

# NOTE BOOK

## Auszüge

- 1-30 Riemer Hypothese für Gemalte
- 31-35 Kromschke Zahlbegriff
- 33-57 Heib. Bolyai Mechanik
- 55-74 Steud. Restriktion Willensst.
- 75-89 Unigen. Geometrie
- 91-95 Po. conic. Neue Konstruktion
- 99-118 R. Kurb. Des. Geom.
- 135-150 Kromschke Path. d. Punkte
- 120-134 Frig. Grundleg. d. Geom.

H. J. J. J.

Plan der Untersuchung

I. Begriff eines n-fach ausgedehnten Raumes

- §. 1. Stetig u. discrete Mannigfaltigkeit, Bestimmung eines Mannigfaltigkeitsraums durch die Lehre von den stetigen Größen in der Lehre
  - 1) von den blossen Gebietsverhältnissen, bei welchen eine Umabhängigkeit der Größen vom Ort nicht vorausgesetzt wird,
  - 2) von den Mannigfaltigkeiten, bei welchen eine solche Umabhängigkeit vorausgesetzt werden muss.

§. 2. Erzeugung des Raug. eines einfach, zweifach, ..., n-fach ausged. Raumes

§. 3. Zurückführung der Ortsbestimmung in einem gegebenen Raum auf Quantitätsbestimmungen. Wicentl. des Krümmungsmaßes eines n-fach a. g. Raumes

II. Mannigfaltigkeit, deren ein M. von n Dimensionen fähig ist, unter der Voraussetzung, dass die Dimension unabhängig von der Lage unabhängig besteht, also jede Linie durch jede messbar ist

§. 1. Ausdruck des Krümmungsmaßes. Als eben werden solche M-ten betrachtet, in denen das Krümmungsmaß durch die Wurzel aus einer Quadratform vollst. differenzial ausdrückbar

§. 2. Untersuchung der n-fach ausged. M-ten, in welche das Krümmungsmaß durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades dargestellt werden kann. Mass ihrer Abweichung von der Ebenheit (Krümmungsmaß) in einem gegebenen Punkte u. einer gegebenen Flächenrichtung zur Bestimmung ihres Massverhältnisses ist es (unter gewissen Beschränkungen) zulässig u. hinreichend, dass das Krümmungsmaß in jedem Pkte in  $n \cdot \frac{n-1}{2}$  Flächenrichtungen beliebig gegeben wird.

§. 3. Geom. Erläuterung

§. 4. Die ebenen M-ten (in denen das Krümmungsmaß allenthalben = 0 ist) lassen sich betrachten als einen besondern Fall der M-ten mit konstantem Krümmungsmaß. Diese können auch dadurch definiert werden, dass in ihnen Unabhängigkeit der n-fach ausged. Grö. vom Ort (Bewegbarkeit, ohne Drehung) stattfindet

§. Flächen mit const. Krümmungsmaß

III. Anwendung auf den Raum

§. 1. Systeme von Satzungen, welche zur Bestimmung der Mannigfaltigkeiten des R

Riemann, Ueber die Hypothesen, welche der Geom. zu Grunde liegen <sup>22</sup> (R. Gesammelte Werke 272-87)

Plan der Untersuchung

Rekantheit setzt die Geom. sowohl den Beg. des R. als die ersten Grundbegriffe für die Analysis im R. als etwas Gegebenes voraus. Sie geht von einer nur nominal definitiven, während die wesentlich Bestimmungen in Form von Axiomen aufsteht. Das Verhältnis dieser Voraussetzung bleibt daher im Dunkeln, man weiß weder wie, ob u. in wie weit ihre Verbindung notwendig, noch a priori, ob sie möglich ist. 272 (7. d. i.)

Es hatte dies seiner Grund wohl darin, dass der allg. Beg. mehrfach ausgedehnter Größen, unter welchen die Begriffe enthalten sind, ganz unbenutzt blieb. Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Beg. eines mehrfach ausgedehnten Raumes aus allgem. Größenbegriffen zu entwickeln. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Größe von verschiedener Mannigfaltigkeit fähig ist u. der R. also nur einen besondern Fall einer dreifach ausgedehnten Größe bildet. Hiervon aber

wie die Geom. wie voraussetzt, hier nicht  
§. 2. In wie weit ist die Gültigkeit dieser empirisch Bestimmung wahrscheinlich gesichert durch die Beobachtung im Universum?  
§. 3. In wie weit ist die Voraussetzung "Zerfallbarkeit" hiermit mit der Naturerklärung

ist eine notwendige Folge, dass die Güte der  
 Geom. sich nicht aus allgem. Grössen be-  
 griffen ableiten lassen, sondern dass die-  
 zigen Eigenschaften, durch welche sich  
 der R von anderen denkbaren dreifach  
 ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur  
 aus der Erf. entnommen werden können. Hieraus  
 entsteht die Aufgabe, die einfachsten  
 Tatsachen aufzusuchen, aus denen sich  
 die Messverhältnisse des R bestimmen lassen  
 — eine Aufgabe, die der Natur der Sache  
 nach nicht völlig bestimmt ist, den  
 so lassen sich mehrere Systeme einfacher  
 Tatsachen angeben, welche zur Bestimmung  
 der Messverhältnisse des R hinreichen;  
 am wichtigsten ist für den gegenwärtigen  
 Zweck das von Zerkhid zu Grunde ge-  
 legte. Diese Tatsache sind wie alle  
 Tatsachen nicht notwendig, sondern nur  
 von emp. Gewissheit, welche innerhalb der  
 Grenzen der Beobachtung allerdings sehr gross  
 ist, unter auch in hienach über die Zu-  
 lässigkeit ihrer Ausdehnung jenseit der  
 Grenze d. Beobachtung, sowohl nach der

290

Sicht des Unversorgens, als nach der Seite  
 des Unversorgens die natürliche 273  
 I. Begriff einer <sup>in</sup> fach ausgedehnten Grösse!  
 Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo  
 sich ein allgemeiner Beg. vorfindet, der verschie-  
 dene Bestimmungsweisen zulässt. Je nachdem unter  
 diesen Bestimmungsweisen von einer zur ande-  
 ren ein stetiger Übergang stattfindet od.  
 nicht, bilden er ein stetige od. discrete Man-  
 nighfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen  
 im ersten Falle Punkte, im letztem Elemente  
 dieser Mannighfaltigkeit. <sup>die Orte der Sinngegenstände</sup>  
 Bestimmte, <sup>u. die Farbe</sup> durch ein Merkmal od. ein <sup>stetig mannighfalt. angeord. M. 1834</sup>  
 Genze unterschiedener Theile einer Mannighfaltig-  
 keit. Ihre Vergleichung der Quan-  
 tität nach geschieht bei den discrete Grösse  
 durch Zählung, bei den stetigen durch  
 Messung. Das Messen besteht in einem Auf-  
 einanderlegen der zu vergleichenden Grösse,  
 zum Messen wird also ein Masse Mittel  
 erfordert, die eine Grösse als Massstab für  
 die andere fortzubringen. Fehlt dieses, so  
 kann man zwei Grösse nur vergleichen,  
 wenn die eine ein Teil der andern ist,  
 u. auch dann nur das Mehr od. Minder.

nicht das Wieviel entscheiden. 274

Für den gegenwärtigen Zweck genügt es, aus diesem allg. Teile der Lehre von den ausgedehnten Größen, wo weiter nichts vorangestellt wird, als was in dem Bsp. derselben schon enthalten ist, zwei Punkte hervorzuheben, wovon der erste die Erzeugung des Bsp. einer mehrfach ausged. Manigfaltigkeit, der zweite die Zurückführung der Ortsbestimmung in eine gegebene Manigfaltigkeit auf Inquantitätbestimmungen betrifft u. das wesentliche Kennzeichen einer  $n$ -fachen Ausdehnung deutlich machen wird. 2

274  
 Geht man bei einem Begriffe, dessen Bestimmungsweisen eine stetige Man bilden, von einer Bestimmungsweise auf eine bestimmte Art zu einer andern  $z$  über, so bilden die durchlaufenen Bestimmungsweisen eine einfach ausged. Man, deren wesentliches Kennzeichen ist, dass in ihr von einem Punkte nur nach zwei Seiten, vorwärts u. od. rückwärts, ein stetiger Fortgang möglich ist. Denkt man sich nun, dass diese Man wieder in eine andere, völlig verschiedene,

übergeht, u. zwar wieder auf bestimmte Art d.h. so, dass jeder Pkt in einer bestimmte Pkt der andern übergeht, so bilden sämtliche so erhaltenen Bestimmungsweisen eine zweifach ausged. Man. In ähnlicher Weise erhält man eine dreifach ausged. Man, wenn man sich vorstellt, dass eine zweifach ausgedehnte in eine völlig verschiedene auf bestimmte Art übergeht, u. es ist leicht zu sehen, wie man diese Construction fortsetzen könnte kann. Man man, anstatt der Bsp. als bestimmbar, seine Gegenstand als veränderlich betrachtet, so kann diese Construct. bezeichnet werden als eine Zusammenfügung einer Veränderlichkeit von  $n+1$  Dimensionen aus einer Veränderlichkeit von  $n$  Dimensionen u. aus einer Veränderlichkeit von Einer Dimension.

275

3  
 Ich werde nun zeigen, wie man umgekehrt eine Veränderlichkeit, deren Gebiet gegeben ist, in eine Veränd. von einer Dimension u. eine V. von weniger Dimensionen zerlegen kann. Zu diesem Ende denke man sich ein veränderliches Stück einer Man von einer

Dimensionen — von einem festen Anfangspunkte an  
 gemessen, so dass die Werte derselben unter  
 einander vergleichbar sind —, welches für jeden  
 den Pkt der gegebenen Man einen bestimmten  
 mit ihm stetig sich ändernden Wert hat,  
 od. mit andern Worten, man nehme immer  
 halb gegebener Man. ein stetige Punkt  
 des Orts an, u zwar ein solche Punkt,  
 welche nicht längs eines Teils dieses Man  
 constant ist. Jedes System von Punkten, wo  
 die Punkte einen constanten Wert hat, bildet  
 dann ein stetige Man von weniger  
 Dimensionen, als die gegebene. Diese Man  
 gehen bei Änderung der Punkte stetig in  
 einander über; man wird daher an-  
 nehmen können, dass aus einer von  
 ihnen die übrigen hervorgehen, u. es  
 wird dies, allgemein zu reden, so geschehen  
 können, dass jeder Pkt in einen bestimmten  
 Pkt des andern übergeht; die Annahmefähigkeit,  
 deren <sup>75</sup> Unternehmung wichtig ist, können  
 hier unberücksichtigt bleiben. Hierdurch  
 wird die Ortsbestimmung in der gegebenen Man  
 zurückgeführt auf eine Grössenbestimmung

u auf eine Ortsbestimmung in einer <sup>n</sup>-fachen  
 ausgedehnten Man. Es ist nun leicht zu sehen  
 zeigen, dass diese Man  $n-1$  Dim. hat,  
 wenn die gegebene Man eine  $n$ -fach aus-  
 gedehnt ist. Durch  $n$ -malige Wiederholung  
 dieses Verfahrens wird daher die Ortsbestimmung  
 in einer  $n$ -fach ausged. Man auf  $n$  Grössen-  
 bestimmungen, u also die Ortsbestimmung in  
 einer gegebenen Man, wenn dies möglich  
 ist, auf eine endliche <sup>anz</sup> Zahl von Quantitäten  
 bestimmungen zurückgeführt. Es gibt indes  
 auch Man-ten, in welchen die Ortsbestimmung  
 nicht eine endliche Zahl, sondern entweder  
 eine unendliche Reihe od. ein stetige Man  
 von Grössenbestimmungen erfordert. Solche  
 Man-ten sind der z. B. die mögliche Bestimmung  
 eines Punktes für ein gegebenes Gebiet, die  
 mögliche Gestalten ein erräumliche Figur  
 u. s. w. 276

II. Massenverhältnisse, deren eine Man von  $n$  Dimen-  
 sionen ist, unter der Voraussetzung, dass die  
 Linien unabhängig von der Lage eine Länge  
 besitzen, also jede Linie durch jede mess-  
 bar ist.

Es folgt nun, nachdem die Man eine  $n$ -fach ausgedehnte Man  $n$  construiert u.  
 als messbares Langen derselben gefunden worden ist, dass auch die Ortsbestimmung  
 in derselben auf  $n$  Grössenbestimmungen zurückgeführt wird, als wenn die den  
 oben gestellten Aufgaben eine Unternehmung  $n$  der Massenverhältnisse, deren eine solche  
 Man-fähig ist, u. über die Bedingungen, welche zur Bestimmung dieser Massenverhältnisse

h. welche drei Maximalitäten haben sich nur in absoluten Größengrößen unter  
Brauch u. in Zusammenhang nur durch Formeln darstellbar; unter gewissen gewissen Vor-  
ansatzes kann man sich in diesen Verhältnissen verhalten, welche auch gewisse gewisse  
geom. Sätze für sich u. durch sich wieder möglich, die Resultate der Rechnung geo-  
metrisch anzudeuten. Es wird daher, um feste Boden zu gewinnen, zwar ein  
Massbestimmungen erfordern eine Unabhängigkeit

der Größen vom Ort, die in mehr als einer Linie  
stattfinden kann; die zunächst sich darbietende  
Annahme, welche ich hier verfolgen will, ist  
wohl die, dass die Länge der Linien unabhän-  
gig von der Lage sei, also jede Linie durch  
jede messbar sei. Wird die Ortsbestimmung auf  
Größenbestimmungen zurückgeführt, also die  
Lage eines Punktes in der gegebenen  $n$ -fach aus-  
ged. Man durch  $n$  veränderliche Größen  $x_1, x_2,$   
 $x_3, \dots, x_n$  ausgedrückt, so wird  
die Bestimmung eines Punktes darauf hinauskom-  
men, dass die Größen  $x$  als Funktionen einer Ver-  
änderlichen gegeben werden. Die Aufgabe ist dann,  
für die Länge der Linien einen math. Ausdruck  
aufzustellen, zu welchem Zweck die Größen  $x$  als  
in Einheit ausdrückbar betrachtet werden müssen.  
Ich werde diese Aufgabe nur unter gewissen  
Beschränkungen behandeln u. beschränkte mich  
erstlich auf solche Linien, in welchen die Ver-  
hältnisse zw. den Größen  $x$  — den zusam-  
gehörigen ~~Längen~~ Änderungen der Größen  $x$  — sich  
stetig ändern; man kann dann die Linie  
in Elemente zerlegt denken, innerhalb dieser  
absoluten Unveränderlichkeit u. doch nicht zu vermeiden sei, die Resultate derselben  
aber auch in geom. Form u. darstellbar lassen. Zu beiden Seiten der Grund-  
lage enthält in der vorerwähnten Abhandlung des Herrn Scherer Hofrath Gauss über  
die minimale Flächen. (276)

die Verhältnisse der Größen  $x$  als konstant be-  
trachtet werden dürfen, u. die Aufgabe kommt  
dann darauf zurück, für jede Pt. einen allgen.  
Ausdruck des von ihm ausgehenden Linielements  
des aufzustellen, welcher also die Größe  $x$  u.  
die Größe  $dx$  enthalten wird. Ich nehme jetzt  
an, dass die Länge des Linielements, von einer  
zweiten Ordnung abgesehen, ungeändert bleibt,  
wenn sämtliche Punkte derselben dieselbe unend-  
lich kleine Ortsänderung erleiden, worin zugleich  
enthalten ist, dass, wenn sämtliche Größen  
 $x$  in demselben Verhältnisse wachsen, das  
Linielement sich ebenfalls in diesem Ver-  
hältnisse ändert. Unter dieser Annahme  
wird das Linielement eine  $2^{\text{te}}$  beliebige  
homogene Funktion ersten Grades der Größen  
 $x$  sein können, welche ungeändert bleibt,  
wenn sämtliche Größen  $x$  ihr Zeichen ändern,  
u. worin die willkürlichen Constanten stetige  
Funktionen der Größen  $x$  sind. Um die ein-  
fachsten Fälle zu finden, suche ich zunächst  
einen Ausdruck für die  $(n-1)$ -fach ausgedr.  
Man  $dx$ , welche von Anfangspunkte des  
Linielements überall gleich weit absteht,

d. h. ich suche eine stetige Funktion des Ortes, welche sie von einander unterscheidet. Diese wird vom Anfangspunkt aus nach allen Seiten entweder ab- od. zunehmen müssen; ich will annehmen, dass sie nach allen Seiten zunimmt u. also in dem Pkte ein Minimum hat. Es muss dann, wenn ihre erste u. zweite Differentialquotient endlich sind, das Differential <sup>277</sup> erster Ordnung verschwinden u. das zweite Ord. darf nie negativ werden, ich nehme an, dass es immer positiv bleibt. Dieser Differentialausdruck zweiter Ordnung bleibt alsdann constant, wenn das constant bleibt, u. wächst in quadratisches Verhältnis, wenn die Grösse dx u. also auch ds sich sämtlich in dem selben Verhältnis ändern; es ist also = const ds<sup>2</sup> u. folglich ist ds = der Quadratwurzel aus einer immer positiv ganz homogenen Funktion zweiter Grades der Grösse dx, in welcher die Coefficiente stetige Funktionen der Grösse x sind. Für den R wird, wenn man die Lage der Punkte durch rechtwinklige Constante ausdrückt,  $ds = \sqrt{\Sigma(dx)^2}$ ; der R. ist also unter diesem einfachsten Falle

enthält. Der nächst einfachere Fall würde wohl die Mantel umfassen, in welche sich das Linienelement durch die vierte Wurzel aus einem Differentialausdruck vierte Grades ausdrücken lässt. Die Entwicklung dieser allgemeinen Mathem. würde zwar kein wesentlich andere Principie erfordern, aber ziemlich zeitraubend sein u. verhältnissmässig auf die Litu von R. wenig neues Licht werfen, zumal da sich die Resultate nicht geometrisch ausdrücken lässt lassen; ich beschränke mich daher auf die Mantel, wo das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiter Grades ausgedrückt wird. Man kann eine solche Ausdruck in einer andern ähnlichen Form transformiren, indem man für die u unabhängigen Veränderliche Funktionen von n neuen unabhängigen Veränderlichen setzt. Auf diesem Wege wird man aber nicht jeder Ausdruck in jeder Transformation können, denn der Ausdruck enthält n u. n Coefficiente, welche willkürliche Funktionen der unabhängigen Veränderlichen sind; durch Einführung neuer Veränderlicher wird man aber nur n Relationen

genige  $n$  also nur  $n$  der Coefficienten gegeben  
Größen gleich machen können. Es sind dann  
die übrigen  $n-1$  durch die Natur der  
darzustellenden  $M$  schon völlig bestimmt,  
u. zur Bestimmung ihrer Massverhältnisse also  $n-1$   
Funktionen des Orts erforderlich. Die  $M$ - $t$ ;  
in welche sich, wie in der Ebene u. im  $R$ ,  
das Linienelement auf die Form  $\sqrt{\sum dx^2}$  bringen  
lässt, bildet daher nur ein besond. Fall  
der hier zu untersuchenden  $M$ - $t$ ;  
ein und man wohl eine besondere Name,  
u. ich will also diese  $M$ - $t$ ;, in welche sich  
sich das Quadrat des Linienelements auf  
die Summe der Quadrate von selbständig  
differenzierbaren  $n$  Größen lässt, eben wenn  
man nur die wesentliche Verschiedenheit ein-  
licher in der vorangeseh. Form darstellbar  
man- $t$  über <sup>278</sup>sehen zu können, ist es  
nötig, die von der Darstellgen. her-  
rührende zu beseitigen, was durch Wahl  
der veränderl. Grö. nach einem best.  $n$   
Prinzip erreicht wird.

In diesen Ende denkt man sich von einem be-  
liebigen Pte aus das System <sup>2</sup> von ihm ausgehend

Kürzeste Linie konstruiert; die Lage eines unbe-  
stimmten Punktes wird dann bestimmt werden können  
durch die Anfangsrichtung der Kürzesten Linie, in  
welcher er liegt, und durch seine Entfernung in der-  
selben vom Anfangspunkte u. kann daher durch  
die Verhältnisse der Größen  $dx^i$ , d. h. der Grö.  $dx$   
da im Anfang dieser Kürzesten Linie u. durch  
die Länge  $s$  dieser Linie ausgedrückt werden.  
Man führe nun statt  $dx^i$  solche aus ihnen  
gebildete lineare Ausdrücke  $x_i$  ein, dass  
der Anfangswert des Quadrats des Liniene-  
lements gleich der Summe der Quadrate  
dieser Ausdrücke wird, so dass die un-  
abhängigen Variablen sind: die Grö.  $s$   
u. die Verhältnisse der Grö.  $dx$ , u. setze  
schliesslich statt  $dx$  solche ihnen proportionale  
Größen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , dass die Quadrat-  
summe  $= s^2$  wird. Führt man diese Grö.  $x_i$   
ein, so wird für unendlich kleine Werte von  
 $x$  das Quadrat des Linienelements  $= \sum dx^2$ ;  
das Glied der nächstn. Ordnung in demselben  
aber gleich einem homogenen Ausdruck zwei-  
ten Grades der  $n(n-1)$  Grö.  $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$ ,  
 $(x_1 dx_3 - x_3 dx_1), \dots$ , also eine unendlich kleine



Größen von der vierten Dim., so dass man eine endliche Größe erhält, wenn man sie durch das Quadrat des unendlich kleinen Dreiecks dividirt, in dessen Eckpunkte die Werte der Veränderliche sind  $(0, 0, 0, \dots), (x_1, x_2, x_3, \dots), (dx_1, dx_2, dx_3, \dots)$ . Diese Größe behält denselben Wert, so lange die Größen  $x$  u.  $dx$  in denselben binären Linearformen enthalten sind, od. solange die beide kürzeste Linien von den Werten 0 bis zu den Werten  $x$  u. von den Werten 0 bis zu den Werten  $dx$  in demselben Flächenelement bleibe, u. hängt also nur von Ort u. Richtung desselbe ab. Sie wird offenbar = 0, wenn die dargestellte Man. eben, d. h. das Quadrat des Linienelements auf  $\Sigma dx^2$  reducierbar ist, u. kann daher als das Maß der in diesem Pkt. in dieser Flächenelement stattfindenden Abweichung der Man. von der Ebenheit angesehen werden. Multipliziert mit  $-\frac{3}{2}$  wird sie die Größe gleich, welcher Herr Geheimrath Hofrath Gauss das Krümmungsmass einer Fläche genannt hat. Zur Bestimmung des Massverhältnisses einer  $n$ -fachen ausgedehnten in der vorausgesetzten Form darstellbare Man. würde vorher

$n(n-1)$  Funktionen des Orts nötig gefunden, <sup>279</sup> / wenn also das Krümmungsmass in jedem Pkt. in  $n(n-1)$  Flächenelemente gegeben wird, so werden daraus die Massverhältnisse der Man. sich bestimmen lassen, wofür nur zw. diesen Werten keine identischen Relationen stattfinden, was in der That allgemein zu reden, nicht der Fall ist. Die Massverhältnisse dieser Man-te, wo das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades dargestellt wird, lassen sich so auf eine von der Wahl der veränderliche Größen völlig unabhängige Weise ausdrücken. Ein ganz ähnlicher Weg lässt sich zu diesem Ziele auch bei den Man-ten einschlagen, in welche das Linienelement durch eine weniger einfache Ausdruck, z. B. durch die vierte Wurzel aus einem Differentialausdruck vierten Grades, ausgedrückt wird. Es würde sich dann das Linienelement, allgemein zu reden, nicht mehr auf die Form der Quadratwurzel aus einem Quadratumme von Differentialausdrücken bringen lassen u. also in dem Ausdruck für das Quadrat des Linienelements die Abweichung

von der Ebenheit eine unendlich kleine Grösse von der zweiten Ordnung sein, während sie bei <sup>zwei</sup> Ma-t eine unendlich kleine Grösse von der vierten Ordnung war. Diese Eigenschaft der letzteren Ma-t kann daher wohl Ebenheit in der kleinsten Theile genannt werden. Die für den jetzigen Zweck wichtigste Eigenschaft dieser Ma-t, daraufhin, wie sie hier allein untersucht worden sind, ist aber die, dass sich die Verhältnisse der zweifach ausgedehnten geometrisch durch Fläche darstellen, u. die der mehrfach ausgedehnten auf die der in ihnen enthaltenen Fläche zurückführen lassen, was jetzt noch eine kurze Erwähnung <sup>180</sup> bedarf.

3.

In der Auffassung der Fläche mischt sich neben den inneren Massverhältnissen, bei welchen nur die Länge der Wege in ihnen in Betracht kommt, immer auch ihre Lage zu aussen, ihnen gelegenen Punkten. Man kann aber von den äusseren Verhältnissen abstrahiren, indem man solche Veränderung mit ihnen vornimmt, bei denen die Länge der Linie in ihnen ungedändert bleibt,

d. h. sie sich beliebig — ohne Dehnung — gebogen denkt, in alle so aneinander entstehenden Flächen als gleichartig betrachtet. Es gelte also z. B. beliebige cylindrische od. conische Flächen einer Eben gleich, weil sie sich durch blosser Biegung aus ihr bilden lassen, wobei die inneren Massverhältnisse bleiben, u. sämtliche Sätze über dieselbe — also die ganze Planimetrie — ihre Gültigkeit behalte, dagegen gelte sie <sup>180</sup> als wesentlich verschieden von der Kugel, welche sich nicht ohne Dehnung in eine Eben verwandeln lässt. Nach der vorigen Untersuchung werden in jedem Pte die inneren Massverhältnisse einer vielfach ausged. Grösse, wenn sich das Linienelement durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades ausdrücke lässt, wie dies bei der Fläche der Fall ist, charakterisirt durch das Krümmungsmass. Dieser Grösse lässt sich auch bei den Flächen die anschauliche Bedeutung geben, dass sie das Product aus der beiden Krümmungen der Fläche in diesem Pte ist, od. auch, dass das Product derselbe in ein unendlich kleines aus Kürzester Linie gebildet

Dreieck gleich ist dem halben Ueberschuss seiner Winkelsumme über zwei Rechte in Zelle des Halbmessers. Die erste Definit. würde den Satz voraussetzen, dass das Product der beiden Krümmungshalbmesser bei der bloßen Biegung einer Fläche unverändert bleibt, die zweite, dass an demselben Orte der Ueberschuss der Winkelsumme eines unendlich kleinen Dreiecks über zwei Rechte seinem Inhalte proportional ist. Um dem Krümmungsmass eine  $n$ -fach ausged. Man in einem gegebenen Punkte in einer gegebenen durch ihn gehögte Flächenrichtung eine greifbare Bedeutung zu geben, muss man davon ausgehen, dass eine von einem Pte ausgehende kürzeste Linie völlig bestimmt ist, wenn ihre Anfangsrichtung gegeben ist. Hiernach wird man ein bestimmte Fläche erhalten, wenn man sämtliche von dem gegebenen Pte ausgehende  $n$  in dem gegebenen Flächenelement liegenden Anfangsrichtungen zu kürzesten Linien verlängert,  $n$  diese Fläche hat in dem gegebenen Pte ein bestimmtes Krümmungsmass, welches zugleich das Krümmungsmass der  $n$ -fach ausgedehnten Man <sub>$n$</sub>  in

dem gegebenen Pte  $n$  der gegeb. Flächenrichtung ist. 281

Es sind nun noch, ehe die Anwendung auf den R gemacht wird, einige Betrachtungen über die ebenen Man-ten im allgem. nötig, d. h. über diejenige, in welcher das Quadrat des Truementents durch ein Quadratelement vollständiger Differentialen darstellbar ist.

In einer ebenen  $n$ -fach ausged. Man ist das Krümmungsmass in jedem Pte in jeder Richtung Null; es reicht aber nach der frühern Naturverh. um die Massverhältnisse zu bestimmen, hin zu wissen, dass es in jedem Pte in  $n(n-1)/2$  Flächenrichtungen, deren Krümmungsmass von einander unabhängig sind  $\neq 0$  Null sei. Die Man-ten, deren Krümmungsmass überall  $= 0$  ist, lassen sich betrachten als ein besonderer Fall derjenigen Man-ten, deren Krümmungsmass allenthalben constant ist. Das gemeinsame Charakt. dieses Man-ten, deren Krümmungsmass constant ist, kann auch so ausgedrückt werden, dass sich die Figuren in ihnen ohne Drehung bewegen lassen. Denn offenbar würde die Figuren in ihnen nicht beliebig verschoben

n. drehbar sein können, wenn nicht in jedem Pte in allen Richtungen das Krümmungsmass dasselbe wäre. Andererseits aber sind durch das Krümmungsmass die Massverhältnisse der Man vollständig bestimmt, es sind daher um einen Pte nach allen Richtungen die Massverhältnisse genau dieselben, wie um einen andern, u. also von ihm aus dieselben Constructionen ausführbar, u. folglich kann in der Man  $\mathcal{M}$  mit constantem Krümmungsmass den Figuren jede beliebige Lage gegeben werden. Die Massverhältnisse dieser Man  $\mathcal{M}$  hänge nur von dem Werte des Krümmungsmasses ab, u. in Bezug auf die analyt. Darstellung mag bemerkt werden, dass wenn man diesen Wert durch  $\alpha$  bezeichne, den Ausdruck für das Element die Form

$$\frac{1}{1 + \frac{\alpha^2}{4} \sum x^2} \sqrt{\sum dx^2}$$

gegeben werden kann.

20.2

Zur geom. Erläuterung kann die Betrachtung der Flächen mit constant. Krümmungsmass dienen. Es ist leicht zu sehen, dass sich die Fläche

deran Krümmungsmass positiv ist, immer auf einer Kugel, deren Radius gleich  $\frac{1}{\alpha}$  durch die Wurzel aus dem Krümmungsmass ist, wickeln lassen werden, um aber die ganze Man dieser Fläche zu übersehen, gebe man sich dieselbe die Gestalt einer Kugel u. der übrige die Gestalt von Kugelfläche, welche sie im Äquator berührt. Die Fläche mit grösserem Krümmungsmass, als diese Kugel wurde dann die Kugel von innen berühren u. ein Gestalt annehmen, wie die äussere der Axe abgewandte Ziel der Oberfläche eines Ringes, sie würden sich auf Zonen von Kugeln mit kleinerem Halbmesser wickeln lassen, aber nicht als einmal herumreichen. Die Fläche mit kleinerem positiv Krümmungsmass wird man erhalten, wenn man aus Kugelfläche mit grösserem Radius ein von zwei grössten Halbkreisen begrenztes Stück ausschneidet u. die Schnittlinien zusammenfügt. Die Fläche mit dem Krümmungsmass Null wird eine auf dem Äquator stehende Oberfläche sein, die Flächen mit negativem Krümmungsmass aber werden diese Cylinde von aussen berühren u. wie der

innere der Axe zugewandte Seite der Oberfläche eines Ringes gefornnt sei. Denkt man sich diese Flächen als Ort für in ihnen bewegliche Flächenstücke, wie der  $R$  als Ort für Körper, so sind in alle diese Flächen die Flächenstücke ohne Dehnung beweglich. Die Fläche mit posit. Krümmungsmass lassen sich stets so formen, dass die Flächenstücke auch ohne Biegung beliebig bewegt werden können, nämlich zur Kugelfläche, die mit negativem aber nicht. Ausser dieser Unabhängigkeit der Flächenstücke vom Ort findet bei der Fläche mit dem Krümmungsmass Null auch eine Unabhängigkeit der Richtung vom Ort statt, welche bei übrigen Flächen nicht stattfindet.

282

## II. Anwendung auf den $R$ .

1.

Nach diesen Untersuchungen über die Bestimmung der Massverhältnisse eines  $n$ -fach angedeuteten Grössen lassen sich nun die Bedingungen angeben welche zur Bestimmung der Massverhältnisse des  $R$  hinreichend u. notwendig sind, wenn Unabhängigkeit der Linie von der Lage u. Darstellbar-

keit des Linienelements durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdrucke zweiten Grades, also Erhebung in den kleinsten Teil vorausgesetzt wird.

Sie lassen sich erstens so ausdrücken dass das Krümmungsmass in jedem Pte in drei Flächenrichtungen = 0 ist, u. es sind daher die Massverhältnisse des  $R$  bestimmt, wenn die Winkelsumme im Dreieck allenthalben gleich zwei Rechten ist.

Setzt man aber zweitens, wie Zschli, nicht bloß ein von der Lage unabhängige Existenz der Linien, sondern auch der Körper voraus, so folgt, dass das Krümmungsmass allenthalben const. ist, u. es ist dann in alle Dreiecke die Winkelsumme bestimmt, wenn sie in Einem bestimmt ist.

Endlich könnte man drittens, anstatt die Länge der Linie als unabhängig von Ort u. Richtung anzunehmen, auch ihre Unabhängigkeit ihrer Länge u. Richtung vom Ort voraussetzen. Nach dieser Auffassung sind die Ortsänderung od. Ortsverschiedenheiten complexe in drei unabhängige Einheiten ausdrückbare Grössen.

283

2.

Im Laufe der bisherigen Betrachtungen

wurden zunächst die Ausdehnungs- u. Gebietsverhältnisse von den Marsverhältnissen gesondert, u. gefunden, dass bei denselben Ausdehnungsverhältnissen verschiedene Marsverhältnisse denkbar sind; es wurde dann die Systeme einfacher Marsbestimmungen aufgesucht, durch welche die Marsverhältnisse des R völlig bestimmt sind u. von welchen alle Sätze über dieselbe eine notwendige Folge sind; es blüht nun die Frage zu erörtern, wie, in welchem Grade u. in welchem Umfange diese Voraussetzungen durch die Erfahrung verbürgt werden. In dieser Beziehung findet zu den blossen Ausdehnungsverhältnissen u. den Marsverhältnissen eine wesentliche Verschiedenheit statt, wofür bei erstem, wo die möglichen Fälle ein discrete Man bilden, die Aussagen der Erf. zwar nie völlig gewiss, aber nicht ungenau sind, während bei letztem, wo die möglichen Fälle eine stetige Man bilden, jede Bestimmung aus der Erf. immer ungenau bleibt — es mag die Wahrscheinlichkeit, dass sie nahe richtig ist, noch so

gross sei. Dieser Umstand wird wichtig bei der Ausdehnung dieser emp. Bestimmungen über die Grenze der Beobachtung ins Unmessbare u. Unmessbarkeine, denn die letzteren können offenbar jenseits der Grenze der Beobachtung immer ungenauer werden, die erstere aber nicht.

Bei der Ausdehnung der R-Constructive ins Unmessbare ist Unbegrenztheit u. Unendlichkeit zu scheiden; jene gehört zu den Ausdehnungsverhältnissen, diese zu den Marsverhältnissen. Dass der R eine unbegrenzte dreifach ausgeh. M. sei, ist eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Ausserwelt angewandt wird, nach welcher in jedem Augenblicke das Gebiet der wirklichen Wahrnehmungen ergänzt u. die möglichen Orte eines gesuchten Gegenstandes constructirt werden u. welche sich bei diesen Anwendungen fortwährend bestätigt. Die Unbegrenztheit des R bewirkt daher eine grössere emp. Gewissheit, als irgend eine äussere Erf. Hieraus folgt aber die Unendlichkeit. Keineswegs; vielmehr würde der R, wenn man Unabhän-

geigkeit der Körper vom Ort voraussetzt, ihm also mit const. Krümmungsmass zuschreibt, notwendig endlich sein, so bald diese Krümmungsmass einen noch so kleinen positiven Wert hätte. Man würde, wenn man die in einem Flächenelement liegende Anfangsrichtung zu kürzester Linie verlängert, eine unbegrenzte Fläche mit constantem positiven Krümmungsmass, also eine Fläche erhalten, welche in einer ebenen dreifach anged. Man die Gestalt einer Kugelfläche annehmen würde u. welche folglich endlich ist.

3

Die Fragen über das Unmessbarkeits sind für die Naturerklärung missige Fragen. Anders verhält es sich aber mit den Fragen über das Unmessbarkeits. Auf der Genauigkeit, mit welcher wir die Erscheinungen ins Unendlich Kleine verfolgen, beruht wesentlich die Erkenntnis ihres Causalzusammenhangs. Die Fortschritte des letzten Jahrhunderts in der Erkenntnis der mechanischen Natur sind fast allein bedingt durch die Genauigkeit der Construction, welche

durch die Erfindung der Analysis des Unendlichen u. die von Archimed., Galiläi u. Newton aufgefund. einen einfachen Grundbegriffe, deren die heutige Physik bedient, möglich geworden ist. In den Naturwissenschaften aber, wo die einfachen Grundbegriffe zu solchen Constructionen bis jetzt fehlen, verfolgt man, um den Causalzusammenhang zu erkenn., die Erscheinungen ins räumlich Klein, so weit das Microscop nur gestattet. Die Fragen über die Massverhältnisse des R. im Unmessbarkeits gehören also nicht zu den missigen.

Setzt man voraus, dass die Körper unabhängig vom Ort existiren, so ist das Krümmungsmass überall constant, u. es folgt dann aus den astronomischen Messungen, dass es nicht von Null verschieden sein kann; jedenfalls müsste ein reciprocer Wert einer Fläche sein, gegen welche das unsem. Zielstücken zugängliche Gebiet verschwinden müsste. Wenn aber eine solche Unabhängigkeit der Körper vom Ort nicht stattfindet, so kann man aus den Massverhältnissen im Grossen nicht auf die im

Unendlichkleinen schliessen; es kann dann in jedem Pte das Krümmungsmass in drei Richtungen einen beliebigen Wert haben, wenn nur die ganze Krümmung eines messbaren R-teils nicht merklich von Null verschieden ist; noch complicirtere Verhältnisse können eintreten, wenn die vorausgesetzte Darstellbarkeit eines Elementes durch die Quadratwurzel aus einem Differentialausdruck zweiten Grades nicht stattfindet. Man scheint aber die empirischen Begriffe, in welche die räumliche Massbestimmungen gegründet sind, der Begriff des festen Körpers u. des Lichtstrahls, im Unendlichkleinen ihre Gültigkeit zu verlieren; es ist also sehr wohl denkbar, dass die Massverhältnisse des R im Unendlichkleinen den Voraussetzungen der Geom. nicht gemäss sind, u. dies würde man in der That annehmen müssen, sobald sich dadurch die Erscheinungen auf einfache Weise erklären lassen.

Die Frage über die Gültigkeit der Voraussetzungen der Geom. im Unendlichkleinen hängt zusammen mit der Frage nach dem innern

Grunde der Massverhältnisse des R. Bei dieser Frage, welche wohl noch zur Lehre vom R gerechnet werden darf, kommt die obige Bemerkung zur Anwendung, dass bei einer discreten Man. das Princip der Massverhältnisse schon in dem Begriffe dieser Man. enthalten ist, bei einer stetigen aber anderswoher hinzukommen muss. Es muss also entweder das dem R zu Grunde liegende Wirkliche eine discrete Man. bilden, od. der Grund der Massverhältnisse ausserhalb, in den auf wirkenden beiden den Kräften, gesucht werden.

Die Entscheidung dieser Fragen kann nur gefunden werden, indem man von der bisherigen durch die Erf. bewährte Auffassung der Erscheinungen, wozu Newton den Grund gelegt, ausgeht u. diese durch Thatsache, die sich auf ihr nicht erklären lassen, getrieben allmählich umarbeitet; solche Untersuchungen, welche wie die hier geführte von allgem. Begriffen ausgehen, können nur dazu dienen, dass diese Arbeit nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert u.



der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhangs der Dinge nicht durch überprüfte Vermittelungen gehemmt wird.

Es fñhrt dies hinüber in das Gebiet einer andern Wissenschaft, in das Gebiet der Physik, welche wohl die Natur der heutigen Veranlassung nicht zu betreten erlaubt. (Finis) 186.

Und ich glaube auch, dass es dereinst gelingt wird, den gesammten Inhalt aller dieser math. Disciplinen (Geom. u. Mechanik 5.1.2.3.4. (2. 3. 4.) zu arithmetisieren, d. h. einzig u. allein auf die ein engstes Sein genommene Zahlbegriff zu gründen, also die Modifikationen u. Erweiterungen dieses Begriffes (\* Ich meine hier namentlich die Hinzunahme der irrationalen sowie der unendlich kleinen Größen) wieder abzuschreiben, welche zum weit durch die Anwendung auf die Geom. u. Mechanik verwendet worden sind. 25.3

L. Kronecker, Über den Zahlenbegriff. Werke, 3.1.  
Baus, in einem Briefe an Bessel vom 9. April, 1830.  
"Nach meiner innigsten Ueberzeugung hat die R. Lehre zu unserem Wissen a priori eine ganz andere Stellung, wie die reine Grössenlehre, es geht unserer Kenntnis von jenen durchaus dingliche vollständige Ueberzeugung von ihrer Notwendigkeit (also auch von ihrer absoluten Wahrheit) ab, die der letzten eigen ist; wir müssen in demuth zugeben, dass, wenn die Zahl bloss unser Geistes Product ist, der R. auch ausser unserem Kerste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können".

5. 25.3, footnote  
Den naturgemässen Ausgangspunkt für die Entwicklung des Zahlbegriffs finde ich in den Ordnungszahlen. In diesen besitzen wir einen ~~25.3~~ Vorprathgenissus, nach einer festen Reihenfolge geordneter Bezeichnungen, welche wir einer Schaar verschiedener u. zugleich für uns unterscheidbarer Objekte beilegen können. Die Gesamtheit der hiesigen verwendeten Bezeichnungen fassen wir in dem Begriffe der "Anzahl der Objekte"; aus denen diese Schaar besteht, zusammen,



uns einmal gegliedert aus der angesammelten  
 leistungsfähigen Erf. Bilder von der verlangten  
 Beschaffenheit abgeleitet, so können wir / a  
 ihren, wie an Modelle, in kürzerer Zeit die  
 Folgen entwickeln, welche in der äusseren  
 Welt erst in längerer Zeit od. als Folge von  
 einer eigenen Eingreifens auftritt und,  
 wie vermögen es die Tatsache voranzutreiben  
 in Können nach der gesonnen Einsicht in a  
 siren gegenwärtigen Entschlüsse richtet.  
 Die Bilder, von welchen wir reden, sind unsere  
 Vorstellungen von den Dingen, die haben mit  
 den Dingen die eine wesentliche Übereinstimmung,  
 welche in der Erfüllung der gewanten Forderung  
 liegt; aber es ist für ihre Zweck nicht-  
 nötig, dass sie irgend eine weitere Über-  
 einstimmung mit den Dingen haben. In der Tat  
 wissen wir auch nicht, wo haben auch kein  
 Mittel zur erfahren, ob unsere Vorstellungen  
 von den Dingen mit jenen in irgend etwas  
 anderem übereinstimmen, als allein in eben  
 jenen eine fundamentale Beziehung. 2

Von zwei Bildern desselben Gegenstandes  
 wird dasjenige das zweckmässigere an, welches

mehr wesentliche Beziehungen des Gegenstandes wieder  
 spiegelt als das andere, welches, wie wir sagen  
 wollen, das deutlicher ist. Bei gleicher Deut-  
 lichkeit wird von jenen Bildern dasjenige zweck-  
 mässiger sein, welches neben den wesentl. ch. Züge  
 die geringere Zahl überflüssiger od. überflüssiger  
 enthält, welches also  $\frac{2}{3}$  das 1-fache ist. 3

Können wir das Wesen irgend eines Dinges durch  
 unsere Vorstellungen, durch unsere Wörter ersöp-  
 fend wiedergeben? Harnis nicht. Ich meine, der Un-  
 terschied zwischen dieser "mit den Zeichen, Beschwin-  
 digkeit" u. "Gold" verbindet uns eine grosse Zahl  
 von Beziehungen zu anderen Zeichen, in zwischen  
 allen diesen Beziehungen finden sich keine uns  
 verletzende Widersprüche. Das genügt uns, u.  
 wir fragen nicht weiter. Auf die Zeichen  
 "Kraft" u. "Elektrizität" aber hat man mehr  
 Beziehungen gehäuft hat, als sich völlig mit  
 einander verträgt; dies fühle wir dunkel,  
 verlangen nach Aufklärung u. äussern unser  
 unklaren Wunsch in der unklaren Frage nach  
 dem Wesen von Kraft u. Elektrizität. 9

Und doch kann das, was aus Erfahr-  
 stäubt, durch Erf. wieder verrichtet werden;



tritt zugunsten des Beg. der Energie. 17

Die kinetische Energie bedarf im Grunde an sich keiner neuen Grundbestimmung, da sie aus dem Begriff der Geschwindigkeit und der Masse abgeleitet werden kann; die potentielle En. hingegen, welche eine selbständige Feststellung fordert, widerspricht zugleich jeder Definition, welche ihr die Eigenschaft einer Subst. beilegt. Die Menge einer Subst. ist eine notwendig positive Grösse, die in einem System enthalten ist. Die En. scheinen wir uns nicht, als negativ anzunehmen. --- Endlich kann der Inhalt eines physikalischen Systems an einer Substanz nur abhängen von dem Zustande des Systems selbst, der Inhalt gegebener Materie an pot. En. aber hängt ab von dem Vorhandensein entfernter Massen, welche vielleicht niemals Einfluss auf das System hatte. Ist das Weltall unendlich, so wird der Inhalt auch einer unendlichen Menge von Materie an viele Formen pot. En. unendlich gross. Dies sind alles Schwierigkeiten, welche durch die gesuchte Definition der Energie beseitigt od. umgangen werden

müsste

26

Abgleich die ganze Richtung der neueren Physik uns anblickt, den Beg. d. Energie in den Vordergrund zu stellen in ihr auch in der Mechanik als Grund u. Eckstein unseres Aufbaus zu benutzen, so bleibt es doch mehr als zweifelhaft, ob wir bei diesem Vorgehen die Härte u. Rankigkeiten vermeiden können, welche uns in dem ersten Bilde der Mechanik auslösend waren. In der That habe ich auch diesen zweiten Wege der Darstellung nicht deshalb eine längere Besprechung gewidmet, um zur Beschreibung derselben zu ermahnen, sondern vielmehr um anzudeuten, aus welchen Gründen ich selbst ihr aufgegeben habe, nachdem ich zuerst ihr zu verfolgen versucht hatte.

29

Eine dritte Anordnung der Principien d. Mechanik ist diejenige, welche in dem Haupttheil des Buches ausführlich dargestellt werden soll, diese Hauptzeile wir aber schon hier in der Einleitung vorzuführen wollen, um sie in demselben Sinne einer Kritik zu unterwerfen, wie es mit den beiden ersten geschehen ist. Von jenen unterschieden sie sich wesentlich dadurch, dass

sie von nur drei unabhängigen Grundvor-  
 stellungen ausgeht; denen der Zeit, der R.<sup>3</sup>  
 u. der Masse. Sie betrachtet daher als ihre  
 Aufgabe, die natürlichen Beziehung zwischen  
 diesen drei u. allen zw. diesen dreien darzu-  
 stellen. Im vierten Bsg., wie der Bsg. der Kraft  
 od. der Energie, an welchen sich vorher die  
 Schwingigkeiten knüpfen, ist als selbständige  
 Grundvorst. besetzt. Die Bemerkung, dass  
 drei voneinander unabhängige Vorstellungen  
 nötig, aber auch hinreichend seien zur Entwick-  
 lung der Mechanik; hat schon A. Kirchhoff  
 seinem Lehrbuche der Mech. vorangestellt. Ganz  
 ohne Zusatz kam freilich die so in der Grund-  
 vorstellg. anfallende Mannigfaltigkeit nicht  
 bleibe. In unserer Darst. suchen wir die  
 entstehenden Lücken auszufüllen durch Benützung  
 einer Hypothese, welche hier nicht zum erst-  
 male aufgestellt wird, welche man aber  
 nicht in die Elemente der Mechanik selbst  
 einzuführen gewohnt ist, u. deren Wesen wir  
 etwa in der folgenden Weise erläutern können.  
 Vermachen wir, die Bewegungen des uns <sup>so</sup>  
 umgebenden Körpers zu verstehen u. auf einfache

u. durchsichtige Regeln zurückzuführen, indem wir  
 aber nur dasjenige berücksichtigen, was wir  
 unmittelbar vor Augen haben, so schlägt unser  
 Versuch im allgem. fehl. Wir werden bald gewahr,  
 dass die Gesamtheit dessen, was wir sehen u.  
 greifen können, noch keine gesetzmässige Welt-  
 bildet, in welcher gleiche Zustände stets gleiche  
 Folgen haben. Wir überzeugen uns, dass die  
 Mannigfaltigkeit der wirklichen <sup>Welt</sup> grösser  
 sei muss als die Man. der <sup>Wahrheit</sup> Welt, welche sich  
 unserer Sinne unmittelbar offenbart. Wolle  
 wir sie abgemessenes, u. sich geschlossenes,  
 gesetzmässiges Weltbild erhalten, so müssen  
 wir hinter der Dinge, welche wir sehen, noch  
 andere, unsichtbare Dinge vermuten,  
 hinter der Schranke unserer Sinne noch  
 heimliche Mitspieler suchen. Diese tiefen liegen  
 den Einflüsse erkannt was in den ersten bei-  
 den Darstellungen an, u. wir dachten sie uns  
 als Wesen einer eigenen u. besondern Art,  
 deshalb schufen wir zu ihrer Wiedergabe  
 in unserem Bilde die Begriffe der Kraft u.  
 der Energie. Es steht uns aber noch ein an-  
 deres Weg offen. Wir können zugeben, dass in

verborgenes Etwas mitwirkte u. doch leugnen, dass dieses Etwas einer besonderen Kategorie angehöre. Es steht uns frei, anzunehmen, dass auch das Verborgene nichts anderes sei als wiederum Bewegung u. Masse, u. zwar solche Bew. u. Masse, welche sich von der sichtbar nicht an sich unterscheidet, sondern nur in Beziehung auf uns u. auf unsere gewöhnlichen Mittel der Wahrnehmung. Diese Auffassungswiese ist nun eben unsere Hypothese. Wir nehmen also an, dass es möglich sei, den sichtbaren Massen das<sup>e</sup> 39<sup>e</sup> Weltalls andere denselben Gesetzen gehorchende Massen hinzudichten von solcher Art, dass dadurch das Ganze Homogenität u. Verständlichkeit gewinnt, u. zwar nehmen wir an, dass dies ganz allgemein u. in allen Fällen möglich sei u. dass es dabei andere Ursachen der Erscheinung auch gar nicht gebe, als die hindurch zugelassene, was wir gemeint sind als Kraft u. als Energie zu bezeichnen, ist dem für uns nichts weiter als ein Wirkung von Masse u. Beweg., nur braucht es nicht immer die Wirkung grobzeitlich nachweisbarer

Masse u. grobzeitlich nachweisbarer Beweg. zu sein. Eine derartige Erklärung einer Kraft aus Bewegung<sup>st</sup> Vorgängen pflegt man eine dynamische zu nennen, u. man kann wohl sagen, dass die Physik gegenwärtig derartigen Erklärungen im hohen Grade hold ist.

Zuerst führen wir also ein die drei unabhängigen Grundbegriffe  $L$ ,  $R$  u.  $M$  als Gegenstände der Erf., indem wir angeben, durch welche konkrete sinnliche Erf. wir uns Zeiten, Masse, räumliche Größe bestimmt denken wollen.

Es gelingt uns, ihre erfahrungsmässige allgemeine Verknüpfung zusammenzufassen in ein einziges Grundgesetz, welches eine sehr nahe Analogie mit dem gewöhnlichen Trägheitsgesetz nicht. In der That lässt es sich in der Ausdruckweise, welche wir benutzen, wiedergeben in der Aussage, jede natürliche Bewegung eines selbständigen materiellen Systems bestehe darin, dass das System mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine seiner geradesten Bahnen verfolge. --- Es sagt also aus, dass, wenn die Zusammenhänge des Systems einen Augenblick gelöst werden könnten, sich dann seine Masse in grad-

liniger u. gleichförmiger Bewegung zerstreuen würden, dass aber, dass solche Auflösung nicht möglich ist, sie jener angestrebte Bewegung wenigstens so nahe bleiben als möglich. Wie jener Grundgesetz in unserem Bild der erste Erfahrungssatz der eigentlichen Mechanik ist, so ist es auch der letzte Aus ihm zusammen mit der zugehörigen Hypothese verborgener Massen u. geschwinder, aus einer Lage zu leiten wir den übrigen Inhalt der Mechanik rein deduktiv ab. 33

Übrigens erweist es sich auch hier bald als zweckmässig, den Begr. der Kraft einzuführen. Aber die Kraft tritt nicht auf als etwas von uns Unabhängiges u. uns Fremdes, sondern als eine math. Hilfskonstruktion, deren Eigenschaften wir völlig in unserem Gewalt haben, u. welche also auch für uns nichts Rätselhaftes an sich haben kann. 33

Die Mechanik des materiellen Systems erscheint hier nicht mehr als eine Erweiterung u. Entwicklung der Mechanik des einzelnen Punktes, sondern die letztere fällt als selbständige Untereinheit fort u. trägt doch nur gelegentlich

als Vereinfachung u. besonders Fall derselben auf. Wendet man etwa ein, diese Einfachheit sei künstlich erzeugt, so antworten wir, dass es gar keine andere Methode gebe, einfache Beziehungen zu schaffen, als die künstliche u. wohlüberlegene Anpassung unseres Begriffe an die dargelegten Verhältnisse. Will man aber in jenem Vorwurf des Künstlichen der Nebenbei des Geachtet u. Unnatürliche hervorheben, so dürfen wir den entgegenhalten, dass man <sup>mit</sup> ~~mit~~ <sup>nicht</sup> ~~nicht~~ die Betrachtung ganzer Systeme für das Natürliche u. Nahnähernde halten können, als die Betrachtung einzelner Punkte. Denn in Wahrheit ist uns das materielle System unmittelbar gegeben, die einzelnen Massenph. eine Abstraktion; alle wirtliche Erf. wird unmittelbar nur an Systemen gewonnen, u. die an einzelnen Punkten möglichen Erfahrungen sind daraus durch Verstandeschlüsse abgezogen. 37

Dem Wunsche, die log. Reinheit des Systems zu auch in allen Einzelheiten zu erweisen, habe ich dadurch Ausdruck gegeben, dass ich für die Darst. die ältere synthetische Form benutzt habe. 41



Es bedarf keiner besonderen Begründung, dass sich die Betrachtungen der eigentlichen Mechanik, welche von physikalischer Erfahrung abhängt, die jüngerer Beziehungen voraussetzen habe, welche allen Folgen der gewählten Definitionen in mathematischer Notwendigkeit sind, es welche, wenn überhaupt, so doch jedenfalls in anderem Sinne als jene mit der Erf. zusammenhängen.

42

Erstes Buch. Zur Geometrie u. Kinematik d. materiell. System. Vorbemerkung. Den Überlegungen des letzten Buches bleibt die Erf. völlig fern. Alle vorgetragenen Aussagen sind Urteile a priori im Sinne Kants. Sie beruhen auf den Gesetzen der inneren Anschauung u. der Form der eigenen Logik der Aussagenden u. haben mit der äusseren Erf. desselben keinen anderen Zusammenhang, als ihn diese Ansch.-en u. Formen etwa haben.

53

Definition 1. Ein Massentheilchen ist ein Merkmal, durch welches wir einen bestim. Pkt. des Raumes zu einer gegebenen Zeit eindeutig zuordnen können bestim. Pkt. des Raumes zu jeder anderen Z.

54

R. Z. .. Inhere Erf. ...

Schlussbemerkung zum ersten Buch. Wie bereits in der Vorbemerkung (1) ausgesprochen wurde, ist die Überlegung dieses Buches die Erf. völlig fern gelassen. Wenn wir also den gewohnten Beziehungen in der Folge wieder begegnen, so werden wir wissen, dass sie nicht der Erf. entspringen, sondern den gegebenen Gesetzen unserer Ansch. u. unseres Denkens, zusammen mit einer Reihe willkürlicher Deutungen.

Es ist wahr, dass Bildung der Begriffe u. Entwicklung ihrer Beziehungen nur geschehen im Hinblick auf mögliche Erfahrungen, es ist also nicht minder wahr, dass einzig die Erf. zu entscheiden hat über Wert od. Unwert unserer Überlegungen. Die Richtigkeit od. Unrichtigkeit dieser Überlegungen aber kann durch keine mögliche zukünftige Erf. weder bestätigt noch widerlegt werden.

154

Zweites Buch. Mechanik der materiell. System. Abschnitt 2. Das Grundgesetz. Wir betrachten es als die Aufgabe der Mechanik, aus der von der Zeit unabhängigen Eigenschaft mat. Systeme die in der Z. verlaufende Erscheinung derselben u. ihre von der Z. abhängige Eigenschaft abzuleiten. Zur Lösung dieser Aufgabe stelle wir der Mechanik das folgende u. nur das folgende.

der Erf. entnommen Grundgesetz zur Verfügung.  
 Grundgesetz. Jedes freie Syst. beharrt in  
 seinem Zustande der Ruhe od. der gleichförmigen  
 Beweg. in einer geraden od. gekrümmten Bahn.

Schlussbemerkung zum zweiten Buch.

In diese 2te Buche wollten wir nicht mehr die  
 notwendigen Beziehungen zu den Schöpfungen unseres  
 eigenen Geistes erörtern, sondern wir wollten  
 erfahrungsmässige Zusammenhänge zw. Gegen-  
 ständen der äusseren <sup>306</sup> Beobachtung betrachten.

Es war deshalb unumgänglich, dass sich  
 unsere Betracht. stütze nicht alle auf den  
 Gesetze unseres Geistes, sondern auch auf  
 die Ergebnisse früherer Erf. Als notwendig  
 Beitrag der Erf. entnahmen wir daher unseren  
 Beobacht. der Natur das Grundgesetz. <sup>307</sup>

Es musste freilich zunächst scheinen, als  
 sei das Grundgesetz bei weitem nicht hinreich-  
 end, um die ganze Fülle der Thaten zu  
 umspannen, welche die Natur uns darbietet,  
 u. deren Darst. die bestehende Mechanik auch  
 bereits leistet. Denn während das Grundgesetz  
 stetige u. gesetzmässige Zusammenhänge voraus-  
 setzt, trägt uns die tägliche Anwendung auch

unfreie Systeme zu behandeln. Selbst die gesetzmässig-  
 stetige, freien Systeme der Natur fügen sich nicht  
 alle ohne weiteres dem Grundgesetz, sondern schei-  
 nen ihm zum Teil zu widersprechen. Wir sahen nun  
 aber, dass wir auch ungesetzmässige u. unstetige  
 Systeme behandeln könnten, indem wir ihre  
 Ungesetzmässigkeiten u. Unstetigkeiten als ab-  
 bare ansahen; dass wir auch die Beweg. der  
 unfreien Systeme verfolgen könnten, indem wir sie  
 als Teile von freien Systemen auffassten; dass  
 endlich auch die dem Grundgesetz-scheitern  
 widersprechenden Systeme ihrer Unterwerfung unter  
 könnten, wenn wir die Möglichkeit vorbegerener Man-  
 in ihnen zuliesse. Obwohl wir neben dem  
 Grundgesetz weder andere Erfahrungsthaten, noch  
 irgend willkürliche Annahmen zuliesse, könnten  
 wir uns doch über das ganze Gebiet verbreiten,  
 welches die Mechanik überhaupt beherrscht.  
 Unsere besondere Hypothese hindert uns auch nicht,  
 zu versetzen, dass sich die Mechanik so ent-  
 wickeln konnte u. entwickeln musste, wie  
 sie sich tatsächlich entwickelt hat.

Insofern also können wir am Schlusse noch auf-  
 zu, dass das Grundgesetz nicht nur notwendig,

sondern dass es auch hinreichend sei, um den  
Anteil des Hof. an dem allgemeinen Gesetze d.  
Mechanik erschöpfend darzustellen 307

Boltzmann: Vorlesungen in d. Principien d. Mechanik  
Die M. ist die Lehre von der Beweg. der Naturkörper.

Es wurde wohl niemals bezweifelt u. wird von  
Heutz ~~zu~~ besonders hervorgehoben, dass unsere Ge-  
danken bloss Bilder der Objecte (besser Zeichen für  
dieselben) sind, welche mit diesen höchstens eine  
gewisse Verwandtschaft haben, sich aber mit ihnen  
niemals decken können, sondern sich zu ihnen  
verhalten, wie die Buchstaben zu den Lauten  
od. die Noten zu den Tönen. Sie vermögen auch  
wegen der Beschränktheit unseres Intellekts im-  
mer nur einen kleinen Theil der Objecte wieder-  
spiegeln. 1.

Gerade die Unklarheiten in den Principien  
der Mechanik scheinen mir daher zu stehen, dass  
man nicht so gleich mit hypothetischen Bildern  
unseres Geistes beginnt, sondern anfangs an  
die Erf. anknüpfen wollte. Der Uebergang zu  
den Hypothesen suchte man dann mehr zu ver-  
decken, wenn nicht gar einen Beweis zu stän-  
den, dass das ganze Gebäude notwendig u.  
hypotheseufrei sei, verfiel aber gerade dadurch  
in Unklarheit. 2.

Vollends in der neuesten Zeit wird häufig die Forderung aufgestellt, man solle nur die direct gegebenen Erscheinungen erfassen u. ihnen nichts Willkürliches hinzufügen. So sehr es sich empfiehlt, das Selbstliche vom Hypothetischen zu trennen u. letzteres nie grundlos zu häufen, so glaube ich doch, dass man ohne alle Hypothetische über eine unverbundene Markierung jeder einzelnen Erscheinung im Gedächtniss gar nicht hinwegkommen könnte. Alle Vereinfachung der Gedächtnisbilder, alle Erfassung von Gesetzmässigkeiten, alle Regeln, complicirte Erscheinungen kurz zusammen zu fassen u. nach einfacher Vorschrift vorans zu bestimmen, beruhen auf der Anwendung von Bildern, die von fremden einfachen Erscheinungen u. Willensacten hergenommen sind.

Die Maxwell'schen electromagnetischen Gleichungen in der Form, in der sie Herß reproducirt, Hypothetisch, der Erf. Hungergefügtes, das wir immer durch Uebertragung der an endlichen Körpern beobachteten Gesetze auf von uns fingirte Elemente gebildet wird. Sie sowie alle partielle Differentialgleichungen der math. Physik, welche zudem kein

gleichzeitige Zusammenhänge mehrerer Naturkräfte (Elektricität, Magnetismus, Elasticität, Wärme, Chemismus) eine fast unübersichtbare Complication haben, sind ebenfalls nur, wenn auch aus etwas anderen Elementen als den uns gewohnte Atome zusammengesetzt, unexakte, schematische Bilder für bestimmte Sachgebiete. Ihre Rechtfertigung sucht Herß erst nachträglich in der Ueberprüfung mit der Erf., gerade so wie wir es für die atomistischen Bilder thun werden.

Man darf nur in den Thaten selbst wohl begründete atomistische Bilder anwenden, niemals durch Willkürliches, Phantastisches der Natur Gewalt anthun.

In dieser Hinsicht wird gewiss Niemand die Atomistik für alle Phantastereien verantwortlich machen, welche von Ueberseheren auf ihrem Gebiete getrieben wurde. Wer weiss, ob die Energie, wenn sie je das heutige Alter der Atomistik erreichen sollte, an solche Auswüchse ärmlich sein würde?

Das Coordinatensystem ist freilich nicht Reelles, allein darin liegt nach den hier zu Grunde gelegten Anschauungen kein Schwermoment, da es

sich ja gegenwärtig bloß um Konstruktion eines  
Vorstellungsbildes handelt.

7

2. Study Die realistische Weltansicht u. die Lehre  
vom Raume 1914

Die realistische Hypothese, die Annahme der Existenz  
einer vom erkennenden S. unabhängigen Existenz  
Außenwelt, gehört wohl sogar zu denen, die auf  
ewig verdammt <sup>sind</sup> sind, Hypothesen zu bleiben. Trotz-  
dem wird sie, bewusst od. unbewusst, von allen  
zur Anwendung gebracht, sogar — u. das ist  
besonders bemerkenswert — von ihren entschiedenen  
Gegnern.

Eine wahre Anekdote: Im Jahre 1893 stand in einer  
Kaullochhalle zu Chicago ein deutscher Gelehrter in der  
Nähe eines Repertoires, als ein neuer Gast die allgemeine  
Aufmerksamkeit auf sich zog. Es entwickelte sich  
folgendes Gespräch: „Who is it?“ — That is Heh-  
holtz — „Who is Hehnholtz?“ — the famous physicist (etc.)  
“O I understand, a dream in a small way.“ 28. Note

Dem Mathematiker insbesondere miss es schmerz-  
lich sein, seine Wissenschaft in dem Himmel er-  
hoben u. gleichzeitig mißhandelt zu sehen. Was so  
hoch gepriesen wird, man hat es nicht genügend stu-  
diert. Zu sehr gemässigt sein Studium der Math., wie  
zum Ende zu in die Experimentalwissenschaft, gehört  
eben Schuld — zu viel davon für die Philosophie  
(Cohen, Natorp,  
Edenbilde.)

Daraufphilosophieren ist entschieden nicht zu tun. Wollen Tatsachen nicht fügen, dann, desto schlimmer für die Tatsachen.

55

Zwei ganz Kleinen od. Teilhypothese, die in der grossen Hypothese des Realismus stecke u. von wo ein Tagelöhner schon zur Anwendung gebracht werden, ist die Annahme der Exist. d. ausp. R. er. Gleich allen Hypoth. muss sie ohne Beweis eingewandt werden, u. gleich allem hat sie sich durch ihre Ergebnisse zu bewähren.

57

Wir behaupten also, dass die Auffindung der natürlichen Gesetze, d. h. die Bezeichnung ihres logischen Prämissen, ein naturwissenschaftliches Problem ist, gleich anderen.

60

„Wir müssen in Demut zugestehen, dass -- der R. auch ausser unserem Geiste eine Realität hat, der wir a priori ihre Gesetze nicht vollständig vorschreiben können“ (Gauss' Werke 2, 177, 8. St.)

Zur Begründung dieser Ansicht genügt nach Gauss' Meinung mit Recht schon ein einziges Argument: Die Unmöglichkeit, sich über die Begriffe Links u. Rechts ohne Hinweis auf die materielle Welt zu verständigen. In ihr erblickt er die schlagende Widerlegung von Kant's Einbildung, der R. sei über die Form

Was dürfen wir hier von Hypothesenbildung u. Erfahrung, insbesondere auch vom Experiment erwarten? Antwort: Nicht mehr u. nicht weniger als bei anderen Problemen d. Naturwissenschaft auch. (74)

unserer äusseren Ansch. Und an eine andere Stelle hindert es diesen Unterschied zw. rechts u. links ist, sobald man vorwärts u. rückwärts in der Ebene, u. oben u. unten in Bezug auf die beide Seiten der Ebene einmal (nach Gefallen) festgesetzt hat, in sich völlig bestimmt, was wir gleich unsere Ansch. dieses Unterschiedes andern nur durch Nachweisung an wirklich vorhanden materiellen Dingen mitteilen können. Beide Bemerkungen hat schon Kant gemacht, aber man begreift nicht, was dieses schärfere Augenmerk in der ersten eine Beweis für seine Meinung, dass der R. nur Form unserer äusseren Ansch. sei, zu finden glatte konnte, da die zweite so klar das Gegenteil, u. dass der R. unabhängig vom unserer Anschauungsart eine reelle Bedeutung habe muss, beweist.“ (P. 201) Produkt 69

Erfahrung — Idealisierung — Hypothesenbildung (verif. krit.)  
Anzahl durch Einfachheit u. Gleichmässigkeit. (Euklid) (v. d. d. realistik. Aufg. d. R. problems)  
# 3, 177 St. 3, 19 (Konkrete Koordinatengeometrie)  
Ein Pt. wird durch ein System von drei Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  dargestellt.  
Abstrakte (Euklid.) Koordinatengeom. (Ein System d. Punktes)  
Das System einer drei Zahlen ist der Pt.  
allgemein Ein System von n geordneten Zahlen  $x_1, x_2, \dots, x_n$  wird Pt. genannt.

$(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2$  Entfernungsgesetz  
 ein auf alle Punkte, also auf die zugehörigen Zahlen  $n$ -Tupel angewendet <sup>2. Ansatz</sup>  
 $x_n = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$   
 $y_n^* = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$  ( $k=1, 2, \dots, n$ )

Heißt Bewegung  
 wenn die Bewegung  
 Entfernungsgesetz von je zwei Punkten nicht ändert, u. wenn  
 aussenden ihre Determinante

$|C_1, C_2, \dots, C_n|$  der Wert Eins hat; zwei Systeme  
 von Punkte  $x, y, z, \dots + x^*, y^*, z^*, \dots$  diese Krümmung, wenn  
 das erste in das zweite durch eine Bewegung übergeführt  
 werden kann, usw.

Was fassen Punkte zu Systemen (u. eventuell solche Systeme  
 zu Systemen von Systemen) zusammen, die Figuren ge-  
 nannt werden. Die gesamte Disziplin ist dann  
 die Lehre von solche Eigenschaften dieser Figuren,  
 die allen untereinander kongruenten Figuren gemein  
 zukommen

Abt. 11. vgl. Hilbert

Danach gibt es keine Hoffnung, dass durch geodätische Mes-  
 sungen jemals eine Abweichung der natürlichen Geom.  
 von der Euklidischen festgestellt werden könnte, u.  
 sehr unwahrscheinlich ist es, dass Messungen im Pla-  
 netensystem dazu ausreichen sollten, jenseit des Spiel-  
 raum von  $R$  <sup>(Krümmungsradius)</sup> ungewisselhaft noch weiter ausgedehnt  
 werden kann

Es ist mit der Möglichkeit zu rechnen, dass alle  
 Experimente, wie immer sie erachtet sein möge, eine  
 Entscheidung nicht herbeiführen werde. Dann  
 wird der Physiker wie Anlars haben, die ihm be-  
 queme Euklidische Hypothese <sup>auf-</sup>zugeben. Aber ebenso  
 wenig wird er schließen dürfen, dass er die rich-  
 tige ist. Die Entscheidung wird nur immer weiter hinaus-  
 geschoben, u. die zugehörigen Werte der Krümmungs-  
 massen werden in immer engeren Grenzen einge-  
 schlossen. Auch das wird ein positives Ergebnis  
 sein, wie uns scheint, das Schwere der Erde  
 wert.

102.

Wenn Poincaré in seiner Polemik gegen gewisse Autoren  
 — es müssen wohl Gauss, Riemann u. Helmholtz gemeint  
 sein — von einer „völligen Verkennerung des Wesens der  
 Geometrie“ redet, (Bull. d. Sciences mathématiques, 2<sup>e</sup> sér.,  
 26, 249, 1902: „On a déjà beaucoup écrit sur les géomé-  
 tries non-euclidiennes; après avoir ouï un scandale,  
 on s'est habitué à ce qu'elles ont de paradoxal,  
 plusieurs personnes sont allées jusqu'à douter du  
 postulat, à se demander si l'espace réel est  
 plan, comme le supposait Euclide, ou s'il ne  
 présente pas une légère courbure. Elles croyaient  
 même que l'expérience pouvait leur donner une

réponse à cette question inutile d'ajouter que  
c'était là méconnaître complètement la nature  
de la Géométrie, que n'est pas une science ex-  
périmentale."), es ist zu erwidern, dass er die ganze  
Frage missverstanden hat. Es handelt sich keineswegs  
— wie es sagt — um Empirismus in der Geometrie,  
sondern um die Rolle der Geometrie im Empirismus.  
Poincaré kämpft gegen ein Phantom. 117.

S. 117. Randbemerkung:

Siehe das vorangeführte Zitat in die folgende Stelle  
im Buche "Wiss. u. Hyp." S. 81: "Wie man sich auch  
drehen u. wenden möge, es ist unmöglich, mit dem  
Empirismus in der Geom. einen vernünftigen Sinn zu  
verbinden." Wir sind ganz derselben Meinung, auch,  
finden aber, dass die Mahnung sich an eine ver-  
kehrte Adresse richtet. Dass das Missverständnis Poincarés  
weitere Kreise ziehen würde, war bei der grossen An-  
wesenheit dieses Mathematikers zu erwarten. Siehe  
z. B. Natop (S. 302), A. Müller (S. 266), E. Cassiri (S. 417,  
142ff.), aber auch Jonas Cohn (Vor. S. 250-252).  
— Cassiri ist trotz seines idealistischen (übrigens  
wohl mehr aristotelische) Standp. ganz nahe am  
Richtigen gewesen. "Diese Rolle" — sagt er treffend  
— "die man der Erf. zusprechen mag (ich kor-

rigiere muss], liegt niemals in der Begründung des  
jeden Systems [abstrakt. Geom.], sondern in dessen  
wohl, die wir zu ihm zu kriegen haben. Eine zufällige  
Untersuchung der Grundsätze für diese Auswahl würde  
unsern Anhalt vor einem Irrtum bewahrt haben.

Poincaré, Rethorik, S. 117.

Man glaubt den Verfasser der "Weltansch." vor sich  
zu haben, wenn man liest, dass unser Verstand sich  
durch natürliche Zurechtwahl den Bedingungen der  
äusseren Welt angepasst hat, dass er diejenigen  
Geometrien angenommen hat, welche für die Yattung  
am vorteilhaftesten war, od. mit and. W., die am  
bequemsten war" (W. u. H. 90) Geom., Geom., Euklid.  
siehe 9, hervorgerufen durch den Kampf um das  
in Kopfe eines Aristoteles. Oder ergibt sich etwa  
diese Folgerung nicht? Und eine so ansehnliche  
Behauptung hingestellt ohne jeden Versuch eines  
Beweises! 116

Sphärische Geom. Elliptische Pseudosphäre Eukl.

10 Geom. ... 12. Physik. <sup>117</sup> R. Eigenschaft 12-15-17-18  
11, Annahme 12-15-17-18-19-20-21-22-23-24-25-26-27-28-29-30-31-32-33-34-35-36-37-38-39-40-41-42-43-44-45-46-47-48-49-50-51-52-53-54-55-56-57-58-59-60-61-62-63-64-65-66-67-68-69-70-71-72-73-74-75-76-77-78-79-80-81-82-83-84-85-86-87-88-89-90-91-92-93-94-95-96-97-98-99-100-101-102-103-104-105-106-107-108-109-110-111-112-113-114-115-116-117-118-119-120-121-122-123-124-125-126-127-128-129-130-131-132-133-134-135-136-137-138-139-140-141-142-143-144-145-146-147-148-149-150-151-152-153-154-155-156-157-158-159-160-161-162-163-164-165-166-167-168-169-170-171-172-173-174-175-176-177-178-179-180-181-182-183-184-185-186-187-188-189-190-191-192-193-194-195-196-197-198-199-200-201-202-203-204-205-206-207-208-209-210-211-212-213-214-215-216-217-218-219-220-221-222-223-224-225-226-227-228-229-230-231-232-233-234-235-236-237-238-239-240-241-242-243-244-245-246-247-248-249-250-251-252-253-254-255-256-257-258-259-260-261-262-263-264-265-266-267-268-269-270-271-272-273-274-275-276-277-278-279-280-281-282-283-284-285-286-287-288-289-290-291-292-293-294-295-296-297-298-299-300-301-302-303-304-305-306-307-308-309-310-311-312-313-314-315-316-317-318-319-320-321-322-323-324-325-326-327-328-329-330-331-332-333-334-335-336-337-338-339-340-341-342-343-344-345-346-347-348-349-350-351-352-353-354-355-356-357-358-359-360-361-362-363-364-365-366-367-368-369-370-371-372-373-374-375-376-377-378-379-380-381-382-383-384-385-386-387-388-389-390-391-392-393-394-395-396-397-398-399-400-401-402-403-404-405-406-407-408-409-410-411-412-413-414-415-416-417-418-419-420-421-422-423-424-425-426-427-428-429-430-431-432-433-434-435-436-437-438-439-440-441-442-443-444-445-446-447-448-449-450-451-452-453-454-455-456-457-458-459-460-461-462-463-464-465-466-467-468-469-470-471-472-473-474-475-476-477-478-479-480-481-482-483-484-485-486-487-488-489-490-491-492-493-494-495-496-497-498-499-500-501-502-503-504-505-506-507-508-509-510-511-512-513-514-515-516-517-518-519-520-521-522-523-524-525-526-527-528-529-530-531-532-533-534-535-536-537-538-539-540-541-542-543-544-545-546-547-548-549-550-551-552-553-554-555-556-557-558-559-560-561-562-563-564-565-566-567-568-569-570-571-572-573-574-575-576-577-578-579-580-581-582-583-584-585-586-587-588-589-590-591-592-593-594-595-596-597-598-599-600-601-602-603-604-605-606-607-608-609-610-611-612-613-614-615-616-617-618-619-620-621-622-623-624-625-626-627-628-629-630-631-632-633-634-635-636-637-638-639-640-641-642-643-644-645-646-647-648-649-650-651-652-653-654-655-656-657-658-659-660-661-662-663-664-665-666-667-668-669-670-671-672-673-674-675-676-677-678-679-680-681-682-683-684-685-686-687-688-689-690-691-692-693-694-695-696-697-698-699-700-701-702-703-704-705-706-707-708-709-710-711-712-713-714-715-716-717-718-719-720-721-722-723-724-725-726-727-728-729-730-731-732-733-734-735-736-737-738-739-740-741-742-743-744-745-746-747-748-749-750-751-752-753-754-755-756-757-758-759-760-761-762-763-764-765-766-767-768-769-770-771-772-773-774-775-776-777-778-779-780-781-782-783-784-785-786-787-788-789-790-791-792-793-794-795-796-797-798-799-800-801-802-803-804-805-806-807-808-809-810-811-812-813-814-815-816-817-818-819-820-821-822-823-824-825-826-827-828-829-830-831-832-833-834-835-836-837-838-839-840-841-842-843-844-845-846-847-848-849-850-851-852-853-854-855-856-857-858-859-860-861-862-863-864-865-866-867-868-869-870-871-872-873-874-875-876-877-878-879-880-881-882-883-884-885-886-887-888-889-890-891-892-893-894-895-896-897-898-899-900-901-902-903-904-905-906-907-908-909-910-911-912-913-914-915-916-917-918-919-920-921-922-923-924-925-926-927-928-929-930-931-932-933-934-935-936-937-938-939-940-941-942-943-944-945-946-947-948-949-950-951-952-953-954-955-956-957-958-959-960-961-962-963-964-965-966-967-968-969-970-971-972-973-974-975-976-977-978-979-980-981-982-983-984-985-986-987-988-989-990-991-992-993-994-995-996-997-998-999-1000-1001-1002-1003-1004-1005-1006-1007-1008-1009-1010-1011-1012-1013-1014-1015-1016-1017-1018-1019-1020-1021-1022-1023-1024-1025-1026-1027-1028-1029-1030-1031-1032-1033-1034-1035-1036-1037-1038-1039-1040-1041-1042-1043-1044-1045-1046-1047-1048-1049-1050-1051-1052-1053-1054-1055-1056-1057-1058-1059-1060-1061-1062-1063-1064-1065-1066-1067-1068-1069-1070-1071-1072-1073-1074-1075-1076-1077-1078-1079-1080-1081-1082-1083-1084-1085-1086-1087-1088-1089-1090-1091-1092-1093-1094-1095-1096-1097-1098-1099-1100-1101-1102-1103-1104-1105-1106-1107-1108-1109-1110-1111-1112-1113-1114-1115-1116-1117-1118-1119-1120-1121-1122-1123-1124-1125-1126-1127-1128-1129-1130-1131-1132-1133-1134-1135-1136-1137-1138-1139-1140-1141-1142-1143-1144-1145-1146-1147-1148-1149-1150-1151-1152-1153-1154-1155-1156-1157-1158-1159-1160-1161-1162-1163-1164-1165-1166-1167-1168-1169-1170-1171-1172-1173-1174-1175-1176-1177-1178-1179-1180-1181-1182-1183-1184-1185-1186-1187-1188-1189-1190-1191-1192-1193-1194-1195-1196-1197-1198-1199-1200-1201-1202-1203-1204-1205-1206-1207-1208-1209-1210-1211-1212-1213-1214-1215-1216-1217-1218-1219-1220-1221-1222-1223-1224-1225-1226-1227-1228-1229-1230-1231-1232-1233-1234-1235-1236-1237-1238-1239-1240-1241-1242-1243-1244-1245-1246-1247-1248-1249-1250-1251-1252-1253-1254-1255-1256-1257-1258-1259-1260-1261-1262-1263-1264-1265-1266-1267-1268-1269-1270-1271-1272-1273-1274-1275-1276-1277-1278-1279-1280-1281-1282-1283-1284-1285-1286-1287-1288-1289-1290-1291-1292-1293-1294-1295-1296-1297-1298-1299-1300-1301-1302-1303-1304-1305-1306-1307-1308-1309-1310-1311-1312-1313-1314-1315-1316-1317-1318-1319-1320-1321-1322-1323-1324-1325-1326-1327-1328-1329-1330-1331-1332-1333-1334-1335-1336-1337-1338-1339-1340-1341-1342-1343-1344-1345-1346-1347-1348-1349-1350-1351-1352-1353-1354-1355-1356-1357-1358-1359-1360-1361-1362-1363-1364-1365-1366-1367-1368-1369-1370-1371-1372-1373-1374-1375-1376-1377-1378-1379-1380-1381-1382-1383-1384-1385-1386-1387-1388-1389-1390-1391-1392-1393-1394-1395-1396-1397-1398-1399-1400-1401-1402-1403-1404-1405-1406-1407-1408-1409-1410-1411-1412-1413-1414-1415-1416-1417-1418-1419-1420-1421-1422-1423-1424-1425-1426-1427-1428-1429-1430-1431-1432-1433-1434-1435-1436-1437-1438-1439-1440-1441-1442-1443-1444-1445-1446-1447-1448-1449-1450-1451-1452-1453-1454-1455-1456-1457-1458-1459-1460-1461-1462-1463-1464-1465-1466-1467-1468-1469-1470-1471-1472-1473-1474-1475-1476-1477-1478-1479-1480-1481-1482-1483-1484-1485-1486-1487-1488-1489-1490-1491-1492-1493-1494-1495-1496-1497-1498-1499-1500-1501-1502-1503-1504-1505-1506-1507-1508-1509-1510-1511-1512-1513-1514-1515-1516-1517-1518-1519-1520-1521-1522-1523-1524-1525-1526-1527-1528-1529-1530-1531-1532-1533-1534-1535-1536-1537-1538-1539-1540-1541-1542-1543-1544-1545-1546-1547-1548-1549-1550-1551-1552-1553-1554-1555-1556-1557-1558-1559-1560-1561-1562-1563-1564-1565-1566-1567-1568-1569-1570-1571-1572-1573-1574-1575-1576-1577-1578-1579-1580-1581-1582-1583-1584-1585-1586-1587-1588-1589-1590-1591-1592-1593-1594-1595-1596-1597-1598-1599-1600-1601-1602-1603-1604-1605-1606-1607-1608-1609-1610-1611-1612-1613-1614-1615-1616-1617-1618-1619-1620-1621-1622-1623-1624-1625-1626-1627-1628-1629-1630-1631-1632-1633-1634-1635-1636-1637-1638-1639-1640-1641-1642-1643-1644-1645-1646-1647-1648-1649-1650-1651-1652-1653-1654-1655-1656-1657-1658-1659-1660-1661-1662-1663-1664-1665-1666-1667-1668-1669-1670-1671-1672-1673-1674-1675-1676-1677-1678-1679-1680-1681-1682-1683-1684-1685-1686-1687-1688-1689-1690-1691-1692-1693-1694-1695-1696-1697-1698-1699-1700-1701-1702-1703-1704-1705-1706-1707-1708-1709-1710-1711-1712-1713-1714-1715-1716-1717-1718-1719-1720-1721-1722-1723-1724-1725-1726-1727-1728-1729-1730-1731-1732-1733-1734-1735-1736-1737-1738-1739-1740-1741-1742-1743-1744-1745-1746-1747-1748-1749-1750-1751-1752-1753-1754-1755-1756-1757-1758-1759-1760-1761-1762-1763-1764-1765-1766-1767-1768-1769-1770-1771-1772-1773-1774-1775-1776-1777-1778-1779-1780-1781-1782-1783-1784-1785-1786-1787-1788-1789-1790-1791-1792-1793-1794-1795-1796-1797-1798-1799-1800-1801-1802-1803-1804-1805-1806-1807-1808-1809-1810-1811-1812-1813-1814-1815-1816-1817-1818-1819-1820-1821-1822-1823-1824-1825-1826-1827-1828-1829-1830-1831-1832-1833-1834-1835-1836-1837-1838-1839-1840-1841-1842-1843-1844-1845-1846-1847-1848-1849-1850-1851-1852-1853-1854-1855-1856-1857-1858-1859-1860-1861-1862-1863-1864-1865-1866-1867-1868-1869-1870-1871-1872-1873-1874-1875-1876-1877-1878-1879-1880-1881-1882-1883-1884-1885-1886-1887-1888-1889-1890-1891-1892-1893-1894-1895-1896-1897-1898-1899-1900-1901-1902-1903-1904-1905-1906-1907-1908-1909-1910-1911-1912-1913-1914-1915-1916-1917-1918-1919-1920-1921-1922-1923-1924-1925-1926-1927-1928-1929-1930-1931-1932-1933-1934-1935-1936-1937-1938-1939-1940-1941-1942-1943-1944-1945-1946-1947-1948-1949-1950-1951-1952-1953-1954-1955-1956-1957-1958-1959-1960-1961-1962-1963-1964-1965-1966-1967-1968-1969-1970-1971-1972-1973-1974-1975-1976-1977-1978-1979-1980-1981-1982-1983-1984-1985-1986-1987-1988-1989-1990-1991-1992-1993-1994-1995-1996-1997-1998-1999-2000-2001-2002-2003-2004-2005-2006-2007-2008-2009-2010-2011-2012-2013-2014-2015-2016-2017-2018-2019-2020-2021-2022-2023-2024-2025-2026-2027-2028-2029-2030-2031-2032-2033-2034-2035-2036-2037-2038-2039-2040-2041-2042-2043-2044-2045-2046-2047-2048-2049-2050-2051-2052-2053-2054-2055-2056-2057-2058-2059-2060-2061-2062-2063-2064-2065-2066-2067-2068-2069-2070-2071-2072-2073-2074-2075-2076-2077-2078-2079-2080-2081-2082-2083-2084-2085-2086-2087-2088-2089-2090-2091-2092-2093-2094-2095-2096-2097-2098-2099-2100-2101-2102-2103-2104-2105-2106-2107-2108-2109-2110-2111-2112-2113-2114-2115-2116-2117-2118-2119-2120-2121-2122-2123-2124-2125-2126-2127-2128-2129-2130-2131-2132-2133-2134-2135-2136-2137-2138-2139-2140-2141-2142-2143-2144-2145-2146-2147-2148-2149-2150-2151-2152-2153-2154-2155-2156-2157-2158-2159-2160-2161-2162-2163-2164-2165-2166-2167-2168-2169-2170-2171-2172-2173-2174-2175-2176-2177-2178-2179-2180-2181-2182-2183-2184-2185-2186-2187-2188-2189-2190-2191-2192-2193-2194-2195-2196-2197-2198-2199-2200-2201-2202-2203-2204-2205-2206-2207-2208-2209-2210-2211-2212-2213-2214-2215-2216-2217-2218-2219-2220-2221-2222-2223-2224-2225-2226-2227-2228-2229-2230-2231-2232-2233-2234-2235-2236-2237-2238-2239-2240-2241-2242-2243-2244-2245-2246-2247-2248-2249-2250-2251-2252-2253-2254-2255-2256-2257-2258-2259-2260-2261-2262-2263-2264-2265-2266-2267-2268-2269-2270-2271-2272-2273-2274-2275-2276-2277-2278-2279-2280-2281-2282-2283-2284-2285-2286-2287-2288-2289-2290-2291-2292-2293-2294-2295-2296-2297-2298-2299-2300-2301-2302-2303-2304-2305-2306-2307-2308-2309-2310-2311-2312-2313-2314-2315-2316-2317-2318-2319-2320-2321-2322-2323-2324-2325-2326-2327-2328-2329-2330-2331-2332-2333-2334-2335-2336-2337-2338-2339-2340-2341-2342-2343-2344-2345-2346-2347-2348-2349-2350-2351-2352-2353-2354-2355-2356-2357-2358-2359-2360-2361-2362-2363-2364-2365-2366-2367-2368-2369-2370-2371-2372-2373-2374-2375-2376-2377-2378-2379-2380-2381-2382-2383-2384-2385-2386-2387-2388-2389-2390-2391-2392-2393-2394-2395-2396-2397-2398-2399-2400-2401-2402-2403-2404-2405-2406-2407-2408-2409-2410-2411-2412-2413-2414-2415-2416-2417-2418-2419-2420-2421-2422-2423-2424-2425-2426-2427-2428-2429-2430-2431-2432-2433-2434-2435-2436-2437-2438-2439-2440-2441-2442-2443-2444-2445-2446-2447-2448-2449-2450-2451-2452-2453-2454-2455-2456-2457-2458-2459-2460-2461-2462-2463-2464-2465-2466-2467-2468-2469-2470-2471-2472-2473-2474-2475-2476-2477-2478-2479-2480-2481-2482-2483-2484-2485-2486-24



225 Axiomatik  
24 in 1879

So lesen wir bei einem begeisterten Bewunderer der modernen Axiomatik, dass für viele productivere Mathematiker die Geom. erst da anfängt, wo sie auf Axiome gebracht ist. (Willst. 5. 22. H. 114.) Und das scheint wirklich eine weit verbreitete Meinung zu sein, wenigstens ist unseres Wissens nie eine gegenteilige Ansicht vom Wesen d. G. öffentlich vertreten worden, u. das allgemeine Interesse an der Axiomatik ist unerschütterlich.

Was ist nun der Sinn dieser Forderung? Ist sie als Kodex für den Betrieb dessen, was "Geometrie" heißen soll, berechtigt? Muss nicht der Mathematiker stets auf die heute sogenannte Ökonomie des Denkens bedacht sein? Wie kommt es also, dass so Viele einen stürzenden Pfad der Königswege der Analysis vorziehen? Hat man einen solchen Überfluss an verfügbaren Kräften? Das sind die Fragen, deren Beantwortung wir noch versuchen wollen.

Somit wir sehen, hat diese Urteilsbildung (die grundsätzliche Ablehnung der Analysis) nun einen doppelten Grund. Zunächst einen historischen. Es war nämlich, wie es scheint, der Weg zur Geom., der durch die Analysis führt, sogar zu Gauss' Zeit

nicht recht gangbar. Erst der modernen Theorie der Irrationalzahlen<sup>124)</sup> den Forschungen von Dedekind, Weierstrass u. G. Cantor (um 1870) verdankt, was die Einsicht in die wahre Leistungsfähigkeit d. Analysis, nämlich in ihre Unabhängigkeit von aller Geometrie (z. B. Inhalt, Stetigkeit 7. 3. Bem. 2. 2. u. u.) So wäre also unser Begründungsart für Gauss u. noch für viele Späteren ein Zirkelchluss gewesen. Zuerstlich haben noch im Jahre 1887 R. Ball u. Cayley gegen die klassische Begründung der Nicht-Euklidische Geom. einen Einwand erhoben, der bei genügender Einsicht in die Tragweite der Analysis als illusorisch hätte erkannt werden müssen. Das aber die besprochenen Umwälzung nicht überall sofort in ihrer ganzen Bedeutung erkannt wurde, dass die einmal gebildeten Urteile ein gewisses Inerenzialität beweisen, kann nicht wundernehmen. Wir lesen sogar noch bei Poincaré: "Nemo se quæritur, dass die gewöhnliche Geom. von Widersprüchen frei ist. Woher kommt uns diese Gewissheit u. ist sie gerechtfertigt? Darin liegt eine Frage, welche ich hier nicht zu behandeln weiss, welche aber sehr interessant ist u. die ich nicht für unbeständig halte!" (W. u. H. 44.) Der Solcher schreibt, hatte

offenbar die angeführte Tatsache nicht gegenwärtig.  
Unsere These dürfte hiermit bewiesen sein.

129.

Indessen historisch-psychologische Gründe, die suggestiv Macht eines Faktums, die sich auf eine Reihe glänzender Namen berufen darf, erklären allein die besprochene Erscheinung wohl noch nicht. Es kommt als sachlicher Hauptgrund die Forderung hinzu, die Grundlage der (physischen) Geom. aus sogenannte Tatsachen der Anschauung abzuleiten. Der Fehler der von uns kritisierte Philosophie, die ebenfalls von der Ansch. aus zu einer eindeutig bestimmten Geom. gelangen wollte, wurde von den Mathematikern vermieden, aber die Forderung der "Anschaulichkeit" blieb als Kriterium eigenlich-geometrischer Urtheile best. Unter Anschaulichkeit scheint man freilich dabei nicht immer dasselbe zu verstehen. Einige nehmen das Wort im Sinne der Kant'schen Anschauung a priori, für Andere bedeutet es nur noch die Anschauung der abstrakten Begriffe an Figuren, die gezeichnet, oder an Modelle, die körperliche hergestellt werden können.

Aber beim Fortschreiten zu verwickelteren

Beziehungen lässt uns die "Raumansch." bald genug, in die Verwirklichung abstrakter Sätze durch Zeichnungen u. Modelle findet noch früher ihre Grenze. Im ganzen System d. 4. durchführbar war jene Forderung also nicht, u. so stellte man sie wenigstens, im Falle der Systeme physischer Geom. für die Grundlage. Diese Grundlage wurde für die weitere deductive Entwicklung über die Axiome, oder wie sie auch heißen, Postulate der Inhalt dieser Axiome galt (u. gilt) als anschaulich. Die Ablehnung der Analysis, die ganz gewiss nicht ansch. ist, als eines Ausgangspunktes, ergab sich als unvermeidliche Folgerung.

So heißt es bei Hilbert (Gr. d. 4.): "Die Geom. bedarf — ebenso wie die Arithmetik — zu ihrem folgerichtig Aufbau nur weniger einfacher Grundsätze. Die Grundsätze hießen Axiome der 4. Die Aufstellung der Axiome d. 4. u. die Erforschung ihres Zusammenhangs läuft auf die log. Analyse unserer räumlichen Ansch. hin aus." Und bei F. Schur (Gr. d. 4.) wird als Forderung eines wissenschaftl. Darstellung "der Grundlage d. 4." hingestellt: "Ein einfaches u. vollständig System von einander möglichst unabhängiger Tatsachen der Ansch.

od. (?) Axiome aufzustellen, aus denen die  $\mathcal{G}$  auf rein log. Wege hergeleitet werden kann. "Damit unsere Arbeit überschneidet den Name Geom. von derine, scheint es uns notwendig, dass diese Axiome od. Postulate das Resultat der einfachsten u. elementarsten Beobachtungen der natürlichen Figuren ausdrücke, aus denen alle Sätze der Geom. entstanden sind. Es dürfte also z. B. nicht erlaubt sein, ein Axiom an die Spitze zu stellen, das aussagt, der  $\mathbb{R}$  sei eine Zahlenmangelfaltigkeit, in der jedes Pt. durch drei Koordinaten bestimmt ist." 130

Was sollen wir zu alledem sagen? Gäbe es wirklich so etwas wie eine "logische" Analysis des  $\mathbb{R}$ -Ausch. Dann in der Tat würden auch wir, gleich Anderen, dem Thema der gesamten Schrift die Vorzugsstelle zugestehen müssen, die es im Vergleich zu anderen geom. Problemen mindestens dem Schein nach beansprucht. Aber in Wirklichkeit hat Hilbert kein  $\mathbb{R}$ -Ausch., sondern ein fertig vorgegebenes System abstrakter Sätze analysiert. Und auch die Forderung unseres zweiten Autors, dass wenigstens der Ausgangspunkt geometr. Untersuchungen im "Aussch. d.  $\mathbb{R}$ " liegen soll, scheint uns eine stark dogmatische Beigeschmack zu haben.

Es ist wahr, eine aus der Analysis geschöpfte "Geom." ist nicht  $\mathcal{G}$  im Sinne des Albertinums, auch nicht im Sinne von Gauss, Lobatschewskij, Bolyai, Bonnet, Steiner, v. Staudt. Aber auch die moderne Differentialgeom., die sich <sup>ebenfalls</sup> auf Gauss berufen darf, die höhere algebra.  $\mathcal{G}$  genügen dieser Forderung nicht. So entsprach auch die Mechanik eines Laگرانже nicht dem Geiste der klassischen Mech. So entspricht jedes methodische Fortschreiten nicht dem Geiste einer älteren Periode. Und warum der analytische Beginn irgend einer einzigen abstrakt. Geom. Wissenschaftlichkeit abgesprochen werden soll, ist vollends nicht einzusehen.

Ausschlagend für die Beurteilung der Sachlage scheint uns der Umstand zu sein, dass eine von der Analysis wirklich unabhängige  $\mathcal{G}$ , wie das antike Ideal sie eigentlich verlangen würde, sich als eine Utopie herausgestellt hat. Die sogenannten Axiome od. Postulate sind ja offenbar nichts anderes als Hypothesen; Hypothese wie andere, man sieht nicht, warum sie nicht so genannt werden. "Es gibt — es wird angenommen — Dinge, die diese od. jene Eigenschaft besitzen haben. Gibt es solche Dinge? Die Aussch. kann es nicht lehnen, u.

die Erf. insbesondere. Dies haben unsere Autoren sehr wohl erkannt; sie entwickeln daher aus ihren zunächst versuchsweise hingestellten Annahmen die Folgerungen soweit, bis sich zeigt, dass das konstruierte geom. Gebilde mit einem aus der Analysis schon bekannten begrifflich strukturell zusammenfällt. Die Forderungen des Logikers sind dann befriedigt; es ist bewiesen, was bewiesen werden kann. Aber hat man dann nicht ein zum Mindesten <sup>132</sup>unentbehrliche Mühe gemacht? Nach Ausführung logischer Klettkünste erster Range ist man glücklich da angelangt, wo man schon war. — — — — — Man will ein möglichst einfache Grundlage der Geom. will aber nicht die Analysis, die man doch nicht entbehren kann, in die für sich allein schon hinreicht. Möglichst wenige spezifisch-geom. "Axiome" will man, aber mit dem Minimum. Moll ist man nicht zufrieden. — — — — — Und so erreicht man nicht eine Verringerung, sondern eine Vermehrung der Voraussetzungen, die bei Aufbau dieses od. jenes Art von abstrakter Geom. gemacht werden. Gibt es wirklich kein dringenderen Aufgabe? <sup>133</sup>

s. 132. Randbemerk.

Versuche, auch noch die Widerspruchsfreiheit der

Analysis zu erweisen können wohl nicht gelinge. Die Analysis ist ein Zweig der reinen Logik; man kann aber <sup>freilich</sup> nicht mit Hilfe der Logik die Widerspruchsfreiheit über dieser Logik begründen wollen. Gibt man aber die Widerspruchsfreiheit ~~zu~~ der Logik zu, so steckt darin, soviel wir sehen, auch schon die Widerspruchsfreiheit d. Analysis. <sup>134</sup> s. Axiomatik - 1. 2. u. 3. Kap. Kant <sup>135</sup> 2. 2. Hilbert <sup>136</sup> 1. 1. 1. motto: Kant: "So fängt denn alle menschliche Erkenntnis mit Anschauungen an, geht von da zu Begriffen u. endet mit Ideen" s. <sup>137</sup> 1. 1. 2.

Worauf es auch hier ankommt, ist, ob die so genannten Tatsachen der Ansch. eine hinreichend deutliche Sprache reden, u. vor allem, ob die Ansch. u. nicht vielmehr die Erf. Wirklichkeitswert hat. — den Wert für die Erkenntnis der äusseren Welt, den Kant ihr zuschrieb u. den offenbar auch unsere Autoren für sie in Anspruch nehmen. Hieran kommt es an. Denn wenn man sich auf die Erf., nicht auf psychologische Momente, nicht auf eine wie immer näher zu bestimmende "Anschauung" beruft, so fällt jedes Grund zu Ablehnung der Analysis als eines Ausgangspunktes bei "geometrische"





Spekulationen ablehnt (Beschränkung der Wissenschaft auf das „Positive“; Forderung d. Immanenz); <sup>nach</sup> behält pragmatisch, wenn sie die Möglichkeit einer objektiven überhaupt denjenigen in der Wiss. ausschließt, die eine den Zwecken des Lebens dienende Einrichtung sieht. 29.

Study: Reflexives Denken: Reilenbildung  
N. 7, geom. Konstruktion: 7. 3. 4. 1. 1. 2. 3. in. 5. 1. 2. 3. Analysis: 3  
geom. Grundhypothese: 3. 2. 7. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20.

Hilberts Parallelisierung von Geom. u. Arithmetik können wir höchstens nicht für glücklich halten. Die Arithmetik u. alle Analysis kann der Geom. völlig entzogen, während das Umgekehrte nicht zutrifft.

S. 133. Randbemerkung.

Enriques, Probleme der Wissenschaft II. Heft.

Poincaré, Geom., 1. 2. 3. Mitre 2. 7. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

Dieser Behauptung verwehrt man nicht anzunehmen. Denn der Umstand, dass die geom. Sätze theoretisch durch Beziehungen zu Begriffen ausgedrückt werden, die in ihrer math. Darstellung als Symbole gelten müssen, genügt nicht, um ihnen einen konventionellen Willkür in Bezug auf die physische Welt zuzuschreiben, wo diese Symbole nicht angewanderte Verwirklichung finden in gewissen Gegenstände, die es durch sie dargestellt werden.

Um Zweifel zu beseitigen, hat Poincaré seine Behauptung durch einige geniale u. kunstvolle Konstruktionen zu stützen versucht. Es handelt sich darum, physikalische Bedingungen zu erdenken, unter denen derselbe R., in dem wir leben, Eigenschaften zu besitzen scheinen würde, die von denen unseres Geom. abweichen. Dabei dazu genügt es anzunehmen, dass die Körper bei ihrer Bewegung nach gewisse Gesetze deformiert werden, z. B. durch eine Temperaturveränderung, die von ihrer Lage abhängt; dass das Licht

sich nicht geradlinig ausbreitet, sondern dem Einfluss eines brechenden Mediums unterworfen wäre, das in geeigneter Weise in einem R-Feld verteilt wäre, usw.

Eine genauere Prüfung dieser Beispiele jedoch zeigt, dass die angedeutete Hypothese, sofern sie im Hinblick auf die Relativität unseres Erkenntnis positiv gedeutet werden, eine wirklich Veränderung des R einschliesse, d. h. der mit diesem Name bezeichnete Beziehung.

266

In unserer Welt sind die Körper messbar in Bezug aufeinander dank der Möglichkeit, sie unabhängig von der Veränderung ihres physikalischen Zustandes zu bewegen; die Erwärmung, die Abkühlung, der Druck verändern allerdings die für die Messung erforderliche Vergleichselemente, aber diese Veränderung ist zufällig in Bezug auf die gegenseitige Lage der Körper, deshalb braucht sich die Geom. nicht um sie zu kümmern.

In der von Poincaré erdachte Welt wäre dagegen die Temperatur eine geom. Eigenschaft, systematisch jedes Körper (unserer Organis-

mus eingeschlossen) die seiner Stelle entsprechende Temperatur besäße; da es dann aber nicht mehr möglich wäre, verschiedenen warmen Körper in Berührung zu bringen u. es ihre Dimensionen zu vergleichen, es könnte man nicht mehr sagen, dass "die Körper sich mit wachsender Temperatur ausdehnen". Demnach wäre in der betrachteten Welt die  $H$  in Wirklichkeit u. nicht nur scheinbar von der unsrigen verschieden.

Die entgegengesetzte Behauptung betrachtet die Wirklichkeit als etwas der Erachtung in einem transzendenten Sinne Gegenüberstehendes. Oder anders ausgedrückt: es widerspricht den Voraussetzungen der Hypothese, wenn man durch eine Erschließung in ganz Welt einen Richters einführt, der nach unserem Bilde geschaffen ist u. sich den dort geltenden Gesetzen nicht unterwirft!

Eine entsprechende Kritik lässt sich an die Hypothese knüpfen, dass das Licht sich nicht geradlinig bewegt.

Nicht ist von einem abstrakten Gesichtspunkt aus leichter, als eine solche Hypothese anzunehmen! Wird sie nicht in der Tat gemä-



den Brechungsgesetzen in jedem beliebigen heterogenen Medium erfüllt!

Aber die Heterogenität, die durch geeignete physikalische Experimente festgestellt werden kann, ist wiederum etwas für die Erklärung zufälliges. Die Bahnen der Lichtstrahlen können in diesem Falle geändert werden, wenn man die Lage des Mediums selbst im Felde unserer Beobachtung ändert. Was soll dagegen ein heterogenes Medium mit einer festen räumlichen Verteilung bedeuten, etwa ein Äther, von verschiedenen Struktur, dessen Teile bei der Bewegung der Körper sich nicht gegeneinander bewegen? Würde man durch diese Hypothese nicht ein vor der unsrige, die wir als homogen erstehen, verschiedene geom. Welt schaffen?

Um diesen Fragen, zu <sup>tiefen</sup> ergründen, ist es notwendig, sich die physikal. Bedeutung der "geraden Linie" klar zu machen.

Der Begr. d. Gerade ergibt sich aus der Untersuchung verschiedenartiger Erscheinung:

1. aus der Bewegung starrer Körper, bei der die Gerade als Achse auftritt, deren Punkte bei einer Rotation unbewegt bleiben (von

hier aus dann als gespannte Fäden usw.);

2. aus der der Dynamik der Massenpunkte, wo die Gerade als Bahn eines Punktes erscheint, dessen Bewegung von den umgebenden Körpern nicht beeinflusst wird;

3. aus der der Optik in allgemein der Strahlungserscheinungen, wo die Gerade als Strahl od. Symmetrieachse der Erscheinung in einem beliebigen Medium auftritt, das mittels bestimmter vergleichender Experimente als homogen erkannt ist.

Prinzipiell dienen die erste u. die dritte Eigenschaft dazu, die Gerade in bezug auf unsere Gesicht- u. Tasterinn. zu definieren, während die zweite vielleicht dazu verwendet werden könnte, sie in bezug auf den Muskelsinn zu definieren.

Man erlaube diese Definitionen, eine wie die andere, auf ein ein geom. System zu gründen; im besondere kann es eine (metrische) Geom. der starren Körper u. eine optische (od. projektive) G. geben;

Der Übereinstimmung dieser verschiedene Art, die Gerade zu definieren, ist eine Grundtatsache, die uns erlaubt, diese verschiedene Erscheinungen unter einzige geom. Darstellung zu subsumieren.

auf diese lassen sich dann auch noch andere bekannte Erscheinungen in speciell die dynamische zurückführen.

Die Grundlage dieser Darstellung ist der Umstand, dass gewisse Bedingungen der Homogenität des Mediums zu einer Symmetrie der Ercheinung in bezug auf gewisse Linien führen, in einer solchen Abhängigkeitsbeziehung besteht der eigentliche physik. Sinn der Homogenität des R.

Nicht hindert uns, uns vorzustellen, dass die vielfältige Übereinstimmung, deren Gesamtheit die besagte Symmetrie ausmacht, nicht wirklich bestünde, wenn man die Tatsachen durch genauere Experimente untersucht; aber in einem solchen Falle würde es nicht sich um etwas ganz anderes als um eine einfache Verbesserung der Theorie des Lichts handeln; denn die Gesamtheit der Tatsachen, die durch die Hypothese der Gerade bezeichnet wurde, würde dadurch bei dieser Stufe der Approximation als falsch erwiesen sein.

269

Die direkte Verifikation einer geom. Eigenschaft kann in jedem einzelnen Falle eine gewisse / Grad

der Approximation nicht überschreite. Derselbe kann a priori in Beziehung gesetzt werden zu der Grenze, die wir bereits für die Unwirklichkeit geom. Begriffe erkannt haben. Wenn aber in Frage stehende Eigenschaft als eine Hypothese betrachtet wird, die von einfacher Theorie ihre Bedingungen abhängt, so bietet sich für die Verifikation so viele indirekte Wege, dass ihrer Genauigkeit a priori gar keine Grenze mehr gesetzt werden kann.

In diesem Sinne erscheint die Geometrie als ein System von allgemeinen Voraussetzungen, deren Bedeutung in den Tatsachen liegt, die sich aus ihnen ableiten lassen, in die daher von einer unbegrenzt fortsetzbaren Reihe von Experimenten abhängt.

274

Die Genauigkeit der Geom. erhält nun also eine genau bestimmte Bedeutung, sie ist eine in jedem Moment des wissenschaftl. Fortschritts durch die gemachte Erfahrungen bis zu einem gewissen Grade verifizierte Hypothese, die die Ergebnisse anderer möglicher Versuche vorwegnimmt. Und es ist klar, dass diese Hypothese niemals endgültig bewiesen werden kann, da die Reihe der möglichen Versuche unbegrenzt ist. Nichts hindert jedoch, dass sie sich als richtig erwiesen wird.

Jedenfalls gelingt es nicht, die hier sich erhebende Zweifel anders zu beheben, als indem man zeigt, dass man eine entgegengesetzte Hypothese aufstellen kann, die nicht weniger bestimmt u. widerspruchsfrei ist als die gewöhnliche Geom.

Dieser Beweis wurde durch die Konstruktion der nicht-eukl. G. geliefert, welche zeigte, dass man, ohne die Voraussetzungen, auf denen die Definition der geom. Grundbegriffe beruht, zur Aufstellung einer Hypothese aufstellen kann, die mit der Genauigkeit der gewöhnlichen G. unvereinbar sind, die sich aber in einer wirklichem u. eigentlichen <sup>275</sup> von der unsrigen verschiedenen G. ausdrücken lassen

276

Der Bes. des R. in seiner math. Fassung stellt die Gesamtheit der (geom.) Beziehungen zu den Punkten dar, abgesehen von den besonderen Empfindungen, die sich an das Bild der Punkte knüpfen. Der R. wird dabei gedacht als eine Mannigfaltigkeit von irgend welcher Elementarart, deren der Name "Punkte" gegeben wird, weil sie in gewissen Ordnungsbeziehungen stehen die geeignet sind, mit grosser Annäherung die Lagebeziehungen darzustellen, die zu sehr kleinen

Körpern (physischen Punkten) stattfinden

276

Die Begründer der nicht-eukl. G. waren es christlich Käthe, indem sie ihre abstrakt. Entwicklungen der Bedeutung von wirklichen Hypothesen zuschrieben, aber sie verdrängten nicht den oben erwähnten Zadel (Z. 3. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.) Mathematiker u. Philosophen, stellte sie sich eine Frage, die den glänzenden Triumph des kritischen Geistes bedeutet, u. als Philosophen waren sie Positivisten im besten Sinne, indem sie die Antwort auf ihre Zweifel in den Zadel suchten u. indem sie diese ohne Vorurteil prüften

286

Während Kaul sich bemühte, den psychol. Charakter des R. aus d. zu beweisen u. ihre physikal. Sinn zu zerstören, wandte Gauss seine Aufmerksamkeit der genauesten Ausmessung der Winkel des geodätischen Dreiecks Brocke, Hohen Hagen, Inzelsberg zu, um aus ihr innerhalb der auf der Erde in Betracht kommenden Genauigkeitsgränze eine experimentelle Bestätigung der Geom. zu entnehmen, <sup>1827</sup> und die dabei beobachtete die Parallaxe der entferntesten Sterne, ob bei solcher Grössenordnung die gewöhnliche Parallelenthese noch gültig thut od. ob schon Schwerkraft gewirkt hatte; man sei durch eine nichtentdeckte Ursache hervor

Ursache hervor

indem er diesen G. den Name des „ast. ab.“ gab. 187  
 Man ergebe die genauesten Messungen an irdisch.  
 Dreiecke, wie den von Gauss gemessene innerhalb  
 der Beobachtungsgenauigkeit, eine Bestätigung der  
 eukl. G. Daraus geht hervor, dass K (Klein-gemess.)  
 in bezug auf irdische Dimensionen eine gewisse Gültigk.  
 über-schreitet. 188

Aber die Beobachtung sagt uns, dass die Parallaxe  
 der Sterne alle positiv od. merklich messb. sind. 189  
 Demnach kann der physik. R. als euklidisch  
 betrachtet werden, mit einer Annäherung, die  
 die derzeitige Genauigkeitsgrenze unserer vollkom-  
 menst Instrumente überschreitet.

Dies ist die Schlussfolgerung Lobatschewskys,  
 die sich in drei Worte zusammenfassen lässt:  
 Nach dem augenblicklichen Stand unserer  
 Kenntnisse ist der phys. R. als euklidisch zu be-  
 trachten. 190

Aber die Richtigkeit nicht die Behauptung,  
 die Sache könne nicht anders se. 191

Allerdings stehen wir trotz der Konstruktion eines  
 adäquaten Begriffssystems vor der psychol. Unmöglichkeit,  
 uns die wirkliche Erscheinung in einer von der ge-

wöhnliche Ansch. abweichenden räumlichen Form  
 vorzustellen. Aber dieses Gefühl der Notwendigkeit,  
 das unser R.-ausch begleitet, sagt uns gar nicht  
 über die Konstruktion des R. selbst, sondern als die  
 physik. Wirklichkeit im Kern. 192  
 Weise verpflichtet ist, sich nach der Konst. zu richten, die wir, <sup>uns</sup> vor ihr  
 machen.

Um die Frage zu erklären, hat Gauss einen Be-  
 weisgrund angeführt, der später von Helmholtz u. von  
 Clifford wieder aufgenommen wurde, ungewöhnlich  
 unter dem Namen des erste dieser beiden Philosophen  
 geht. (Z. P. - i. E. - 23 76 - 191) ... 293  
 3 7 20 1 2 - 1 )

Wir erkennen also, als unmittelbar durch den  
 Gesichtsraum gegebene der komplex von geom. Eigen-  
 schaften der Objekte, die sich als Eigenschaften  
 der Projektionen ausdrücken u. nicht voneinander  
 besonders Lage u. Entfernung von der Auge  
 abhängen. Die Längen od. Entfernung von  
 der Auge abhängen kommen darunter nicht  
 vor, u. müssen als mittelbar durch Erfahrung  
 festgest. angesehen werden, nämlich durch  
 die Verbindung mit den Zust. u. Muskelempfind.  
 u. nicht durch den Gesichts- <sup>wahr</sup>nehmungen,

die sich aus einer Ortsveränderung des Beobachters ergeben.

Aber diese Ergebnisse können nur von demjenigen richtig verstanden werden, der die Grundbegriffe der modernen Geom. beherrscht! Gerade auf der Unkenntnis dieser Begriffe beruht die uneinzigere Deduktion, mit dem sich wohl immer einige Philosophen abmühen.

Bei der Unmöglichkeit eines vergleichenden Maßstabs in d. Entfernungen zw. Punkten u. folglich in d. Größe der Objekte sollte man meinen, dass der unmittelbare Inhalt des Gesichtsinnes alle geom. Vorstellungen fremd seien.

Dieser Irrtum kann nur durch ein Studium der proj. Geom. beseitigt werden, wie an sich im vergangenen Jahrhundert seit Poncelet, Möbius u. Steiner entwickelt hat, bis sie ihre endgültige Darstellung in dem Lehrbuch von Staudt erhielt.

Nur so kann man sich einen Beg. von einer Wissenschaft machen, die die zw. den Elementar-Begriffen<sup>217</sup> der Geraden u. der Ebene bestehende qualitative Beziehungen untersucht, die gänzlich unabhängig sind von den quantitativen (od.

metrischen) Beziehungen, die in den Entfernungsbeziehungen liegen, wenngleich sie meistens durch diese angebracht werden.

Nun zeichnen sich die Gerade u. die Ebene durch ihre optischen Eigenschaften für die Gesichtsinne aus: die Gerade weist ihre Netzhautbilder Gerade u. die Ebene vermöge ihrer Beziehung zu der Gerade, die sich als eine projektive Beziehung zw. den Bildern darstellt.

Die Behauptung, dass die unmittelbaren Daten des Gesichtsinnes nur die Vorstellungen der Geraden u. der Ebene vermitteln, bedeutet, dass der Gesichtsinne nur die konstruktiven Elemente der projektiven Geom. liefert.

Bei den Untersuchungen in d. Principien d. Geom. kann man drei Richtungen unterscheiden: die elementare, die metrische u. die projektive.

Aber die proj. u. die met. G. haben eine gemeinsame qualitative Substanz in der Gesamtheit der Beziehung zu den allgemeinsten Begriffen der Linie u. der Fläche, die eine mehrdimensionale stetige Mannigfaltigkeit charakterisieren. Ohne dass die Vorstellungen der Geraden, der Ebene, der Kongruenz von irgendwie Linien kämen, geben jene Begriffe

Anlass zu einem Zweige d. Geom., den man theo-  
retisch Ausdehnung od. des Kontinuums od. Analysis  
ritus nennt, der aber mit der reinen Methode  
noch nicht sehr weit entwickelt ist. 324

Wir können jetzt erkennen, dass diese beiden  
Zweige (meta-phys. & metris.) den beiden Gruppe  
von Empfindungen, die Tasts-Muskelerpfindung  
u. den Gesichtserpfindung entsprechen.  
Und wir können auch hinzufügen, dass die  
allgemeine Tasts-Muskelerpfindung, die unabhängig  
von der Specialisirung durch das Tasts auch  
die Grundlage der Hautempfindbarkeit ist,  
bereits die geom. Vorstellung liefert, die sich  
auf die Theorie des Kontinuums bezieht, d. h.  
die Vorstellung d. Linie, Fläche usw.; dagegen  
ist die Schätzung d. Entfernungen u. damit  
eine genaue Vorst. d. Kongruenz od. geom.  
Gleichheit einem besondere Bezugsorgan  
des Tastsinnes zu verdanken.

Diese Ergebnisse kann man schematisch  
folgendermaßen aussprechen:

Die drei Gruppen von Vorstellungen, die  
a die Begriffe antreffen, welche der Theorie  
des Kontinuums (Analysis ritus), der metrisch

u. der phys. Geom. zugehörige Länge, Fläche psychol.  
mit drei Empfindungsgruppe zusammen, nämlich  
bzw. mit der allgemeine Tasts-Muskelerpfindung,  
der spezielle Tasts-Muskelerpfindung u. die Gesichtserp-  
findung. 323

Poincaré, Die neue Mechanik, Vortrag auf im. Wissensch. Ch. d. Acad. zu Paris  
Himmel u. Erde, XII. 3. 97-116.

"Lumen" 7. 11. 11. Hammarion. 5. 11.

Ein Körper bewegt sich vom Ruhezustand aus unter der Einwirkung einer Kraft u. erhält durch dieselbe in der ersten Sekunde die Geschwindigkeit  $v$ . Was wird nun geschehen, wenn die Kraft während einer zweiten Sek. weiter wirkt? Um uns eine Vorstellung zu machen, denken wir uns einen Beobachter, welcher dieselbe Geschwindigkeit  $v$  besitzt, u. sich in Ruhe wähnt. Für ihn war der beobachtete Körper zu Anfang der zweiten Sek. in Ruhe, weil dieser Geschwind. dieselbe wie wir die des Beobachters ist. Also die sichtbare Beweg. des Körpers wird für diesen Beobachter während der zweiten Sek. dieselbe sein, was er für uns während der ersten Sek. war: wir haben daraus geschlossen, dass die Gesch. d. Körpers sich während dieser zweiten Sek. verdoppelt.

Aber dieser Schluss war nur statthaft, weil wir die Zeit als absolut betrachteten, weil wir annahmen, dass er in Beweg. befindlicher Beobachter ein so zählt wie er in Ruhe befindlich

Probakti. Wir sahe aber selber, dass dies unzulässig ist. -- Wenn aber ein ruhender u. i. bewegter Probakti die Zeiten verschiedene bewerte, da er würde er auch die Geschwindigkeiten verschiedene bewerte, u. wenn wir alle diese Umstände in Erwägung ziehen, so würde wir auf Grund der früheren Folgerung sehen, dass die Geschwindigkeit am Ende der zweiten Sek. nicht  $2v$  sein wird. 106

Darin besteht also das Wissen der neueren Mechanik. Keine Geschwindigkeit im Weltall kann grösser werden als die Geschwindigkeit des Lichtes; die Lichtgeschwindigkeit bildet eine unübersteigliche Schranke.

Der "Lumen" von Flammarion ist nicht mehr möglich. 108

Vergrössere wir nicht, dass nach der neuen Mechanik die Zeit nicht mehr als absolute Grösse betrachtet werden kann, dass die in Beweg. befindliche Beobachter sie nicht immer so einschätzt wie wir, dass er infolgedessen die Geschwindigkeiten nicht so rechnet wie wir. Derselben Geschwindigkeitsunterschied, welcher ihm wie 200 000 km erscheint, würden wir etwa bei unserem Art die Zeit zu rechnen, nur zu 50 000 km

Veranschlage, so dass also die totale Geschwindigkeit für uns nur 25 000 km wäre. 108

Die Gesetze der Mechanik sind zum grössten Teil konventionell. Darum ist "Kraft" ein "Etwas", was uns die Erf. nicht direkt fassen lehrt. Was die Erf. uns lehrt, ist, dass unter dem od. dem Umstände der od. des Körpers die od. die Beweg. annimmt. Aber diesen Weg  $S$  ab, welchen wir aus Erf. entnehmen, behalte wir als solche nicht bei, sondern zerlege wir in zwei andere. Wir sage: 1. unter dem od. dem Umstände entsteht die u. die Kraft, 2. bei Anwesenheit der u. der Kraft nimmt die u. der Körper die u. die Beweg. an. Das erste dieser Gesetze nennen wir ein physikal. Gesetz; das zweite ein mechanisches. Was habe also kinematisch einen Vermittelnden Faktor empfunden, der eine Erfindung unseres Subtiltates ist, u. die wir "Kraft" genannt habe. Diesen Faktor hätten wir in verschiedenen Weisen ausdrücken können, u. dann hätten sich auch die Zerlegung der Erfahrungstatsache u. ein physikalisches u. ein mechanisches Gesetz verschieden gestaltet. Die Gesetze der Mechanik sind also



in etwas willkürlich, u. wir erwähnen sie so bequem  
 wie möglich. Die alten Gesetze der Mechanik,  
 die viel einfacher als die neuen sind, sind  
 lange Zeit die bequemsten gewesen. Angesichts  
 der neuen Tatsache u. insbesondere mit Rück-  
 sicht auf das Pr. d. Rel. hätten wir sie bei-  
 behalten können. Der andere Teil unseres Satzes  
 nämlich das physik. Gesetz, würde dann aber  
 eine unzulässige Komplikation annehmen,  
 u. aus diesen Gründe kann man die Gesetze  
 der neuen Mechanik für bequemer halten,  
 wo sie auch weniger einfach sind, als die  
 der alten Mechanik. Man kann in eigent-  
 licher Sinne nicht sagen, dass sie eine  
 höheren Grad von Wahrheit besitzen. In-  
 desse halten wir fest, dass bei den ge-  
 wöhnlichen Anwendungen, bei denen man  
 es mit mässigen Geschwindigkeiten zu  
 tun habe, die alten mech. Gesetze immer  
 die bequemere bleiben werden. Man soll  
 daher die alte Gesetze nicht schlecht machen,  
 man soll sie vielmehr weiter lehren, wenn  
 nicht ausschließlich, so wenigstens neben  
 den neuen Gesetze. 116.

Bisher haben wir nur von der Mechanik ge-  
 sprochen, u. damit kamen wir gut vorwärts.  
 Leider umfasst man aber die Mechanik nicht  
 die ganze Physik: es wird jetzt nötig sein,  
 z.B. auch die Elektrizität, zunächst aber  
 die Optik in dem Bereich unserer Betrachtungen  
 zu ziehen. Hier beginnt die Schwierigkeit. 102.

~~Kruskal, Philosophie & Arithmetik I~~

~~Sage ich z. B. die Anzahl dieser Äpfel vier,  
so meine ich <sup>nicht</sup> sach, den Umstand, dass bei  
irgendeiner Anordnung derselben das letzte  
Element das vierte; sondern eben dass es  
in  $e_1, e_2, e_3, e_4$  Äpfel vorhanden sind für  
den wahren Anzahlbegriff, der von einer Anord-  
nung gezählter Äpfel nichts enthält, ist  
natürlich das oben erwähnte Theorem (z.  
 $1/2 \cdot 1/2 = 1/4$ ) ebenso belanglos, wie es vom Standp.  
der Helmholtz'schen Definit. unverständlich ist  
(Helm. "1/2 1/2 1/2 1/2 1/2", S. 174) 196~~

~~Die Quelle der <sup>Helmholtz'schen</sup> merkwürdigen Missverständnisse,  
in welche die beiden berühmten Forscher (wie  
vordem Berkeley) verfallen sind, liegt nun in der  
Missdeutung der symbolische Zählungsprozess,  
den wir ohnwegohheitsmässig über 197~~

~~An den äusserlich u. blinden Prozess habe  
jeder grosse Mathematiker sich nun gehalten,  
seine symbol. Punkte erkannt u. solche  
u. Sache verwechselt. 198~~

Rückert, Das Genie, die Intellekt u. die Genie-Bewertungen  
 zur Logik des Zahlbegriffs (Logos II. 1.)  
 I. Ästhet. u. Problemstellung

Antiblogische Strömungen 1. Psychologismus 2. Biologismus (Bagnatonismus) 3. log. Mathematizismus  
 das ablogische Wesen 2. ganzgen. endliche Zahlen  
 2. 7. 2. Genie

Zwei Theorien d. Zahl

1. empirische Theorie  $R \cdot 2 \cdot 4 = 8; 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 17 = 32$   
 $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$  reale Dinge  $2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$   
 abstrakt allgem. Begriff  $+ 7 \cdot 2 = 14$  Mill'  $10 \cdot 1 = 10$   $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$   
 $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   
 Ableitung: 1. 3. 2. 1.  $1 \cdot 1 = 1$  (Pfefferkuchen od. Tüchel  
 Kuchenarithmetik, Rückert: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)

2. rationalistische Theorie die Wahrheit unterstellt  
 nicht der Herrschaft d. Entwicklung od. der Veränderung  
 (10)

K. 2. Wirklichkeit 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10.  $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   
 $1 \cdot 1 = 1$   $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   $2 \cdot 2 = 4$   $1 \cdot 1 = 1$   
 4. 3. transzendentes Empirismus: 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. (10)

II Der rein log. Gegenstand  
 Das Genie = Identität, denkbar umfassendste  
 rein log. Gegenst. Minimieren von Form u. Inhalt  
 Form der Ident. + Inhalt. überhaupt.  
 Andersheit = 5. 1.

Wir dürfen nicht mit dem Eine für sich alle die Logik beginnen wollen. Es muss vielmehr schon der rein log. "Anfang" od. auch die "Körper" des Eine u. das Andere sein, da es keine Gegenseitigkeit gibt, wenn es nicht das Eine u. das Andere gibt u. das Subjekt logisch zu denken gar nicht anfangen kann, wenn es nicht schon bei seinem ersten Schritt "mit einem Schlage" das Eine u. das Andere denkt. (37)

- 1. log. u. 2. log. log. Priorität + 2. log. Äquivalenz, das methodische Prinzip bringt das Denken erst in "Bewegung". (37) Es ist u. d. Einheit, Es ist u. d. 2. u. d. 3. u. d. 4. u. d. 5. u. d. 6. u. d. 7. u. d. 8. u. d. 9. u. d. 10. u. d. 11. u. d. 12. u. d. 13. u. d. 14. u. d. 15. u. d. 16. u. d. 17. u. d. 18. u. d. 19. u. d. 20. u. d. 21. u. d. 22. u. d. 23. u. d. 24. u. d. 25. u. d. 26. u. d. 27. u. d. 28. u. d. 29. u. d. 30. u. d. 31. u. d. 32. u. d. 33. u. d. 34. u. d. 35. u. d. 36. u. d. 37. u. d. 38. u. d. 39. u. d. 40. u. d. 41. u. d. 42. u. d. 43. u. d. 44. u. d. 45. u. d. 46. u. d. 47. u. d. 48. u. d. 49. u. d. 50. u. d. 51. u. d. 52. u. d. 53. u. d. 54. u. d. 55. u. d. 56. u. d. 57. u. d. 58. u. d. 59. u. d. 60. u. d. 61. u. d. 62. u. d. 63. u. d. 64. u. d. 65. u. d. 66. u. d. 67. u. d. 68. u. d. 69. u. d. 70. u. d. 71. u. d. 72. u. d. 73. u. d. 74. u. d. 75. u. d. 76. u. d. 77. u. d. 78. u. d. 79. u. d. 80. u. d. 81. u. d. 82. u. d. 83. u. d. 84. u. d. 85. u. d. 86. u. d. 87. u. d. 88. u. d. 89. u. d. 90. u. d. 91. u. d. 92. u. d. 93. u. d. 94. u. d. 95. u. d. 96. u. d. 97. u. d. 98. u. d. 99. u. d. 100.

Thesis, Metathesis = 2. u. 3. u. 4. u. 5. u. 6. u. 7. u. 8. u. 9. u. 10. u. 11. u. 12. u. 13. u. 14. u. 15. u. 16. u. 17. u. 18. u. 19. u. 20. u. 21. u. 22. u. 23. u. 24. u. 25. u. 26. u. 27. u. 28. u. 29. u. 30. u. 31. u. 32. u. 33. u. 34. u. 35. u. 36. u. 37. u. 38. u. 39. u. 40. u. 41. u. 42. u. 43. u. 44. u. 45. u. 46. u. 47. u. 48. u. 49. u. 50. u. 51. u. 52. u. 53. u. 54. u. 55. u. 56. u. 57. u. 58. u. 59. u. 60. u. 61. u. 62. u. 63. u. 64. u. 65. u. 66. u. 67. u. 68. u. 69. u. 70. u. 71. u. 72. u. 73. u. 74. u. 75. u. 76. u. 77. u. 78. u. 79. u. 80. u. 81. u. 82. u. 83. u. 84. u. 85. u. 86. u. 87. u. 88. u. 89. u. 90. u. 91. u. 92. u. 93. u. 94. u. 95. u. 96. u. 97. u. 98. u. 99. u. 100.

III. Bei Gleichung die Addition  
Wir müssen also vom rein log. Geg. sagen, dass es einerseits aus dem Eine u. dem Andre, anderseits aber nicht nur aus dem Eine u. dem Andre, sondern auch aus der Einheit dieses Man-

nigfaltigen besteht, von dem das Eine sich als das Einfache, nicht für sich bestehende Moment am Geg. unterscheidet. Anst. in diesen sprachl. auseinandergelagerten Komplex von nacheinander genannte Momente, die für sich betrachtet keinen Bestand haben, besitzen wir dem dem einheitliche Geg. überhaupt, den rein log. Geg. od. dem log. Ursprünge (38)

... das Geg. die Zahl Eins sein kann, von dem sich sagen lässt, dass es eines andern Eins gleich sei. (40)

1 = 1. 2 = 2. 3 = 3. 4 = 4. 5 = 5. 6 = 6. 7 = 7. 8 = 8. 9 = 9. 10 = 10. 11 = 11. 12 = 12. 13 = 13. 14 = 14. 15 = 15. 16 = 16. 17 = 17. 18 = 18. 19 = 19. 20 = 20. 21 = 21. 22 = 22. 23 = 23. 24 = 24. 25 = 25. 26 = 26. 27 = 27. 28 = 28. 29 = 29. 30 = 30. 31 = 31. 32 = 32. 33 = 33. 34 = 34. 35 = 35. 36 = 36. 37 = 37. 38 = 38. 39 = 39. 40 = 40. 41 = 41. 42 = 42. 43 = 43. 44 = 44. 45 = 45. 46 = 46. 47 = 47. 48 = 48. 49 = 49. 50 = 50. 51 = 51. 52 = 52. 53 = 53. 54 = 54. 55 = 55. 56 = 56. 57 = 57. 58 = 58. 59 = 59. 60 = 60. 61 = 61. 62 = 62. 63 = 63. 64 = 64. 65 = 65. 66 = 66. 67 = 67. 68 = 68. 69 = 69. 70 = 70. 71 = 71. 72 = 72. 73 = 73. 74 = 74. 75 = 75. 76 = 76. 77 = 77. 78 = 78. 79 = 79. 80 = 80. 81 = 81. 82 = 82. 83 = 83. 84 = 84. 85 = 85. 86 = 86. 87 = 87. 88 = 88. 89 = 89. 90 = 90. 91 = 91. 92 = 92. 93 = 93. 94 = 94. 95 = 95. 96 = 96. 97 = 97. 98 = 98. 99 = 99. 100 = 100.

Jede Unterscheidung bedarf eines Mittels zur Verschiedenheit eines Mediums, an diese Verschieden-



ein anderes ausspricht, sieht nur mit Wort  
 aber nicht der Sache nach Etwas zu dem  
 Eine u. dem Andern hinzu Gerade also  
 weicht der Schritt vom E. zum A. "derselbe"  
 ist wie der zum noch Andern, gibbes hier  
 keine Reihe. Das E. u. das A. ist schon  
 das Ganze" der log. Mannigf. Darüber  
 kommen wir mit der Wiederholung des  
 Wortes "noch", das wir selbstverständlich  
 beliebig oft aussprechen od. niederschreiben  
 können, nicht hinaus. Das Andere ist  
 bereits das "Letzte". Mit dem Wort "noch"  
 "Anderes" ist nicht "gesetzt". Es kann nur  
 das E. u. das A. geben, solange wir in  
 rein logische bleib. Jedes Hinsetzen von  
 noch ein A. das aus dem Eine  
 u. dem A. von "Wahrheit etwas A. als  
 das Eine u. das A., also den Anfang einer  
 Reihe macht, bedeutet schon ein Ueber-  
 schreiten der log. Sphäre. In ihr  
 ist für ein Reihe kein "Platz" (53)

Das E. u. das A. aber kann ja nicht einmal  
 in dem Sinne als ein Reihe gelten, dass das E.  
 das log. D. höher als das A. ist, so dass also

Konzeptions" od. wahren Denk geh. K.  
 Was "ist", muss in mir schon eine  
 besondere Inhalt od. ein Inhalt der  
 Inhalts haben, u. dies Seiende ist da  
 entweder, wie die Zahl, e. ideal,  
 od. wie der Physisch u. das Psych.,  
 e. real Seiendes, e. wirklich od.  
 e. unwirklich, aber in jedem Fall  
 in einer geltenden Form u. besondere  
 Inhalt bestanden der Seiend, 49,  
 77

Selbstverständl. kann auch die Form  
 "Sei" selbst nicht sei od. seiend gewant  
 werden, sondern sie gehört, wie jede  
 Form, nur zur Reihe 77

das logische — das Geltend  
 der Math. — das ideal Seiend  
 Form  
 besondere Form, Kat. Inhalt überhaupt. Atwas Form  
 Form der Form Name Form (Geltend) Inhalt überhaupt  
 Inhalt des Inhalts

s. 44, 57, 77 Das, was is gestattet,  
 das Eine von dem Andern zu unterscheiden,  
 können wir daher auch das log.  
 A. u. Dementprechend das Eine u. das

die log. Formen es sind. Man muss im Idealen  
durchaus Unterscheid zu machen tunen,  
d. h. das Logische u. das Mathematisch  
als zwei verschiedene Aste des Universalien  
den Realen gegenübergestellt 77.

Folge 1. math. 2. Log. 3. gültig  
Von rein Logische als dem im angegebene  
Sinn nur Formale lässt sich in keine  
Weise sagen, dass es ist. Auch aus  
dieser Grund muss es jeder Quant.  
Bedeutung entzogen werden. Das Wesen  
der Form geht vielmehr vollständig in  
Geltung auf, od. sie ist ein theoret.  
"Werk", das absolut gilt; wie die  
Wahrheit selbst, u. liegt für das S.  
daher im Bereich des von jedem S. un-  
abhängigen od. konstanten "Sollens".  
Auch der "Inhalt überhaupt" gehört  
nicht zum Sein, sondern zu der  
logische, d. h. gültigen Voraussetzungen  
d. Gegenstands überhaupt, zu den  
formalen Bedingungen des nicht Seins,  
sondern nur geltend theoret. Wesen  
des Gegenständlichkeit, ohne die es

1/2 + 7  
Zahl selbst, Begriff d. 2, Zahlstelle  
1 2 3 4 5 = 257 7 7

Monismus: Monas. All-Ein-Ein-  
Gegenständlichkeit, 1. = 2; Ein-  
Coincidentia oppositorum 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10,  
Einheit in Quantum = 2 in Monismus  
2. 2. Dualismus = 2 in Heteronismus 7  
4. Logik u. Mathematik

die Logik fast auch wenn sie so mit der  
bevorzogen Gegenstände zu tun hat,  
immer nur, durch welche Form u. durch  
welche Inhalt sie zu Gegenstände werden,  
u. worauf daher die Gegenständlichkeit  
der betreffenden Einzeldisziplin gegriindet  
ist. 75.

Der rein log. Geg., der außer der Form  
nur "Inhalt" überhaupt hat, ist  
im Vergleich zu allen Gegenstände  
d. Eigenschaft "leer". Dennoch  
ist es auch falsch, die Zahlen im dem  
Sinn "Begriffe" zu nennen, in der





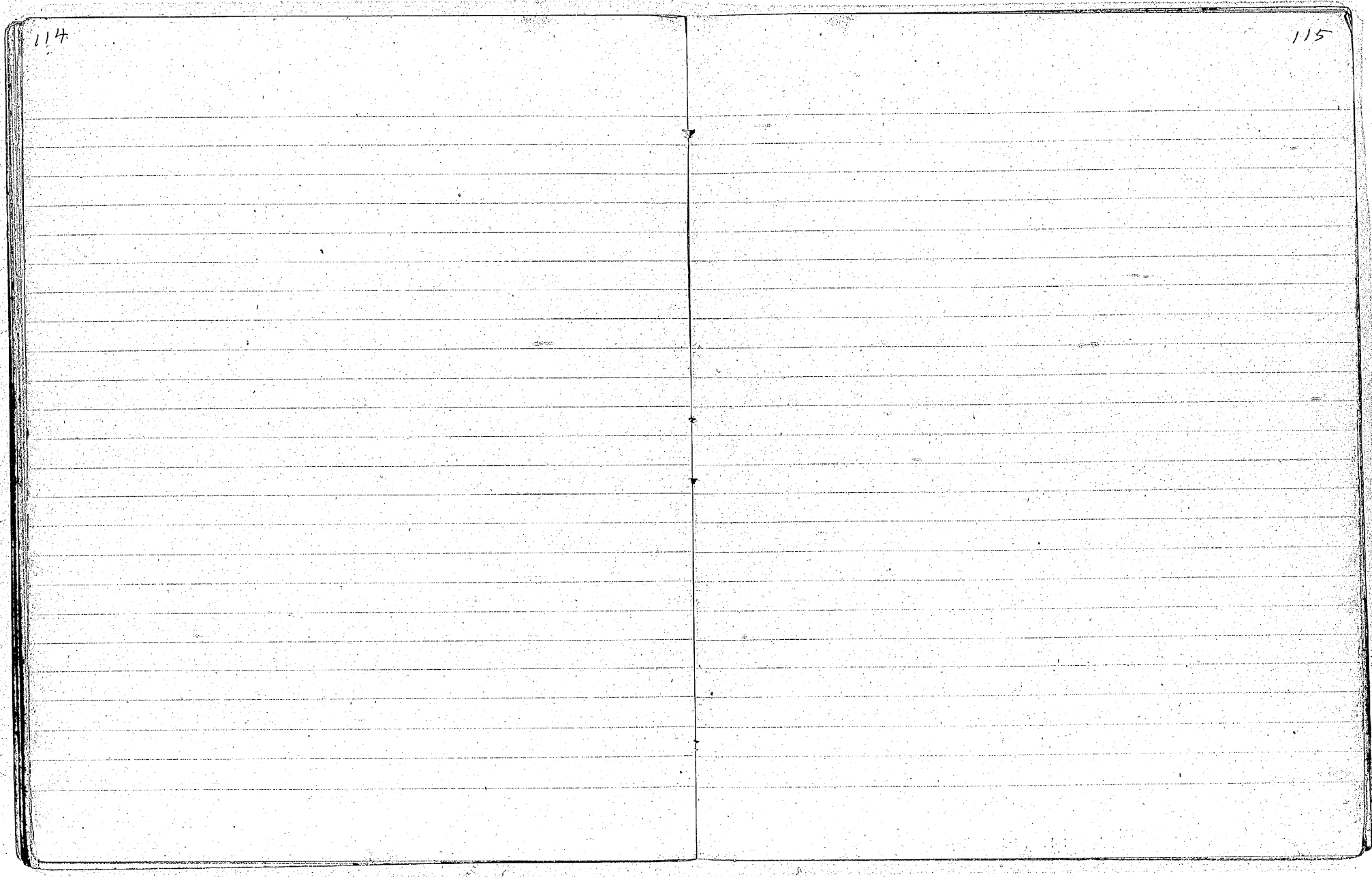
ist, sondern ist ist klar, warum man diese Mehrzahl den Geg. 1+1 gleich setz  
 kan ~~2+2~~ braucht nämlich die Mehrz  
 zahl nur ebenso auf ein Wesen zu  
 antworten wie die beide durch plus  
 noch getrennte Gegenstände, od. 1+1  
 u. 2 müssen das Wieviel auf beiden  
 Seite als dasselbe Soviel bestim  
 Dan ist die Gleichung mit Rücksicht  
 auf das Wieviel möglich. Abgesehen  
 auch nur davon, dass eine Gleichung  
 kommt ja alle Punkt das Zusam  
 von Identität u. Verschiedenheit zustand.  
 Die eine Eins ist somit ein Soviel, die  
 andere ist dasselbe Soviel an anderer  
 Stelle, u. beide zusammen addiert  
 bestim dasselbe Soviel, wie die  
 Zwei als Einheit der Mehrzahl kan  
 so ist es möglich, dass Gegenstände  
 die nicht nur an verschiedenen Stelle  
 die homogen Med. sind, sondern anson  
 der nicht einmal unter denselben  
 Bez. fallen, wie 1+1 u. 2, dennoch  
 einander gleich 64

$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$  zwei regelloses vermisches Gemisch  
 + 17 machend, neben einander + = 2  
 R. Z. A.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  Fülle Menge  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$   
 1+1+1, Reihe ...  $\neq 9 \cdot \frac{1}{2} = 4 \frac{1}{2}$   $\neq 3$   
 010 homogenes Med.  $1 \cdot 2 = 2$  rein logisch, und  
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$   $1+1 = 2$   $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  plus = 2 Verschmelz  
 $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$   $1+1 = 2$   $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$   $1+1 = 2$   $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$   $1+1 = 2$   
 - 3... was ist die Wieviel  $\frac{1}{2}$ ? Das Soviel Reflex  
 bezeichnet schon einen Inhalt des Inhaltes.  
 Ist dies klar, so verstehen wir, was  $1+1=2$  heißt  
 Die eine Eins ist ein Soviel, u. die andere  
 Eins ist ebenfalls ein Soviel an anderer Stelle.  
 Verknüpft man beide durch plus, so  
 heißt das, sie sollen zu einer neuen  
 Einheit verschmelzen, die ebenfalls ein  
 Soviel bestim. Das wäre, so lange  
 wir nur ein Atoms und noch ein Atoms  
 an einer anderen Stelle haben, ganz  
 unmöglich. Fasst man dagegen jede  
 Zahl als ein Soviel, so wird nicht  
 nur verständlich, dass aus einer Zahl  
 und einer anderen Zahl eine neue  
 Zahl entsteht, also was Additi



114

115



Ueber merkbare, lineare Punktmanndfaltigkeiten. Cantor  
 Was das math. Unendliche anbetrifft, soweit es eine  
 berechnete Verwandlung in der Mess. bisher gefunden u.  
 zum Nutzen derselben beigetragen hat, so scheint mir  
 dasselbe in erster Linie <sup>175</sup> in der Bedeutung eines vari-  
 ablen, entweder über <sup>175</sup> alle Grenze hinaus wachsen-  
 de od. bis zur beliebigen Kleinheit abnehmende, aber  
 stets endlich bleibende Größe aufzuf. Ich  
 nenne dieses Unendliche das Unseitliche-Unendliche.  
 176.

~~Wenn~~ das Unendliche hat sich aber in der  
 neueren u. neuesten Zeit sowohl in der Geom. wie auch  
 namentlich in der Funktionentheorie eine andere  
 ebenes berechnete Art vom Unendlichkeitbegriffe  
 herausgebildet, um auch hauptsächlich bei der Ver-  
 wendung einer analyt. Funkt. einer complexen (reellen)  
 GröÙe es notwendig u. allgemein richtig fundiert ist,  
 sich in der die comp. Variable repräsentirenden  
 Ebene eine einzige im Unendlichen liegende, d. h.  
 unendlich entfernte aber bestimmte Pkt. zu denken  
 u. das Verh. d. Funkt. in der Nähe dieses Pkt.  
 ebenso zu prüfen, wie dasjenige in der Nähe irgend  
 eines anderen Punktes; dabei zeigt es sich, dass  
 das Verh. d. Funkt. in der Nähe des unendlichen

fernen Punktes genau dieselbe Vorkommnisse darstellt,  
wie an jedem andern, im Endheil higeren Pte.,  
so dass hienaus die volle Berechtigung dafür ge-  
folgt wird, das Unendliche in diesen Falle in ein  
ganz bestimtes Pt. verlegt zu denken.

Kann das Unendliche in solch ein bestimtes  
Form antritt, so nenne ich es Eigenthlich unendlich.  
546

Unter einer Mannichfaltigkeit od. Menge verstehe  
ich nämlich allgemein jedes Viele, welches sich  
als Eines denken lässt, d. h. jeden Subjekt  
bestimmtes Elemente, welches durch ein Gesetz  
zu einem Ganzen verbunden werden kann. Ich  
glaube hienmit etwas zu definieren, was verstanden  
ist mit dem Platonische εἶδος od. idea, wie  
auch mit dem, was Platon in seinem Dialoge  
„Philebos od. das höchste Gut“ περὶ τοῦ ἀγαθοῦ  
ersetzt dieses den ἀόρατον, d. h. dem Unbegrenzten,  
Unbestimmten, welches ich Unendlich unendlich  
nenne, sowie dem περὶ τοῦ ὁρίου, d. h. der Grenze  
entgegen und erklärt es als ein geordnetes „Ge-  
misch“ der beiden letzteren.  
Anmerk. p. 587.

Frege, die Grundlagen der Arith. Eine logisch math.  
Untersuchung über die Begr. der Zahl  
— eine gründliche Untersuchung des Begriffs sind immer  
etwas philosphisch anfülle seiner. Diese Aufgabe ist  
der Math. u. Phil. gemeinsam.

Wenn das Zusammenarbeiten dieser Wissenschaften  
trotz mancher Ausläufe von beiden Seiten nicht so ein-  
so gedeihliches ist, wie es zu wünschen u. wohl  
auch möglich wäre, so liegt das, wie mir scheint,  
an dem Ueberswingen psychol. Betrachtungen  
in der Phil., die selbst u. die Logik ein- u. zu. Mit  
dieser Richtung hat die Math. gar keine Berührung-  
punkte, u. daraus erklärt sich leicht die Abwäg-  
ung vieler Mathematiker geg. phil. Betrachtung.

Man nehme nicht die Beschreibung, wie eine  
Vorstellung entsteht, für ein Definit. u. nicht die Angabe  
der Ursache u. lütliche Beding. dafür, dass  
uns ein Satz zum Bewusstsein kommt, für sein Bestehen  
u. versuche das Gedachtwerden eines Satzes  
nicht mit der Wahrheit. Man muss, wie <sup>ist</sup>  
es scheint, daran erinnern, dass ein Satz ohne  
Erwähnung aufhört, wahr zu sein, wenn sich nicht  
mehr an ihm denkt, wie die Formel verweht.

sind, wenn sich die Frage schließt.

Die meisten Mathematiker sind bei Untersuchung  
ähnliches Not zufrieden, den unmittelbaren Bedarf  
wissen genügt zu haben. Wenn sich eine Definit.  
willig zu der Beweis hergibt, wenn man sie  
auf Widersprüche stößt, wenn sich Zusammenhänge  
zu anderen entlegenen Sätzen erkennen lassen  
u. wenn sich dadurch eine höhere Ordnung u. Ge-  
setzmäßigkeit ergibt, so pflegt man die Definit.  
für genügend gehalten zu halten u. fragt wenig  
nach ihrer log. Berechtigung. Das Verfahren hat  
jedemfalls das Gute, dass man nicht leicht das  
Zeit gänzlich verfehlt. Auch ich meine, dass die  
Definitionen sich durch ihre Fruchtbarkeit be-  
währen müssen, durch die Möglichkeit, Beweise  
mit ihnen zu führen. Aber es ist wohl zu be-  
achten, dass die Strenge der Beweisführung er-  
halten bleibt, mag auch die Schlusskette lück-  
los sein, wenn die Definitionen nur nachträglich  
dadurch gerechtfertigt werden, dass man auf keine  
Widersprüche gestoßen ist. So hat man in  
Grunde immer nur eine unfähige gewisse  
Sicherheit erlangt u. muss eigentlich <sup>darauf</sup> aufpassen,  
sich zuletzt doch noch eine Widerspruch

anzuknüpfen, da das ganze Gebände zum Einstürzen  
bringt. Darum glaubte ich etwas weiter auf die  
allgemein log. Grundlage zurückgeh zu müssen,  
als vielleicht von dem meist mathematischen für  
nötig gehalten wird.

Leibniz: "Die ganze Metaphysik ist nur eingebore  
u. u. nur auf virtuelle <sup>in</sup> Menge". "Es ist nicht wahr,  
dass alles, was man behauptet, nicht eingebore sei.  
— die Wahrheiten der Zahlen sind in uns, u. nicht  
durch Zwang. Kennt man sie, sei es, indem man  
sie aus ihrer Quelle zieht, wenn man sie auf  
hinweisend Art kennt (was aber zeigt, dass sie  
eingebore sind), sei es."

Die Eigenschaften, durch die sich die Dinge  
unterscheiden, sind für ihre Anzahl etwas Gleichgültiges  
u. Fremdes. Darum will man sie fernhalten. Aber  
das gelingt in dieser Weise nicht. Wenn man wie  
Kant verlangt, "von der Eigentümlichkeit der  
Individuen eine Objektmenge abstrahiert" od.  
"bei der Betrachtung getrennter Dinge von den  
Merkmalen abstrahiert, durch welche sich die Dinge  
unterscheiden", so bleibt nicht, wie Laplace meint,  
"die Bez. der Anzahl der betrachteten Dinge zurück",  
sondern man erhält einen allg. Bez. unter de-

zine Dinge fallen. Diese selbst verlieren dadurch nichts  
von ihrer Besonderheit.

45.  
Wir stehen demnach vor folgender Schwierigkeit: Wenn  
wir die Zahl durch Zusammenfassung von verschiedenen  
Gegenständen entstehen lassen wollen, so erhalten wir  
ein Anhäufung, in der die Gegenstände mit ihre  
den Eigenschaften enthalten sind, durch die sie sich  
unterscheiden, u. das ist nicht die Zahl. Wenn wir  
die z. andrerseits durch Zusammenfassung von Theilen  
bilden wollen, so fließt dies uns sofort in eins  
zusammen, u. wir kommen nie zu einer Mehrheit.

50.  
Die Zeit ist nur ein psychol. Sfordernis zum Zählen,  
hat aber mit dem Bez. d. Z. nichts zu thun.

53.  
Auch die Anordnung, räumliche u. zeitliche Anordnung  
durch eine allgemeinen Reihe bez. zu erschaffen,  
führt nicht zum Ziele; denn die Stelle in der Reihe  
kann nicht der Grund des Unterschiedens der  
Gegenstände sein, weil dies schon irgendwo  
unterschieden sein müsste, wenn in eine Reihe  
geordnet <sup>würde</sup> zu können. Eine solche Anordnung setzt  
vielmehr Bez. zu den Gegenständen voraus,  
sei es nun räumliche od. zeitliche od. beschr.  
od. Formunterschiede od. welche sonst, durch die man

Begriff = eine Funktion deren Werth immer ein Wahrheitswerth ist. (Frege, Grundgesetze d. Sprache I. S. 8)  
(Wahr od. falsch)

von einem zum andern überführt, so die mit deren Unterscheidung notwendig verbunden sind. 54

Es ist ein Unterschied zw. Einem in Einheit zu mehr. Das Wort „Eins“ ist als Eigenname eines Begriffsstandes der math. Forschung eines Phrasals unfähig. Es ist also ein bloßes Zahl durch Zusammenfassung von Einem entsteht zu Hause. Das Phrasalische in  $1+1=2$  kann nicht eine solche Zusammenfassung bedeuten. 57

Wenn ich in Anknüpfung der selben äusseren Erscheinung mit derselben Wahrheit sagen kann: „dies ist eine Baumgruppe“ u. dies sind fünf Bäume“ od. „hier sind vier Compagnien“ u. „hier sind 500 Mann“, so ändert sich dabei weder das Einzelne noch das Ganze, das Aggregat, sondern meine Benennung. Das ist aber nur das Zeichen der Ersetzung eines Begriffes durch eine andere. Damit wird uns als Antwort auf die erste Frage des vorigen Paragraphen nahe gelegt, dass die Zahlangabe eine Aussage von einem Begriffe enthält. Am deutlichsten ist dies vielleicht bei der 2. 0. Wenn ich sage: „die Venus hat 0 Monde“, so ist gar kein Mond od. Aggregat von Monden da, von dem etwas ausgesagt wird könnte, aber dem Begriffe „Venusmond“ wird dadurch

eine Eigenschaft beigelegt, nämlich die, nichts mehr sich zu helfen. 59

Einigen solche Begriffe (z. B. Bestehen der Erde) kommt aber die Zahl 1 zu, die in demselben Sinne Zahl ist wie 2 u. 3. Bei einem Begriffe fragt es sich immer, ob etwas u. was etwas unter ihm fällt. Bei einem Eigenname sind solche Fragen eitel. 64

Unter Eigenschaft, die von einem Bez. ausgesagt werden versteht ich natürlich nicht die Merkmale, die der Bez. zusehen. Diese sind Eigenschaften der Dinge, die unter der Bez. fallen, nicht des Begriffs. 64

In dieser Beziehung hat die Existenz Ähnlichkeit mit der Zahl. Es ist ja möglich die Existenz nichts Anderes als Verneinung der Nullzahl. Weil Existenz Eigenschaft des Begriffes ist, entsteht der ontol. Diner von der Exist. des Gottes ein Zeit nicht. 63

Einheit in Bezug auf eine endliche Anzahl kann nur ein solcher Bez. sein, der das unter ihm Fallende bestimmt abgrenzt u. keine beliebige Zertheilung gestattet. Man sieht aber, dass Untheilbarkeit hier eine besondere Bedeutung hat.

Man beachtete wie leicht die Frage wie die Gleichheit mit der Untheilbarkeit der Einheit zu versöhnen



ein. Das Wort "Echtheit" ist hier in doppelter Sinne ge-  
braucht. Gleich ist die Echtheit in der oben erklärten  
Bedeutung dieses Wortes. In dem Satze: "Jupiter hat vier  
Munde" ist die Echtheit "Jupitermunde". Unter diese Beg-  
riff fällt sowohl I, als auch II, als auch III, als auch IV.  
Daher kann man sagen die Echtheit, auf die I  
bezogen wird, ist gleich der Echtheit, auf die II  
bezogen wird u. s. f. Da haben wir die Gleichheit.  
Wenn man aber die Unterschiedlichkeit der Echtheit  
behauptet, so versteht man darunter die der gezeigten  
Sätze.

Einem Begriffe kommt die Z. 0 zu, wenn <sup>allgemein</sup> ~~keine~~ Gegen-  
stand unter ihm fällt, was auch a sei, der Satz gilt,  
dass a nicht unter diesem Beg. fällt.

In ähnlicher Weise könnte man sagen: einem Beg.  
F kommt die Z. 1 zu, wenn nicht allgemein, was  
auch a sei, der Satz gilt, dass a nicht unter F  
fällt, u. wenn aus dem Satze

"a fällt unter F" u. "b fällt unter F"  
allgemein folgt, dass a u. b dasselbe sind. 67

Dem Beg. F kommt die Z. (n+1) zu, wenn es einem  
Geg. a gibt, der nicht F fällt u. so beschaffen ist,  
dass dem Beg. "unter F fallend", aber nicht "a"

die Z. n zukommt. <sup>7 7</sup>  
8" c l'k, n'os vs... 7. Beg. - abo-fo 7 7 7. 2 23 + 22 i 7 1  
12" 73 = 12, 222 = 148 76 9. 105. 29. 21 + -

Ich definiere demnach: die Anzahl, welche dem  
Beg. F zukommt, ist der Umfang des Begriffes  
"gleichzahlig dem Begriffe F" 80

Gleichzahlig = Möglichkeit die unter den einen  
den unter den andern Beg. fallende Gegenstände bei-  
derseits eindeutig zugeordnete. 79

Weil unter dem Beg. "sich selbst ungleich"  
nichts fällt, erkläre ich:

0 ist die Anzahl, welche dem Begriffe  
"sich selbst ungleich" zukommt. 87

Ich hätte zur Def. der 0 jeden andern Beg. nehmen  
können, unter dem nichts fällt. Es kam mir aber  
darauf an, einen solchen zu wählen, von dem dies  
rein logisch bewiesen werden kann; u. dazu bietet  
sich an bequemer die "sich selbst ungleich" dar. 88  
wahrlich

Der Satz: "es gibt einen Beg. F u. einen unter  
ihm fallenden Geg. x der Art, dass die Anzahl,  
welcher dem Begriffe F zukommt, n ist, u. dass  
die Anzahl, welche dem Beg. "unter F fallend  
aber nicht gleich x" zukommt, m ist "sich gleich-  
bedeutend mit", u. folgt in der natürlichen Z-reihe  
unmittelbar auf n". 89

Um nun auf die Z. 1 zu kommen, müssen

wir zunächst zeigen, dass es etwas gibt, was in der nat.  $Z$ -reihe unmittelbar auf 0 folgt.

Betrachte wir den Bez. — od, wenn man lieber will, das Prädicat — "gleich 0". Unter dies fällt die 0. Unter den Bez. "gleich 0 aber nicht gleich 0" fällt dagegen kein Gegenstand, sodass 0 die Anzahl ist, welche diesem Begriffe zukommt. Wir haben demnach einen Bez. "gleich 0" u. eine unter ihm fallende Bez. 0, von denen gilt: die Anzahl, welche dem Bez. "gleich 0" zukommt, ist gleich der Anzahl, welche dem Bez. "gleich 0" zukommt; die Anzahl, welche dem Bez. "gleich 0 aber nicht gleich 0" zukommt, ist die 0.

Es folgt nach unserer Erklärung die Anzahl, welche dem Bez. "gleich 0" zukommt, in der nat.  $Z$ -reihe unmittelbar auf 0.

Wenn wir nun definieren: ist die Anzahl, welche dem Bez. "gleich 0" zukommt, so können wir die letzte Satz so ausdrücken: (1) folgt in der nat.  $Z$ -reihe unmittelbar auf 0. Es.

Die Wahrheit ist eines Satzes ist eben nicht sein Gedankwende. 91.

Der Satz: "wenn jeder Bez. zu dem  $x$  in der Bez.  $q$

steht, unter dem Bez.  $F$  fällt, in dem das aus, dass  $d$  unter dem Bez.  $F$  fällt, allgemein, was auch  $d$  sei, folgt, dass jeder Bez. zu dem  $d$  in der Bez.  $q$  steht, unter dem Bez.  $F$  fällt, o. fällt  $y$  unter dem Bez.  $F$ , was auch für  $x$  Bez. sein möge" sei gleichbedeutend mit "y folgt in der  $q$ -Reihe auf  $x$ " u. mit "x geht in der  $q$ -Reihe den  $y$  vorher." 92.

Die der allgemeinen Ersetzbarkeit sind nun in der Tat alle Gesetze der Gleichheit enthalten.

Wenn wir nun als Beziehung  $q$  diejenige haben, in welche  $m$  zu  $n$  gesetzt wird durch die Satz: "n folgt in der nat.  $Z$ -reihe unmittelbar auf  $m$ " so sage wir statt "q-Reihe" "nat.  $Z$ -reihe". 77.

Ich definiere weiter: die Satz: "y folgt in der  $q$ -Reihe auf  $x$  od.  $y$  ist dasselbe wie  $x$ " sei gleichbedeutend mit "y gehört der mit  $x$  anfangenden  $q$ -Reihe an" u. mit "x gehört der mit  $y$  endenden  $q$ -Reihe an".

Demnach gehört  $a$  der mit  $n$  endenden nat.  $Z$ -reihe an, wenn  $n$  entweder in der nat.  $Z$ -reihe auf  $a$  folgt od. gleich  $a$  ist.

Es ist nun zu zeigen, dass — unter einer noch anzugebenden Bedingung — die Anzahl, welche dem Begriffe "der mit  $n$  endende nat.  $Z$ -reihe angehörig" zukommt, auf  $n$  in der nat.  $Z$ -reihe

unmittelbar folgt, dass es kein letztes Glied dieser Reihe gibt. Offenbar kann dieser Satz auf empirische Weise od. durch Induktion nicht begründet werden.

Es würde hier zu weit führen, den Beweis selbst zu geben. Nur ein Gang mag kurz angedeutet werden. Es ist zu beweisen

- 1. wenn  $a$  in der nat. Z-reihe unmittelbar auf  $d$  folgt, u. wenn von  $d$  gilt die Anzahl, welche dem Begriffe "der mit  $d$  endende nat. Z-reihe angehört" zukommt, folgt in der nat. Z-reihe unmittelbar auf  $d$ , so gilt auch von  $a$  "der die Anzahl, welche dem Begr. "der mit  $a$  endende nat. Z-reihe angehört" zukommt, folgt in der nat. Z-reihe unmittelbar auf  $a$ .

Es ist zweitens zu beweisen, dass von der 0 das gilt, was in der über ausgesprochenen Sätze von  $d$  u. von  $a$  ausgesagt ist, u. dass zu folgen, dass es auch von  $n$  gilt, wenn  $n$  der mit 0 anfangende nat. Z-reihe angehört. Dieser Schluss wäre eine Anwendung der Definit., die ich von dem Ausdrucke "y folgt in der nat. Z-reihe auf x" gegeben habe, indem man als Begr. F. jene gleichsam Aussage von  $d$  u.  $a$ , von  $0$  u. von  $n$  zu setzen hat.

Um den Satz (1) des vorigen § zu beweisen, müsse wir zeigen, dass es die <sup>Anzahl</sup>  $x$  ist, welche dem Begr. "der mit  $a$  endende nat. Z-reihe angehört", aber nicht gleich  $a$  zukommt. Und dazu ist wieder zu beweisen, dass dieser Begr. gleichem Umfange mit dem Begr. "der mit  $d$  endende nat. Z-reihe angehört" ist. Hierfür bedarf man des Satzes, dass kein Begr., welcher der mit 0 anfangende nat. Z-reihe angehört, auf sich selbst in der nat. Z-reihe folgen kann. Dies muss ebenfalls mittels unserer Def. des Folgens in einer Reihe bewiesen werden. (95)

Wir werden hierdurch genötigt den Satz, dass die Anzahl, welche dem Begr. "der mit  $n$  endende nat. Z-reihe angehört" zukommt, in der nat. Z-reihe unmittelbar auf  $n$  folgt, die Bedingung hinzuzufügen, dass  $n$  der mit 0 anfangende nat. Z-reihe angehört. Hierfür ist eine kürzere Ausdrucksweise gebräuchlich, die ich mir erklären der Satz "n gehört der mit 0 anfangende nat. Z-reihe an" sei gleichbedeutend mit "n ist eine endliche Anzahl".

Man könnte uns den letzten Satz so ausdrücken:

Keine endliche Anzahl folgt in der Reihe auf  
sich selbst. 96

Die Anzahl, welche der Bez. „endliche Anzahl“  
zukommt, ist eine unendliche. 96

Die Anzahl, welche der Bez. F zukommt, ist  
„es“; hiesst nun nichts mehr u. nichts weniger als  
es giebt eine Bez., welche die unter der Bez. F  
fallende Gegenstände der endlichen Anzahl  
beiderseits eindeutig zuordnet. 97

Ich hoffe in dieser Schrift wahrscheinlich gemacht  
zu haben, dass die arith. Sätze analyt. Urtheile  
u. folglich a. priori sind. Demnach würde die Arith.  
nur eine weiter ausgebildete Logik, nicht arith.  
Sätze ein log. Gesetz, jedoch ein abgeleitetes sein. 98

Ich erhebe nicht den Anspruch, die analyt.  
Natur der arith. Sätze mehr als wahrscheinlich  
gemacht zu haben, weil man in nur noch  
zweifeln kann, ob ihr Beweis ganz aus re-  
log. Graden geführt werden kann, ob sich  
nicht irgendwo ein Beweisgrund anderer Art  
im unmerklichen einmischt. 100

Es gibt nun eine Art von Sätzen, die für  
jede Bez. einer S. haben müssen, dass id

die Widerspruchssätze. Bei der Zahlenbildung  
genant. Auch die Z.angabe ist als ein Glied  
aufzufassen. Es kam also darauf an, die S. einer  
Zahlenbildung festzustellen, ihn auszudrücken,  
ohne von der Z.wörter od. der Worte „Z.“  
Gebrauch zu machen. Die Möglichkeit der unter  
ein Bez. F fallende Gegenstände, die unter eine  
Bez. G fallende bereits beiderseits eindeutig  
zugeordnet, erkannt wir als Inhalt eines  
Widerspruchssatzes <sup>urteils</sup> von Zahl. Unsere Definit  
müsste also jene Möglichkeit als gleichbedeutend  
mit einer Zahlenbildung hin stellen. 116

Der Fehler einer formalen Theorie erkannt wir  
darin, dass sie die Widerspruchslöslichkeit eines Begriffs  
als Beweis ansetzt, was sich im Widerspruch  
gezeigt hatte, u. dass die Widerspruchslöslichkeit  
eines Bez. schon als hinreichende Gewähr für den  
Erfülltheit galt. Diese Theorie bildet sich  
— sei brauche nur Forderungen zu stellen;  
denn Erfüllung versetzt sich dann von selbst  
— — — — — Es müsste auch gezeigt werden, wenn eine  
Anweisung zur Definit für diese selbst ausgegeben  
wunde, eine Anweisung, deren Befolgung Freid  
artig in die Arith. einführen würde, obwohl ein

selbst im Ausdruck sich davon frei zu halten  
vermag, aber nur weil ein blosser Hinweis & nicht  
So gerate sein form Theori in Erfahrung, auf das  
Apriorische od. durch Synthesen zu sich zu pflegen  
wie sie sich auch die Ansicht gibt,  
in der Höhe der Abstraktion zu schweben. 117

Unser frühere Betrachtung d. posit. ganz. Zahl  
führt uns zu der Möglichkeit, die Einigkeit von  
äusser Dingen zum Ausdruck zu vermeiden,  
aber doch in der Fülle zum form Theori zu verfallen.  
Es kommt wie dort darauf an, die Gehalt eines  
Wirkens gegenstands festzustellen wie dies  
überall geschieht, so erachte die negat.  
gebred, irrat, u. complex Zahl nicht ge  
he-mögl. als d. posit. ganz. Zahl, diese  
nicht-mögl., wirklicher, gemässbar als sein. (Hid.)  
119

Hausentl. Philosophie d. Mathematik I. (Psych. u. log. Unterw.)  
Weierstrass pflegte seine epochemachende Vorlesung  
in d. Theori d. analyt. Funktionen mit der Satz zu er  
öffnen: Die rein Arith. (od. rein Analysis) ist ein  
Wiss., die einzig u. alle auf den Beg. d. 2. basirt ist.  
So bedarf sonst keiner Voraussetzung, keine Postulati  
u. Voraussetzung (so, fast gleichlautend, im S/S 1878 u. W/S  
1880/81.)

Logik, III. B. XXIV. Chap. 3. 5. auch II. B. IV. Ch. 87.  
Math. =  $\frac{1}{2}$  phys. fact. =  $\frac{1}{2}$  ...  
gleichgelte ...  
Schuppe, fens, Squant. 2. ...  
Bauman Lange ...  
... - 51. 10. 4. 3. 7. 12.

Man untersuche zw. einem psychischen Gescheh  
u. einem psych. Acte. Psych. Acte sind das Vorstell  
Bijale, Verneine, Liebe, Hass, Wille, u. s. u.  
von wilete uns die innere Wahrnehmung (doctis  
reflicte) Kunde gibt. Ganz anders verhält es  
sich mit den Analyse. Niemand ka die an  
alyse d. tätigkeit innerlich wahrnehmen. Wir  
können die Erf. machen, dass ein zuerst un  
analytischer Gehalt dann zu einer analyt. wird,  
wo früher ein Gehalt war, jetzt wird geth. <sup>ein</sup> Willkür

benutzt mehr aber als dieses post hoc ist immerhin  
nicht zu konstatieren. Von einer psych. Tätigkeit  
durch welche aus der unanalysierten Einheit die  
Vieltät erst wird, behält die unsere Wahrheit,  
nichts. Das factum aber der angebotenen  
Analyse kommt zu unserer Kenntnis und  
wie die Erinnerungsvorgang der unanalysierten Gan-  
zen mit der gegenwärtig der analysierten  
Vergleichen. Es ist ein solcher Akt Akt des  
Vergleichens u. Verbindens auf, welche  
jedoch die vollkommene Analyse voraussetzt.  
Ist dies alles richtig, dann enthält eine  
Auffassung, welche die Begriffe Unterschied, Mehr-  
heit u. Zahl durch Reflexion auf die Tätigkeit  
des Unterscheidens in dem Sinne des Analysierens  
hervorgehen lassen wollten, jedes Bedenken.

So sprechen vielerlei Zeugnisse u. vor 66.

Allen die unsere Zeit selbst dafür dass wir uns  
für die Auffassung entscheiden müssen, der zufolge  
die collective Einigung nicht im Vorstellungsinhalt  
ausdrücklich ausgesprochen ist, sondern nur in gewissen  
psych. Acten, welche die Inhalte einigend un-  
schlüssigen ihre Bestände hat. 79

Ein Begriff enthält, indem er einheitliche

Interesse u. u. u. mit ihm zugleich ein einheitliches  
Bemerkens verschiedenem Inhalte für sich heraus-  
hebt u. umfasst. collectiver Verbindungs- u. 79.

Der Begriff der Vieltät enthält mit u. in dem  
Begriffe der collective Verbindung auch denjenigen  
des Etwas. 85

Abstrahierend von der Besonderen Beschaffenheit der  
zusammengefassten Einzelinhalte, betrachtet u. bezieht  
man eine jeden nur, insofern es ein Etwas od.  
Etwas ist, u. gewinkt so, mit Rücksicht auf die  
collective Verbindung derselben, die zu der vorliegenden  
Vieltät gehörige allgem. Vieltätform: Ein u.  
Eins, u. o. u. u. Eins, mit welcher u. bestim-  
t Zahlname associiert ist. 88

Alle Begriffe, die es enthält, sind sichtlich mit  
einander verwandt. Ihre Ähnlichkeit beruht  
auf der Gleichheit der sie zu gesamtenselben  
Zulassung (der Einsen od. Etwas), sowie auf  
der elementären Ähnlichkeit der die bestim-  
tenden psych. Akt; ein nicht E, um die E-  
begriffe als eine wohlcharakterisierte Klasse von  
Begriffen abzugrenzen, u. um als Grundlage für die  
allg. Benennung zu dienen. Dieser Zweck erfüllt  
der Name Anzahl. 88

Indem man der Name „Eins“ beim Zähl ausschließ-  
 lich in Gebrauch kam, trat er gewisse Unterschiede  
 der Bedeutung zw. Eins u. ein Ding u. etwas anderes  
 hervor, dass Eins die Correlat zur Vielheit als  
 Mittelbezeichnung erhielt. Dies ergab sich durch  
 die Art der Verwendung ganz von selbst. So wurde  
 der Eins gleichbedeutend mit, gezähltes Ding  
 od. ein Ding im Gegensatz zu vielen Dingen, wäh-  
 rend ein Ding schlechthin bei unbetonten, ein  
 u. das gleichbedeutend, etwas, vom dieser Bezug  
 auf die Bez. der Vielheit für sich. 91

Die gezählten Einheiten können nämlich physische  
 so gut wie psychische sein, aber die Zahlbegriffe an  
 des Eins gehören ausschließlich dem Gehirte der  
 Reflexion an. Locke 2. 2. 3. p. 1. u. 1. 3. 12

Grassmann (Lehrbuch d. Arith. 5.1). Gleichheit 292  
 2) Gleich heissen zwei Dinge wenn man in jeder Aus-  
 sage statt des einen das andere setzt ka. 22.  
 Leibniz, 291-292, Begr. 12-29, 292. Husserl 29-3  
 1) Gleichheit 284-288 in Identität 284+287 2. 9. 2. 3  
 2) ein 21-27 Gleich 28-32 282 283+287 (Husserl psychol.  
 Stumpf 2. log. Stumpf 1. 282 um 282 12. 3. psychol. 27)  
 3) Gleichheit 282-284 4) Veräuslichkeit 282-284 Veräuslich.  
 282-284 282-284 Aussage 282 282-284 282-284 282-284  
 103-5

Stolz, E. andr. zuordnung. 102-103

Sieht man genau zu, so zeigt es sich, dass in  
 der Definit. der Gleichheit die Vorst. der Mehr u. Wenig-  
 heit eingeschlossen ist, während diese nach selbst.  
 ohne Gleichheitsvorstellung nicht concipiert werden ka.  
 Wenn wir also die gegensätzliche Zuordnung dieser  
 Elemente unverbunden lassen, so ist dieses nur ein  
 anderer Ausdruck dafür, dass auf keiner Seite  
 ein Mehr od. Weniger sein dürfte. Der Circul. liegt  
 zu Tage. 106

Husserl... 34...  $N = M' + N'$ ,  $M = M' + 1 = 2$  Justu-  
 begriffe, höhere Ordnung, Subjekt Einigung =  
 $\frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  (19) =  $\frac{1}{2} \frac{1}{2}$  Teil d. Ganzes  $N'$ ,  $\frac{1}{2}$

Gleichheit...  $E = E + 1$  21  $\frac{1}{2} \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$   
 was es hiesst zwei, einfache, d. h. nicht weiter  
 analysierte Einheiten alle einander gleich, ist mit Er-  
 klärung wieder möglich noch bedürftig. 108

Die Möglichkeit der gegenseitigen Zuordnung  
 zweier Vielheit ist nicht diese Gleichzeitigkeit, sondern  
 vorläufigste nur die Erkenntnis, dass die Anzahl  
 gleich sein, erfordert zunächst die Erk. ihrer  
 Zuordnungsmöglichkeit; geschweige denn, dass beide ide-  
 trisch wären. Die best. iten Definit. ist also weit  
 entfernt davon, eine nominaldefinit. darzustellen.

welche die Bedeutung des Ausdrucks, Gleichheit zu sein. Vielmehr in Beziehung auf die Anzahl fixiert. Alles was uns zu geben können ist: dass es ein für alle Fälle gültiges, in log. Sinne notwendiges u. hinreichendes Kriterium für den Bestand der Gleichheit aufstellt.

Natürliche Z., von Schroder, 170. v. 2. Lebk. u. Arith. 2. 145. (Vorhang u. d. Arith.)

Stolz: "Jedes der wiederholte Setzung fähige Ding heisst eine benannte E. Einheit, eine 1, die Einheit schlechthin."

Die natürliche Z. ist eine Vielheit von E. Einheiten od. d. i. "Einern", "E. Einheiten", jeder wohldefinierte Menge kommt -- eine gewisse Mächtigkeit zu, wobei zwei Mengen dieselbe Mächtigkeit zugeschrieben wird, wenn sie sich gegenseitig einseitig. Element für Element, einander gegenüber lassen."

1. 12 i Cantor: "Mittelsungen zur Lehre von Transfinit, deutschsch. Mitteil. d. v. ph. Krit. Bd. 91. S. 55-56."

"Zur Bildung des all-gemein-begriffs, fünf bedarf es nur einer Menge, -- welcher diese Cardinalzahl zukommt" 1. 129 E. 1. 126

Identifiziert man Äquivalenz mit Gleichheit der Anzahl, dann liegt es freilich nahe, die Äquivalenz auch als Quelle des Anzahlbegriffes selbst anzusehen u. zu erklären die Hinsicht derselben gleichfalls

127

(i. e. äquivalent, zu einer Klasse gehörige Menge können doch nicht Anders gleichsam haben, als die in der angegebenen Weise definiert Gleichheit, die Angehörigkeit zur Klasse sei also das für die betreffende Anzahl log. Wesentliche. Eine concrete Menge ein Z. zuschreiben, heisst also nichts Anderes, als sie in dieser Sinne classificiren

Diese Schlussweise können wir natürlich nicht annehmen was die äquiv. Menge gleichsam haben, ist nicht bloß die "Gleichzahlgkeit" od. deutlicher gesprochen die Äquivalenz, sondern die gleiche Anzahl an wahren u. eigentlich Sinne der Worte.

Werden die Anzahl -- als jein auf Äquivalenz gegriindet Relationsbegriffe definiert, dann gienge doch jede Z. aussage anstatt auf die concrete vorliegende Menge als solche, immer nur auf Verhältnisse derselben zu anderen Mengen. Dieser Menge ein bestimmte Z. zuschreiben, heisst sie zu einer bestimmten Gruppe unter einander äquivalenten Mengen classificiren; dies ist aber ganz u. gar nicht der Sinn einer Z. aussage

Das ursprüngliche Z. beg. ist für Dedekind allerdings die Ordinalzahl od. nat. Z. (s. 21) -- So sehr ich die immer formelle Casusierung der Entwicklung in der Theorie der



bedeutend mathematisches Beweisen, so scheint es mir doch in ihm absonderliche Künstlichkeit von der Wahrheit abzuweichen.

Man muss demgemäß wohl beachten, dass die Beziehung der Zahl u.° Eins als Zahl ein Übertrag<sup>144</sup> dieses Namens auf andersartige, wenn auch mit der eigentlichen Anzahl in engem Zusammenhang stehende Begriffe darstellt.

Was nun der innere Grund dieser Sachlage angeht, so liegt er in der Gleichartigkeit der Relationen, welche die Zahlen des erweiterten Gebietes umgeben samt mit einander verknüpfen.

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 10. 11. 12. 13. 14. 15. 16. 17. 18. 19. 20. 21. 22. 23. 24. 25. 26. 27. 28. 29. 30. 31. 32. 33. 34. 35. 36. 37. 38. 39. 40. 41. 42. 43. 44. 45. 46. 47. 48. 49. 50. 51. 52. 53. 54. 55. 56. 57. 58. 59. 60. 61. 62. 63. 64. 65. 66. 67. 68. 69. 70. 71. 72. 73. 74. 75. 76. 77. 78. 79. 80. 81. 82. 83. 84. 85. 86. 87. 88. 89. 90. 91. 92. 93. 94. 95. 96. 97. 98. 99. 100.

Erkenntnis von Gegensatz zu Vielheit ist nicht dasselbe wie Erkenntnis in der Vielheit. Mit dem Beg. d. Vielheit<sup>145</sup> (bzw. Anzahl) ist der Beg. der Einheit unauflöslich mitgegeben. Keineswegs gilt dies aber von dem Beg. d. z. Eins; dies ist erst ein spätklassisches Produkt.

Zu einem Einbegriffe kam evidently keine nur verbunden wurde, was unverständlich ist, aber in der Vorst. des Einbegriffs ist nichts von Unterschiedsrelationen<sup>146</sup> vorzulegen, die Elemente des Einbegriffs

Rückst. Veranschaulich.

sind in unserer Vorst. da als das, was sie sind, u. werden hierzu nicht erst durch Unterscheidung. Es bedarf nicht erst einer besonderen unterschiedenen Tätigkeit, damit sie nicht in Eins zusammenfließen.

Das Zählen, d. i. der successive Prozess, durch welchen die z. Eins Menge ermittelt, bedarf unvollständig nur der Unterschiedenheit der zu zählenden Gegenstände, nicht aber ihrer Unterscheidung.

Welcher Auffassung betreffs der Entität d. z. Begriffe man auch ledig möge die Gleichheit d. Einheit als eine Tatsache welche nicht zu langweilen

Und gerade diese Subsumption unter d. Beg. Etwas müssen wir (nach unserer Theorie) hinsichtlich eines jeden der zu zählenden Gegenstände vollziehen u. die Zahl zu erfassen. Insofern also ist es richtig, dass die zu zählenden Dinge unter einer gemeinsamen Gattungsges. (die Wort freilich in äusserlicher Sinn genommen) gebrauchet werden müssen.

Nach jener weiterverbreiteten Ansicht erforderte jede Zählung vorgängige od. gleichzeitige Vergleichung<sup>147</sup> u. es gibt Gleichheitsrelationen in dem Beg. der z. Eins nach der Umkehr ist. Keines von beiden d. Fall der z. Dreyling Abstrakt (vor menschl. Reflexion), welche wir

an die Glieder einer Menge vorzunehmen missen  
 Man gerät zu glanz. beweist eo ipso, als Folge  
 der Gleichheit der Einheit aber wieder hat es  
 ein selbst irgend etwas mit Vergleichung zu tun  
 noch geht in die Vorst. die Zahl der Gleichheitsrela-  
 tionen zu der Einheit als separate Bestandteile  
 notwendig ein 159

Die Fundamentaleigent. welche die Relation-complexion  
 zu einheitlicher Vorstellg., zu Ganz macht.  
 kann nicht die Gleichheit sein, sondern nur die  
 collective Verbindung 160

161. Etwas ist ein Name, welcher auf jede  
 denkbare Inhalt paßt. Jedes wirkliche od. mög-  
 liche Ding ist ein Etwas. -- Das "Etwas" ist eben  
 kein abstraktes Teilinhalt. Worin alle Gegenstände --  
 wirkliche u. mögliche, real u. nicht real, phys.  
 u. psych. u. o. w. -- übereinkommen ist nur dies,  
 dass sie Vorstellg.-haltig sind od. durch Vor-  
 stellg.-haltig u. unsiren Bew. vertreten werden 86

Frege 122. Wenn wir die Zahl durch Zusammenfas-  
 sung von Einheiten bilden wollen, so fließt dies  
 unmittelbar in ein zusammen u. wir können wie  
 zur Mehrheit. Hier wird Gleichheit <sup>mit</sup> Identität

verwechselt. Jede anschauliche Vorst. ein Menge  
 gleiche Gegenstände demonstrirt ad oculos, dass  
 Gleichheit u. Verschiedenheit u. künstlich Widersprüche  
 nicht in sich wohl in ein zusammenfassend dem  
 gegeben sei können 184

kurz von der Ausdruck "Zusammenfassung von  
 Einheiten" womit man die Entstehung d. Z. beschrei-  
 ben will, absolute Gleichheit voraussetzt -- was Frege  
 fälschlich aufsporniert -- da liegt hier eine Schwan-  
 kung od. besser ein Unmöglichkeits von 185

Bei einer wirklichen Zählung ist nie gescheitert u.  
 willkürlich, was als Eins gezählt werden soll. Dies  
 bestimmt das leitende Interesse, wie es auch be-  
 stimmt, wieviel wir zusammenzählen 174

Frege 122. Begriff-Verbindung, Substanz: z. B. 32 u. 12  
 u. 22 + 10 = 32 u. 22 + 10 = 32. Kalt gelagert... pr. chd. nicht für d.  
 Zählung u. z. bes. die Substanz d. Gruppen gleich, mit  
 der bezügliche Bez. ... 185

Die Z. bezieht sich also nicht auf die Bez. d. gezählten  
 Gegenstände, sondern auf die Substanz 185

Die Zahlen sind von Heibolff gemacht als willkür-  
 liche Zeichen definiert. Vergeblich auch wenn über ein  
 wichtige Vorfolge seines Darlegens, was dem die  
 Zeichen eigentlich bedeutet. In verschiedenen Fällen

Können wir die heterogenen Gegenstände signieren, und was ist die Signatur wenn willkürliche --- worin ist es also begründet, dass verschiedenartige Vorstellungsinhalte in demselben Sinne von denselben Zeichen bezeichnet werden? (Hering, welches ist der Ref., der bei jeder Verwendung der Zeichen unmittelbar in die Einheit ihrer Bedeutung ausmacht?) 192

Helmholtz: z. B. 1 2 3 4 5 mit einem Worte: jedes Zeichen ist Ordnungszahl, ist das Zeichen einer Ordinalzahl im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Die Bedeutung jedes Zeichens liegt dannach in seinem Stellenwert. 194

Es geht hervor, dass Helmholtz die Begriffe Eins, Zwei, Drei u. s. w., d. h. die Anzahlbegriffe im gewöhnlichen Sinne des Wortes, mit den Ordinalzahlbegriffe (Erste, Zweite, Dritte, u. s. w.) verwechselt. Abgesehen davon, dass er diese u. s. w. in absoluten als bloße Zeichen erklärt. 194

Sage ich z. B. die Anzahl dieser Äpfel sei vier, so meine ich doch nicht den Umstand, dass bei irgend einer Anordnung derselben das fünfte Element das vierte, sondern eben das eine u. ein u. ein u. ein Äpfel vorhanden sei. 196

Ordinalzahl 3 zu 1 u. 488 (Korrekturen = 58) Sollte also Fünf wirklich nichts anderes sei als ein Zeichen

für den Inbegriff der Zeichen Erste, Zweite, Dritte, Vierte, Fünfte? Ein analoger Einwand trifft auch Dedekinds Def. der Anzahl. 197

Die Quelle der mathematischen Prämissen, in welche die beiden <sup>Helmholtz</sup> berühmten Forscher (wie vorhin Berkeley) verfallen sind, liegt nun ~~vor~~ ~~her~~ ~~in~~ ~~der~~ ~~Missdeutung~~ ~~des~~ ~~symbolisch~~ ~~Zählgesprochenen~~, da wir blödsinnig ~~über~~ ~~Wahr~~ ~~und~~ ~~haben~~ ~~dabei~~ ~~so~~, dass wir die Glieder der Zahlenreihe ~~als~~ ~~die~~ ~~Zahlen~~ ~~mechanisch~~ ~~geworden~~, ~~und~~ ~~da~~ ~~den~~ ~~letzten~~ ~~fordern~~ ~~Namen~~ ~~als~~ ~~den~~ ~~der~~ ~~genannten~~ ~~Z~~ ~~ansahen~~. 197

Wir stellen also, wenn wir von Inbegriffe aller natürlichen Zahlen sprechen zunächst eine Menge im gewöhnlichen Sinne vor, nämlich die Zahl eines Anfangsstückes der Zahlenreihe (symbolisiert durch die anschauliche Reihe der Zeichen o. dgl.). Dazu tritt die ergänzende Vorstellung, dass diese Reihe vermöge ihres Bildungsprinzips erweitert werden könne in Infinitum, wobei jedes neue Glied durch den Prozess entsteht an. 198

mit welchem Glied wir auch begreifen in welche Richtung der successiven Durchzählung wir auch verfolge, das Resultat muss immer dasselbe sein. Wirklich bleibt die zu zählende Vielheit ~~unverändert~~.

identisch dargestellt, demgemäß auch die zugehörige  
 Anzahl von  $Z$ -Lute; es könnten also verschiedene  
 Zahlen höchstens verschiedene symbolische Formen  
 d. Zusammensetzg derselben <sup>Zahl</sup> aus Teilzahlen ergeben

156

Defekt ist jedenfalls die Zahl  $1$  in  $N$  enthalten, u. ~~was~~ wenn  $n$  irgend ein  
 in  $N$  enthaltenen Zahl ist, so ist auch  $n+1$  in  $N$  enthalten. Wir nennen  
 diese Zahlen  $n$  auch die natürl. Zahlen.

Jede nat.  $Z$ . ist endlich, d.h. wenn  $n$  ein nat.  $Z$  ist, so ist  $n$  von  
 $n+1$  verschieden.

此の如く、 $n$  及び  $n+1$  の両方とも  $N$  に属する。此の如く、 $n$  及び  $n+1$  の両方とも  $N$  に属する。

この如く、 $n$  及び  $n+1$  の両方とも  $N$  に属する。此の如く、 $n$  及び  $n+1$  の両方とも  $N$  に属する。

この如く、 $n$  及び  $n+1$  の両方とも  $N$  に属する。此の如く、 $n$  及び  $n+1$  の両方とも  $N$  に属する。

Definiert ist jedenfalls die Zahl  $1 \in \mathbb{N}$  enthält, u. ~~man~~ wenn  $n$  irgend eine  $\in \mathbb{N}$  enthaltene Zahl ist, so ist auch  $n+1 \in \mathbb{N}$  enthält. Wir nennen diese Zahl  $n$  auch die natürliche Zahl.

Jede nat. Z. ist endlich, d.h. wenn  $n$  eine nat. Z. ist, so ist  $n$  von  $n+1$  verschieden.

~~1. 目的は、... 目的は、... 目的は、...  
 2. 目的は、... 目的は、... 目的は、...  
 3. 目的は、... 目的は、... 目的は、...  
 4. 目的は、... 目的は、... 目的は、...  
 5. 目的は、... 目的は、... 目的は、...  
 6. 目的は、... 目的は、... 目的は、...  
 7. 目的は、... 目的は、... 目的は、...  
 8. 目的は、... 目的は、... 目的は、...  
 9. 目的は、... 目的は、... 目的は、...  
 10. 目的は、... 目的は、... 目的は、...~~

den Zahlen  $n, 1$  bezeichnet wird. 8  
 Sei  $A$  eine Menge von der Zahl  $a$ , u.  $a \in$  nicht  $\in$   
 $A$  enthaltener Element, so bezeichne wir die Zahl  $n$  mit  
 $A+a$  mit  $a+1$ .

Wenn die Zahl  $e$  von  $e+1$  verschieden ist, so lässt  
 $e$  eine endliche Zahl. Eine Zahl  $w$ , die mit  $w+1$   
 identisch ist, heißt unendlich.

Sei die Zahl  $e$  endlich, so ist auch  $e+1$  endlich. 9  
 Wir betrachte Menge  $Z$  von Elementen Zahlen  $e, 2$  (Zahlen) <sup>9</sup>  
 die wir mit folge 7 beide Eigenschaften definieren: a) die Zahl  $1$  ist  $\in Z$   
 enthält. b) Wenn  $z$  ein  $\in Z$  enthaltene Zahl ist, so ist auch  $z+1$   
 $\in Z$  enthält. Wir definieren nun die natürliche Zahlenreihe  
 $\mathbb{N}$  als der Durchschnitt aller Mengen  $Z$  von der Eigenschaft a), b), d.h.  
 wir nehmen  $\in \mathbb{N}$  alle Zahlen  $n$ , nur diese auf, die in jeder sän-  
 dliche Mengen  $Z$  enthalten sind. man nach dieser



