nicht aus. Um z. B. bestimmte Druckempfindungen nach aussen zu verlegen, müssen wir freilich schon räumliche Vorstellgen besitzen," (was mehr besagt, als zum Grunde liegen!) aber dass wir die Eindrücke nach aussen verlegen u. räumlich ordnen, dies könnte immerhin durch ein Zusammenwirken äusserer Einflüsse u. der natürlichen Anlage unseres Bew. also durch eine psych. Entwicklg veranlasst sein." (Logik I, 1880, S. 458) Will der aber das „zum Grunde liegen" die psych.

Entwicklg ausschliessen, od. das Zusammenwirken äusserer Einflüsse mit der natürlichen Anlage unseres Bew? Der erste Satz der Kritik lautet: „Dass alle unsere Erk. mit der Erf anfangen, daran ist gar kein Zweifel." Aber wie entspringt Erk. bei ihrem Anfang mit der Erf? Das ist die Frage. Und in dieser Frage liegt die Wendung zu einem andern Begriffe der Erf; wie wird die Erf zur Erk.? „Die natürlichen Anlagen" können zur Lösung dieser Frage nicht beitragen; denn welcher Art diese Anlagen sein, ist gerade die Frage.

98

A priori nennt Kant diejenige Erk. welche „allgemein giltig u. streng notwendig" ist. Durch diese Erklärung ist aber der Begriff a priori keineswegs bestimmt, sondern nur beschrieben. Denn jetzt fragt es sich: welche Erkenntnisse sind, od. welche Erk-e können allgemein giltig u. streng notwendig sein? Woher nimmt die Vernunft eine Erk. welche diesen Wert verbürgt? Mit den angegebenen Prädikaten wird der Wert des a priori nur bezeichnet; aber nicht gesagt, worin dieser Wert bestehe u. Bestand habe.

Dies muss man sogleich von vornherein

ins Auge fassen, dass die Beziehungen i. allgem. u. notwendig nicht sowohl die innere Kriterien des Begriffs a priori sind, als vielmehr die äussere Wertzeichen desselben.

Der Beg. a priori wird durch den Beg. transc. ergänzt u. erfüllt werden müssen. 99

Die Erk., dass ein Beg. a priori sei, nennt Kant „metaphysisch." Diese metaph. Erk. aber kann nur auf Befragungen der innern Erf. u. der wissenschaftl. Literatur beruhen. Wiefern jedoch eine Erk.-art von Gegenständen, also eine synthetische, mit dem Werte a priori möglich sei, diese Erk. allein ist transc. Man muss auch den Ausdruck „Erk.-art" beachten. Nicht auf den obj. Inhalt der Erk. geht die transc. Untersuchung aus, sondern auf den erhobenen Wertanspruch, auf die Methode ist sie gerichtet. Demgemäss hat sie auch keine andern Objekte, als die metaphysischen; aber als Methode ist sie von dieser unterschieden. Sie erweist das a priori erst in seiner Möglichkeit. Daher u. so erfüllt sie den Beg. desselben. 134

Möglichkeit = Kr. Nach Aristoteles u. der Logik

versteht man unter dem Möglichen dasjenige was keinen Widerspruch einschliesst, dasjenige also, was dem Satze des Widerspruchs gerecht wird, was sich denken lässt. Aber eines solchen Möglichen haben wir uns bereits enthoben, es ist das nur analytisch Mögliche. Wir handeln von synthetischen Erk.-en, u. was diese möglich macht. Dieses synthetische-Mögliche muss einen positiven Grund haben. 136

Was ist aber den Einheit, u. wo gibt es Einheit? Nicht einmal als Zahl scheint die Einheit gegeben, vielmehr stets von Neuem teilbar u. wandelbar zu sein. Die Einheit ist überall nur eine Forderung; u. in solchem Sinne mag denn auch die Erf. als Einheit gedacht werden. Damit aber richtet die Erf. einen syst. Gegensatz zur Materie auf. 140/141.

So sehen wir denn, dass die Unterscheidung von Empf. u. Ansch. einen lediglich erk.-kritischen Sinn bei Kant hat, u. nicht einen psychologisch. Empf. ist nicht etwas ein voll entwickelter, für sich bestehender Process im Seelenleben, sondern die wissenschaftlich zu isolierende Vorstufe der Ansch. 157

„R u. Z. sind nicht bloss als Formen der sinnlichen Anschauungen, sondern als Anschauungen selbst" ... (S. 67/8)
Durch diese Gleichstellung aber ist zugleich der Verdacht abgewehrt, dass das „Bereitliegen" eine „fertige" Form bedeuten könnte. Die Anschauung, auch die reine, entsteht. Sie liegt „bereit"; aber sie ist nicht „fertig". Solche Irrungen sind nur möglich, wenn man die transc. Ästhetik ohne die tr. Logik behandelt, wenn man die Einheit der Kantischen Kritik zerschneidet, wenn man die Einheit Form des R nicht als Beitrag u. Mittel für den obersten Grundsatz der tr. Apperception sich klar gemacht hat. 156

Wenn man nun dennoch die Subjektivität des R mit der der Farbe gleichstellt, so stellt man nur sein Missverständnis der tr. Methode bloss. Gibt es etwa Sätze von der Farbe, die nicht zugleich Anwendung der Sätze vom R wären? Müssen wir also nicht, um das Objektive der Farbe zu erkennen, sie als Schwingungs-Verhältnisse u. somit nach den Sätzen vom R behandeln? Das aber einzusehen, will uns gerade die tr. Methode anleiten, dass die Rechnung auf die geom. Gesetzmässigkeit

der erste u. unerlässliche Schritt der Objektivierung sei. 178

Nicht durchaus u. an sich bedeutet der Apriorismus einen Gegensatz zur entwickelungsgeschichtlichen Methode der Psychologie, sondern das ist die Streitfrage, ob in der Apriorisierung von R u. Z. das Interesse der Psychologie u. ihre einzig fruchtbare Methode nicht geschädigt sei.

Hier haben wir nun zunächst einschränkend zu bemerken, dass die entwickelungsgeschichtliche Methode als einzig fruchtbare nur unter der Bedingung zugestanden werden könne: dass von dem Beginne ihrer Arbeit u. bei jedem neuen Anlauf an denselben Pt ihre methodische Schranke, ihr hypoth. Anfang als solcher anerkannt werde. Wo diese Selbsterkenntnis der genetischen Psychologie nicht stattfindet, da ist ein rohste Metaphysik. 201 Von dem Mitdenken dieser Einschränkung also hängt die Entscheidung der Frage ab, ob die Apriorisierung von R u Z die entwickelungsgeschichtliche Psychologie beeinträchtige. Es wird sich zeigen, dass sie vielmehr dieselbe in ihrer klaren u. ergiebigen Arbeit zu fördern geeignet ist. Indem R u Z als ursprüngliche

Elemente des Bw. anerkannt werden, wird der genetische Arbeit der Psychologie der Weg geebnet. Diese Ansicht wollen wir dann zu erhärten zu suchen, dass wir den ersten Satz von R nunmehr psychologisch uns vergegenwärtigen dass die Vorstellung des R in der Empf. selbst nicht enthalten sei. 202

Wenn in jenen drei[32. 43. 40] Empfindungs-Arten, aber in keiner derselben alle die Bedingungen für die R-Vorst. vermittelt sind, so tritt eben mit der R ein neuer Inhalt des Bw. auf, der demgemäss als ursprünglich anzuerkennen ist, wie sehr immer elementare Vorgänge des Bw. dieser neuen Ursprünglichkeit vorbereiten müssen. 204

In dieser ersten Bedeutung, als das Ursprüngliche, erkennen wir demnach die Psych. genötigt, das a priori von R u. Z zuzugestehen, um ihrer Selbsterkenntnis wie um der Förderung ihrer Aufgaben willen. Diesen Nachweis nennt Kant die metaph. Deduktion, in welcher durch Analyse des Bw das Apriorische als das den Empfgen „zu Grunde liegende" aufgezeigt wird. 205

(Fortgesetzt)