カーネル密度推定による適合度検定

樋　田　　　勉
計量経済学研究室

Testing Goodness of Fit by Kernel Density Estimation

Tsutomu Toida
Econometrics

Abstract

In this paper, we survey some existing tests for goodness of fit, symmetry and independence by kernel density estimation.

1　はじめに

1990年以降、カーネル密度推定量を用いて確率密度関数に関する検定を行うための、さまざまな方法が提案されてきた。カーネル密度推定量にもとづく適合度検定は、1970年代に提案された。しかし、計算機能力の制約などもあり、限られた研究が行われたにとどまった。近年、計算機の処理速度の向上により、カーネル密度推定量は一般的な計算機環境でも実行可能となった。そして、現在、カーネル密度推定量を用いた適合度検定や対称性の検定など、さまざまな統計量が提案され、計量経済学における応用例も見られるようになっている。本稿は、これらの検定統計量についてサーベイし、それぞれの統計量の特性などについて議論する。

統計学や計量経済学において、与えられた観測値が、どのような分布にしたがっているのかということは重要である。そして、確率分布に関する統計的検定は、統計学の中心的問題のひとつであり、データや目的に応じていくつかの種類が考えられる。

はじめに、F, G を同一の確率空間上で定義される独立な確率分布とし、それぞれの確率密度関数 f, g が、ルベーグ測度について絶対連続であるとする。また $X_1, X_2, \ldots, X_n$、$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$を、そ

れぞれ独立に f, g に従う p 次元確率変数であるとする[1]。このとき、確率分布に関する検定は以下のようなる。

$$H_0 : F(x) = G(x), \text{ a.e. } x \in R \tag{1.1}$$

$$H_1 : F(x) \neq G(x), \text{ on a set of positive measure} \tag{1.2}$$

または、

$$H_0 : f(x) = g(x), \text{ a.e. } x \in R \tag{1.3}$$

$$H_1 : f(x) \neq g(x), \text{ on a set of positive measure} \tag{1.4}$$

である。

1標本の場合、X_i, $i=1, \ldots, n$ の確率分布が、特定のパラメトリック分布 F_0 に等しい、という仮説を考えることができる。この場合(1.1)、(1.2)では $G(x)=F_0(x, \theta)$、(1.3)、(1.4)では、$g(x)=f_0(x, \theta)$ となる。ここで、θ は、既知あるいは未知のパラメータベクトルである。たとえば、f_0 が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ であるという仮説を考えると、$\theta=(\mu, \sigma^2)$ である。ここで、μ, σ^2 は、それぞれ、平均と分散である。また、X_i, $i=1, \ldots, n$ の密度関数が、0について対称であるという仮説も重要である。このとき(1.1)、(1.2)では、$G(x)=1-F(-x)$、(1.3)、(1.4)では、$g(x)=f(-x)$ とすればよい。平均やメディアンなどについて対称とするならば、$H_0: f(\eta+x)=f(\eta-x)$ となる。ここで、η は平均やメディアンなどの位置母数（location parameter）である。

2標本の場合には、X_i, $i=1, \ldots, n$ と Y_i, $i=1, \ldots, n$ の確率分布が等しいという仮説に関する検定や、独立性の検定を考えることができる。前者の場合、(1.1)、(1.2)、(1.3)、(1.4)が検定仮説となり、後者の場合は、

$$H_0 : f(z) = g(z), \text{ a.e. } x \in R \tag{1.5}$$

$$H_1 : f(z) \neq g(z), \text{ on a set of positive measure} \tag{1.6}$$

が検定仮説となる。ここで、$z=(x,y)$, $g(z)=f_1(x)f_2(y)$ である。

以上のような検定を考える場合、2つの確率分布の間の距離、あるいは、差といった概念を導入する必要がある。確率分布の間の距離という概念は、Mahalanobis によって提示されたもので、Mahalanobis 以降、Kolmogorov の距離、Hellinger の距離などさまざまな測度が提案されている。一方、情報理論においても、距離の測度に関係が深いエントロピーという概念が、Shannon と Wiener によって提案された。そして、Kullback and Leibler(1951)が、エントロピーを2つの確率分布の差の測度として一般化したものが、カルバック・ライブラー情報量である。

本稿では、カーネル密度推定量によって確率密度関数を推定し、積分二乗誤差やカルバック・ライブラー情報量を用いて、密度関数に関する統計的検定を行う手法についてサーベイする。2章では、分布間の距離の測度について概説する。3章では、検定統計量の漸近分布を求める際の主だった仮定について列挙し、4章以下で参照したい。そして、4章では、1標本の適合度検定について、5章で

[1]ただし、以下では特に明記しない限り $p=1$ とする。

は、2標本の適合度検定について述べる。さらに、6章では、分布の対称性の検定について、7章では独立性の検定についてサーベイする。

2 測度の定義

2.1 積分二乗誤差

2つの確率分布の距離を測るうえで、最も直感的な測度は L_pノルムであろう[2]。一般に利用される測度は、積分二乗誤差（ISE, Integrated Square Error）と呼ばれる測度である。積分二乗誤差は以下のように与えられる。

$$I = \int (f(x) - g(x))^2 dx \tag{2.1}$$

$$= \int [f^2(x) + g^2(x) - 2f(x)g(x)]dx \tag{2.2}$$

$$= \int f(x)dF(x) + \int g(x)dG(x) + 2\int g(x)dF(x) \tag{2.3}$$

積分二乗誤差は非負であり $f=g$ のとき最小値0をとる。積分二乗誤差 I は、

$$I = \left[\int f^2(x)dx + \int g^2(x)dx\right](1-\lambda) \tag{2.4}$$

とかくことができる。ここで、

$$\lambda = \frac{2\int f(x)g(x)dx}{\int f^2(x)dx + \int g^2(x)dx} \tag{2.5}$$

は、Ahmad and Van Bella (1974) によって提案された affinity measure と呼ばれる測度である。λ は非負であり、$f=g$ のとき最大値1をとる。また、積分二乗誤差の期待値を、分布間の距離の測度として利用することもできる。平均積分二乗誤差 MISE は、積分二乗誤差の期待値として、

$$M = E(I) = \int [f(x) - g(x)]^2 f(x)dx \tag{2.6}$$

と与えられる。

2.2 カクバック・ライブラー情報量

カルバック・ライブラー情報量はエントロピー[3]を拡張したものであり、

$$\int \log\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\right\} f(x)dx \tag{2.7}$$

と定義される。したがって、カクバック・ライブラー情報量は、$f(x)$ について $f(x)/g(x)$ に含まれる

---

[2]この場合、L_pノルムは、$\| f-g \|^p = [\int [f(x)-g(x)]^p dx]^{1/p}$ と定義される。$p=1$ の場合が Kolmogorov の距離である。

平均的な情報量の測度であるといえる。

ISE やカルバック・ライブラー情報量などの測度を利用することで、分布の間の距離を測り、検定を行うことができる。次章からは、これらの測度を用いる検定統計量について述べていく。

3　カーネル密度推定量

カーネル密度推定量を利用する適合度検定や対称性の検定の検定統計量の漸近分布を求める場合、カーネル関数やバンド幅、未知の分布等が、いくつかの条件を満たしている必要がある。ここでは、主な条件を列挙し、それぞれの統計量について述べる際に参照することにしたい。

最初に、カーネル密度推定量 $f_n(x)$ は、

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n}\sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) \tag{3.1}$$

と定義される。ここで、h_nはバンド幅と呼ばれる平滑化パラメータ、K はカーネル関数である。

カーネル関数 K についての条件としては以下のものがある。

K 1　K は有界で非負の関数

K 2　$|u| K(u) \to 0$ as $|u| \to \infty$

K 3　0 について対称で $\int K(u)\,du = 1$, $\int uK(u)\,du = 0$, $\int u_i u_j K(u)\,du = 2k\delta_{i,j} < \infty$

次に、バンド幅は h_nは非負の実数列であり、

H 1　$h_n \to 0$ as $n \to \infty$

H 2　$nh_n^p \to \infty$ as $n \to \infty$

H 3　$nh_n^4 \to 0$ as $n \to \infty$

が主な条件である。最後に確率密度関数 f, g についての条件としては、

D 1　f, g はルベーグ測度について絶対連続

D 2　f, g が 2 次までの有界で連続な導関数を持つ

があげられる。これらの条件は、カーネル密度推定においては一般的なものである。以下では、これらの条件のもとでの検定統計量の漸近分布について述べることにする。

---

[3] $f(x)$ の観測値に含まれる情報量の測度を $-\log f(x)$ とし、この期待値 $-\int \log f(x) f(x)\ dx$ をエントロピーとして定義する。この定義は、Shannon によるもので x に含まれる平均的な情報量、不確実性、ボラティリティーの大きさを測るためのものである。確率変数 x が離散型で確率関数 $p(x)$ を持つときは、$-\Sigma \log p(x) p(x)$ となる。離散型確率変数の場合、エントロピーは非負であるが、連続型確率変数の場合には、負の値をとることもある (Ullah (1996) 参照)。

4 1標本適合度検定

n 個の観測値が与えられたとき、観測値が何らかの仮説に基づいた分布に従うと考えられるかどうかを、統計的に検定する必要があることがある。回帰残差の正規性の検定や、有価証券の収益率の分布が、正規分布や何らかのパラメトリックな分布に従うかどうかなどの検定も考えられよう。このような場合に行う検定が適合度検定であり、統計学では重要な問題のひとつである。伝統的な統計学において、さまざまな適合度検定の方法がある。カイ二乗検定や経験分布関数にもとづくいくつかの検定が、その代表的なものである。これらの方法は、ロケーション・スケール族(location scale family)以外の分布族については、検出力が低いことが知られていて、検出力を改善するためいくつかの方法が提案されている。本章では、カーネル密度推定量を用いて適合度検定を行う方法についてサーベイする。このような手法は、Bickel and Rosenblatt (1973)が最初のものであり、Rosenblatt (1975)、Ahmad (1980)、Hall (1984)、Bowman (1992)、Fan and Gencay (1993)、Fan (1994)、Ait-Sahalia (1996a,1996b)、Huang (1997)、Pritsker (1998)、Pagan and Ullah (1999)等により研究されている。またAhmad (1980)、Fan and Gencay (1993)は affinity measure を用いた検定であり、それ以外の検定は基本的に ISE または MISE を用いたものである。

4.1 Bickel and Rosenblatt (1973)、Rosenblatt (1975)の検定

Rosenblatt (1975)は、Bickel and Rosenblatt (1973)の検定を1変量から多変量に拡張し、統計量の性質を改善した新たな検定統計量を提案した。Rosenblatt (1975)と Bickel and Roseblatt (1973)は、本質的に同じものであるので、ここでは、Rosenblatt (1975)の $p=2$ のケースについて述べる。

Rosenblatt (1975)は、f_nと f の距離を測る統計量として加重 ISE

$$\hat{I}_R = \int [f_n(x) - f(x)]^2 w(x)dx \tag{4.1}$$

$$= \frac{1}{h_n}\left[nh_n^2 \int [f_n(x) - f(x)]^2 w(x)dx - \int f(x)w(x)dx \int K^2(u)du\right] \tag{4.2}$$

を用い、この統計量は、条件K1、K3(ただし、$\int u_i u_j K(u)du < \infty$が正値定符号行列)、H1、H2、D1(ただし、$R^2$上で正値、または領域$[0,1]^2$で正値かつ領域外は0)、D2および$K$が$[-1/2, 1/2]^2$の外側で0、$h_n = o(n^{-2/5})$、関数$w(x)$が有界可積分であるという条件のもとで、

$$\hat{I}_R \underset{d}{\rightarrow} N(0, \sigma_R^2) \tag{4.3}$$

であることを示した。ここで、

$$\sigma_R^2 = 2K^4(0) \int a^2(x) f^2(x)dx \tag{4.4}$$

である。また、σ^2は、$f(x)$をカーネル密度推定量で推定することにより一致推定できる。この統計量は、Bickel and Rosenblatt (1973) より、いくつかの制約条件が弱められており、改善されていると考えることができる[5]。Bickel and Rosenblatt (1973) は、この検定統計量の検出力について検討を加えた。そして、この検定は、Pitman の対立仮説についてみると、Kolmogorov-Smirnov 検定や Cramer-von Mises の検定など、経験分布関数を用いる検定よりも検出力が弱いが、カイ二乗検定より検出力が強いことが示された。Rosenblatt (1975) は、Pitman の対立仮説に代わる対立仮説を考案し、この対立仮説のもとでは、Bickel and Rosenblatt (1973) の検定は、経験分布関数を用いる検定よりも検出力が大きくなることを示した。また、独立性の検定についても検討されている。

4.2 Hall (1984) の方法

Hall (1984) は p 次元分布の ISE を、

$$\begin{aligned}\hat{I}_H &= \int [f_n(x) - f(x)]^2 dx \\ &= \int [f_n(x) - Ef_n(x)]^2 dx + 2\int [f_n(x) - Ef_n(x)][Ef_n(x) - f(x)]dx + \int [Ef_n(x) - f(x)]^2 dx\end{aligned} \tag{4.5}$$

と3項に分解し、U 統計量の性質を用い漸近分布を求めた。そして条件K1、K3、H1、H2、D1、D2のもとで、

$$d(n)[\hat{I}_H - c(n)] \underset{d}{\rightarrow} \begin{cases} N(0, 4k^2\sigma_{H1}^2), & nh_n^{p+4} \to \infty \\ N(0, 2\sigma_{H2}^2), & nh^{p+4} \to 0 \\ N(0, 4k^2\sigma_{H1}^2\alpha^{4/(p+4)} + 2\sigma_{H2}^2\alpha^{-p/(p+4)}), & nh^{p+4} \to \alpha, 0 < \alpha < \infty \end{cases} \tag{4.6}$$

となることを示した。ここで、

$$d(n) = \begin{cases} d(n) = n^{1/2}h^{-2}, & nh_n^{p+4} \to \infty \\ d(n) = nh_n^{(1/2)p}, & nh^{p+4} \to 0 \\ d(n) = n^{(p+8)/(2p+8)}, & nh^{p+4} \to \alpha, 0 < \alpha < \infty \end{cases} \tag{4.7}$$

$$c(n) = \int E[f_n(x) - f(x)]^2 dx \tag{4.8}$$

$$\sigma_{H1}^2 = \int [\nabla^2 f(x)]^2 f(x) dx - \left[\int [\nabla^2 f(x)] f(x) dx\right]^2 \tag{4.9}$$

$$\sigma_{H2}^2 = \left[\int f^2(x) dx\right]\left[\int \left[\int K(u)K(u+v)du\right]^2 dv\right] \tag{4.10}$$

[5] Bickel and Rosenblatt (1973) を参照されたい。

である。ここで、α は正の定数、∇^2はラプラシアンである。この結果は、カーネル密度推定量とISEを用いて検定を行う場合、カーネル推定量のバンド幅の大きさが、検定統計量の分布を決定することを意味している。また、統計量の漸近的性質が、カーネル密度推定の一般的な制約のもとで求められていることに意義がある。このため、Hall(1984)以降、ISEを用いた検定統計量の研究では、基本的にこの方法を利用しているものがほとんどである。

4．3　Fan(1994)の検定

Fan(1994)は、Hall(1984)の結果をもとに、適合度検定の検定統計量を提案した。$f_0(x, \beta)$を、母数ベクトルが β の p 変量のパラメトリック族、検定仮説は、

$$H_0 : f(x) = f_0(x, \beta), \text{ a.e. } x \in R^p \tag{4.11}$$

$$H_1 : f(x) \neq f_0(x, \beta), \text{ on a set of positive measure} \tag{4.12}$$

とする。$f_n(x)$と$f_0(x, \beta)$の距離の測度としてISEを用い、

$$\hat{I}_n = \int [f_n(x) - f_0(x, \beta)]^2 dx \tag{4.13}$$

を検定統計量として用いる。β が既知 β_0であるとき、$f_0(x, \beta_0)$は、観測値によらず完全に特定化されるので、Bickel and Rosenblatt(1973)や Hall(1984)の統計量と等しくなる。Fan(1994)の方法は、f_0の分布族を、先験的情報や何らかの理論的仮説から想定し、観測値からパラメータ β を最尤推定 $\hat{\beta}$ することで、分布推定量$\hat{f}(x, \hat{\beta})$を求める。そして、この分布推定量と、ノンパラメトリックな推定量であるカーネル密度推定量との距離を、分布族に対する検定統計量として用いる。Fan(1994)のISE(4.13)は、

$$\hat{I}_n = \int [f_n(x) - f(x, \beta)]^2 dx + \int [\hat{f}(x, \hat{\beta}) - f(x, \beta)]^2 dx - 2\int [f_n(x) - f(x, \beta)][\hat{f}(x, \hat{\beta}) - f(x, \beta)] dx \tag{4.14}$$

$$\equiv I_{F1} + I_{F2} - 2I_{F3} \tag{4.15}$$

と書くことができる。I_{F1}は$f(x)$とカーネル推定量のあいだのISEであり、Hallの(4.5)と等しい。さらに$f(x) = f_0(x)$とすると、Bickel and Rosenblattの検定統計量(4.2)とも等しい[6]。

Hall(1984)の(4.6)の仮定と、いくつかの仮定[7]のもとで、Fan(1994)は$\hat{I}_n$の漸近分布を求めた。そして、検定仮説のもとで、$d(n)\ [\hat{I}_n - c(n)]$ は平滑化の度合いにより、以下の正規分布にそれぞれ分布収束することを示した[8]。

$$d(n)[\hat{I}_n - c(n)] \xrightarrow[d]{} \begin{cases} N(0, 4k_m^2\sigma_{F1}^2 - \sigma_{F3}^2), & nh_n^{p+4} \to \infty \\ N(0, 2\sigma_{F2}^2), & nh^{p+4} \to 0 \\ N(0, (4k^2)^2(\sigma_{F1}^2 - \sigma_{F3}^2)\alpha^{4/(p+4)} + 2\sigma_{F2}^2\alpha^{-p/(p+4)}), & nh^{p+4} \to \alpha, 0 < \alpha < \infty \end{cases} \tag{4.16}$$

ここで、

$$d(n) = \begin{cases} d(n) = n^{1/2}h^{-2}, & nh_n^{p+4} \to \infty \\ d(n) = nh_n^{(1/2)p}, & nh^{p+4} \to 0 \\ d(n) = n^{(p+8)/(2p+8)}, & nh^{p+4} \to \alpha, 0 < \alpha < \infty \end{cases} \tag{4.17}$$

$$\sigma_{F1}^2 = \int [\nabla^2 f(x)]^2 f(x)dx - \left[\int [\nabla^2 f(x)] f(x)dx\right]^2 \tag{4.18}$$

$$\sigma_{F2}^2 = \left[\int f^2(x)dx\right]\left[\int \left[\int K(u)K(u+v)du\right]^2 du\right] \tag{4.19}$$

$$\sigma_{F3}^2 = \left[\int D'f_0(x,\beta_0)\nabla^2 f(x)dx\right]\left[A(\beta_0)^{-1}\int Df_0(x,\beta_0)\nabla^2 f(x)dx\right] \tag{4.20}$$

$$c(n) = (nh_n^p)^{-1}\int K^2(u)du + \int [Ef_n(x) - f(x)]^2 dx \tag{4.21}$$

である。また、σ_{Fi}^2, $i=1, 2, 3$ の推定量は、$f_0(x)$, $f(x)$ を $\hat{f}(x)$, $f_n(x)$ でそれぞれ置き換えたものである。σ_{F1}^2 と σ_{F2}^2 の推定量は一致推定量であり、σ_{F3}^2 の推定量は、検定仮説のもとで一致推定量であることが示されている。

一方、カーネル密度推定量 f_n は、f の不偏推定量ではないため、ISE において f_n と f_0 を比較する際にバイアスが生じる。バイアスを補正するため、f_0 とカーネル関数の畳み込み $K * f_0(x)$ を求め f_n と比較することもできる。この場合 ISE は、

$$\hat{J}_n = \int [f_n(x) - K * \hat{f}(x)]^2 dx \tag{4.22}$$

である。Fan (1994) は、$\hat{J}_n$ は $\hat{I}_n$ と同様の仮定が満たされるとき、検定仮説のもとで、

$$nh^{p/2}\left[\hat{J}_n - \frac{1}{nh^p}\int K^2(u)du\right] \xrightarrow[d]{} N(0, 2\sigma_{F2}^2) \tag{4.23}$$

となることを示した。バイアスを補正した統計量 $\hat{J}_n$ については、バンド幅の選択にかかわらず同じ正規分布に収束する。これは過少平滑の $\hat{I}_n$ の分布と等しい。Fan (1994) は、提案した検定統計量について、Pitman の対立仮説と Rosenblatt (1975) の対立仮説に対する検出力を求めている。また、モンテカルロ・シミュレーションを行い、$\hat{J}_n$ にもとづく検定が一般に最も良い性質を持つことを示している。

---

[6]ただし Bickel and Rosenblatt (1973) はバンド幅が過少平滑の場合である。

[7]$\hat{\beta} \to \beta_*$, a.e. となる $\beta_* \in B \subset R$ が存在し、$\hat{\beta} - \beta_* = \frac{1}{n} A(\beta_*)^{-1} \Sigma_{i=1}^n D \log f_0(X_i, \beta_*) + op(n^{-1/2})$。
ここで、$D \log f_0(X_i, \beta_*)$ は $\log f_0(X_i, \beta)$ の β に関する 1 次の偏導関数を $\beta = \beta_*$ で評価したものであり、$A(\beta_*) = [E\ [\frac{\partial^2 \log f_0(X_i, \beta)}{\partial\beta_i \partial\beta_j} \mid \beta = \beta_*]]$ である。B は R^p 上のコンパクト部分集合である。

[8]Fan (1994) は m 次のカーネル関数の場合について述べているが、ここでは、通常利用される 2 次カーネルの場合について取り上げることにする。

4.4 Huang (1997)の検定

前節までの検定統計量は、f と f_0の距離に注目したものである。しかし、密度関数自体を比較するよりも、密度関数の導関数同士を比較するほうが、両者の差異をより強く浮かび上がらせることがある。密度関数に局所的なモードが存在する場合や、分布自体が多峰型である場合などである。Huang (1997)は導関数$f'(x)$, $f'_0(x)$の特性に注目し、導関数同士のISE

$$I_h = \int [f'(x) - f'_0(x)]^2 dx \tag{4.24}$$

を検定統計量として用いる方法を提案した。検定仮説を

$$H_0 : F = F_0, \text{ a.e. } x \in R \tag{4.25}$$

$$H_1 : F \neq F_0, \text{ on a set of positive measure} \tag{4.26}$$

とする。ここで、X_i, $i=1, \ldots, n$ を F_0で確率積分変換し、$F_0(X_i)$, $i=1, \ldots, n$ とする。これは、$(0,1)$の確率変数であるから、$F_0(X_i)$, $i=1, \ldots, n$ が、$(0,1)$上の一様分布であるかどうかを検定することになる。したがって、(4.24)は

$$\int_0^1 [f'(x)]^2 dx \tag{4.27}$$

となる。$(0,1)$の区間でカーネル推定を考える場合、カーネル密度推定量の境界効果[9]が問題になる。Huang (1997)はHall and Marron (1987, 1991)、Schuster (1985)の方法を取り入れることにより、境界問題を処理できる以下の統計量を提案した。

$$\begin{aligned}\hat{I}_h =& n^{-1}(n-1)^{-1}h_n^{-4}\sum_{i\neq j}\int_0^1 \left[K'\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right) + K'\left(\frac{-x-X_i}{h_n}\right) + K'\left(\frac{-x+2-X_i}{h_n}\right)\right] \\ &\times \left[K'\left(\frac{x-X_j}{h_n}\right) + K'\left(\frac{-x-X_j}{h_n}\right) + K'\left(\frac{-x+2-X_j}{h_n}\right)\right] dx\end{aligned} \tag{4.28}$$

Huang (1997)は、条件K1、K3、H1、D2およびK、K'が有界、K は$[-1,1]$を台とし$K(-1)=K(1)=0$である関数、f は$(0,1)$上の関数、$n^2 h_n^5 \to \infty$ *as* $n \to \infty$という条件と検定仮説のもとで、

$$\hat{I}_h \underset{d}{\to} N(0, n^{-2}h^{-5}2b + o(n^{-2}h^{-5})) \tag{4.29}$$

となることを示した。ここで、

$$b = \int [(K' * K')(u)]^2 du \tag{4.30}$$

である[10]。また、Huang (1997)は、検出力関数を導出するとともに、モンテカルロ・シミュレーション

[9] Wand and Jones (1996)、Pagan and Ullah (1999)などを参照されたい。

を行い、検出力について詳細に検討した。その結果、特に、多峰分布について、Kolgomorov-Smirnov検定よりも検出力が大きくなることを示している。

この他に、カーネル密度推定量を用いた適合度検定の方法としては、Ahmad(1980)やFan and Gencay(1993)の affinity measure を用いたものもある。これらの方法は、6章で述べることにする。affinity measure をもちいた対称性の検定では、基本的には $f_0(x)$ と $f(-x)$ と置き換えればよい。MISE を用いた検定としては、Ait-Sahalia(1996 b)の金融経済における研究などがある。

5 2標本適合度検定

観測値の集合が2組与えられたとき、それらの確率分布が等しいといえるかどうか検定したい場合がある。たとえば、同一時点での異なる地域の所得分布や、同じ地域での異なる2時点における所得分布の比較などが考えられる。カーネル密度推定を利用して検定を行う方法はいくつかあるが、Fan and Gencay(1993)、Anderson, Hall, and Titterington(1994)、Li(1996)の方法が主なものである。本章では、このような場合の検定統計量についてサーベイする。

2標本の適合度検定を考える場合、検定仮説は(1.3)、(1.4)である。したがって、f, g の距離を ISE で測ると、(2.1)となる。

5.1 Anderson, Hall, and Titterington(1994)の検定

Anderson, Hall, and Titterington (1994)は、密度関数 f, g とカーネル関数との畳み込みを考え、

$$I_T = \int (K * f - K * g)^2 \tag{5.1}$$

を分布の距離の測度とした。Anderson, Hall, and Titterington (1994)は、$n^{-1/2}$の距離の分布を判別するためには、バンド幅を固定する必要があることを示し、$X_i,\ i=1,\ldots,n_x$、$Y_i,\ i=1,\ldots,n_y$ ともにバンド幅を1とした。このとき、I_T の推定量は、(5.1)にそれぞれ不偏推定量を代入し、

$$\hat{I}_T = \int \left[\frac{1}{n_x} \sum_{i=1}^{n_x} K(x - X_i) - \frac{1}{n_y} \sum_{i=1}^{n_y} K(x - Y_i) \right] \tag{5.2}$$

となる。I_T は U 統計量であるがバンド幅を固定しているため、漸近的に正規分布に従わず、f, g に依存する未知の分布に従う。そして、漸近分布を解析的に導出するのが困難であるため、ブートストラップ法によって検定の棄却域を求めている。Anderson, Hall, and Titterington (1994)は、統計量

$$n \left[\hat{I}_T - (n_x^{-1} + n_y^{-1}) \left(\int K^2 - \hat{J}_0 \right) \right] \tag{5.3}$$

の分布をブートストラップ法で求め検定を行う方法を提案し、いくつかの一般的なケースについて経

[10]Huang(1997)定理1参照

験的に検出力を求めている。ここで、$\hat{J}_0=(n(n-1))^{-1}\Sigma_{i\neq j}L(\frac{Z_i-Z_j}{l})$で、$L, l$ はそれぞれカーネル関数とバンド幅、Z_iは X_i, Y_iをプールしたものである。

5.2 Li(1996)の検定

(2.3)をカーネル密度推定量で推定すれば、

$$I_L=\int[f_n(x)dF_n(x)+g_n(x)dG_n(x)-2g_n(x)dG_n(x)]dx \tag{5.4}$$

$$=\frac{1}{n^2h^p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[K\left(\frac{X_i-X_j}{h_n}\right)+K\left(\frac{Y_i-Y_j}{h_n}\right)-2K\left(\frac{X_i-Y_j}{h_n}\right)\right] \tag{5.5}$$

$$=\frac{1}{nh_n^p}\sum_{i=1}^{n}\left[2K(0)-2K\left(\frac{X_i-Y_j}{h_n}\right)\right] \tag{5.6}$$

$$+\frac{1}{n^2h_n^p}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i,j=1}\left[K\left(\frac{X_i-X_j}{h_n}\right)+K\left(\frac{Y_i-Y_j}{h_n}\right)+K\left(\frac{X_i-Y_j}{h_n}\right)+K\left(\frac{Y_i-X_j}{h_n}\right)\right]$$

$$\equiv I_{L1}+I_{L2} \tag{5.7}$$

とできる。ここで、$F_n(x)\,G_n(x)$は経験分布関数である。Li(1996)は、Hall(1984)のU統計量に関する定理を適用すると、条件K1、K3、H1、H2、D1と検定仮説のもとで、

$$nh_n^{p/2}(I_{L2})\underset{d}{\rightarrow}N(0,\sigma_L^2) \tag{5.8}$$

となることを示した。$\hat{I}_{L2}$は、$i=j$ の中心項(center term)をはずすことによりバイアスを取り除いている。ここで、

$$\sigma_L^2=2\left[\int[f(x)+g(x)]^2dx\right]\left[\int K^2(u)du\right] \tag{5.9}$$

である。σ_L^2は、

$$\hat{\sigma}_L^2=\frac{2}{n^2h_n^p}\sum_i\sum_j\left[K\left(\frac{X_i-X_j}{h_n}\right)+K\left(\frac{Y_i-Y_j}{h_n}\right)+2K\left(\frac{X_i-Y_j}{h_n}\right)\right]\left[\int K^2(u)du\right] \tag{5.10}$$

によって、一致推定できる。

Li(1996)は、2組の標本数が異なる場合についても同様の検討を行った[11]。また、モンテカルロ・シミュレーションによって、一般的ないくつかのケースについてFan and Gencay(1993)やAnderson, Hall, and Titterington(1994)の統計量よりも検出力が高いことを示している。

---

[11]Li(1996)の2章を参照されたい。

6 対称性の検定

観測値や回帰残差等の分布が、対称であるかどうかは計量分析上重要である。回帰分析では、誤差項の分布が既知であるとき、最尤推定量が、パラメータベクトルの有効推定量である。特に、誤差項の分布が正規分布であるとき、最尤推定量は最小二乗推定量と一致する。誤差項の分布が未知の場合、最小二乗推定量は、一致推定量で漸近的に正規分布に従うが、最尤推定量を求めることはできない。Bickel(1982)は誤差項の条件付分布が0について対称ならば、回帰係数がadaptiveに推定でき、分布が既知の場合の最尤推定量の効率が達成可能であることを示した。またNewey(1988)は回帰係数のadaptive推定量を一般化モーメント法を用いて構成できることを示した[12]。したがって、特に回帰分析において、誤差項の対称性に関する一致検定は、adaptive推定の適応可能性という点からも重要な問題となる。

カーネル密度推定量を用いた分布の対称性に関する検定統計量としては、Ahmad(1980)、Fan and Gencay(1993)、Fan and Gencay(1995)のaffinity measureによるものと、Ahmad and Li(1997b)のISEによるものとがある。とくに、Fan and Gencay(1995)とAhmad and Li(1997b)は回帰残差の検定に主眼を置いている点で注目すべきである。以下では、これらの検定について順に述べる。

6.1 Ahmad(1980)の検定

Ahmad(1980)は、Ahmad and Van Bella(1974)が離散型確率分布の距離を測るための測度として提案したaffinity measure(2.5)を用い、適合度検定を行うための統計量を提案した。(2.5)において$g(x)=f(-x)$とすると対称性の検定を行うことができる。このとき、$\int g^2(x)\,dx=\int f^2(-x)\,dx=\int f^2(x)\,dx$、$\delta=\int f(x)g(x)\,dx=\int f(x)f(-x)\,dx$であるから、

$$\lambda = \delta / \int f^2(x)dx \tag{6.1}$$

となる。このとき、検定仮説は、

$$H_0 : \lambda = 1 \tag{6.2}$$

$$H_1 : \lambda < 1 \tag{6.3}$$

となる。

Ahmad(1980)は、(6.1)をカーネル密度推定量を用いて推定する方法を提案した。$\hat{\lambda}$は、

$$\hat{\lambda} = \hat{\delta} / \int f_n^2(x)dx \tag{6.4}$$

---

[12] Fan and Gencay(1995)参照

$$= \frac{1}{n^2 h_n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K\left[\frac{X_i - X_j}{h_n}\right] / \int f_n^2(x)dx \tag{6.5}$$

によって求められる。

Ahamd(1980)は、対称性の検定については、条件K1、K2、K3、H1、H2、H3、D1、D2および$\int f^2 g < \infty$, $\int fg^2 < \infty$、$\int f^3 g < \infty$, $\int fg^3 < \infty$とバンド幅が任意の定数γについて$\Sigma_{n=1}^{\infty} \exp(-\gamma n h_n^2) < \infty$であるという条件を満たすならば[13]、このとき、

$$n^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda) \underset{d}{\rightarrow} N(0, \sigma_A^2) \tag{6.6}$$

となることを示した。ここで、

$$\sigma_A^2 = \frac{\int f(x)[f(-x) - \delta]^2 dx}{[\int f^2(x)dx]^2} \tag{6.7}$$

である。また、σ_A^2はカーネル密度推定量を用いて一致推定することができる。

6.2 Fan and Gencay(1993,1995)の検定

Fan and Gencay(1993, 1995)は、Ahmad(1980)と同様、Ahmad and Van Bella(1974)のaffinity measureを用いた対称性の検定を提案した。Fan and Gencay(1993)は、Ahmad(1980)の検定統計量の漸近分布が、H_0のもとで$\sqrt{n}(\hat{\lambda} - 1) = Op(1)$と退化することを示し、推定量にウェイトを取り入れることによりこの点を改善できることを証明した。

Fan and Gencay(1993)の検定統計量は、

$$\hat{\lambda}_\gamma = \hat{\delta}_\gamma / \int f_n^2(x)dx \tag{6.8}$$

である。ここで、

$$\hat{\delta}_\gamma = n_\gamma^{-1} \sum_{i=1}^{n} C_i(\gamma) f_n(X_i) \tag{6.9}$$

$$C_i(\gamma) = \begin{cases} 1+\gamma, \text{for i odd} \\ 1-\gamma, \text{for i even} \end{cases}, \quad n_\gamma = \begin{cases} n, & \text{for n even} \\ n+\gamma, & \text{for n odd} \end{cases} \tag{6.10}$$

かつ、$0 < \gamma < 1$である。

Fan and Gencay(1993)は、$\hat{\lambda}_\gamma$を2次の加重V統計量として表現できることを用い、条件K1、K2、K3、H1、H2、H3、D1、$\int f^4 < \infty$, $\int f^2 g^2 < \infty$, $\int fg^4 < \infty$と検定仮説のもとで、

$$\sqrt{n}(\hat{\lambda}_\gamma - 1) \underset{d}{\rightarrow} N(0, \sigma_{FG}^2) \tag{6.11}$$

[13]ただし、条件については$g(x) = f(-x)$と置き換える必要がある。

となることを示した。ここで、

$$\sigma_{FG}^2=\frac{\gamma^2\int f(x)[f(-x)-\delta]^2dx}{\left[\int f^2(x)dx\right]^2} \tag{6.12}$$

である。σ_{FG}^2は、

$$\hat{\sigma}_{FG}^2=\frac{\gamma^2\sum_{i=1}^n[\hat{f}(X_i)-\hat{\delta}_\gamma]^2}{n\left[\int \hat{f}^2(x)dx\right]^2} \tag{6.13}$$

によって一致推定できることも示されている。

一方、$\gamma=0$ とすると、$\hat{\lambda}_\gamma$は Ahmad(1980)の方法と等しくなる。しかし、すでに述べたように、H_0 のもとで$\sqrt{n}$ $(\hat{\lambda}-1)$が退化することが、Fan and Gencay(1993)により示されている。Fan and Gencay(1995)では、任意の定数 γ の選択についてシミュレーションを行い、標本数が50から100程度の場合には、$0.55<\gamma<0.70$が経験的に良い検定のサイズを与えることを示している。バンド幅の選択については、Fan and Gencay(1995)では $h_n=\nu\hat{s}n^{-1/3}$として計算を行っている。ここで、ν は定数、$\hat{s}$ は標本標準偏差である。このバンド幅は条件H 2、H 3を満たすように決められたものであり、カーネル密度推定量のバンド幅選択問題における最適なバンド幅とは異なる。特に、ISE について最適なバンド幅と比較すると、平滑化の程度が過小になっていることに注意が必要である。

6.3 Ahmad and Li(1996 b)の検定

Ahmad and Li(1996 b)は$\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)-f(-x)]^2dx$ を用いた対称性の検定を提案した。分布の距離の測度として、

$$I_{AL}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)-f(-x)]^2dx \tag{6.14}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}[f(x)-f(-x)]dF(x) \tag{6.15}$$

を定義する。

I_{AL}はカーネル密度推定量を用いて以下のように推定できる。

$$\hat{I}_{AL}=\int_{-\infty}^{\infty}[f_n(x)-f_n(-x)]dF_n(x) \tag{6.16}$$

$$=\frac{1}{n^2h_n}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left[K\left(\frac{X_i-X_j}{h}\right)-K\left(\frac{X_i+X_j}{h}\right)\right] \tag{6.17}$$

また $\hat{I}_{AL}$は以下のように書くことができる。

$$\hat{I}_{AL}=\frac{1}{n^2h}\sum_{i=1}^n\left[K(0)-K\left(\frac{2X_i}{h}\right)\right]+\frac{1}{n^2h}\sum\sum_{i\neq j}\left[K\left(\frac{X_i-X_j}{h}\right)-K\left(\frac{X_i+X_j}{h}\right)\right] \tag{6.18}$$

Ahmad and Li(1996 b)は、条件K 1、K 3、H 1、H 2、D 1のもとで、Hall(1984)のU統計量に関する結果を利用し、H_0のもとでの$\hat{I}_{AL}$の漸近分布を求めた。その結果、上記の条件とH_0のもとで、

$$nh^{1/2}[\hat{I}_{AL}-C(n)]/(2\hat{\sigma}_{AL}) \underset{d}{\rightarrow} N(0,1) \tag{6.19}$$

となること、および、$nh^{1/2}(\hat{I}_n-C(n))/(2\ \hat{\sigma}_{AL})$にもとづく検定が一致であることを示した。ここで$C(n)=(nh)^{-1}K(0)$、$\hat{\sigma}^2_{AL}=[\int K^2(u)\ du]\int f_n(x)\,dF_n(x)$である[14]。また、Ahamd and Li(1996 b)は、2変量データの対称性の検定についても論じている。

以上の検定統計量が、対称性の検定統計量として主なものである。また Fan and Ullah(1999)は、特に経時データに対して適合度検定、対称性の検定、2標本適合度検定をおこなうための検定統計量を提案し、それぞれについて中心項を取り除いた（center free）統計量の漸近分布を求めている。

7 独立性の検定

与えられた2組の観測値が独立であるかどうか検定したい場合がある。ここでは、$Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$を、独立に同一分布に従う2変数確率ベクトル$Z_i=(X_i,\ \ Y_i)$とし、その結合密度関数を$f(z)=f(x, y)$、周辺密度関数をそれぞれ$f_1(x), f_2(y)$とする。また、分布関数をそれぞれ、$F(x, y), F_1(x), F_2(y)$とする。$X_i,\ Y_i$が互いに独立ならば、$f(x, y)=f_1(x)f_2(y)$である。したがって、独立性の検定のために、結合密度関数と2つの周辺密度関数の積との距離を考えることができる。ISE を用いれば、

$$I_{fg}=\int\int[f(x,y)-f_1(x)f_2(y)]^2dxdy \tag{7.1}$$

が両者の距離の測度となる。この測度を用いた検定としては、Rosenblatt(1975)、Rosenblatt and Wahlen(1992)、Ahmad and Li(1997 a)の研究がある。Rosenblatt(1975)については、適合度検定に関してすでに述べたので、本章では、Rosenblatt(1975)を除く2つの検定について述べる。

7.1 Rosenblatt and Wahlen(1992)の検定

Rosenblatt and Wahlen(1992)は、Hall(1984)のU統計量に関する結果を用い、Rosenblatt(1975)を改善した。仮定K 1、K 3、H 1、H 2、D 2および、2変量カーネル関数が1変量カーネル関数の積の形で表されるとき、

$$h_n^{-1}[nh_n^2\hat{I}_{fg}-c(n)] \underset{d}{\rightarrow} N(0,2\sigma^2_{RW}) \tag{7.2}$$

となることを示した。ここで、

[14] Ahmad and Li(1996 b)定理2．1を参照されたい。

$$c(n)=\left[\int K^2(x)dx\right]^2-h_n\int K^2(x)dx\left[\int[f_1^2(y)+f_2^2(y)]dy\right] \tag{7.3}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{RW}^2=&\int f_1^2(x)dx\int f_2^2(y)dy\\ &\times\int\int\left[\int\int K(u_1)K(u_2)K(u_1+v_1)K(u_2+v_2)du_1du_2\right]^2dv_1dv_2\end{aligned} \tag{7.4}$$

である。

7.2 Ahmad and Li(1997 a)の検定

Ahmad and Li(1997 a)は、X_iを p 次元、Y_iを q 次元に拡張した。そして、ISE(7.1)を以下のように展開し、それぞれの項について推定量と漸近分布を考察した。

$$\begin{aligned}\hat{I}_{fg}=&\int\int\hat{f}_n(x,y)dF_n(x,y)+\int\hat{f}_{1n}(x)dF_{1n}(x)\int\hat{f}_{2n}(y)dF_{2n}(y)\\ &-\int\int f_{1n}(x)f_{2n}(y)dF_n(x,y)\end{aligned} \tag{7.5}$$

Ahmad and Li(1997 a)の検定は、ISE を用いた検定で常に問題とされる中心項を処理することで、小標本におけるバイアスを取り除いた。検定統計量は、以下のようになる。

$$\begin{aligned}\hat{I}_{fg}=&\frac{1}{n^2h_x^ph_y^q}\sum_i\sum_{i\neq j}K_x\left(\frac{X_i-X_j}{h_x}\right)K_y\left(\frac{Y_i-Y_j}{h_y}\right)\\ &+\frac{1}{n^4h_x^ph_y^q}\sum_i\sum_{i\neq j}K_x\left(\frac{X_i-X_j}{h_x}\right)\sum_l\sum_{r\neq l}K_y\left(\frac{Y_l-Y_r}{h_y}\right)\\ &-(2/n^3h_x^ph_y^q)\sum_i\sum_{i\neq j}\sum_{l\neq j}K_x\left(\frac{X_i-X_j}{h_x}\right)K_y\left(\frac{Y_l-Y_r}{h_y}\right)\end{aligned} \tag{7.6}$$

ここで、K_x,h_xは、X_iの平滑化に利用するカーネル関数とバンド幅である。K_y, h_yについても同様である。Ahmad and Li(1997 a)は、条件K 1、K 3、$h_x\to 0$, $h_y\to 0$, $nh_x^p\,h_y^q\to\infty$ *as* $n\to\infty$、f, f_1, f_2 はそれぞれ B, B_1, B_2上で有界かつ連続、および、有限の期待値を持つ関数 $g_1(x)$, $g_2(x)$について、$|f_1(x+u)-f_1(x)|<g_1(x)|u|$ $\forall x,\ x+u\in B_1\subset R^p$, $|f_2(y+u)-f_2(y)|\leqq g_2(y)|u|$ $\forall y,\ y+u\subset B_2\in R^p$という条件と検定仮説のもとで、

$$nh_x^{p/2}h_y^{q/2}\hat{I}_{fg}\underset{d}{\rightarrow}N(0,\sigma_{fg}^2) \tag{7.7}$$

であることを示した。ここで、B, B_i, $i=1,2$ は z, x, y の台であり、また、

$$\sigma_{fg}^2=2R(f_1)R(f_2)R(K_x)R(K_y) \tag{7.8}$$

である。σ^2_{fg}は

$$\hat{\sigma}^2_{fg} = 2\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{1n}(X_i)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{2n}(Y_i)\right] R(K_x)R(K_y) \tag{7.9}$$

により一致推定でき、$n\, h_x^{p/2}\, h_y^{p/2}\, \hat{I}_{fg}/\hat{\sigma}^2_{fg}$は漸近的に標準正規分布に従う。Ahmad and Li(1997 a)の検定は、Rosenblatt and Wahlen(1992)を一般化したものである。Ahmad and Li(1997 a)は、モンテカルロ・シミュレーションを行うことにより、中心項を取り除いた(7.6)が、中心項をふくむ(7.4)よりもパフォーマンスが良いことを示している。

7.3 Robinson(1991)の検定

Robinson(1991)は、カルバック・ライブラー情報量を用いて、独立性の検定を行う統計量を提案した。Robinson(1991)は、主に経済時系列データの分析に主眼を置いたが、本稿では、i.i.d.の場合についてのみ述べることにする。検定仮説は、(1.5)、(1.6)である。この場合(2.7)は、

$$I_{KL} = \int f(x,y)\log\left\{\frac{f(x,y)}{f_1(x)f_2(y)}\right\}dxdy \tag{7.10}$$

$$= \int f(x,y)\log f(x,y)dxdy - \int f_1(x)\log f_1(x)dx - \int f_2(y)\log f_2(y)dy \tag{7.11}$$

と書ける。I_{KL}の推定量は、

$$\hat{I}_{KL} = \int \hat{f}(x,y)\log\hat{f}(x,y)dxdy - \int \hat{f}_1(x)\log\hat{f}_1(x)dx - \int \hat{f}_2(y)\log\hat{f}_2(y)dy \tag{7.12}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\hat{f}(X_i,Y_i) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\{\hat{f}_1(X_i)\hat{f}_2(Y_i)\} \tag{7.13}$$

となる。(7.13)にウェイトを導入することにより一般化した統計量、

$$\hat{I}_{KLW} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[C_i\log\hat{f}(X_i,Y_i) - (1-C_i)\log\{\hat{f}_1(X_i)\hat{f}_2(Y_i)\}\right] \tag{7.14}$$

を検定統計量とする。ここで、

$$C_i = \begin{cases} 1, & \text{for i odd} \\ 0, & \text{for i even} \end{cases} \tag{7.15}$$

である。H_0のもとで、いくつかの条件[15]が満たされるならば、

$$\hat{I}_{KLW} \underset{d}{\rightarrow} N(0, (Var(\log g) + Var(\log h))/n) \tag{7.16}$$

[15] $\Sigma_{i=1}^{n}\, C_i\, [\hat{f}(X_i,Y_i)/f(X_i,Y_i) - 1] = op(n^{1/2})$, $\Sigma_{i=1}^{n}\, C_i\, [\hat{f}_1(X_i)/f_1(X_i) - 1] = op(n^{1/2})$、$h_y^2 n \rightarrow \infty$, $h_x^4 n \rightarrow 0$、1変量カーネルKと2変量カーネルLはK1、K3を満たし、Lは積型。また、Kは絶対積分可能なフーリエ変換を持つ。f_1, f_2はコンパクト台上で2次までの有界かつ微分可能な導関数を持つ。

となることが示される。ここで、$Var(\log h)$は、

$$\hat{Var}(\log h)_\gamma = \frac{1}{n_\gamma}\sum_{i=1}^{n} C_i(\log \hat{h}_i)^2 - \left[\frac{1}{n_\gamma}\sum_{i=1}^{n} C_i \log \hat{h}_i\right]^2 \tag{7.17}$$

によって一致推定され、$Var(\log g)$も同様である。またn_γは(6.10)である。これらの統計量にカーネル密度推定量f_n, f_{1n}, f_{2n}を代入すれば実際に計算を行うことができる。また、カルバック・ライブラー情報量を用いた検定としては、このほかにUllah and Singh(1989)の研究などがある。

8 終わりに

本稿では、カーネル密度推定量を用いて、適合度検定や独立性の検定など、分布関数に関するいくつかの検定を行う方法についてサーベイした。ISEを用いた検定は、Bickel and Rosenblatt(1973)によって提案され、Hall(1984)が、U統計量として一般的化したことにより、さまざまに応用されるようになった。また、affinity measureを用いた検定は、Ahmad and Van Bella(1975)によって提案され、Fan and Gencay(1993)によって修正され、回帰残差の検定などに適用された。一方、カルバック・ライブラー情報量を用いた検定はRobinson(1991)らによって提案され、時系列分析への応用可能性が示された。

適合度検定、独立性の検定、対称性の検定など、それぞれの検定は、ISE、affinity measure、カルバック・ライブラー情報量など、本稿で取り上げたすべての測度を用いて検定することができる。それぞれの検定統計量は、どれも一致検定を構成することができるが、ISEを用いた検定が漸近的に最も検出力が高くなる。また、affinity measureやカルバック・ライブラー情報量を用いる場合には、帰無仮説のもとでの検定統計量が退化しないように、新たなウェイト関数やパラメータを導入する必要があり、パラメータの決定に恣意性を含む恐れがある。また、バンド幅の決定においては、常に過小平滑にしなくてはならないなどの問題がある。これに対し、ISEを用いた検定では、バンド幅の大きさによって漸近分布が与えられている場合もあり、より望ましい統計量であるといえよう。また、ISEを用いた検定では、p次元のデータが扱えるように拡張されており、適用できる対象が広がっていることも重要である。さらに、分布間の距離の測度としては、ISEが最も直感的な測度でもある。これらのことより、カーネル密度推定量を用いて検定を行う場合には、検定の種類によらず、ISEを用いた検定を行うことが推奨されよう。一方、ISEを用いた検定では、中心項による小標本バイアスが問題となる。したがって、特に標本数が小さい場合には、中心項を除くことによりバイアスを減じた統計量を用いることが望ましいといえよう。

カーネル密度推定量は、計算量が大きいためもあり、1980年代まではあまり研究が進められてこなかった。しかし、現在、計算機環境の改善により、カーネル密度推定は一般的に実行可能な手法となった。現在では、S PlusやXplora、SPSS、SASなどの統計解析ソフトウェアによって実行することも

できる。カーネル密度推定を用いた検定も同様に、広範な可能性を秘めており、今後の理論・応用両面からの研究に期待したい。

Notes

[1] Ahmad, I.A.(1980), "Nonparametric Estimation of an Affinity Measure Between Two Absolutely Continuous Distributions with Hypotheses Testing Applications," *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, 32, Part A, 223-240.

[2] Ahmad, I.A., and Li, Q.(1997a), "Testing Independence by Nonparametric Kernel Method," *Statistics and Probability Letters,* 34, 201-210.

[3] Ahmad, I.A., and Li, Q.(1997b), "Testing Symmetry of an Unknown Density Function by Kernel Method," *Journal of the Nonparametric Statistics*, 7, 279-293.

[4] Ahmad, I.A., and Van Bella, G.(1974), "Measuring Affinity of Distributions," in *Reliability and Biometry, Statistical Analysis of Life Testing,* eds. Proschan and Serfling, SIAM, pp.651-668.

[5] Ait-Sahalia, Y.(1996a), "Testing Continuous Time Models of the Spot Interest Rate," *Review of Financial Studies,* 2, 385-426.

[6] Ait-Sahalia, Y.(1996b), "Nonparametric Pricing of Interest Rate Derivative Securities," *Econometirca,* 64, 527-560.

[7] Anderson, N.H., Hall, P., and Titterington, D.M.(1994), "Two Sample Test Statistics for Measuring Discrepancies Between Two Multivariate Probability Density Functions," *Journal of Multivariate Analysis,* 50, 41-54.

[8] Bickel, P.(1982), "On Adaptive Estimation," *The Annals of Statistics,* 10, 647-671.

[9] Bickel, P.J., and Rosenblatt, M.(1973), "On Some Global Measure of the Deviations of Density Function Estimates," *The Annals of Statistics,* 1, 1071-1095.

[10] Bowman, A.W.(1992), "Density Based Tests for Goodness-of-Fit," *Journal of Statistical Computation and Simulation,* 40, 1-13.

[11] Fan, Y.(1994), "Testing Goodness of Fit of a Parametric Density Function by Kernel Method," *Econometric Theory,* 10, 316-356.

[12] Fan, Y., and Gencay, R.(1993), "Hypotheses Testing Based on Modified Nonparametric Estimation of an Affinity Measure Between Two Distributions," *Journal of Nonparametric Statistics,* 2, 389-403.

[13] Fan, Y., and Gencay, R.(1995), "A Consistent Nonparametric Test of Symmetry in Linear Regression Models," *Journal of the American Statistical Association,* 90, 551-557.

[14] Gonzalez-Rivera, G.(1997), "A Note on Adaptation in GARCH Models," *Econometric Reviews,* 16, 55-68.

[15] Hall, P.(1984), "Central Limit Theorem for Integrated Squared Error of Multivariate Nonparametric Density Estimators," *Journal of Multivariate Analysis,* 14, 1-16.

[16] Hall, P., and Marron, J.S.(1987), "Estimation of Integrated Squared Density Derivatives," *Statistics and Probability Letters,* 6, 109-115.

[17] Hall, P., and Marron, J.S.(1991), "Lower Bounds for Bandwidth Selection in Density Estimation," *Probability Theory and Related Fields,* 90, 149-173.

[18] Huang, L.(1997), "Testing Goodness-of-Fit Based on a Roughness Measure," *Journal of the American Statistical Association,* 92, 1399-1402.

[19] Kullback, S., and Leibler, R.A. (1951), "On Information and Sufficiency," *Annals of Mathematical Statistics,* 22 79-86.

[20] Li, Q. (1996), "Nonparametric Testing of Closeness Between Two Unknown Distribution Functions," *Econometric Reviews,* 3, 261-274.

[21] Newey, W.K. (1988), "Adaptive Estimation of Regression Models via Moment Restrictions," *Journal of Econometrics,* 38, 301-339.

[22] Pagan, A., and Ullah, A. (1999), *Nonparametric Econometrics,* Cambridge University Press.

[23] Pritsker, M.B. (1998), "Nonparametric Density Estimation and Tests of Continuous-Time Interest Rate Models," *The Review of Financial Studies,* 11, 449-487.

[24] Robinson, P.M. (1991), "Consistent Nonparametric Entropy-Based Testing," *Review of Economic Studies,* 58, 437-453.

[25] Rosenblatt, M. (1975), "A Quadratic Measure of Deviation of Two Dimensional Density Estimates and a Test of Independence," *The Annals of Statistics,* 3, 1-14.

[26] Rosenblatt, M., and Wahlen, B.E. (1992), "A Nonparametric Measure of Independence under a Hypotheses of Independence Components," *Statistics and Probability Letters,* 15, 245-252.

[27] Schuster, E.F. (1985), "Incorporating Support Constraints Into Nonparametric Estimators of Densities," *Communications in Statistics, Part A -Theory and Methods,* 14, 1123-1136.

[28] Silverman, B.W. (1986), *Density Estimation for Statistics and Data Analysis,* Chapman and Hall.

[29] Ullah, A. (1996), "Entropy, Divergence and Distance Measures with Econometric Applications," *Journal of Statistical Planning and Inference,* 49, 137-162.

[30] Ullah, A., and Singh, R.S. (1989), "Estimation of a Probability Density Function with Applications to Nonparametric Inference in Econometrics," in *Advances in Econometrics and Modelling , Advanced Studies in Theoretical and Applied Econometrics,* eds. Raj, B., Kluwer.

[31] Wand, M.P., and Jones, M.C. (1996), *Kernel Smoothing,* Chapman and Hall.